мешавад. Ғайр аз он дар болои аломат нишондиҳандаи реша навишта мешавад. Дар мавриди квадратӣ будани реша нишондиҳандаи реша 2 навишта намешавад.

Таърифи 1. Решаи дараҷаи n-ум аз адади a гуфта чунин ададеро меноманд, ки дараҷаи n-уми он ба a баробар аст.

Аз ин таъриф натиҷа мебарорем, ки агар $\sqrt[n]{a}=b$ бошад он гоҳ $b^n=a$ аст, яъне $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ мебошад.

Масалан, $\sqrt[3]{-8}=-2$ чунки $(-2)^3=-8$; $\sqrt[4]{81}=3$ аст, чунки $3^4=81$ мебошад.

Адади –3 ҳам решаи дараҷаи чорум аз адади 81 мебошад, чунки $(-3)^4=3^4=81$, пас $\sqrt[4]{81}=\pm3$ аст.

Мувофиқи таъриф решаи дараҷаи n-ум аз адади a ин ҳалли муодилаи $x^n=a$ мебошад. Миқдори решаҳои ин муодила аз n ва a вобастаанд.

I. Решаи нишондиҳандааш ҷуфт аз адади ду қимати ҳақиқии байни якдигар муқобилро дорад:

$$\sqrt{49}=\pm7,\ \text{чунки}\ (\pm7)^2=49;\quad \sqrt[4]{81}=\pm3,\ \text{чунки}\ (\pm3)^2=81.$$

II.Адади таҳти реша кадом аломате, ки дошта бошад, решаи нишондиҳандааш тоқ низ ҳамон аломатро дорад;

$\sqrt[4]{64}=4$, чунки $4^3=6$; $\sqrt[5]{-32}=-2$, чунки $(-2)^5=-32$.

III. Решаи нишондиҳандааш ҷуфт аз адади манфӣ адади ҳақиқӣ нест;

Масалан, $\sqrt{-9}$ ба +3 ва –3 баробар нест, чунки $(\pm3)^2=9$ аст.

Гуфтаҳои болоро ҷамъбаст намуда ба хулосаи зерин меоем: -Аз адади мусбат як решаи дараҷаи тоқ вуҷуд дорад. Ин реша мусбат аст.

Аз адади мусбат ду решаи дараҷаи ҷуфт вуҷуд дорад. Ин решаҳо аз рӯи бузургии мутлақашон баробар буда, аз рӯи аломаташон муқобиланд.

Решаи дараҷаи ҷуфт аз адади манфӣ вуҷуд надорад.

Якто решаи дараҷаи тоқ аз адади манфӣ мавҷуд аст. Ин реша манфӣ мебошад.

Таърифи 2. Қимати ғайриманфии реша аз адади ғайриманфӣ қимати арифметикии реша ё решаи арифметикӣ номида мешавад.

Решаи арифметикиро дар назар дошта чунин навиштан лозим аст:

$$1)\ \sqrt{16}=4;\ 2)\ \sqrt[4]{81}=3;\ 3)\ \sqrt{(-\alpha)^2}=\begin{cases}\alpha,\ \text{агар}\ \alpha\geq0,\\ \alpha,\ \text{агар}\ \alpha<0,\end{cases}$$

$$4)\ \sqrt{x^2}=\begin{cases}x,\ \text{агар}\ x>0\ \text{бошад},\\ -x,\ \text{агар}\ x<0\ \text{бошад},\\ 0,\text{агар}\ x=0\ \text{бошад},\end{cases}$$

Бо тарзи дигар $\sqrt{x^2}=|x|$ мебошад. Аммо навишти $\sqrt{x^2}=x$ хатост, чунки ҳангоми қиматҳои манфии x мо бо решаҳои манфӣ (ғайриарифметикӣ) дучор мешудем.

Мисолҳо:

1) $\sqrt{(4-a)^2}=|4-a|=\begin{cases}4-a, \text{ агар } a<4,\\ a-4, \text{ агар } a>4,\\ 0, \text{агар } a=4.\end{cases}$ 2) $\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^2}=x^2+x+1$.

Дар ин маврид аломати модулро навиштан шарт нест, чунки барои ҳама қиматҳои x, $x^2+x+1>0$ аст.

?	**1.** Таърифи решаи дараҷаи n-умро диҳед. **2.** Таърифи решаи арифметикиро диҳед. **3.** Чаро решаи дараҷааш ҷуфт аз адади манфӣ вуҷуд надорад? **4.** Чаро решаи дараҷаи тоқ аз адади манфӣ мавҷуд аст?

261. а) Ҳисоб кунед: $\sqrt[4]{-81}$; $\sqrt[100]{-25}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt[3]{-125}$.

б) Дуруст будани баробариҳоро санҷед.

$\sqrt[10]{1}=1$; $\sqrt[9]{-1}=-1$; $\sqrt[3]{125}=5$; $\sqrt[10]{0}=0$.

в) Тарафи квадратро ёбед, ки масоҳаташ ба масоҳати секунҷаи тарафҳояш 20м ва 80м буда, баробар аст.

г) Тегаи кубе, ки ҳаҷмаш ба $125см^3$, $8м^3$, $16дм^3$ баробар аст, ёфта шавад.

д) Аз реша набароварда муайян кунед, ки кадоме аз ададҳо калон аст:

$2\sqrt{3}$ ва $3\sqrt{2}$.

е) Амалҳоро иҷро кунед:

1) $a\sqrt{4a}\cdot\sqrt[4]{4a}\cdot a^2\cdot\sqrt[8]{3a^3}$; 2) $\sqrt[12]{a^5}:\sqrt[4]{a}$.

ж) Кадоме аз ин ададҳо калон аст:

$\dfrac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^8}}$ ё $\dfrac{\sqrt[4]{3^9}}{\sqrt[9]{3^2}}$.

з) Радикалҳо ба намуди содда оварда шавад:

1) $\dfrac{x-y}{y}\sqrt{\dfrac{x^4y^3+x^3y^4}{x^2-2xy+y^2}}$; 2) $\dfrac{a}{a-2b}\sqrt{\dfrac{a^3b-4a^2b^2+4ab}{a}}$;

3) $\sqrt{1\frac{1}{8}}-8\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+\sqrt[3]{108}\cdot\sqrt{24{,}5}$.

Машқҳо барои такрор

262. а) Ҳисоб кунед: 1) $\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{9}{10}+\dfrac{15}{14}\right)$; 2) $\dfrac{5}{7}\cdot\left(\dfrac{14}{15}-\dfrac{7}{45}\right)$.

б) Муодилаҳорро ҳал кунед: 1) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{x^2}\right)^{-3} = \left[\left(x\sqrt{x}\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}$;

2) $\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{6}{5}} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{6}{5}}$; 3) $\left(\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{6}{7}}$.

263. Амалҳоро иҷро кунед: 1) $\left[\left(1-\frac{2}{1-3a}\right)\left(1-\frac{9a-9a^2}{3a+1}\right)\right]:\left[2\left(1-9a^2\right)\right]$;

2) $\frac{2}{a}-\left(\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}-\frac{2}{1-a}\right):\frac{a^3+a^2+2a}{a^2-1}$.

264. Некрӯз ва Далер 203дона чормағзро байни худ бо тарзи зерин тақсим карданд: чанд ҷуфте, ки Некрӯз гирифта бошад, Далер низ ҳамонқадар панҷтоги гирифт. Ба ҳар кадомашон чандтоғӣ чормағз расидааст?

29. Табдилдиҳии айниятии ифодаҳои дараҷа ва решадошта

Табдилдиҳии айнияти ифодаҳои дараҷа ва решадошта ба натиҷаҳои зерин асос карда мешаванд, ки онҳо бевосита аз таърифи решаи дараҷааш $n\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ бармеоянд.

а) Агар нишондиҳандаи реша ва нишондиҳандаи дараҷаи ададитаҳти решаро ба як адад зарб (тақсим) кунем, бузургии реша тағйир намеёбед, яъне $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$ аст.

Масалан:

б) Барои аз ҳосили зарб баровардани реша, аз ҳар зарбшаванда, ки нишондиҳандааш ба нишондиҳандаи реша як хел аст, алоҳида реша бароварда, натиҷаҳои ҳосилшударо бо якдигар зарб кардан лозим аст.

$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$.

Масалан: 1) $\sqrt{900} = \sqrt{9\cdot100} = \sqrt{3^2\cdot10^2} = 3\cdot10 = 30$;

2) $\sqrt{16\cdot121} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{121} = 4\cdot11 = 44$;

3) $\sqrt[3]{-125\cdot27} = \sqrt[3]{-125}\cdot\sqrt[3]{27} = -5\cdot3 = -15$.

в) Барои ба якдигар зарб кардани решаҳои нишондиҳандаашон якхела, ифодаҳои таҳти решаҳоро ба якдигар зарб карда, аз ҳосили зарб реша баровардан лозим аст.

Масалан: 1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50} = \sqrt{100} = 10$; 2) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$.

г) Барои ба якдигар зарб кардани решаҳои нишондиҳандаашон гуногун аввал онҳоро ба нишондиҳандаи умумӣ оварда, баъд онҳоро чун решаҳои нишондиҳандаашон якхела ба якдигар зарб кардан лозим аст.

Масалан, фарз мекунем, ки $\sqrt[n]{a}$ ва $\sqrt[m]{b}$ -ро ба якдигар зарб задан лозим бошад: $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$; $\sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{b^n}$.

Аз ин ҷо, $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m}\cdot\sqrt[mn]{b^n}=\sqrt[nm]{a^m b^n}$ аст.

Масалан: $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{9^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot 9^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot 3^4}=\sqrt[6]{3^7}=3\sqrt[6]{3}$ мебошад.

Ба сифати нишондиҳандаи умумии решаҳои $\sqrt[n]{a}$ ва $\sqrt[m]{b}$ хурдтарин каратнокии умумии ададҳои n ва m -ро интихоб кардан беҳтар аст. Масалан, агар ба якдигар зарб кардани $\sqrt[4]{2}$ ва $\sqrt[6]{32}$ лозим бошад, адади 12-ро, ки хурдтарин каратнокии умумии ададҳои 4 ва 6 аст, чун нишондиҳандаи умумии ин решаҳо қабул ардан қулай мебошад:

$\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^3}$, $\qquad \sqrt[6]{32}=\sqrt[12]{32^2}=\sqrt[12]{2^{10}}$.

Бинобар ин $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{32}=\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{2^{10}}=\sqrt[12]{2^{13}}=2\sqrt[12]{2}$ мебошад.

д) Барои аз каср (ҳосили тақсим) реша баровардан аз сурат ва махраҷ бо ҳамон дараҷа алоҳида реша бароварда, натиҷаи якумро ба дуюм тақсим кардан мумкин аст: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Масалан, 1) $\sqrt{\frac{36}{49}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=\frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{27}}=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}$ аст.

Натиҷа. Айнияти $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ -ро аз рост ба чап хонда, қоидаи зеринн тақсими решаҳои нишондиҳандаҳояш якхеларо ҳосил мекунем:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Барои тақсим кардани решаҳои нишондиҳандаашон якхела ифодаҳои решаро бетағйир гузоштан кифоя аст.

Масалан, $\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{126}{14}}=\sqrt{9}=3$.

Барои ба дараҷа бардоштани реша нишондиҳандаи решаро тағйир надода адади таҳти решаро ба ҳамон дараҷа бардоштан лозим аст:

Масалан, 1) $\left(\sqrt{2}\right)^4=\sqrt{2^4}=\sqrt{16}=4$; 2) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2=\sqrt[3]{9^2}=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}$.

Барои аз дараҷа баровардани реша нишондиҳандаи дараҷаи адади таҳти решаро ба нишондиҳандаи реша (агар бутун тақсим шавад) тақсим кардан лозим аст: $\sqrt[n]{a^m}=a^{m:n}$

Масалан, 1) $\sqrt{x^4}=x^2$; 2) $\sqrt[4]{81a^{12}b^8}=\sqrt[4]{3^4a^{12}b^8}=3a^3b^2$;

3) $\sqrt[3]{5^6}=5^2=25$; 4) $\sqrt[4]{3^{12}}=3^3=27$.

Барои аз реша баровардани реша нишондиҳандаи ин решаҳоро ба якдигар зарб зада ифодаи тахти решагиро бетағир гузоштан кифоя аст.

Яъне $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}\quad (a>0)$.

Масалан, 1) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{4}$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[15]{2}$.

?

1. Қоидаҳои аз дараҷа баровардани реша, ба дараҷа бардоштани реша, аз решабаровардани решаро баён намоед.
2. Решаҳои нишондиҳандаҳояшон гуногунро чи гуна зарб мекунанд?
3. Дар мисол нишон диҳед, ки нишондиҳандаи реша ва нишондиҳандаи адади тахти решаро ба зарбкунандаи умумии онҳо тақсимкардан мумкин аст ё не?

265. Амалҳоро иҷро кунед:

1) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{4\cdot 5}$; 2) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2}$; 3) $4{,}8\sqrt{ab}:12\sqrt{\frac{1}{ab}}$;

4) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$; 5) $\left(a+a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}+1\right)$;

6) $\left(x^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4}\right)$; 7) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2$;

8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)^2$; 9) $\left(2\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$; 10) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2$;

11) $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}-\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2\left(xy^{-1}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-yx^{-1}}{1+yx^{-1}}}$;

12) $\left\{\left[\left(\frac{2\sqrt[4]{xy}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}+1\right]:\frac{4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+2+2\sqrt{xy}}\right\}^{\frac{1}{2}}$; 13) $\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}+1}$.

266. Амалҳоро иҷро кунед: 1) $\left(x\sqrt[6]{a^5x}+2a\sqrt[6]{ax^5}-3ax\right):\left(\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt{ax}\right)$;

2) $\left(2a\sqrt[3]{ax^2}-a\sqrt[6]{ax^5}-ax\right):\left(\sqrt[3]{a^2x}-\sqrt{ax}\right)$.

Машқҳо барои такрор

267. а) Амалҳоро иҷро кунед:

1) $\frac{5}{4-\sqrt{11}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}-\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{\sqrt{7}-5}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$;

3) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{5-1}$; 4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

5) $\frac{1}{a+a\sqrt{b}}-\frac{1}{a-a\sqrt{b}}$; 6) $\frac{1}{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$;

7) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$; 8) $\sqrt[3]{0{,}25}\cdot\sqrt[6]{50}$.

б) Муодилаҳоро ҳал кунед:

1) $\frac{2}{a+2x}-\frac{2}{a-2x}-\frac{4x^2-4a-a^2}{4x^2-a^2}=0$;

2) $(x-7)(x-4)(x+3)(x+1)=96-(x-1)(x-3)(x+4)(x+7)$.

§7. Муодилаҳои иратсионалӣ

30. Дараҷаи нишондиҳандааш иратсионалӣ

Дар §6 мафҳумҳои дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалии дилхоҳро омӯхта будем. Масалан, $a^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{a^5}$; $a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$; $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$ дар ин ҷо $a>0$ ва $a\neq 1$. Ҳоло мавриди аз адади иратсионалӣ иборат будани нишондиҳандаи дараҷаро меомӯзем, ки он ба рамзи a^{α} (α -адади иратсионалӣ, $a>0$; $\alpha\neq 1$) ишорат карда мешавад. Ин масъаларо дар намуди умумӣ дида набаромада, аввал маънои ин рамзро дар мисоли $2^{\sqrt{2}}$ шарҳ медиҳем.

Ба адади иратсионалии $\sqrt{2}$ бо ду пайдарпаииададҳои ратсионалии зерин:

1; 1,4; 1,41; 1,414, ... (1)

ё ки

2; 1,5; 1,42; 1,415, ... (2)

наздик шудан мумкин аст.

Пайдарпаии якум монотонӣ, афзуншаванда буда, аъзоҳои он қиматҳои тақрибии решаи квадратӣ аз ду бо норасоӣ гирифташуда мебошад, ки онҳо бо саҳеҳии афзуншаванда гирифта шудаанд.

Пайдарпаии дуюм монотонӣ камшаванда буда, аъзоҳои он қиматҳои тақрибии решаи квадратӣ аз ду бо барзиёдӣ гирифташуда мебошад, ки дар ин ҷо вобаста ба зиёд шудани рақами тартибии аъзоҳои пайдарпаӣ, аъзоҳои он ҳам саҳеҳ наздик мешаванд.

Ду пайдарпаии навро тартиб медиҳем:

$2^1; 2^{1,4}; 2^{1,41}; 2^{1,414}$ ...... (1^1); $2^2; 2^{1,5}; 2^{1,42}; 2^{1,415}$ ...... (2^1)

Аз ин ду пайдарпай якумаш монотон, афзуншаванда буда, дуюмаш монотон, камшаванда аст.

Бо беҳад афзудани рақами тартибии аъзоҳои пайдарпай, ҳар ду пайдарпай ҳам ба як адад майл мекунанд.

Ин як адади умумиро (мувофиқи таъриф) ба сифати адади $2^{\sqrt{2}}$ қабул мекунанд.

Эзоҳ. Амалҳо бо дарачаҳои нишондиҳандааш иратсионалӣ айнан аз рӯи қоидаҳое, ки барои дарачаҳои нишондиҳандааш ратсионалӣ баён карда будем, ичро карда мешаванд. Масалан $a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$, $a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{\alpha-\beta}$ (α, β ададҳои иратсионалӣ).

268. Ифодаҳои зеринро ба дарача бардоред:

$$1)\ \left(\sqrt[n]{ab}\right)^{2n};\ 2)\ \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2;\ 3)\ \left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)^2;\ 4)\ \left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2.$$

269. Махрачро аз радикал озод намоед:

$$1)\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}};\ 2)\ \frac{10}{3\sqrt{5}};\ 3)\ \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

270. Ифодаҳоро содда кунед:

$$1)\ \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}-\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2\left(xy^{-1}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-yx^{-1}}{1+yx^{-1}}};\ 2)\ \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}+1}.$$

Машқҳо барои такрор

271. Ҳосили зарби ду адад 135 буда, фарқи ин ададҳо 6 аст. Ададҳоро ёбед.

272. Амалҳоро ичро кунед: 1) $4a^{-3}b^2c^{-1}\cdot 0,25a^4b^{-5}c^{-2}$;

$$2)\ \left(4a^{-2}-b^{-4}\right):\left(2a^2-a\right);\quad 3)\ \left(\sqrt{a}+\frac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right):\left(b\sqrt{a}+b\sqrt{ab^2+c}\right).$$

31. Муодилаҳои ирратсионалӣ

Таъриф: Муодилаҳое, ки номаълум дар тахти аломати радикал (реша) аст, муодилаи иратсионалӣ номида мешавад.

Масалан, муодилаҳои зерин муодилаҳои иратсионалианд:

$\sqrt{x}=7$, $\sqrt{x-1}+2x=23$; $\sqrt[3]{2-x}=\sqrt[4]{x+6}+7x$.

Пеш аз он, ки ҳалли муодилаҳои ирратсионалиро дида бароем, ду теоремаро бе исбот дар бораи барробаркуввагии муодилаҳо хотиррасон мекунем:

Ду муодила баробарқувва номида мешавад, агар онҳо решаҳои якхела дошта бошанд.

Теоремаи 1. Агар ба ҳар ду қисми муодила ягон адад, ё ки ягон бисёраъзогиро ҷамъ кунем, он гоҳ муодилаи нави ҳосилшуда ба муодилаи аввала баробарқувва аст.

Теоремаи 2. Агар ҳар ду қисми муодиларо ба ягон адади $a \neq 0$ зарб кунем, он гоҳ муодилаи нави ҳосилшуда ба муодилаи аввала баробарқувва мешавад.

Муодилаи иратсионалиро асосан бо ду усул ҳал мекунанд:

1) Ҳар ду қисми муодиларо ба ҳамон як дараҷа мебардоранд.
2) Усули дохил намудани тағйирёбандаҳои нав.

1. Дар аксар мавридҳо, ҳангоми як ё якчанд маротиба ба дараҷа бардоштани ҳар ду қисми муодилаи иратсионалӣ, онро ба муодилаи алгебравии ин ё он дараҷа овардан мумкин аст.

Азбаски ҳангоми ба дараҷа бардоштани муодила решаҳои бегона пайдо мешаванд, бинобар ин муодилаи алгебравии ҳосилшударо, ки он аз муодилаи иратсионалӣ бар меояд, ҳал намуда, бояд решаҳои ёфташударо бо методи гузориш ба муодилаи додашуда гузошта санҷем ва ҳамонаиро ба сифати ҷавоб қабул намоем, ки он муодиларо қаноат кунонад ва решаҳои бегонаро мепартоем.

Акнун ҳарду усули асосии ҳалли муодилаҳои ирратсионалиро дар мисолҳо дида мебароем.

Мисоли 1. Муодилаи ирратсионалиро ҳал намуда, решаҳои ҳосилшударо месанҷем: $16-\sqrt{\frac{2}{3}x}=12$.

Ҳал. Муодила фақат як радикалро дар бар мегирад, бинобар ин онро дар тарафи чап гузошта, 16-ро ба тарафи рост бо аломати муқобилаш гузаронида, ҳар ду тарафро ба квадрат бардошта ҳосил мекунем:

$$-\sqrt{\frac{2}{3}x}=12-16 \quad \left(-\sqrt{\frac{2}{3}x}\right)^2=(-4)^2; \qquad \frac{2}{3}x=16,\ 2x=48, \quad x=\frac{48}{2}=24.$$

Санҷиш. Дар муодилаи додашуда ба ҷои x решаи ҳосилшуда адади 24-ро гузошта ҳисоб мекунем:

$$16-\sqrt{\frac{2}{3}\cdot 24}=16-\sqrt{16}=16-4=12.$$

Ҷавоб. $x=24$.

Мисоли 2. Муодилаи зеринро ҳал мекунем:

$$\sqrt{25-x^2}=7-x.$$

Ҳал. Айнан ба монанди мисоли 1 ҳал мекунем:

$$\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2=(7-x)^2$$

$$25-x^2=49-14x+x^2, \quad 2x^2-14x+24=0 \text{ ё } x^2-7x+12=0.$$

Муодилаи квадратии ҳосилшударо ҳал намуда меёбем:

$$x_{1,2}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-12}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49-48}{4}}=\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2};\quad x_1=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4,\quad x_2=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=3.$$

Санҷиш. Аввал қимати решаи якум ва баъд қимати решаи дуюмро дар муодилаи додашуда гузошта ҳисоб мекунем:

$$4+\sqrt{25-4^2}=4+\sqrt{25-16}=4+\sqrt{9}=4+3=7,$$

$$3+\sqrt{25-3^2}=3+\sqrt{25-9}=3+\sqrt{16}=3+4=7.$$

Санҷиш нишон медиҳад, ки ҳам решаи якум $x_1=4$ ва ҳам решаи дуюм $x_2=3$ муодилаи додашударо қаноат мекунад.

Ҷавоб: $x_1=4,\ x_2=3$.

Мисоли 3. Муодилаи ирратсионалиро ҳал намуда решаҳои ҳосилшударо месанҷем: $\sqrt{16+\sqrt{x+4}}=5$.

Ҳал. Ҳарду қисми муодиларо (баробариро) ба квадрат бардошта ҳосил мекунем: $\sqrt{16+\sqrt{x+4}}=5^2,\ \ 16+\sqrt{x+4}=25$.

Аъзои дорои решаро дар тарафи чап гузошта, ададИ 16-ро ба тарафи рост бо аломати муқобилаш мегузорем: $\sqrt{x+4}=25-16,\quad \sqrt{x+4}=9$.

Барои тарафи чапи баробарии ҳосилшударо аз решаи квадратӣ озод намудан, ҳарду тарафи онро ба дараҷаи реша, яъне боз маротибаи дуюм ба квадрат мебардорем:

$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2=9^2,\ \left[(x+4)^{\frac{1}{2}}\right]^2=81,\ (x+4)^{\frac{1}{2}\cdot 2}=81,\ \ x+4=81,\ \ x=81-4,\ x=77$$

Санҷиш. Дар муодилаи додашуда ба ҷои x –решаи ёфташуда, адади 77-ро гузошта ҳисоб мекунем:

$$\sqrt{16+\sqrt{77+4}}=\sqrt{16\sqrt{81}}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

Санҷиш нишон дод, ки решаи ёфташуда муодилаи додашударо қаноат мекунад.

Ҷавоб: $x=77$.

Мисоли 4. Муодилаи иратсионалии зеринро ҳал намуда, решаҳои ҳосилшударо месанҷем: $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-11}$.

Ҳал. Ҳарду қисми муодилаи додашударо ба квадрат бардошта, аъзоҳои монандро ислоҳ меекунем:

$$\left(\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{3x-11}\right)^2,\ \ 2x+6-2\sqrt{(2x+6)(x-1)}+x-1=3x-11,$$

$$3x+5-2\sqrt{(2x+6)(x-1)}=3x-11,\quad -2\sqrt{(2x+6)(x-1)}=-16.$$

Ҳарду қисми муодилаи ҳосилшударо ба 2 тақсим мекунем

$\sqrt{(2x+6)(x-1)}=8$.

Боз ҳарду тарафро ба квадрат бардошта, қавсҳои тарафи чапро кушода, ҳосил мекунем:

$$(2x+6)(x-1)=64, \quad 2x^2-2x+6x-6=64, \quad 2x^2+4x-70=0.$$

Ҳарду тарафи муодилаи квадратии ҳосилшударо ба ду тақсим намуда, баъд онро ҳал мекунем:

$x^2+2x-35=0, \qquad x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+35}=-1\pm 36=-1\pm 6$,

$x_1=-1+6=5$ ва $x_2=-1-6=-7$.

Санҷиш. Аввал решаи якум $x_1=5$ ва баъд аз он қимати решаи дуюм $x_2=-7$-ро дар муодилаи додашуда гузошта ҳисоб мекунем:

$\sqrt{2\cdot5+6}-\sqrt{5-1}-\sqrt{3\cdot5-11}=\sqrt{16}-\sqrt{4}-\sqrt{4}=4-2-2=0$,

$\sqrt{2\cdot(-7)+6}-\sqrt{-7-1}-\sqrt{3\cdot(-7)-11}=\sqrt{-8}-\sqrt{-8}\sqrt{-33}\neq 0$.

Ҳамин тариқ, $x_1=5$ решаи муодила буда, онро қаноат мекунонад, аммо $x_2=-7$ муодиларо қаноат намекунонад ва бинобар ин он партофта мешавад.

Ҷавоб: $x=5$.

?
1. Таърифи муодилаи ирратсионалиро диҳед.
2. Ду муодиларо дар кадом ҳолат баробарқувва меноманд?
3. Муодилаи ирратсионалиро асосан бо кадом усулҳо ҳал мекунанд?

273. Муодилаҳои ирратсионалиро ҳал намуда, решаҳои ҳосилшударо санҷед:

а) $x=\sqrt{2-x}$; б) $x-1=\sqrt{x+5}$; в) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10}=3$; г) $x+\sqrt{25-x^2}=7$;

д) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-4}=5$; е) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$;

ж) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}$

з) $3+5\sqrt{x}=13$; ж) $11-3\sqrt{x}=5$; и) $\sqrt{5+\sqrt{3+x}}=3$.

Машқҳо барои такрор

274. Амали зарбро иҷро кунед:

1) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$; 2) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)$; 3) $\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$.

275. Аз ду қатора яке масофаи байни ду истгоҳро да $4\frac{1}{2}$ соат, дигаре дар 5 соат тай мекунад. Якум нисбат ба дуюм дар ҳар соат 3км роҳ зиёд мегардад. Масофаи байни ҳарду истгоҳ ва миқдори километрҳое, ки ҳар як қатора дар 1соат тай мекунад, ҳисоб карда шавад.

276. Муодиларо ҳал кунед: $x+\frac{6x}{x-2a}=\frac{2a}{x-2a}$.

2. Усули дохил намудани тағирёбандаҳои нав

Муодилаҳои зеринро бо усули дохил намудани тағирёбандаҳои нав, яъне бо усули гузориш ҳал намудан қулай аст.

Мисоли 1. $2\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=3$.

Ҳал. $\sqrt[4]{x-1}=u$, он гоҳ $x-1=u^4$ ва муодилаи додашуда намуди зайлро мегирад.

$2\sqrt{u^4}+u-3=0,\ 2u^2+u-3=0,\qquad D=1^2-4\cdot2\cdot(-3)=25,$

$u_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\cdot2}=\frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1$ ва $u_2=-\frac{3}{2}$.

Акнун қиматҳои u_1 ва u_2-ро дар $x-1=u^4$ гузошта мувофиқан решаҳои x_1 ва x_2 -ро меёбем:

$x_1-1=1,\ x_2=2;\ x_2-1=\left(-\frac{3}{2}\right)^4$. Аз ин ҷо $x_2-1=\frac{81}{16}$ ва $x_2=\frac{97}{16}$.

Санҷиш: Қимати решаи якум $x_1=2$-ро дар муодилаи додашуда гузошта ҳисоб мекунем: $2\sqrt{2-1}+\sqrt[4]{2-1}=2+1=3$.

Аз ин ҷо мебарояд, ки решаи ёфташудаи $x_1=2$ муодиларо қаноат мекунонад. Акнун $x_2=\frac{97}{16}$-ро месанҷем.

$$2\sqrt{\frac{97}{16}-1}+\sqrt[4]{\frac{97}{16}-1}=2\sqrt{\frac{97-16}{16}}+\sqrt[4]{\frac{97-16}{16}}=2\sqrt{\frac{84}{16}}+\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=$$

$$=2\cdot\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=\frac{12}{2}=6\neq3$$

Ҳамин тариқ x_2 муодила додашударо қаноат намекунонад.

Ҷавоб: $x=2$.

Мисоли 2. $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6$.

Ҳал. $\sqrt[6]{x+1}=u$ аз ин ҷо $x+1=u^6$ ва муодилаи додашуда намуди зеринро мегирад:

$2u^2-u-6=0$.

Ин муодилаи квадратиро нисбат ба u ҳал мекунем.

$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-6)=1+48=49$,

$u_1 = \frac{1+\sqrt{49}}{4} = \frac{8}{4} = 2$ ва $u_2 = \frac{1-7}{2} = -3$.

Қимати $u_1 = 2$, $u_2 = -3$-ро дар гузориш $x+1 = u^6$ гузошта мувофиқан решаҳои x_1 ва x_2-ро меёбем.

$x+1 = 2^6$, аз ин ҷо, $x_1 = 64-1 = 63$; $x_2+1 = (-3)^6$,

аз ин ҷо $x_2 = -728$.

Санҷиш. Аввал қимати решаи якум $x_1 = 63$-ро дар муодилаи додашуда гузошта месанҷем, ки оё он муодиларо қаноат мекунонад ё не?

$2\sqrt[3]{63+1} - \sqrt[6]{63+1} = 2\sqrt[3]{64} - \sqrt[6]{64} = 2\cdot 4 - 2 = 6$.

Санҷиш нишон медиҳад, ки решаи якум муодиларо қаноат мекунонад.

Решаи дуюмро месанҷем:

$2\sqrt[3]{-728+1} - \sqrt[6]{-728+1} = 2\sqrt[3]{-727} - \sqrt[6]{-727} \neq 6$.

Ҳамин тариқ муодилаи додашуда фақат як реша дорад.

Ҷавоб: x=63.

Мисоли 3. $\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt{3x+1} = 0$.

Ҳал. Аз гузориши $3x+1 = u^6$ истифода бурда, муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$\sqrt[3]{u^6} - \sqrt{u^6} = 0$,

аз ин ҷо $u^2 - u^3 = 0$ ва $u^2(u-1) = 0; u_{1,2} = 0; u_3 = 1$.

Акнун дар гузориши $3x+1 = u^6$ қимати $u = 0$-ро гузошта, ҳосил мекунем:

$3x+1 = 0$ аз ин ҷо $3x = -1$ ва $x = -\frac{1}{3}$

Ҳангоми $u = 1$ будан $3x+1 = 1$ ва $x = 0$ мешавад.

Санҷиш. Дар муодилаи додашуда ба ҷои x қимати решаи якум $x = -\frac{1}{3}$-ро гузошта меёбем:

$$\sqrt[3]{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1} - \sqrt{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1} = \sqrt[3]{-1+1} - \sqrt{-1+1} = 0.$$

Решаи якум муодилаи додашударо қаноат мекунонад. Айнан бо ҳамин тарз решаи дуюм $x = 0$-ро месанҷем:

$\sqrt[3]{3\cdot 0+1} - \sqrt{3\cdot 0+1} = \sqrt[3]{1} - \sqrt{1} = 0$.

Ҳамин тариқ, фақат решаи якум муодилаи додашударо қаноат мекунонад.

Ҷавоб: $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$.

1. Намудҳои муодилаи ирратсионалиро нависед
2. Зинаҳои тарзи гузоришро баён кунед.
3. Кадом тарзҳои ҳалли муодилаҳои ирратсионалиро медонед?

Муодилаҳои ирратсионалии зеринро ба усули дохил намудани тағйирёбандаҳои нав ҳал намоед.

277. а) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$; б) $\sqrt[4]{x-5}=30-\sqrt{x-1}$;

в) $\sqrt[3]{x-2}+2=x$; г) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-2=0$.

Машқҳо барои такрор

278. Сумаи ду касри байни якдигар чаппа ба $2\frac{1}{6}$ ва фарқашон ба $\frac{5}{6}$ баробар аст. Ин касрҳоро ёбед.

279. Амалҳоро иҷро кунед:

1) $\sqrt[4]{25^6}$; 2) $\sqrt[3]{(-2)^{16}}$; 3) $a^{\frac{2}{3}}:\sqrt[6]{a}$; 4) $\left(a^{0,1}\right)^5$.

280. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

1) $\begin{cases}10x+3y=13;\\ xy=-1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x+2y=22;\\ xy=-4;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x+2y=12\sqrt{2};\\ xy=12;\end{cases}$

32. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

Пеш аз ҳалли системаи муодилаҳои ирратсионалӣ баъзе муодилаҳоро хотиррасон менамоем.

1) Агар масъалаи ёфтани маҷмӯи ҳалли ду ва ё зиёда аз ду муодила гузошта шуда бошад, он гоҳ мегӯянд, ки системаи муодилаҳоро ҳал кардан лозим аст.
2) Шумораи тағйирёбандаҳо метавонад ба шумораи муодилаҳо баробар бошад ва метавонад баробар набошад.
3) Системаро ҳамҷоя меноманд, агар он ақалан як ҳал дошта бошад ва ғайри ҳамҷоя меноманд, агар ягон ҳал надошта бошад.
4) Системаро ҳал кардан, ин ёфтани ҳамаи ҳалҳои он мебошад.
5) Систмаро муайян меноманд, агар он ҳалҳои охирнок дошта бошад, ва номуайян мегуянд, агар маҷмуи ҳалҳои беохир дошта бошанд.
6) Ду система баробарқувва номида мешавад, агар онҳо маҷмӯи ҳалҳои якхела дошта бошанд.

Мисоли 1. Системаи муодилаҳои ирратсионалии зеринро ҳал менамоем:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ x+y-\sqrt{xy}=3.\end{cases}$$

Ҳал. Муодилаи дуюми системаро табдил медиҳем:

$x+y-\sqrt{xy}=3, \quad x+y+2\sqrt{xy}-3\sqrt{xy}=3, \quad \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-3\sqrt{xy}=3$ Аммо $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$. Бинобар ин, $9-3\sqrt{xy}=3$ ё $\sqrt{xy}=2$ мебошад.

Ҳамин тавр системаи ба системаи додашуда баробаркувваро ҳосил мекунем:
$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ \sqrt{xy}=2.\end{cases}$$

Барои ҳалли ин система аз теоремаи Виета истифода мебарем. Муодилаи квадратие тартиб медиҳем, ки решаҳои он ба $\sqrt{x}$ ва $\sqrt{y}$ баробар бошад:

$m^2-3m+2=0$, $m_1=2$ ва $m_2=1$ ё $\sqrt{x}=2$, $x=4$, $y_1=1$; $\sqrt{x}=1$, $x=1$, $y=4$.

Ҷавоб: (4;1), (1;4).

Мисоли 2. Системаи муодилаҳои ирратсионалии зеринро ҳал менамоем:
$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+3\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=4,\\ x^2+4x+y^2-3y=0.\end{cases}$$

Гузориши $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=t$, $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{1}{t}$-ро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$t+\frac{3}{t}=4, \quad t^2-4t+3=0, \quad t_1=1, \quad t_2=3.$$

Системаи додашударо ба системаи муодилаҳои зерин ҷудо мекунем:

1) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=1,\\ x^2+4x+y^2-3y=0,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=3,\\ x^2+4x+y^2-3y=0.\end{cases}$

$\begin{cases}y=0,\\ x^2+4x+y^2-3y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}y=\dfrac{4}{5}x,\\ x^2+4x+y^2-3y=0,\end{cases}$

$x_1=0, \quad y_1=0; x_2=-4, \quad y_2=0; \quad x_3=-\dfrac{40}{41}, \quad y_3=-\dfrac{32}{41}$; (0;0) ҳалли бегона мебошад.

Ҷавоб $(-4;0),\left(-\dfrac{40}{41};-\dfrac{32}{41}\right)$.

?

1. Системаро ҳал кардан чи маънo дорад?
2. Системаро дар кадом ҳолат якҷинса меноманд?
3. Чӣ гуна системаро муайян меноманд?

281. Системаи муодилаҳои ирратсионалиро ҳал кунед:

1) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 4y + 2\sqrt{xy} = 12, \\ x + 4y - 2\sqrt{xy} = 4, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y - \sqrt{x^2 + y^2} = 7, \\ xy + \sqrt{x^2 + y^2} = 17, \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27, \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = 2{,}5, \\ x + y = 10, \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 133. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + y = a\sqrt{xy}, \\ x - y = b\sqrt{\dfrac{x}{y}}, \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x + y = 72, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6, \end{cases}$

10) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt{x^3 y} + \sqrt{y^3 x} = 78, \end{cases}$ 11) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = a \ (a > 0), \\ \sqrt{xy} = b, \end{cases}$

12) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 1 + 2\sqrt{x + 6y}, \end{cases}$

Машқҳо барои такрор

282. Аъзои панҷуми прогрессияи геометрии (Cn)-ро ёбед, ки дар он: $C_1 = 3\sqrt{3}$; $q = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ бошад.

283. Амалҳоро иҷро кунед:

1) $\left(1 + \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) : \left(a + \sqrt{a^2 - b^2}\right)$; 2) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\dfrac{3}{\sqrt{1-x}} + 1\right)$;

3) $\left(\sqrt{a} + \dfrac{ab^2 + c}{\sqrt{ab^2 + c}}\right) : \left(b\sqrt{a} + b\sqrt{ab^2 + c}\right)$; 4) $\left(\sqrt{ab} - \dfrac{ab}{a + \sqrt{ab}}\right) : \dfrac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{b}}{a - b}$.

Маълумотҳои таърихӣ

Ҳанӯз олимон аз замонҳои қадим ба амали бадараҷабардорию азрешабарорӣ, махсусан ба дараҷаю решаи квадратӣ ва кубӣ, марок зоҳир карда буданд. Дар Бобулистони қадим шаклҳои ҳамворе ёфт шуда будан, ки дар рӯи онҳо ҷадвалҳои ба квадрат ва куб бардоштани ададҳо навишта шуда буд.

Аз тарафи олимони Юнони қадим мавҷудияти порчае, ки дарозиаш ба адади бутун ва каср ченнашаванда аст, муайян карда шуда буд.

Екверлид дар асари машхури худ «Ибтидо», ки аз 13 китоб иборат буд, нишон додааст, ки агар нисбати масоҳати ду квадрат аз нисбати квадратӣ ду адади натуралӣ фарқ кунад, он гоҳ нисбати тарафҳои ин квадратро ба воситаи адади ратсионалӣ ифода кардан мумкин нест. Юнониҳо дар он давра фақат ададҳои ратсионалиро медонистанду халос. Аз ин ҷост, ки дар «Ибтидо» ададҳои ирратсионалӣ фақат бо тарзи геометрӣ шарҳ дода шудаанд.

Дар омӯзиши радикалҳо хизмати олимони Ҳиндустон бузург аст. Масалан, дар китоби Бхаскари (XII то эраи нав) табдилдиҳиҳои зерин дида мешавад: $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Тарзҳои навишти дараҷа ва реша оҳиста-оҳиста дигаргун мешуданд. Масалан, дар дастнависи математики франсавӣ Шюке (1484) нишондиҳандаи дараҷа ин тавр навишта шудааст: - Зарби 8^3 ва 7^{-1} нишон медиҳад, ки $8x^3 \cdot 7x^{-1} 56x^2$ аст. Математики франсавии дигар Эригон дар « Курси математика» (1643) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4$ -ро ин тавр ишора мекунад: a^9.

Аввалин маротиба математик ва файласуфи машҳури франсавӣ Декарт дар асари «Геометрия»(1637) дараҷаро бо нишондиҳандаи натуралӣ бо тарзе, ки мо имрӯз истифода мебарем ишора кардааст (ба ҷои a^2 Декарт $a \cdot a$ навиштааст).

Баъзе нишондиҳандаҳои касриро математики франсавӣ Орём (1323-1382) истифода кардааст. Баъдтар математики голландӣ Стевин (1548-1620) низ нишондиҳандаи касриро истифода кардааст. Аммо ба таври системавӣ математики бузурги англис Нютон дараҷа бо нишондиҳандаи касриро истифода бурда тарзи ҳозиразамони навиштро додааст.

Дар баъзе дастнависҳо радикалро ба намуди нуқта истифода кардаанд. Дар яке аз дастнависҳо алгебра (1480) бо забони лотинӣ як нуқтае, ки пеш аз адад гузошташудааст решаи квадратӣ аз ин ададро, ду нуқтаи пеш аз адад гузошташуда решаи дараҷаи чор аз адад ва се нуқтарешаи дараҷаи се аз адади додашударо мефаҳмонид.

Математики олмонӣ Рудолф дар китоби алгебра (1525) ишораҳои зеринро истифода мебарад: -Дар болои нуқта штрих мегузорад, решаи квадратӣ $\square^{1}$, решаи кубӣ $\square$-$\square$-$\square$-$\square^{1}$, решаи дараҷаи чор $\square\square^{1}$. Стевин ишораҳои радикалиро интавр истифода бурдааст: -Ин ишораҳо мувофиқан $\sqrt{2}, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }$ -ро ифода мекунанд. Декарт ба ҷои $\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ ишораи зеринро истифода кардааст: $\sqrt{c+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q \cdot q+\frac{1}{27}p^3}}$, ки дар ин ҷо C калимаи кӯтоҳкардашудаи лотинӣ **cubicus** кубро мефаҳмонад. Ниҳоят, математики франсавӣ Рол дар «Нишондоди алгебра» (1690) ишораи ҳозиразамонро истифода кардааст.

Машқҳои иловагӣ ба боби III

284. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$; 2) $(9-x):(7+x)+(7-x)(9+x)=76$;

3) $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=3\frac{1}{3}$; 4) $\frac{x-2}{3x+14}=\frac{3(8-x)}{28-x}$.

285. Амалҳоро иҷро кунед:

$$\frac{a^{-1}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^3\left(a^2-2ab+b^2\right)^{-2}.$$

286. Ифодаҳоро содда намуда қимати ададии онро, ҳангоми $x=3$; $y=0,75$; $n=1$ будан ҳисоб кунед:

$$\left(1+\frac{x^{-n}+y^{-n}}{x^{-n}+y^{-n}}\right)^{-2}.$$

287. Ифодаро содда намуда қимати онро ҳангоми $a=-4, b=-\frac{1}{2}$ будан ҳисоб кунед:

$$\frac{[1{,}5(a-1)]^{-1}}{[3(a-b)]^{-2}}:\left[1+a^{-1}2ab^{-1}+\frac{\left(a-b^{-1}\right)^2}{a^{-1}-1}\right].$$

288. Зарбшавандаро аз зери радикал бароред:

1) $\sqrt{(a-1)^3}$ ҳангоми $a\geq 1$, будан;

2) $\sqrt[4]{x^7(a-2)^5}$ ҳангоми $x\geq 0$, $a\geq 2$, будан; 3) $\sqrt{8(a-5)^2}$.

289. Радикалро ба намуди содда биёред:

1) $\frac{x^2}{y}\sqrt[3]{\frac{3y}{3x^2}}$; 2) $\sqrt{4x^6y^2+12x^4y^3}$; 3) $\frac{2a^2}{3b}\sqrt[3]{\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^5}{a^6}}$;

4) $\frac{3ab}{4a}\sqrt[5]{\frac{32a^6}{3b^5}-\frac{64a^5}{27b^4}}$; 5) $\frac{4}{ab}\sqrt[n]{a^{n+1}b^{2n+2}}$; 6) $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{y^{3n+2}}{x^{n-2}}}$.

290. Амалҳоро иҷро намуда ифодаҳоро содда намоед:

1) $\left(2\sqrt{18}+3\sqrt{8}\right)+\left(3\sqrt{32}-\sqrt{50}\right)$; 2) $\left(2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}\right)+\left(\sqrt{72}-\sqrt{80}\right)$;

3) $\left(\sqrt{32}+\sqrt{0{,}5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{48}\right)$.

291. Муодилаҳоро ҳал кунед.

1) $2\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}=27-3\sqrt{3x}$; 2) $\frac{3}{2}\sqrt{x}+7=2\sqrt{3}$;

3) $\frac{5}{3}\sqrt{15x}-\frac{3}{5}\sqrt{15x}-11=\frac{1}{3}\sqrt{15x}$; 4) $3\sqrt{2x}-2\sqrt{8x}+7\sqrt{18x}=28$.

292. Амалҳоро иҷро кунед:

1) $\left(5\sqrt{4x}+4\sqrt{x}-6\sqrt{9x}-8\sqrt{2x}\right)+\left(8\sqrt{\frac{1}{4}x}+4\sqrt{8x}+1\right)$;

2) $\left(3\sqrt{8x}-\sqrt{18x}-5\sqrt{\frac{1}{2}x}\right)+\left(\sqrt{4\frac{1}{2}x}+\sqrt{50x}-\sqrt{32x}+\sqrt{72x}\right)$;

3) $4b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\frac{2}{a}\sqrt[3]{a^5b}-3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-\sqrt[3]{a^2b^4}$.

293. Зарбро иҷро кунед:

1) $\left(\sqrt{12}-3\sqrt{75}\right)\cdot\sqrt{3}$; 2) $\left(\sqrt{6}-3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{8}\right)\cdot 2\sqrt{6}$;

3) $\left(5+\sqrt{6}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$; 4) $\left(5-\sqrt{6}\right)\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$.

294. Амалҳоро иҷро намуда ифодаҳоро содда намоед:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{5+3\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}-1}{6}$;

3) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}5\sqrt{5}}{15}$.

295. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1) $\frac{17-3\sqrt{x}}{11}=\frac{23-4\sqrt{4}}{15}$; 2) $\frac{29-5\sqrt{5}}{9}=\frac{39-5\sqrt{x}}{19}$;

3) $\frac{3\sqrt{x}-5}{2}-\frac{2\sqrt{x}-7}{3}=\sqrt{x}-1$; 4) $\frac{17+3\sqrt{11}}{11}=\frac{23+4\sqrt{4}}{15}$;

5) $\sqrt{2x-9}=\sqrt{6-x}$; 6) $\sqrt{x-9}=\frac{36}{\sqrt{x-9}}-\sqrt{x}$;

7) $5\sqrt{2x+3}-\sqrt{18x-5}=\frac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}}$ 8) $\sqrt{3x-1}+\frac{2}{\sqrt{3x-1}}=\sqrt{5x+3}$;

9) $\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$.

296. Баробариҳоро исбот намоед:

1) $\left(\sqrt{0,6}+\sqrt{0,3}-\sqrt{0,9}\right)\left(3\sqrt{0,2}+2\sqrt{0,3}+\sqrt{0,6}\right)=1,2$;

2) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{3}{2}}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)=-\sqrt{2}$.

297. Амалҳоро иҷро кунед:

1) $\left(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12}\right):\sqrt{3}$; 2) $\left(15\sqrt{50}+2\sqrt{200}-3\sqrt{450}\right):\sqrt{10}$;

3) $\left(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}\right):\sqrt{xy}$; 4) $\left(\sqrt{a^5b^3}-\sqrt{a^3b^5}\right):\sqrt{a^3b^3}$.

298. Амалҳоро иҷро кунед:

1) $\left(4\sqrt{8}-6\sqrt[3]{2}\right):\sqrt{2}$; 2) $\left(10\sqrt[3]{9}+5\sqrt{3}\right):\sqrt[6]{3}$;

3) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{4}}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2$;

5) $\left(2x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{4}}\right)\left(2x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{4}}\right)$; 6) $\left(a^{\frac{2}{3}}-3b^{-1}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+3b^{-1}\right)$.

299. Аз реша озод кунед:

1) $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}$; 2) $\sqrt{\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{n}{m}}}$; 3) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; 4) $\sqrt[3]{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$.

300. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

1) $\begin{cases}2\sqrt{2x+3y}+\sqrt{5-x-y}=7,\\3\sqrt{5-x-y}-\sqrt{2x+y-3}=1,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2},\\x+y=10,\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{41}{20},\\x+y=41,\end{cases}$; 4) $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{6},\\x-y=5,\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\xy=4,\end{cases}$

Ҷавобҳо

253. 25см²; 100см²; 10000м². **254.** 961; 2601; 1764; 1680; 7056. **255.** 1) $6x^{2n}$; 2) $2^{n+1}x^{n^2-1}$; 3) $10a^{x+1}-20a^4+30a^5$; 4) 3. **256.** адади ҷуфт; адади ток; **258.** 1) $(m+1)^2(m^2-m+1)$; 2) $(n+1)(n-1)(n^2+n+1)$; 3) $2y(3x^2+y^2)$; 4) x^2+y^2; 5) $(a-4)(a+3)$; 6) $(m+5)(m-2)$; 7) $2(x+3)(x+2)$. **259.** а) 1) $\frac{1}{9}$; 2) -8; 3) $2\cdot 5^{-1}$; 4) 64; 5) $\frac{1}{6561}$; 6) 15625; 7) 1; 8) $x^{-4}-a^{-6}$; 9) $\frac{b(b^2-3ab+3a^2)}{(b-a^4)}$. б) 1) $ab^{-3}c^{-3}$; 2) $4a^{13}x^{-3}z^{-9}$; 3) $\frac{4}{9}a^{-2}m^{2n}x^{-2}$; 4) $\frac{2b^2+a}{a^2b^2}$; 5) $\frac{x^4}{1+12x^2+x^4}$; 6) 36. **260.** а) 1) $-4\frac{1}{3}$; 2) 4; 3) $\frac{3}{40}$. б) 1) $(5-a)$; 2) $(a-5)$; 3) $2(a-5)\sqrt{2}$. в) $\sqrt[5]{16}$. **261.** а) вуҷуд надорад; вуҷуд надорад; -2; -5; в) 40м; г) 5см; 2м; 40м; д) $3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$; е) 1) $2a^4\sqrt[8]{64a}$; 2) $\sqrt[8]{a},\ a>0$; ж) $\frac{\sqrt[8]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^2}}<\frac{\sqrt[14]{3^3}}{\sqrt[8]{3^2}}$; з) 1) $x\sqrt[3]{x^2-y^2}$; 2) $a\sqrt{a}$; 3) $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$. **262.** а) 1) $\frac{46}{35}$; 2) $\frac{5}{9}$; б) 1) $\sqrt[3]{16}$; 2) 2; 3) 1. **263.** 1) $-\frac{1}{2(3a+1)}$; 2) $\frac{2a}{a^2+a+1}$. **264.** 58чормағз; 145чормағз. **265.** 1) $\sqrt{10}$; 2) $x\sqrt[15]{x}$; 3) $0,4ab$; 4) x-y; 5) a^2+a+1; 6) x^2+2. 11) $\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 12) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{4xy}$; 13) $\frac{x+y}{x-y}$. **266.** 1) $\sqrt{ax}-2\sqrt[3]{a^2x}$; 2) $\sqrt{ax}+2\sqrt[3]{a^2x}$. **267.** а) 1) $4-3\sqrt{7}+\sqrt{11}$; 2) $\frac{10-3\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{13-\sqrt{5}}{2}$; 4) $\frac{a+b}{a-b}$; 5) $\frac{2\sqrt{6}}{a(b-1)}$; 6) $\frac{2a}{b^2}$; 7) $a^{\frac{1}{2}}$; 8) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}$; б) 1) $\frac{4+a}{2}$; 2) ±2;±3. **273.** а) 1) 1; б) 4; в) 6;9; г) 4;3 д) 4; е)9; ж) 3; з) 4; ғ) 4; и) 13. **274.** 1) $\frac{6}{35}$; 2) $-\frac{6}{35}$. **275.** 30км/соат; 27км/соат; 135км. **277.** а) 61; в) 3; г) 1. **278.** $\frac{2}{3};\frac{3}{2}$. **279.** 1) 125; 2) -8; 3) $a^{\frac{1}{2}}(a>0)$; 4) $(a^{0.1})\cdot\sqrt[5]{a}$. **280.** 1) $\left(1,5;-\frac{2}{3}\right);(-0,2;5)$; 2) $(4;-1);(0,4;-10)$; 3) ҳал надорад. **281.** 1) $(-3;-2);(3;1)$; 2) $(3;-5);(5;-8)$;

3) $(-2;1);(2;-1)$; 4) $(27;1);(-1;-27)$; 5) $(10+4\sqrt{6};10-\sqrt{6});(10-4\sqrt{6};10+\sqrt{6})$; 6) $(8;2);(2;8)$; 7) $(9;4);(4;9)$; 8) $\left(\frac{b}{(1-m)\sqrt{m}};\frac{b\sqrt{m}}{1-m}\right)$, дар ин чо $m=\frac{a^2-2\pm\sqrt{a^2(a^2-1)}}{2}$. **283.** 1) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}$; 2) $\sqrt{1-x}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $a\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}$. **284.** 1) $\pm\frac{3}{4}$; 2) ±5; 3) ±8; 4) ±7. **285.** $\frac{b(3a^2-3ab+b^2)}{(a-b)^2}$. **286.** $2\frac{1}{4}$. **287.** 6. **288.** 1) $(a-1)\sqrt{a-1}$; 2) $x(a-2)\sqrt[4]{x^3(a-2)}$; 3) $2(a-5)\sqrt{2}$, $a\geq5$. **288.** 1) $\frac{x}{2y}\sqrt[3]{12xy}$; 2) $2x^2y\sqrt{x^2+3y}$; 3) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2-b^2}$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{9(9a-2b)}$; 5) $4b\sqrt[n]{ab^2}$; 6) $y^2\sqrt[n]{x^2y^2}$. **290.** 1) $19\sqrt{2}$; 2) $15\sqrt{2}-3\sqrt{5}$; 3) $4\frac{1}{4}\sqrt{2}+3\frac{1}{3}\sqrt{3}$. **291.** 1) 243; 2) 36; 3) 15; 4) 2. **292.** 1) 1; 2) $9\sqrt{2x}$; 3) $(a-b)\sqrt[3]{a^2b}$. **293.** 1) -39; 2) $12-18\sqrt{2}+16\sqrt{3}$; 3) $19\sqrt{2}$. **294.** 1) $\frac{7+\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{17+7\sqrt{2}}{12}$; 3) $\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{15}$. **295.** 1) 4; 2) 16; 3) 25; 5)5; 6) 25; 7) 3; 8) 1; 9) -3. **297.** 1) 30; 2) $6\sqrt{5}$; 3) $x+y$; 4) $a-b$. **298.** 1) $8-3\sqrt[6]{32}$; 2) $10\sqrt[3]{3}+5\sqrt[6]{3}$; 3) 14; 4) 26; 5) $4x-\frac{\sqrt{y}}{y}$; 6) $\frac{ab^2\sqrt[3]{a}-9}{b^2}$. **299.** 1) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$; 3) $\sqrt[8]{128}$; 4) $\sqrt[12]{2187}$. **300.** Нишондод. 1) Гузориши зериниро истифода бурда системаро содда менамоем. $\sqrt{3x+2y}=u, \sqrt{5-x-y}=v, \sqrt{2x-y-3}=w,$ $u^2=2x+3y, v^2=5-x-y,$ $w^2=2x-y-3.$

$$\begin{cases}2u+v=7,\\3u-w=7,\\u^2+4v^2+w^2=17.\end{cases}$$

2) (8;2); (2;8). 3) (25;16); (16;25). 4) (9;4). 5) (1;4); (4;1).

Боби IV
Ҳосила

§ 8. *Мафҳуми лимит ва бефосилагии функсия*
§ 9. *Мафҳуми ҳосила*
§ 10. *Қоидаҳои асосии дифференсиронӣ*
§ 11. *Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ ва мураккаб*
§ 12. *Ҳосилаи функсияҳои тригонометрӣ. Ҷадвали ҳосилаи функсияҳо*
§ 13. *Мафҳуми ҳосилаи тартиби олӣ*

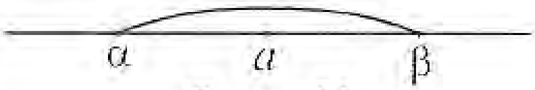
§ 8. Мафҳуми лимит ва бефосилагии функсия
33. Афзоиши аргумент ва функсия

33.1. Мафҳуми атрофи нуқта. Ҳамаи он мафҳумҳое, ки дар ин параграф омӯхта мешаванд, ба мафҳуми атрофи нуқта вобастагӣ доранд. Барои ҳамин ҳам шарҳро аз он сар мекунем.

Агар a- адади ҳақиқӣ ва δ- адади дилхоҳи мусбати додашуда бошад, он гоҳ фосилаи $(a-\delta,\ a+\delta)$ - ро атрофи (ё δ - атрофи) нуқтаи a, a-ро маркази атроф ва δ - ро радиуси он меноманд, яъне ҳамаи он нуқтаҳои x, ки барояшон нобаробарии $|x-a|<\delta$ дуруст аст.

Масалан, агар дар ҳолати хусусӣ сухан дар бораи $\delta=0,1$ атрофи нуқтаи $a=2$ равад, он гоҳ ҳар гуна нуқтаи атрофи x нобаробарии $|x-2|<0{,}1$ -ро қаноат мекунонад. Яъне $-0{,}1<x-2<0{,}1$, $2-0{,}1<x<2+0{,}1$, $1{,}9<x<2{,}1$.

Баъзан атрофи нуқтаи додашудаи a гуфта маҷмуи нуқтаҳои фосилаи ихтиёрии $(\alpha;\beta)$-ро ҳам меноманд, ки миёнаҷояш нуқтаи a мебошад.



Расми 55

33.2. Мафҳуми афзоиши аргумент ва афзоиши функсия

Бо масъалаҳое машғул мешавем, ки дар **онҳо на ёфтани қимати ин ё он бузургиҳо, балки ёфтани қимати** тағйирёбиҳояшон ҷолиби диққат аст.

Мисолҳои зиёде тасдиқи ҷумлаи болоянд. Чунончи,
- қувваи чандирии пружина ба дарозшавиаш мутаносиб аст (қонуни Гук);
- кор – тағйирёбии энергия аст;
- суръати миёна – нисбати тағйирёбии масофа дар фосилаи вақтест, ки дар муддаташ ҷойивазкунии нуқтаи материалӣ ба амал меояд.
- …

мебошанд.

Фарз мекунем, ки функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаҳои тири ададӣ ё дар ягон қисми он дода шудааст. Дар соҳаи муайянӣ нуқтаи x_0 -ро қайд мекунем. Қимати $f(x)$-ро дар нуқтаи x_0 ёфта онро, бо қиматҳои дигари функсия дар нуқтаҳои x -и атрофи x_0 воқеъбуда муқоиса мекунем. Ин ҷумла ичрои амалиёти зеринро дар назар дорад: фарқи $f(x)-f(x_0)$-ро ба воситаи фарқи $(x-x_0)$ муқоиса кардан зарур аст.

Агар x нуқтаи дилхоҳи дар ягон атрофи нуқтаи ба қайд гирифташудаи x_0 воқеъ бошад он гоҳ фарқи $(x-x_0)$-ро **афзоиши тағйирёбандаи новобаста (ё аргумент)** дар нуқтаи x_0 номида, бо Δx ("делта икс") ишорат мекунем.

Аз ин баробарӣ $x=x_0+\Delta x$ бармеояд. Инчунин мегӯянд, ки қимати ибтидоии аргумент x_0 ба афзоиши Δx молик шудааст. Дар ин ҳолат қимати функсия ба бузургии

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad (1)$$

тағйир меёбад. Фарқи (1) -ро **афзоиши функсияи f - и дар нуқтаи x_0 -и ба Δx мувофиқоянда номида**, бо рамзи Δf ("делта эф") ишорат мекунанд:

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0). \qquad (2)$$

Аз (1), (2) $f(x)=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta f$ пайдо мешавад.

Агар ба (2) дурустар диққат диҳем, он гоҳ мебинем, ки дар қимати қайдшудаи x_0 афзоиши функсия Δf функсияи аргументи Δx аст.

Ниҳоят, қайд мекунем, ки Δf -ро инчунин афзоиши тағйирёбандаи вобаста ҳам меноманд ва барои функсияи $y=f(x)$ бо Δy ("делта игрек") ишорат мекунанд.

Мисоли 1. Барои функсияи $f(x)=x^3-1$ ҳангоми x_0=3 ва

а) x=2,9; б) x=3,1 будан, афзоишҳои Δx ва Δf ёфта шаванд.

Ҳал. а) $\Delta x=x-x_0=2{,}9-3=-0{,}1$, $\Delta x=-0{,}1$;

$\Delta f=f(2{,}9)-f(3)=23{,}389-26=-2{,}611$, $\Delta f=-2{,}611$

б) $\Delta x=x-x_0=3{,}1-3=0{,}1$, $\Delta x=0{,}1$

$\Delta f=f(3{,}1)-f(3)=28{,}791-26=2{,}791$, $\Delta f=2{,}791$.

Мисоли. 2. Барои функсияи $y=x^2-x$ қимати Δy -ро дар атрофи нуқтаи $x_0=2$ меёбем.

Ҳал. Азбаски афзоиши x ба $2+\Delta x$ баробар аст, пас

$$\Delta y=f(x)-f(2)=f(2+\Delta x)-f(2)=[(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)]-(2^2-2)=$$
$$=4+4\Delta x+(\Delta x^2)-2-\Delta x-2=3\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Мисоли3. Куби тегааш ба $2a$ баробар дода шудааст. Агар дарозии тега афзоиши Δx -ро гирад, он гох афзоиши ΔV -и ҳаҷмашро меёбем.

Ҳал. Азбаски $x=2a+\Delta x$ ва $V(x)=x^3$ аст, пас $\Delta V=V(x)-V(2a)=$
$=x^3-(2a)^3=(2a+\Delta x)^3-(2a)^3=(2a+\Delta x-2a)[(2a+\Delta x)^2+(2a+\Delta x)\cdot 2a+(2a)^2]=$

$= \Delta x[4a^2 + 4a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 4a^2 + 2a\Delta x + 4a^2] = 12a^2\Delta x + 6a \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Ҷавоб. Ҳаҷми куб ба $12a^2\Delta x + 6a \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ меафзояд.

Мисоли 4. Афзоиши функсияи $y = \sqrt{x}$ -ро дар нуқтаи x_0 ба воситаи x_0 ва Δx ифода мекунем.

Ҳал. Мувофиқи шарт $x = x_0 + \Delta x$ ва $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ аст, бинобар он

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} =$$

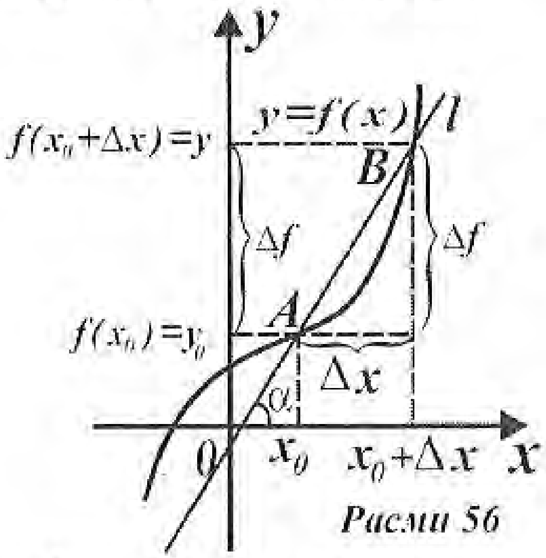
$$= \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

Мисолҳои 2-4 шаҳодат медиҳанд, ки афзоиши функсия Δf функсияи афзоиши аргумент Δx аст.

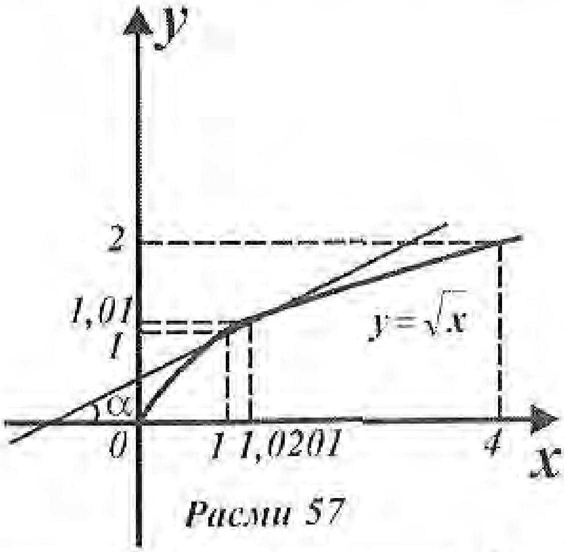
33.3. Маънои геометрӣ ва механикии нисбати Δy бар Δx

Дар системаи координатавӣ графики функсияи $y = f(x)$ -ро кашида (ниг. ба расми 56) маънои геометрии Δx ва Δy -ро шарҳ медиҳем.

Дар навбати аввал қайд мекунем, ки хати рости l -и аз болои ду нуқтаи дилхоҳи графики номбурда гузарандаро буранда он меноманд. Маълум, ки нисбати $\dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ ё $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ -коэффитсиенти кунҷии k -и буранда аз болои нуқтаҳои $A(x_0, y_0)$ ва $B(x, y)$ гузарандаро ифода мекунад.



Расми 56



Расми 57

Агар сурат ва махраҷи касрро мувофиқан бо афзоишҳои Δy ва Δx иваз намоем (ин амалиёт осонии назаррасро фароҳам меоварад), он гоҳ $k = tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ мешавад. Коэффитсиенти кунҷии хати рости l ба воситаи афзоишҳои функсия ва аргумент ҳамин тавр ифода мешавад.

Мисоли 5. Агар $x_0=1$ ва $\Delta x=0{,}0201$ бошад, он гоҳ коэффитсиенти кунҷии бурандаи графики функсияи $y=\sqrt{x}$ -ро, ки аз нуқтаҳои $(x_0;y_0)$ ва $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ мегузарад, меёбем.

Ҳал. Азбаски $x_0=1, y_0=f(x_0)=\sqrt{1}=1, x_0+\Delta x=1+0{,}0201=1{,}0201$ ва $f(x_0+\Delta x)=f(1{,}0201)=\sqrt{1{,}0201}=1{,}01$ аст, пас $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=1{,}01-1=0{,}01$ ва аз ин ҷо k ба $k=tg\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0{,}1}{0{,}0201}\approx 4{,}9751...$ баробар мешавад.

Ниҳоят қайд мекунем, ки бо ёрии афзоишҳо суръати миёнаи ҳаракати нуқтаро дар фосилаи вақти $[t_0;t_0+\Delta t]$ ифода кардан мумкин аст. Агар нуқта аз рӯи хати рост ҳаракат намояду координатааш $x(t)$ муайян бошад, он гоҳ

$\upsilon_{миёна}(\Delta t)=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}$ мешавад. Ин формула барои $\Delta t<0$ (яъне барои порчаи $[t_0+\Delta t;t_0]$) низ дуруст аст. Дар ин ҳолат, ҳақиқатан, ҷойивазкунии нуқта ба $x(t_0)-x(t_0+\Delta t)$, давомнокии фосилаи вақт ба Δt ва суръати миёна ба

$$\upsilon_{миёна}(\Delta t)=\frac{x(t_0)-x(t_0+\Delta t)}{-\Delta t}=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}$$

баробар мешавад.

Айнан ҳамин тавр, ифодаи $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ **суръати миёнаи тағйирёбии функсия** дар порчаи $[x_0;x_0+\Delta x]$ номида мешавад.

?

1. Атрофи нуқта гуфта чиро мефаҳмем? Мисолҳо оред.
2. Кадом масъалаҳо ба мафҳуми афзоиши аргумент ва функсия меоранд? Ба Δx ва Δy таъриф диҳед.
3. Бо мисолҳои мушаххас нишон диҳед, ки Δf функсияи аргументи Δx аст.
4. Ба дурустии формулаи $f(x)=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta f$ боварӣ ҳосил намоед.
5. Формулаи $k=tg\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ чӣ маъно дорад?
6. Суръати миёнаи тағйирёбии функсия дар порча гуфта чиро дар назар доранд?

301. δ -атрофи нуқтаи x=a-ро ҳангоми

а) $\delta=0{,}02$ $a=3$; б) $\delta=0{,}5$ $a=2$;

в) $\delta = 0,01$ $a = 4$; г) $\delta = 0,3$ $a = -1$ будан, ёбед.

302. Барои функсияи $y=2x-3$ x ва Δy -ро ҳангоми

а) $x_0 = 1$ ва $\Delta x = 0,1$; г) $x_0 = 4$ ва $\Delta x = 0,03$;

б) $x_0 = 2$ ва $\Delta x = 0,01$; д) $x_0 = 4$ ва $\Delta x = 0,12$;

в) $x_0 = 3$ ва $\Delta x = 0,02$; е) $x_0 = 5$ ва $\Delta x = 0,02$ будан, ёбед.

303. Афзоиши Δx ва Δy -ро барои функсияи $y=x^2$ ёбед, агар

а) $x=2,1$ ва $x_0=2$; г) $x=-2,6$ ва $x_0=-2,5$;
б) $x=2,6$ ва $x_0=3$; д) $x=4,1$ ва $x_0=4$;
в) $x=3$ ва $x_0=2,8$; е) $x=9,3$ ва $x_0=9$ бошад.

304. Барои функсияи $y = \dfrac{1}{x}$ қимати Δy -ро ёбед, агар

а) $x_0 = 6$, $\Delta x = 0,01$; д) $x_0 = 5$, $\Delta x = 0,25$;

б) $x_0 = 7,02$, $\Delta x = 0,02$; е) $x_0 = 3,025$, $\Delta x = 0,025$;

в) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,04$; ж) $x_0 = 6$, $\Delta x = -0,01$;

г) $x_0 = 4,2$, $\Delta x = 0,2$; з) $x_0 = -3$, $\Delta x = -0,04$ бошад.

305. Барои функсияи

а) $y=2x-7$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$; в) $y=1-x^2$; г) $y=2x-x^2$;

д) $y=x^2-4x-3$; е) $y=2x^3-x$; ж) $y=x^3-1$; з) $y=x^2+1$

Δy -ро дар нуқтаи x_0 ба воситаи x_0 ва Δx ифода кунед.

306. Агар
а) $f(x)=x$; б) $f(x)=x^2$; в) $f(x)=ax+b$;
г) $f(x)=ax^2+bx+c$; д) $f(x)=x^3$

бошад, $f(x_0+\Delta x)$, Δy ва $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ -ро ёбед.

307. Коэффитсиенти кунҷии бурандаи графики функсияи $y=x^2$ –ро, ки аз болои нуқтаҳои (x_0, y_0) ва $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ мегузарад, ҳангоми

а) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$; г) $x_0 = 2$, $\Delta x = -0,1$;

б) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,01$; д) $x_0 = 2$, $\Delta x = -0,01$

в) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,001$; е) $x_0 = 2$, $\Delta x = -0,001$ будан, ёбед.

308. Коэффитсиенти кунҷии k -ро барои функсияи $y = x^3$ ҳангоми

а) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$; г) $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,1$;

б) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,01$; д) $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,01$

в) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,001$; е) $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,001$ будан, ёбед.

309. Тарафҳои росткунҷа 16м ва 22 м мебошанд. Агар тарафи хурди онро ба 0,1м ва тарафи калонашро ба 0,2м зиёд кунем он гоҳ афзоиши периметр ва масоҳати он ба чӣ баробар мешаванд?

310. Теғаи куб x_0 ба Δx меафзояд. Афзоиши масоҳати сатҳи пурраи кубро ҳангоми

а) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,2$; б) $x_0 = 3$, $\Delta x = 0,01$ будан, ёбед.

311. Куби теғааш ба x баробар ба Δx меафзояд. Ҳангоми

а) $x = 1$, $\Delta x = 0,1$; $x = 2$, $\Delta x = 0,2$

шудан, ҳаҷми он ба чӣ баробар мешавад?

312 Агар

а) $f(x) = x^3 - 2x + 11$; г) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$; б) $f(x) = \dfrac{7}{x^2} + 1$;

д) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; в) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$; е) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

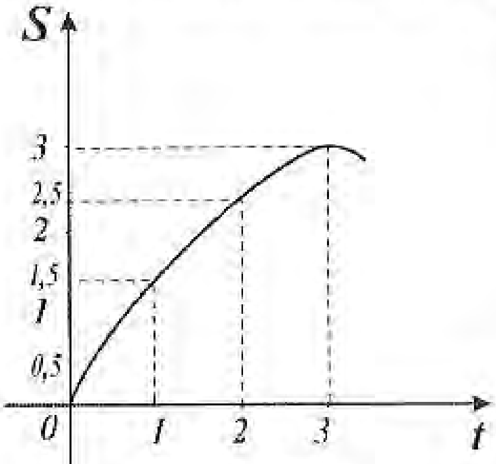
бошад, онгоҳ Δf ва $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ ба воситаи x_o ва Δx ифода карда шавад.

313. Суръати миёнаи нуқтаи аз рӯи қонуни маълум ростхатта ҳаракаткунандаро дар фосилаи вақти $[t_0; t_0 + \Delta t]$ ҳангоми

а) $x(t) = 3t - 5$; в) $x(t) = \upsilon_0 t + \dfrac{gt^2}{2}$;

б) $x(t) = -3t - 5$; г) $x(t) = -\dfrac{gt^2}{2}$

будан, ёфта шавад.



Расми 58

314. Қонуни ҷойивазкунии (ҳаракати) нуқтаи материалӣ, ки вобастагии S-ро аз рӯи t ифода мекунад, дар график нишон дода шудааст (Расми 58). Суръати миёнаи ҳаракатро дар порчаҳои [0;1], [1;2] ва [2;3] ёбед.

Машқҳо барои такрор

315. Муодиларо ҳал намоед:

а) $\dfrac{3x-6}{12} + 1 = \dfrac{x+6}{4} - \dfrac{x+3}{6}$; в) $(x-2)(x+3) = 6(x-3)$;

б) $3x^2 + 4x - 7 = 0$; г) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x}{x-1} = 0$.

316. Системаи муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $\begin{cases} 5x - 7y = 3; \\ 6x + 5y = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 96; \\ x = 2y. \end{cases}$

317. Исбот кунед:

а) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab(b + c)$; б) $a^4 + 6a^2b^2 + b^2 > 4ab(a^2 + b^2)$, $a \neq b$.

318. Муодилаи тригонометриро ҳал намоед:

а) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$; б) $\cos x - \cos 5x = 0$.

319. Айниятро исбот намоед:

а) $1 - tg^2 x = \dfrac{co2x}{\cos^2 x}$; б) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = ctg^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

320. Ҷуфт ва ё тоқ будани функсияро муайян намоед:

а) $f(x) = -2x^4 + 9x^2 + 11$; б) $f(x) = -3x^3 + 5x$ в) $f(x) = 5x^6 - 2x^3$.

321. Бари росткунча аз дарозиаш дида 3 см кўтоҳтар аст. Ченакҳои онро ёбед, агар масоҳаташ $70 см^2$ -ро ташкил диҳад.

322. Ду мошини боркаш якҷоя кор карда бояд борро дар 6 соат мекашонданд. Вале мошини дуюм ба саршавии кор каме дер монда вакте омад, ки аллакай мошини якум $\dfrac{3}{5}$ ҳиссаи тамоми борро кашондааст. Бори боқимондаро мошини дуюм кашонд ва аз ин рў, барои кашондани тамоми бор мошинҳо назар ба вақти пешбинишуда ду маротиба зиёдтар вақт сарф карданд. Ҳар як мошин дар алоҳидагӣ тамоми борро дар чанд соатӣ мекашонад?

34. Мафҳуми лимит ва бефосилагии функсия

Дар аксари мавридҳо қимати функсияро на дар нуқтаи a, балки дар нуқтаи ба он наздики x (бо дигар ибора дар нуқтаҳои атрофаш) муоина менамоянд.

34.1 а) Мегўянд, ки тағйирёбандаи x ба адади a майл мекунад, агар x ба δ -атрофи a тааллуқ дошта, яъне $|x-a| < \delta$ буда, ҳангоми беҳад ба a наздик шуданаш бузургии $|x-a|$ беҳад ба нул наздик аст.

Майлкунии тағйирёбандаи x -ро ба адади a дар шакли $x \to a$ навишта чунин мехонанд:"икс ба a майл мекунад".

б) Таърифи 1. Агар ҳангоми x ба a майл кардан(бо саҳеҳии пешаки додашуда) $f(x)$ ба L майл кунад, адади L -ро лимити функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a меноманд.

Қайд менамоем, ки ба ҷои ибораи майлкунӣ тирчаро истифода карда таърифи болоиро кутоҳакак "ҳангоми $x \to a$ бо саҳеҳии пешаки додашуда $f(x) \to L$ ва ё $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ * ҳам менависанд.

Мисоли 1. Бигузор $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x-3}$ бошад. Адади L -ро барои $f(x)$ ҳангоми $x \to 3$ меёбем.

---

* Ишорати «lim» навишти мухтасари калимаи лотинии "limes" («ҳад») ва ё калимаи франсавии "limite" («ҳудуд») мебошад.

Ҳал. Барои $x \neq 3$ $f(x)=\frac{x^3-27}{x-3}=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=x^2+3x+9$ аст.

Пас, $L=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+9)=3^2+3\cdot 3+9=9+9+9=27$ мешавад.

Ҷавоб: $L=27$

Мисоли 2. Ҳангоми x ба 1 майл кардан функсияҳои $f(x)$ ба 5 ва $\varphi(x)$ ба -3 майл мекунанд. Инро ба назар гирифта ба кадом адад майл кардани функсияи $\frac{2f(x)+5\varphi(x)}{0{,}5\varphi^2(x)}$-ро меёбем.

Ҳал. Маълум, ки ҳангоми $x\to 1$

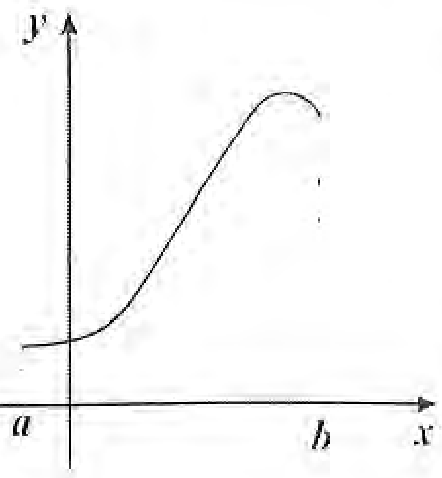
$2f(x)$ ба $2\cdot 5=10$, $5\varphi(x)$ ба $5\cdot(-3)=-15$, $0{,}5\varphi^2(x)=0{,}5\cdot(-3)^2=4{,}5$ майл мекунанд. Аз ин ҷо

$\frac{2f(x)+5\varphi(x)}{0{,}5\cdot\varphi^2(x)}$ ба $\frac{10-15}{4{,}5}=\frac{-5}{4{,}5}=-\frac{50}{45}=-\frac{10}{9}$ яъне ба $-\frac{10}{9}$ майл мекунад.

34.2 в) Таърифи 2. Агар ҳангоми x ба a майл кардан $f(x)$ ба $f(a)$ майл кунад, он гоҳ функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи a бефосила номида мешавад. Яъне ҳангоми $x\to a$ $f(x)\to f(a)$, ё $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Дар ин маврид a -ро нуқтаи бефосилагии функсия меноманд. Дар акси ҳол (яъне агар дар нуқтаи a бефосилагии функсия вайрон гардад), **a-нуқтаи канишн ном** дошта, $f(x)$ дар нуқтаи a **фосиланок** (ё каниишдор) мешавад.

Агар ба таърифҳои 1 ва 2 дурустакак назар кунем, он гоҳ дар байни мафҳумҳои лимит ва бефосилагӣ алоқаи хеле зич мавҷуд аст. Бефосилагӣ мавридеро дарбар мегирад, ки агар тағйирёбандаи x адади a-ро ба сифати қимати худ қабул кунад, яъне $f(a)$-якс аз қиматҳои $f(x)$ мебошад.

Бефосилагии $f(x)$-ро дар алоқамандӣ бо тасвири графикиаш шарҳ додан хеле муфид аст



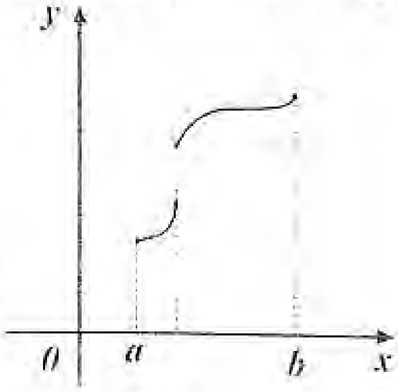
Расми 59

Агар графики функсия дар нуқатаҳои абсиссаашон ягон порчаро (ё тамоми тири ададиро) ташкилдиҳанда хати яклухти равонро, яъне хати дар натиҷаи аз коғаз набардоштани қалам кашидашударо ифода кунад, он гоҳ дар ҳамон порча (ё тири ададӣ) онро функсияи бефосила меноманд (Расми 59).

Ҳамаи функсияҳои асосии элементарӣ (хаттӣ, квадратӣ, тригонометрӣ,...) дар фосилаҳои соҳаи муайяниашонро ифодакунанда, бефосилаанд.

Акнун мисолеро меорем, ки дар шакли

умумӣ функсияи фосиланокро ифода мекунад. Масалан, графики функсияи дар расми 60 акс ёфта дар $[a;c)$ ва $(c;b]$ бефосила буда, вале дар $[a;b]$ фосиланок аст.



Расми 60

г) Маълумотҳои *п.* 33.2-ро ба назар гирифта таърифи нави бефосилагиро баён намудан мумкин аст:

$$f(a+\Delta x)\to f(a),\ \text{агар } \Delta x\to 0.$$

Дар ҳақиқат, агар $a+\Delta x$-ро бо x ишорат кунем: (яъне $x=a+\Delta x$), он гоҳ аз он ҳангоми $x\to a$ $f(x)\to f(a)$ (ниг. ба таърифи 2) мебарояд. Айнан ҳамин тавр, агар дар таърифи 2 ба ҷои x $a+\Delta x$ гирем, он гоҳ тасдиқоти пункти г) ҳосил мегардад, ки он аз баробарқувватии b) ва г) шаҳодат медиҳад.

Қайд менамоем, ки аз «$f(a+\Delta x)\to f(a)$ ҳангоми $\Delta x\to 0$» «$f(a+\Delta x)-f(a)\to 0$ ҳангоми $\Delta x\to 0$» ва аз ин ҷо «$\Delta f\to 0$ ҳангоми $\Delta x\to 0$» мебарояд. Бо дигар ибора, **функсияи $f(x)$-ро дар ягон нуқтаи a-и соҳаи муайянӣ бефосила меноманд, агар ҳангоми афзоиши аргумент ба нул майл кардан афзоиши функсия ҳам ба нул майл кунад.** (яъне $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$)

Таърифи 3. Функсияи дар ҳар як нуқтаи ягон порча бефосиларо дар ҳамин порча бефосила меноманд.

Таърифи болои барои фосила, нимфосила ва нимпорча ҳам ҷой дорад.

Дар мулоҳизарониҳои оянда баъзе ифодаҳои аёну фаҳморо кабул мекунем. Масалан, агар $h\to 0$, он гоҳ $5h\to 0$, $h^2\to 0$, $9\pm 2h\to 9$.

Мисоли 3. Функсияи $f(x)=\dfrac{x^4-2x}{2x^3+5x^2-3x+7}$ дода шудааст. Нишон медиҳем, ки ҳангоми $x\to 3$ $f(x)\to f(3)$ ҷой дорад.

Ҳал. Маълум, ки $f(3)$ ифодаи ададии $\dfrac{3^4-2\cdot 3}{2\cdot 3^3+5\cdot 3^2-3\cdot 3+7}$-и ба $\dfrac{75}{27}$ баробар мебошад.

Инро ба ҳисоб гирифта пай дар пай ба дурустии

$x^4=x\cdot x\cdot x\cdot x\to 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4$, $2x\to 2\cdot 3$; $2x^3=2\cdot x\cdot x\cdot x\to 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3=2\cdot 3^3$, $5x^2=5\cdot x\cdot x\to 5\cdot 3\cdot 3=5\cdot 3^2$; $3x=3\cdot 3$, $7\to 7$; $x^4-2x\to 3^4-2\cdot 3$; $2x^3+5x^2-3x+7\to 2\cdot 3^3+5\cdot 3^2-3\cdot 3+7$; боварӣ ҳосил менамоем. Аз ин ҷо ҳангоми $x\to 3$

$$f(x)=\frac{x^4-2x}{2x^3+5x^2-3x+7}\to\frac{3^4-2\cdot3}{2\cdot3^3+5\cdot3^2-3\cdot3+7}=f(3)$$

мебарояд. Навишти охирин бефосилагии $f(x)$ -ро дар нуқтаи $x=3$ ифода мекунад.

Мисоли 4. Дар асоси таърифҳои бефосилагӣ нишон медиҳем, ки функсияи

а) $f(x)=3x+4$; б) $f(x)=2\sqrt{x}$; в) $f(x)=\cos x$

дар нуқтаҳои дилхоҳи соҳаи муайяниаш бефосила мешавад.

а) Маълум, ки соҳаи муайянии функсияи $f(x)=3x+4$ тамоми ададҳои ҳақиқӣ аст. Дар он адади дилхоҳи a-ро мегирем, он гоҳ

$$\Delta f=f(x)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)=3(a+\Delta x)+4-(3a+4)=$$

$$=3a+3\Delta x+4-3a-4=3\cdot\Delta x,\qquad \Delta f=3\cdot\Delta x$$

мешавад. Азбаски $\Delta x\to0$, пас $3\cdot\Delta x\to0$. Аз ин ҷо ҳангоми $\Delta x\to0$ $\Delta f=3\cdot\Delta x\to0$ -ро ҳосил мекунем. Мувофиқи шарт a-адади дилхоҳи маҷмуи R буд, пас $f(x)=3x+4$ дар тамоми $(-\infty;+\infty)$ бефосила мешавад.

Қайд мекунем, ки айнан ҳамин тавр бефосилагии функсияи хаттии $f(x)=kx+b$ дар тамоми R исбот карда мешавад.

б) $f(x)=2\sqrt{x}$, $D(f)=[0;+\infty)$. Барои ба мақсад ноил гаштан фарқи $f(x)-f(a)$-ро тартиб медиҳем, ки дар он a -нуқтаи дилхоҳи $[0;+\infty)$ мебошад:

$$\Delta f=2\sqrt{x}-2\sqrt{a}=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)=2\left(\sqrt{a+\Delta x}-\sqrt{a}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{\left(\sqrt{a+\Delta x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}=\frac{2(a+\Delta x-a)}{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}=\frac{2\Delta x}{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}$$

Маълум, ки ҳангоми $\Delta x\to0$, $2\cdot\Delta x\to0$ ва аз ин ҷо $\Delta f=\dfrac{2\Delta x}{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}\to\dfrac{0}{2\sqrt{a}}=0$, $\Delta f\to0$. Ҳамин тариқ, бефосилагии $f(x)=2\sqrt{x}$ дар нуқтаи a исбот гардид ва азбаски a нуқтаи дилхоҳи $[0;+\infty)$ аст, пас $f(x)=2\sqrt{x}$ дар тамоми $[0;+\infty)$ бефосила мешавад.

в). Адади a-ро нуқтаи дилхоҳи $(-\infty;+\infty)$ шуморида бефосилагии $f(x)=\cos x$ -ро дар фосилаи болои нишон медиҳем:

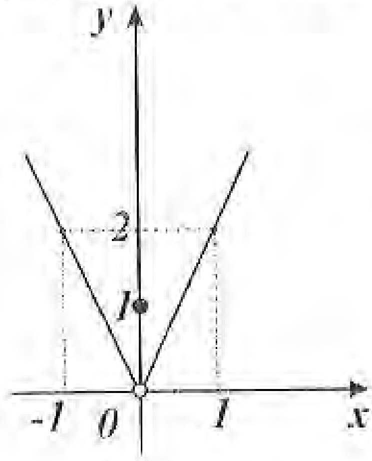
$$\Delta f=f(a+\Delta x)-f(a)=\cos(a+\Delta x)-\cos a=-2\sin\frac{a+\Delta x-a}{2}\cdot\cos\frac{a+\Delta x+a}{2}=$$

$$=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Маълум, ки ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\quad \frac{\Delta x}{2} \to 0, \quad \sin\frac{\Delta x}{2} \to \sin\frac{0}{2} = 0,$

$\sin\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \sin a$ ва аз ин ҷо $\Delta f = -2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) \to$
$\to -2 \cdot 0 \cdot \sin a = 0$ мешавад.

Иҷрошавии шарти $\Delta f \to 0$ аз бефосилагии функсияи $f(x) = \cos x$ дар нуқтаи дилхоҳи $a \in (-\infty;+\infty)$ шаҳодат медиҳад.



Расми 60

Мисоли 5. Оё функсияи $f(x) = \begin{cases} 2|x|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

дар нуқтаи $x = 0$ бефосила мешаавд ё не? Барои ба саволи гузошташуда ҷавоб гардондан ба шарти мисол назар мекунем. Мувофиқи он дар қиматҳои $x \neq 0$ $\quad f(x) = 2|x|$ мешавад, ки ин функсия дар тамоми $(-\infty;0)$ ва $(0;+\infty)$ бефосила аст (ниг. ба расми 61):

$$f(x) \to 2|a| = f(a), \qquad \text{агар} \qquad x \to a, \ a \neq 0.$$

Ҳангоми $a = 0$ будан $f(x) \to 2|a| \to 0$ вале аз рӯи шарт $f(0) = 1$ аст, яъне $f(x) \to 0 \neq 1 = f(a)$ мешавад. Аз ин рӯ функсия фосиланок буда, дар нуқтаи 0 каниш дорад.

Мисоли 6. Фосилаҳои бефосилагии функсияи

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ 5, & x = 2 \end{cases}$$ - ро ошкор месозем.

Ҳал. Агар $x \neq 2$ бошад, он гоҳ $f(x) = x + 2$ шуда дар тамоми $(-\infty;2)$ ва $(2;+\infty)$ бефосила мешавад:

$$f(x) = x + 2 \to a + 2 = f(a) \text{ барои } a \neq 2.$$

Ҳангоми $a = 2$ будан $a + 2 = 4$ мешавад, вале $f(2) = 5$ аст. Пас $f(x) \to 4 \neq f(2)$ шуда аз вайроншавии бефосилагии $f(x)$ дар нуқтаи $x = 2$ шаҳодат медиҳад.

Ҳамин тариқ функсияи мазкур дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ ба ғайр аз $x = 2$ бефосила буда аст.

?

1. Ҷумлаи "ҳангоми $x \to a$ $\quad f(x) \to L$ " чӣ маъно дорад?
2. Мафҳуми бефосилагиро аёнӣ шарҳ диҳед. Кадом таърифҳои бефосилагиро медонед?
3. Кадом нуқтаро нуқтаи каниши функсия меноманд? Мисолҳо оред.
4. Кадом функсияҳоро фосиланок меноманд? Бо мисолҳо шарҳ диҳед.

323. L-ро ёбед, агар

а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-9x+9}, x\to 1$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}, x\to 4$

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, x\to 1$ г) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+1}, x\to -1$;

д) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^3-1}, x\to 1$; е) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+5x+4}, x\to -1$;

ж) $f(x)=\dfrac{3\cos x}{6+x^2}, x\to 0$; з) $f(x)=\dfrac{2+tgx}{x^2+1}, x\to 0$;

и) $f(x)=\dfrac{1+cox}{x}, x\to\dfrac{\pi}{2}$ бошад.

324. Маълум, ки ҳангоми $x\to -2$ функсияҳои $f(x)$ ва $\varphi(x)$ мувофиқан ба 4 ва 9 майл мекунанд. Инро ба назар гирифта лимити функсияҳои зеринро ёбед:

а) $\varphi^2(x)$; б) $\dfrac{f(x)+\varphi(x)}{\varphi^2(x)}$; в) $\dfrac{4f(x)-3\varphi(x)}{f(x)-\varphi(x)}$.

325. Фосилаҳои бефосилагии функсияро ёбед:

а) $9x^4-7x^2+x-11$; б) $2x^2-5$; в) $\dfrac{x^2-9x+8}{x+1}$; г) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$;

д) $\dfrac{x^2-3}{x^3-4x}$; е) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$; ж) $\dfrac{3}{2x-1}$; з) $\dfrac{4x+3}{2}$.

326. Оё функсияи $f(x)$ дар нуқтаҳои фосилаи додашуда бефосила мешавад:

а) $f(x)=x^9-5x^4+6,\quad (-\infty;+\infty)$; б) $f(x)=2\sqrt{x}-7x+5,\quad (-4;+\infty)$;

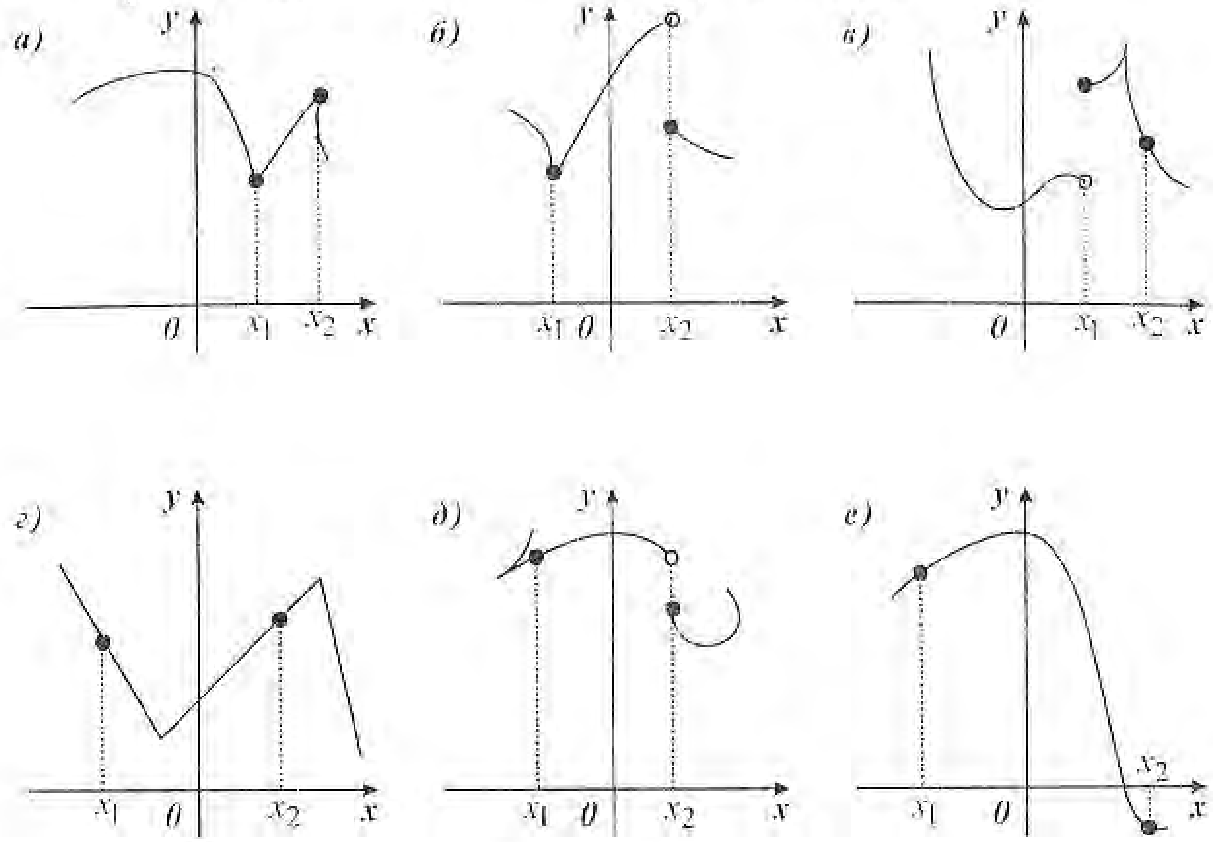
в) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)(x-4)},\quad (-\infty;5)$.

327. Оё функсияҳои графикаш дар расми 62 тасвирёфта дар нуқтаҳои x_1 ва x_2 бефосила мешаванд?

328. Исбот намоед, ки агар $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2+3x-2}$ бошад, он гоҳ ҳангоми $x\to 1$ $\quad f(x)\to f(1)=-\dfrac{1}{2}$ мешавад.

329 Графики функсияҳои зеринро сохта абсиссаҳои нуқтаҳоеро нишон диҳед, ки дар онҳо бефосилагӣ вайрон мешавад:

а) $f(x)=\begin{cases} 3|x|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} 2, & x < 1, \\ 1-x^2, & x \geq 1. \end{cases}$



Расми 62

Машқҳо барои такрор

330. Дар кадом қиматҳои ҳақиқии a муодилаи $\dfrac{x^2+2(a-1)x+a^2-a}{x-2}=0$ ду решаи гуногуни ҳақиқӣ дорад.

331 Қаиқ бо равиши ҷараёни дарё 48 км ва ҳамин қадар масофа ба муқобили ҷараён ҳаракат карда барои тамоми роҳ 5 соат вақт сарф намуд. Суръати хоси қаиқро ёбед, агар суръати ҷараёни дарё $4\dfrac{км}{соат}$ бошад.

332. Баъд аз пай дар пай ду маротиба ба ҳамон як фоиз паст кардани нарх, арзиши мол аз 300 сомонӣ то ба 192 сомонӣ фаромад. Ба кадом фоиз нархи мол ҳар ду маротиба паст карда шуд?

333. Ҳисоб кунед:

а) $5\sin\dfrac{\pi}{6}+3tg\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{4}-10ctg\dfrac{\pi}{4}$; б) $\left(2tg\dfrac{\pi}{6}-tg\dfrac{\pi}{3}\right):\cos\dfrac{\pi}{6}$.

334. Маълум, ки $tg\alpha=8$ аст. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\dfrac{ctg\alpha+tg\alpha}{ctg\alpha-tg\alpha}$; б) $\dfrac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

335. Содда кунед:

а) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; б) $\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot tg(\pi-\alpha)$.

336. Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

а) $3x^2+4x=7$; б) $3x=x^2+2$.

337. Абсиссаи қуллаи параболаро ёбед, агар

а) $y=3x^2-9x+5$; б) $y=2x-x^2$ бошад.

338. Афзоишҳои Δx ва Δy -ро барои функсияи $y=x^2+3$ ҳангоми

а) $x_1=1,1$ ва $x_o=1$; б) $x=2,4$, $x_o=2$ будан ёбед.

§ 9.Мафҳуми ҳосила

35. Суръати лаҳзагии ҳаракат. Шарҳи ин мафҳумро, ки аз физика ба мо маълум аст, аз ҳалли масъалаи зерин оғоз менамоем.

Масофа аз лавҳаи тормоздиҳиро ифодакунанда то истгоҳи вагони якум дар стансияи Душанбе ба 160м баробар аст. Агар ҳаракати минбаъдаи қатора мунтазам сустшаванда бо шитоби $a=3,2\dfrac{м}{сон^2}$ бошад, он гоҳ он ба лавҳаи тормоздиҳӣ бо кадом суръат наздик мешавад?

Маълум, ки масъала ёфтани суръати ҳаракати қатораро ҳангоми гузариш аз лавҳаи тормоздиҳӣ талаб менамояд (аниқтараш суръати лаҳзагиро...). Роҳи тормоздиҳӣ аз рӯи формулаи $2S=at^2$, ки a-шитоб, t-вақти тормоздиҳӣ аст, ҳисоб карда мешавад. Азбаски $S=160$ м, $a=3,2\dfrac{м}{сон^2}$ аст, пас $320=3,2t^2$ ва аз он $t=10$ сония ҳосил мегардад.

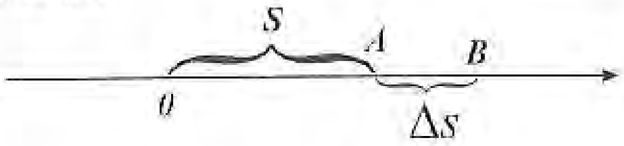
Аз формулаи $\upsilon=at$ суръати лаҳзагиро меёбем: $\upsilon=32\dfrac{м}{сон}$.

Бояд қайд кард, ки бисёр масъалаҳои характери амалӣ дошта аз суръати лаҳзагӣ вобастагӣ доранд. Масалан, аз суръати парвози киштии кайҳонӣ, дохилшавии он ба қабати маълуми атмосфера вобаста аст.

Гузориши масъала дар шакли умумӣ чунин аст: аз рӯи вобастагии маълуми $f(t)$ суръате, ки ба он ҷисм дар лаҳзаи вақти t ҳаракат мекунад, муайян карда шавад.

Ин суръатро дар физика **суръати лаҳзагӣ** меноманд. Барои аз рӯи $f(t)$-и маълум ($S=f(t)$ -ро қонуни ҳаракат ҳам меноманд) ёфтани суръати матлуби лаҳзагии $\upsilon_{лахз.}(t_0)$ дар дарсҳои физика чунин рафтор мекарданд: дар навбати аввал суръати миёнаи ҳаракатро дар фосилаи вақти давомнокиаш $|\Delta t|$ аз t_o то $t_o+\Delta t$ ёфта, баъд аз он натиҷаро ҳангоми Δt ба нул майл кардан тадқиқ менамоянд (чунки дар ин гуна фосилаҳои хеле хурди вақт суръат кариб тағйир намеёбад).

Бо мақсади ба дарки ҳалли масъала ноил гаштан фарз мекунем, ки ҷисм аз рӯи тири os аз чап ба рост ғайримунтазам ҳаракат мекунад. Дар ин ҳолат ҷисми ҳаракаткунанда дар ҳар воҳиди вақт масофаҳои гуногунро тай менамояд.



Расми 63

Чуноне ки дар боло қайд шуд , бо сабаби тағйирёбанда будани суръат нисбати масофаи тайшуда дар муддати вақти сарфшуда фақат суръати миёнаро медиҳад. Агар дар ягон лаҳзаи вақти t_o ҷисми ҳаракаткунанда вазъияти A-ро ва баъд аз гузаштани вақти Δt масофаи ΔS -ро тай карда вазъияти B-ро гирад, он гох

$S = f(t_o)$, $S + \Delta S = f(t_o + \Delta t)$, $\Delta s = f(t_o + \Delta t) - f(t_o)$, $\upsilon_{\text{миёна}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ мешавад.

Суръати ҳаракат дар лаҳзаи вақти t_o (яъне суръати лаҳзагӣ) бошад чун лимити суръати миёна дар мавриди хеле хурди Δt (яъне $\Delta t \to 0$) ҳосил мешавад:

$$\upsilon_{\text{миёна}} \to \upsilon_{\text{лаҳз}} = \upsilon(t_o) \text{ ё } \upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_o + \Delta t) - f(t_o)}{\Delta t} \to \upsilon(t_o)\ (\Delta t \to 0) \quad (1)$$

Масалан, барои масъалаи аввала амалиёти зерин ҷой дорад: суръати ҳаракати мунтазам сустшавандаи қатора аз рӯи қонуни $s = \dfrac{at^2}{2}$ дар фосилаи вақти $[10; 10 + \Delta t]$ ҳангоми $\Delta t \to 0$ ба

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = at_o + \dfrac{a}{2}\Delta t$, $\upsilon(10) = at_o = 3{,}2 \cdot 10 = 32\dfrac{м}{сон}$ баробар аст.

Агар қонуни ҳаракат дар шакли $h(t) = \upsilon_o t + \dfrac{gt^2}{2}$ дода шуда бошад, он гох суръати миёнаи он дар лаҳзаи дилхоҳи вақти t ба

$$\upsilon_{\text{миёна}}(t) = \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \frac{\upsilon_o \cdot (t + \Delta t) + \dfrac{g \cdot (t + \Delta t)^2}{2} - \upsilon_o t - \dfrac{gt^2}{2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\upsilon_o t + \upsilon_o \Delta t + \dfrac{gt^2}{2} + gt \cdot \Delta t + \dfrac{g(\Delta t)^2}{2} - \upsilon_o t - \dfrac{gt^2}{2}}{\Delta t} = \frac{\left(\upsilon_o + gt + \dfrac{g\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t}{\Delta t} =$$

$$= \upsilon_o + gt + \frac{g \cdot \Delta t}{2}, \quad \upsilon_{миёна}(t) = \upsilon_o + gt + \frac{g \cdot \Delta t}{2}.$$

Азбаски $\Delta t \to 0$, пас $\upsilon_o + gt + \frac{g \cdot \Delta t}{2} \to \upsilon_o + gt$ ва аз ин чо $\upsilon_{лахз.} = \upsilon_o + gt$ мешавад.

36-37. Таърифи ҳосила. Масъалаҳои дар п35 дида баромадаамон, ба ёфтани суръати лаҳзагӣ вобаста буда, модели математикиеро ифода мекунанд, ки аз нисбати афзоиши функсия бар афзоиши аргумент ҳангоми ба 0 майл кардани бузургии охирин иборат аст (ниг. ба (1)). Чунин масаъалаҳои ба ин лимит оваранда, ягона набуда, балки дар ҳалли бисёр масъалаҳои дигар вомехӯранд. Аз ин рӯ омӯзиши назарияи онҳо (дар шакли умумӣ) ва ёфтани қиматҳояшон диққати махсусро талаб мекунад.

Онди функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи дилхоҳи x_o-и соҳаи муайяниаш схемаи зеринро амалӣ мегардонем:

а)афзоиши функсияро дар нуқтаи x_o меёбем:

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$$

б) онро (яъне Δf -ро) ба $\Delta x \neq 0$ тақсим намуда, ба ифодаи

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} \tag{2}$$

соҳиб мешавем.

в) ҳангоми ба нул майл кардани Δx ба кадом адад майл кардани ифодаи $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ -ро муайян мекунем.

Таъриф. Ададе, ки ба он нисбати афзоиши функсия бар афзоиши аргумент ҳангоми ба нул майл кардани афзоиши аргумент майл мекунад, ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 номида мешавад.

Ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ -ро дар нуқтаи x_0 бо рамзи $f'(x_0)$ (эф штрих аз икс нол) ишорат менамоянд.

Схемаи ба пунктҳои а) - в) асоснокшудаи ёфтани ҳосилаи функсияро шартан **алгоритми ёфтани ҳосилаи функсия** номида аз рӯи он ҳосилаи функсияҳои

1) $f(x) = kx + b$; 2) $f(x) = x^2$; 3) $f(x) = x^3$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}$ ва

5) $f(x) = \sqrt{x}$ -ро дар нуқтаи дилхоҳи соҳаи муайяниашон меёбем.

1) $f(x) = kx + b$, $k, b = const$. а) Азбаски $f(x_o) = kx_o + b$,

$f(x_o + \Delta x) = k(x_o + \Delta x) + b$ аст, пас

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = k(x_o + \Delta x) + b - kx_o - b =$$

$= k(x_0 + \Delta x - x_0) = k \cdot \Delta x$ мешавад. б) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k, \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = k;$

в) $k = const$, пас нисбати $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ низ барои $\Delta x \to 0$ доимӣ мешавад. Аз ин чо $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to k$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ ва $(kx + b)' = k$ ҳосил мешавад.

Агар дар формулаи охирин аввал $k = 0, b = c$ ва баъд $k = 1, b = 0$ гирем, он гоҳ формулаҳои

$$(c)' = 0 \text{ ва } (x)' = 1$$

-ро ҳосил мекунем. Ин ду формула мувофикан ба тасдикотҳои
- ҳосилаи бузургии доимӣ ба нул ва
- ҳосилаи x ба 1 баробар аст,

мувофиқ меоянд.

2) $f(x) = x^2$. а), б) Аз рӯи схемаи болоӣ амал карда, $\Delta f = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$ -ро хосил мекунем. Аз ин чо $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$ мешавад;

в) ҳангоми $\Delta x \to 0$ ифодаи $2x_0 + \Delta x$ ба $2x_0$ майл мекунад.

Пас, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 2x_0$ ҳангоми $\Delta x \to 0$. Нуқтаи дилхоҳ будани x_0 -ро ба ҳисоб гирифта

$$(x^2)' = 2x$$

-ро пайдо мекунем.

3) $f(x) = x^3$. Маълум, ки барои ин функсия дар нуктаи x_0 ва $x_0 + \Delta x$ -и сохаи муайянӣ $f(x_0) = x_0^3$ ва $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3$ мешавад. Аз ин қиматҳо аввал афзоиши функсия ва баъд нисбати онро бар афзоиши аргумент тартиб медиҳем (пунктҳои а), б))

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\left[3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right] \cdot \Delta x}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2, \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + \left(\Delta x^2\right).$$

Азбаски ҷамъшавандаҳои $3x_0 \cdot \Delta x$ ва $\left(\Delta x^2\right)$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ ба 0 майл мекунанд, пас, дар ин ҳолат $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x_0^2$. Айнан ҳамин тавр барои ҳар гуна x формулаи $(x^3)' = 3x^2$ хосил мегардад.

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ Фарз мекунем, ки $x_0 \neq 0$ бошад, он гоҳ

$$\Delta f = \frac{1}{x_o + \Delta x} - \frac{1}{x_o} = -\frac{\Delta x}{x_o(x_o + \Delta x)}$$

ва $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{1}{x_o(x_o + \Delta x)}$$ мешавад.

Ҳангоми $\Delta x \to 0$ $x_0 + \Delta x \to x_0$ ва $x_0(x_0 + \Delta x) \to x_0^2$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -\frac{1}{x_0^2}$ мешавад.

Азбаски x_0-нуқтаи дилхоҳи $(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$ аст, пас дар ҳамин фосила $$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$ мешавад.

5) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \ge 0$. Афзоиши функсияро дар нуқтаи дилхоҳи $x_o(x_o \ge 0)$ меёбем.

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = \sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o} = \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_o}\right)^2}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{x_o + \Delta x - x_o}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}.$$

Нисбати $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ намуди зеринро мегирад: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$.

Азбаски ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\sqrt{x_o + \Delta x} \to \sqrt{x_o}$, $\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o} \Rightarrow 2\sqrt{x_0}$

ва $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$, он гоҳ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Эзоҳ. Функсияи дар нуқта дорои ҳосила **бударо дар ҳамин нуқта дифференсиронидашаванда** меноманд. Агар функсияи $y = f(x)$ **дар ягон фосила дифференсиронидашаванда** бошад, он гоҳ он **дар ҳар як нуқтаи фосила дорои ҳосила мешавад.**

Ҳосилаи функсияро бо y' ҳам ишорат мекунанд. Амалиёти ёфтани ҳосилаи функсияро **дифференсиронии функсия** низ меноманд.

Натиҷаи дифференсиронии функсияҳои болоиро дар ҷадвали зерин ҷой медиҳем:

$f(x)$	c	x	x^2	x^3	$kx+b$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$
$f(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	k	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$

Ниҳоят гуфтаҳои пункти 35-ро ба назар гирифта аз рӯи суръати миёнаи тағйирёбии функсия (ниг. п. 33.3.-и § 8) дар порчаи $[x_0; x_0+\Delta x]$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$-ро ҳосил кардан мумкин аст, ки онро суръати лаҳзагии тағйирёбии функсия ҳам меноманд.

38. Бефосилагии функсияи дифференсиронидашаванда.

Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теорема. Агар функсияи $f(x)$ дар нуқтаи дилхоҳи соҳаи муайяниаш дифференсиронидашаванда бошад, он гоҳ вай дар ҳамин нуқта бефосила мешавад (яъне ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$).

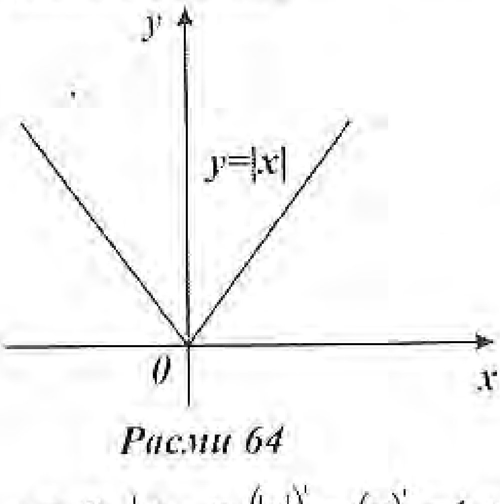
Исбот. Афзоиши функсияро дар шакли $\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x$ ифода мекунем.

Аз рӯи маълумотҳои то ҳоло ҳосил кардаамон ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$ ва $\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x \to f'(x_0) \cdot 0$-ро ҳосил мекунем, ки он ба $\Delta f \to f'(x_0) \cdot 0 \to 0$ $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \right)$ меорад (яъне ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$). Натиҷаи охирин бефосилагии $f(x)$-ро дар нуқтаи x_0 ифода мекунад (ниг. ба пункти 34.2 г)).

Натиҷа. Барои функсияи дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда ҳангоми $\Delta x \to 0$ аз шарти $\Delta f \to 0$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0 \quad \text{ё} \quad f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0) \tag{3}$$

ҳосил мешавад.



Расми 64

Ниҳоят қайд мекунем, ки ҷумлаи ба теоремаи исбот кардаамон баръакс на ҳамеша ҷой дорад.

Масалан, функсияи $y = |x|$ (Расми 64, он аз синфи 9 шинос аст), гарчанде дар тамоми $R = (-\infty; +\infty)$ бефосила бошад ҳам вале, дар нуқтаи $x = 0$-и он ҳосила надорад.

(Мувофиқи хосияти $|x|$ барои $x > 0$ $|x| = x$, $(|x|)' = (x)' = 1$ ва барои $x < 0$ $|x| = -x$, $(|x|)' = (-x)' = -1$ яъне

$$(|x|)' = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty; 0) \\ 1, & x \in (0; +\infty) \end{cases} \quad \text{мешавад).}$$

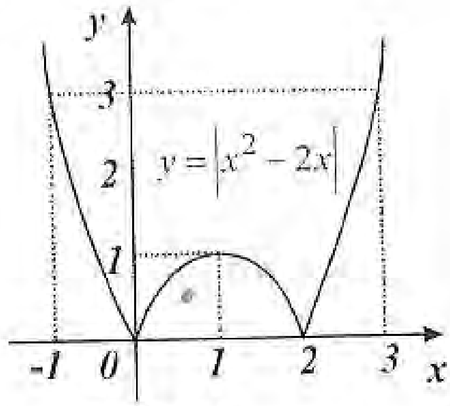
Дар ҳақиқат.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}-1, & \text{агар} \quad \Delta x>0\\ 1, & \text{агар} \quad \Delta x<0\end{cases}$$

Яъне нисбати $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ҳангоми $x \to 0$ дорои лимит нест.

Муҳокимаронихои болоӣ нисбати функсияи $y=|x^2-2x|$ низ ҷой дорад (Расми 65).

Ин функсия дар ҳамаи нуқтаҳои тири ададӣ муайяну бефосила буда, вале дар нуқтаҳои $x=0$ ва $x=2$ дифференсиронида намешавад.



Расми 65

?

1. Мафҳуми суръати лаҳзагиро шарҳ диҳед?
2. Ба ҳосилаи функсия дар нуқта таъриф диҳед.
3. Дар зери мафҳуми функсиҳои дифференсиронидашаванда ва дифференсиронии функсия чиро мефаҳмед?
4. Оё функсияи дифференсиронидашаванда бефосила шуда метавонад ё не? Баръаксаш чӣ? Мисолҳо оред.

339. Нуқтаи материалӣ аз рӯи қонуни $s(t)=4+2t$ ҳаракат мекунад. Суръати миёнаи онро дар фосилаи вақти

1) аз $t=4{,}8$ то $t=5$; 2) аз $t=2{,}4$ то $t=3$ ёбед.

340. Агари қонуни ҳаракат $S=f(t)$ бо формулаи

1) $f(t)=3t-1$; 2) $f(t)=t^2-1$;

дода шуда бошад, он гоҳ суръати миёнаи ҳаракат дар порчаи $[3;\,3{,}1]$ ба чӣ баробар мешавад?

341. Суръати лаҳзагии ҳаракати нуқтаи материалиро аз рӯи қонуни $S(t)$-и додашудааш ёбед:

а) $S=5t+3$; б) $S=3t^2-2{,}3$

342. Суръати ҷисми аз рӯи қонуни $S=2t^2-3t+9$ ҳаракаткунандаро дар лаҳзаи вақти

а) $t=3$; б) $t=6$ ёбед.

343. Қимати $\frac{\Delta f}{\Delta x}$-ро аз рӯи додашудаҳои зерин ҳисоб кунед:

а) $f(x)=x^2-1$, $x_0=3$, $\Delta x=0{,}005$; б) $f(x)=2x^3$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}001$;

в) $f(x)=\frac{7}{x}$, $x_0=-2$, $\Delta x=0{,}05$; г) $f(x)=x+x^3$, $x_0=4$, $\Delta x=0{,}02$.

344. Аз алгоритми ёфтани ҳосилаҳо истифода бурда ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $f(x)=x^2+2x^3-3$; б) $f(x)=x^2+3x$; в) $f(x)=1+5x$;

г) $f(x)=2-3x^2$; д) $f(x)=4x-9$; е) $\varphi(x)=x^3-1$; ж) $\varphi(x)=\frac{3}{x}+x$;

з) $\varphi(x)=\sqrt{x}-x^2$; и) $g(x)=x-3\sqrt{x}$; к) $g(x)=x-2x^2+3x^3$.

345. Аз чадвали пункти 36-37 истифода бурда қимати ҳосилаи функсияҳоро дар нуқтаҳои нишондодашуда ёбед:

а) $f(x)=ax+b$ $(a,b-const)$, $f'(100)$, $f'(-11)-?$

б) $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(4)$, $f'(625)-?$

в) $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi'(-3)$, $\varphi'(5)-?$ г) $g(x)=x^3$ $g'(6)$, $g'(-1)-?$

347. Графики функсияи $y=2x^2+2$ ва графики функсияи ҳосилаи онро ифодакунанда дар як ҳамвории координатавӣ сохта шаванд.

348. Агар а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=\sqrt{x}$ бошад, он гоҳ дар кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи $f(x)$ ба 2 баробар мешавад.

349. Маълум, ки а) $f(x)=x^3$ ва б) $f(x)=\frac{1}{x}$ аст. Дар кадом қиматҳои x баробарии $f'(x)=3f(x)$ ҷой дорад?

350. Нишон диҳед, ки ҳосилаи функсияҳои

а) $f(x)=7x-1$; б) $f(x)=5x^2$; в) $f(x)=1-x^2$

дар тамоми $(-\infty;+\infty)$ бефосилаанд.

351. Оё функсияи

а) $f(x)=|x|+1$ дар нуқтаи $x=0$;

б) $f(x)=\left|x^2-x\right|$ дар нуқтаи $x=0$ ва $x=1$

дорои ҳосила мешавад ё не?

Машқҳо барои такрор

352. Амалро иҷро кунед:

а) $(8x^2+10x-3):(2x+3)$; б) $(x^4+4):(x^2+2x+4)$;

в) $(x^5+2x^3-x^2-2):(x^3-1)$; г) $(3x^3+x^2-9x-3):(3x+1)$.

353. Кадоме аз функсияҳои зерин ҷуфт ва кадомаш ток аст:

а) $y=x^4+2x^2+9$; б) $y=x^3+2x$; в) $y=\frac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}$; г) $y=x^4+2|x|$.

354. Ифодаро содда намуда, қимати ададиашро ёбед:

а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(2\pi+\alpha)$, агар $\cos\alpha=\frac{1}{4}$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, агар $\sin\alpha=\frac{1}{6}$ бошад.

355. Содда кунед:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(\alpha-\pi)}$.

356. Суммаи шаст аъзои аввали пайдарпаии ададҳои натуралии ҷуфтро ёбед.

357. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x^3+2x^2-5x-6=0$; б) $(2x+1)(x^3+1)+x^2=2x(x^3+3)-5$.

358. Суммаи квадратҳои сурат ва махраҷи касри дуруст ба 25 баробар аст. Касрро ёбед, агар суммаи он бо касри чаппааш ба $\frac{25}{12}$ баробар бошад.

359. Касри беохири даврии

а) 0,444...; б) 2,1051; в) –4(27); г) 0,2727...

-ро дар шакли касри оддӣ нависед.

360. Оё муодилаи $3x^6+2x^4+9=0$ дар $(-\infty;\ +\infty)$ реша дорад?

§ 10. Қоидаҳои асосии дифференсиронӣ

39. Ҳосилаи сумма, зарб ва тақсими ду функсия. Дар ин пункт, ки аз се қисм иборат аст, формулаҳои дифференсирониро барои ёфтани ҳосилаи суммаи алгебравӣ, зарб ва тақсими ду функсия ҳосил мекунем. Бо мақсади баёни мухтасари мавод ишоратҳои зеринро қабул мекунем:

$U(x_o)=U,\ \ V(x_o)=V,\ \ U'(x_o)=U',\ \ V'(x_o)=V',$

Қоидаи 1 (ҳосилаи сумма). Ҳосилаи сумма ба суммаи ҳосилаҳо баробар аст:

$$(U+V)'=U'+V' \qquad (1)$$

Ин қоидаи ҳосилаёбиро пурратар чунин ҳам баён мекунанд: **агар ҳар яки аз функсияҳои $U(x)$ ва $V(x)$ дар нуқтаи x_o дорои** ҳосила (дифференсиронидашаванда) бошанд, он гоҳ суммаи онҳо $U+V$ низ дар ин нуқта дорои ҳосила (дифференсиронидашаванда) буда, илова бар он формулаи (1) ҷой дорад.

Ишорати $f(x)=U(x)+V(x)$-ро дохил намуда, исботро аз ёфтани афзоиши сумма оғоз менамоем:

$$\Delta(U+V)=U(x_o+\Delta x)+V(x_o+\Delta x)-[U(x_o)+V(x_o)]=$$
$$=U(x_o+\Delta x)-U(x_o)+[V(x_o+\Delta x)-V(x_o)]=\Delta U+\Delta V$$

Аз ин ҷо $\frac{\Delta(U+V)}{\Delta x}=\frac{\Delta U+\Delta V}{\Delta x}=\frac{\Delta U}{\Delta x}+\frac{\Delta V}{\Delta x}$ мешавад.

Ин қадами амалиётамон ба пункти б)-и алгоритмӣ ёфтани ҳосилаҳо мувофиқ меояд.

Дар қадами охирин дифференсиронидашавандагии функсияҳои U ва V-ро дар нуқтаи x_0 ба назар гирифта (мувофиқи шарт $\frac{\Delta U}{\Delta x}\to U'$, $\frac{\Delta V}{\Delta x}\to V'$ ҳангоҳи $\Delta x\to 0$), ҳосил мекунем, ки ифодаи

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta U}{\Delta x}+\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

ба $U'+V'$ майл мекунад. Пас тарафи чапи ифодаи охирин ба $f'(x_0)=U'+V'$ баробар мешавад ва аз он формулаи (1) бармеояд.

Айнан ҳамин тавр ҳосилаи фарқи ду функсия ёфта мешавад. Дар асоси гуфтаҳои боло барои ду функсияҳои U ва V формулаи

$$(U\pm V)'=U'\pm V' \qquad (2)$$

ҷой дорад.

Формулаҳои (1) ва (2) барои миқдори шумораашон маҳдуди ҷамъшавандаҳо дуруст аст:

$$(U+V+...+W)'=U'+V'+...+W' \qquad (3)$$

Масалан, дар асоси формулаҳои болоӣ ҳосилаи функсияи

$$\varphi(x)=x^3+x^2-\sqrt{x}-\frac{1}{x}+4 \quad \text{ба}$$

$$\varphi'(x)=\left(x^3+x^2-\sqrt{x}-\frac{1}{x}+4\right)'=\left(x^3\right)'+\left(x^2\right)'-\left(\sqrt{x}\right)'-\left(\frac{1}{x}\right)'+(4)'=$$

$$=3x^2+2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)+0=3x^2+2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$$

баробар мешавад.

Қоидаи 2 (ҳосилаи зарб). Ҳосилаи зарби ду функсия ба ҳосили зарби ҳосилаи функсияи якум бар функсияи дуюм плюс ҳосили зарби ҳосилаи функсияи дуюм бар функсияи якум баробар аст:

$$(U\cdot V)'=U'V+V'U \qquad (4)$$

Қоидаи (2)-ро дар шакли тасдиқоти зерин ҳам баён кардан мумкин аст: **агар функсияҳои $U(x)$ва $V(x)$дар нуқтаи x_0 дорои ҳосила (дифференсиронидашаванда) бошанд, он гоҳ зарбашон** $U\cdot V=F(x)$ дар ҳамин нуқта дорои ҳосила (яъне дифференсиронидашаванда) буда, илова бар он формулаи (4) ҷой дорад.

Дурустии формулаи (4)-ро дар мисоли функсияҳои $U(x)=x^2$ ва

$V(x)=\frac{1}{x}-x$ месанчем. Барои тарафи чап $(U\cdot V)'=\left[x^2\cdot\left(\frac{1}{x}-x\right)\right]'=$
$=\left(x-x^3\right)'=1-3x^2$ ва барои тарафи рост $U'V+V'U=\left(x^2\right)'\cdot\left(\frac{1}{x}-x\right)+$
$+\left(\frac{1}{x}-x\right)'\cdot x^2=2x\left(\frac{1}{x}-x\right)+\left(-\frac{1}{x^2}-1\right)\cdot x^2=2-2x^2-1-x^2=1-3x^2$ -ро ҳосил мекунем. Муқоисаи ифодаҳои ҳосил кардаамон аз ҳаққонияти формулаи (4) шаҳодат медиҳанд.

Акнун аз рӯи алгоритми ёфтани ҳосилаҳо $(U\cdot V)'$-ро ёфта, дурустии формулаи (4)-ро исбот мекунем:

а) Афзоиши ҳосили зарби функсияҳоро меёбем:

$$\Delta(U\cdot V)=U(x_0+\Delta x)\cdot V(x_0+\Delta x)-U(x_0)\cdot V(x_0)=[U(x_0)+\Delta U]\cdot[V(x_0)+\Delta V]-$$
$$-U(x_0)\cdot V(x_0)=U(x_0)\cdot V(x_0)+U(x_0)\cdot\Delta V+V(x_0)\cdot\Delta U+\Delta U\cdot\Delta V-$$
$$-U(x_0)\cdot V(x_0)=U(x_0)\cdot\Delta V+V(x_0)\cdot\Delta U+\Delta U\cdot\Delta V$$

б) $$\frac{\Delta(U\cdot V)}{\Delta x}=\frac{\Delta U}{\Delta x}\cdot V(x_0)+\frac{\Delta V}{\Delta x}\cdot U(x_0)+\Delta U\cdot\frac{\Delta V}{\Delta x} \qquad (5)$$

в) Дифференсиронидашавандагии функсияҳои U ва V дар нуқтаи x_0 (мувофиқи шарт) ба натиҷаҳои зерин меоранд:

ҳангоми $\Delta x\to 0$ $\frac{\Delta U}{\Delta x}\to U'$, $\frac{\Delta V}{\Delta x}\to V'$, $\Delta U\to 0$

(хотиррасон мекунем, ки дар асоси теорема оиди бефосилагии функсияи дифференсиронидашаванда (п.36-37) ҳангоми $\Delta x\to 0$ $\Delta U\to 0$). Аз ин ҷо ҳар яки аз се ҷамъшавандаҳои тарафи рости (5) ҳангоми $\Delta x\to 0$ мувофиқан ба $U'V, V'U$ ва 0 майл мекунанд. Бо ибораи дигар тарафи рост ба $U'V+V'U$ майл мекунад. Пас, тарафи чап ҳангоми $\Delta x\to 0$ ба $F'(x)=U'V+V'U$ баробар мешавад. Дар баробарии охирин ба ҷои $F(x)$ қиматаш $U\cdot V$ -ро гузошта, формулаи (4)-ро ҳосил мекунем.

Агар дар (4) $V=c=const$ гирем ва аз $(c)'=0$ будан истифода кунем (ниг. ба **ҷадвали саҳ. 152**), он гоҳ

$$(c\cdot U)'=(c)'\cdot U+c\cdot U'=0\cdot U+c\cdot U'=c\cdot U'$$

пайдо мешавад.

Ҳамин тариқ,

$$(c\cdot U)'=c\cdot U' \qquad (6)$$

мешавад, ки он аз дурустии тасдиқоти зерин шаҳодат медиҳад: **зарбшавандаи доимиро аз зери аломати ҳосила баровардан мумкин аст.**

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияи $f(x)=x^3\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)$-ро меёбем.

Ҳал . Дар асоси формулаи (4) ва баъдтар (2) ҳосил мекунем:

$$f'(x)=\left[x^3\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)\right]'=\left(x^3\right)'\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)+x^3\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)'=3x^2\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)+x^3\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+0\right)=x^2\left(3\sqrt{x}+6+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)=x^2\left(3\sqrt{x}+6+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)=x^2\left(\frac{7}{2}\sqrt{x}+6\right).$$

Мисоли 2. Ҳангоми $f(x)=\left(3x^2+1\right)(x+1)$ будан решаҳои муодилаи $f'(x)=0$-ро меёбем.

Ҳал : Аз рӯи формулаи (4) (дар ин ҷо $U=3x^2+1,\ V=x+1$)

$f'(x)=\left[\left(3x^2+1\right)(x+1)\right]'=\left(3x^2+1\right)'\cdot(x+1)+(x+1)'\cdot\left(3x^2+1\right)$ -ро ҳосил мекунем.

Қиматҳои $\left(3x^2+1\right)'$ ва $(x+1)'$-ро аввал аз рӯи қоидаи 1 ва баъд аз рӯи формулаи (6) меёбем.

$\left(3x^2+1\right)'=\left(3x^2\right)'+(1)'=3\left(x^2\right)'+0=3\cdot 2x=6x,\ (x+1)'=(x)'+(1)'=1+0=1$

Аз ин ҷо,

$f'(x)=6x(x+1)+1\cdot\left(3x^2+1\right)=6x^2+6x+3x^2+1=9x^2+6x+1=(3x+1)^2$ ва

муодилаи $f'(x)=0$ ба муодилаи $(3x+1)^2=0$ меорад, ки $x=-\frac{1}{3}$ решаи каратии он аст.

Қоидаи 3 (ҳосилаи каср). Ҳосилаи тақсими ду функсия ба касри махраҷаш аз квадрати махраҷи касри додашуда сураташ ба фарқе баробар аст, ки тарҳшавандааш аз ҳосили зарби махраҷ бар ҳосилаи сурат ва тарҳкунандааш аз ҳосили зарби сурат бар ҳосилаи махраҷ мебошад:

$$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-V'U}{V^2} \qquad (7)$$

Бо дигар ибора, **агар функсияҳои U ва V дар нуқтаи x_0 дорои ҳосила (яъне дифференсиронидашаванда) ва $V(x_0)\neq 0$ бошад, он гоҳ ҳосили тақсими онҳо $\phi(x)=U(x):V(x)$ низ дар нуқтаи x_0 дорои ҳосила буда, илова бар он формулаи (7) ҷой дорад.**

Дурустии формулаи

$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$-ро, ки пештар (§9) дар асоси таърифи ҳосила ёфта будем, бо ёрии формулаи (7) месанҷем. Дар ҳақиқат, агар $U=1$ ва $V=x$ гирем, он гоҳ $\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{(1)'\cdot x-(x)'\cdot 1}{x^2}=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$ мешавад.

Барои исботи (7) формулаи (4)-ро барои функсияҳои U ва $\frac{1}{V}$ татбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \left(U\cdot\frac{1}{V}\right)' = U'\cdot\frac{1}{V} + \left(\frac{1}{V}\right)'\cdot U$$

Акнун $\left(\frac{1}{V}\right)'$ -ро меёбем:

а). Афзоиши функсияи $\frac{1}{V}$ намуди зеринро мегирад:

$$\Delta\left(\frac{1}{V}\right) = \frac{1}{V(x_o+\Delta x)} - \frac{1}{V(x_o)} = \frac{V(x_o)-V(x_o+\Delta x)}{V(x_o)\cdot V(x_o+\Delta x)} = \frac{-\Delta V}{V(x_o)\cdot[V(x_o)+\Delta V]};$$

б). $$\frac{\Delta\left(\frac{1}{V}\right)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta V}{\Delta x}}{V(x_o)\cdot[V(x_o)+\Delta V]};$$

в). Ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta V}{\Delta x} \to V'$ (чун функсияи дар нуқтаи x_o дифференсиронидашаванда) ва $\Delta V \to 0$ (дар асоси теоремаи п.38).

Аз ин ҷо, $$\frac{\Delta\left(\frac{1}{V}\right)}{\Delta x} \to \frac{-V'}{V(V+0)} = -\frac{V'}{V^2}, \quad \left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2} \qquad (8)$$

ва $$\left(\frac{U}{V}\right)' = U'\cdot\frac{1}{V} + \left(\frac{1}{V}\right)'\cdot U = U'\cdot\frac{1}{V} - \frac{V'}{V^2}\cdot U = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

ҳосил мешаванд.

Агар дар ҳолати хусусӣ, $U = c = const$ гирем, он гоҳ

$$\left(\frac{c}{V}\right)' = \frac{(c)'\cdot V - (V)'\cdot c}{V^2} = \frac{0\cdot V - c\cdot V'}{V^2} = -\frac{cV'}{V^2}$$ мешавад.

Аз ин ҷо, формулаи

$$\left(\frac{c}{V}\right)' = -\frac{cV'}{V^2} \qquad (9)$$

-ро ва ҳангоми $c=1$ будан формулаи (8)-ро ҳосил мекунем.

Мисоли 3. Ҳосилаи функсияи

а) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$; б) $f(x) = \sqrt{x} - x^3$; в) $f(x) = (2x+1)\cdot\sqrt{x}$; г) $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$

-ро дар нуқтаи $x = 4$ меёбем.

Ҳал. а) $f'(x)=\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)'=(x)'+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=1+\left[-\dfrac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}\right]=1-\dfrac{2x}{x^4}=1-\dfrac{2}{x^3}$,

$$f'(4)=1-\frac{2}{4^3}=1-\frac{2}{64}=1-\frac{1}{32}=\frac{32-1}{32}=\frac{31}{32},\quad f'(4)=\frac{31}{32}.$$

Дар рафти ҳал аз ҷадвали п. 36-37 ва формулаҳои (1), (8) истифода бурда шуд.

б) $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'-\left(x^3\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-3x^2,\qquad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-3x^2,$

$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}-3\cdot 4^2=\frac{1}{2\cdot 2}-3\cdot 16=\frac{1}{4}-48=\frac{1-192}{4}=-\frac{191}{4},\quad f'(4)=-\frac{191}{4}.$$

в) Барои ёфтани ҳосилаи функсияи $f(x)=(2x+1)\cdot\sqrt{x}$ дар нуқтаи дилхоҳи x аз формулаҳои (4), (1) ва (6) бо тартиби омадаашон истифода мебарем:

$$f'(x)=\left[(2x+1)\cdot\sqrt{x}\right]'=(2x+1)'\cdot\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)'\cdot(2x+1)=\left[(2x)'+(1)'\right]\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$$

$$\cdot(2x+1)=2\sqrt{x}+\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x+1}{2\sqrt{x}},\quad f'(x)=\frac{6x+1}{2\sqrt{x}}$$

Акнун қимати ҳосиларо дар нуқтаи матлуби 4 меёбем:

$$f'(4)=\frac{6\cdot 4+1}{2\sqrt{4}},=\frac{24+1}{2\cdot 2}=\frac{25}{4},\text{ ҷавоб } \frac{25}{4}.$$

г) Азбаски $\left(x^3-4\right)'=3x^2-0=3x^2$ ва $\left(x^2+1\right)'=2x+0=2x$ аст, пас дар асоси қоидаи 3-юми дифференсиронӣ

$$f'(x)=\left(\frac{x^3-4}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^3-4\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^3-4\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^2\cdot\left(x^2+1\right)-2x\left(x^3-4\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4+8x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^4+3x^2+8x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

ва аз ин ҷо $f'(4)=\dfrac{4^4+3\cdot 4^2+8\cdot 4}{\left(4^2+1\right)^2}=\dfrac{256+48+32}{17^2}=\dfrac{144}{289}$ мешавад.

Мисоли 4. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+5}$. Чунин қиматҳои x-ро меёбем, ки барояшон

а) $f'(x)>0$, б) $f'(x)<0$, $(x\neq -5)$ мешаванд.

Ҳал. Аз рӯи формулаи (7)

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x+5}\right)'=\frac{(x^2)'\cdot(x+5)-(x+5)'\cdot x^2}{(x+5)^2}=\frac{2x\cdot(x+5)-1\cdot x^2}{(x+5)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+10x-x^2}{(x+5)^2}=\frac{x^2+10x}{(x+5)^2}.$$

Маълум, ки барои $x\neq-5$ $(x+5)^2>0$ аст, пас аломати каср фақат ба сурат вобаста аст. Аз рӯи методи фосилаҳо нобаробариҳои

$$\frac{x^2+10x}{(x+5)^2}>0 \text{ ва } \frac{x^2+10x}{(x+5)^2}<0$$

-ро, ки мувофиқан ба талаботҳои а) ва б)-и шарти масъала мувофиқ меоянд, ҳал карда натиҷаҳои зеринро ҳосил мекунем:

а) барои $x\in(-\infty;-10)\cup(0;+\infty)$ $f'(x)>0$;

б) барои $x\in(-10;-5)\cup(-5;0)$ $f'(x)<0$.

Мисоли 5. Ақалан формулаи як функсияеро менависем, ки барояш ҳосила ба а) -9; б) $2x+5$; в) $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ баробар бошад.

Ҳал. Аз ҷадвали ҳосилаҳои п. 37 ва қоидаҳои дифференсиронӣ истифода бурда, барои а) функсияи $-9x$, барои б) функсияи x^2+5x ва барои в) функсияи $x+\sqrt{x}$ -ро навиштан мумкин аст.

?

1. Кадом қоидаҳои асосии дифференсиронии функсияҳоро медонед?
2. Дар асоси қоидаҳои 1-3 кадом формулаҳои дифференсирониро дар нуқта ҳосил кардан мумкин аст?
3. Оё қоидаҳои 1 ва 2 барои шумораи охирноки функсияҳо (аз ду зиёд) ҷой доранд?
4. Оё формулаи (7)-ро ба ёрии қоидаи 2 ҳосил намудан мумкин аст?

361. Ҳосилаи функсияҳои $ax+b$ ва ax^2+bx+c -ро ҳангоми а) $a=1,\ b=2;$ б) $a=1,\ b=-1;$ в) $a=-1,\ b=-2;$ г) $a=0, c=1$ будан ёбед.

362. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) x^3+x^2; б) x^3-x^2; в) x^3+11; г) $-17+x^2$;

д) x^2-4x+9; е) x^2+6x-3; ж) x^3+x^2; з) x^3+x^2+1;

и) $x+\frac{1}{x}$; к) $x^3+\frac{1}{x}$; л) $\frac{1}{x}-\sqrt{x}+x$; м) $\sqrt{x}-x^2+3$.

363. $f'(1)$ ва $f'(9)$ -ро барои функсияҳои зерин ёбед:

а) $f(x)=x^2-2x+8$; б) $f(x)=x^3-8$; в) $f(x)=x^2-x$; г) $f(x)=x^3+6x$;

д) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$; е) $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^2$; ж) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}+3$; з) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$;

364. Агар

а) $f(x)=3x+1-x^2$; б) $f(x)=x^3-x^2-7x+1$; в) $f(x)=x^3-x^2-5$;

г) $f(x)=x^2+5x-8$; д) $f(x)=x^3-2x$; е) $f(x)=x^3+x^2-12x-3$

бошад, он гоҳ решаҳои муодилаи $f'(x)=0$ -ро ёбед.

365. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $\left(x-x^3\right)\left(x+x^3\right)$; б) $(x+11)\sqrt{x}$; в) $x^3\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)$; г) $\left(x^2+1\right)(x-1)$.

366. Агар

а) $f(x)=\left(x^3-1\right)(2-x)$; б) $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$;

в) $f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)$; г) $f(x)=x+6.$;

бошад, он гоҳ $f'(1)$-ро ёбед.

367. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $\dfrac{2x+5}{x+3}$; б) $\dfrac{5-3x}{2x+1}$; в) $\dfrac{2x}{3x-10}$.

368 Ҳосилаи функсияи

а) $\dfrac{x^2+3x-5}{x+1}$; б) $\dfrac{x}{x^2+1}$; в) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$; г) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}$ -ро ёбед.

369. Агар

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; б) $f(x)=\dfrac{2x^2}{3x-1}$; в) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$; г) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$

бошад, он гоҳ $f'(2)$-ро ёбед.

370. Барои кадом қиматҳои x қимати ҳосилаи функсияи $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ ба 3 баробар мешавад?

371. Муодилаи $f'(x)=-6$ -ро ҳангоми $f(x)=(x-1)\left(x^2-5x+6\right)$ будан ҳал кунед.

372. Барои кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи

а) $f(x)=x^3-9x$; б) $f(x)=(2x+1)(x-5)$; в) $f(x)=\dfrac{1-3x^2}{1-3x}$

қиматҳои мусбат мегирад?

373. Дар кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи

а) $f(x)=7x^2-28x+11$; б) $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{x}$; в) $f(x)=\frac{3x^2}{1-3x}$

қиматҳои манфӣ мегирад?

374. Ақалан формулаи як функсияеро нависед, ки барояш ҳосила ба

а) 3; б) $3x+2$; в) $3x^2-2$; г) $5-\frac{2}{x^2}$,

баробар аст.

Машқҳо барои такрор

375. Ҳисоб кунед:

$$0{,}364:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0{,}125+2{,}5\cdot 0{,}8$$

376. Қимати ададии ифодаи ab^2+b^3 -ро ҳангоми $a=10{,}7$ ва $b=-0{,}7$ будан ёбед.

377. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $(3x+4)^2+3(x-2)=46$; б) $2(1-1{,}5x)+2(x-2)^2=1$;

в) $\frac{x^2}{x-2}-\frac{x+2}{x-2}=4$; г) $\frac{12}{(x+6)^2}+\frac{x}{x+6}=1$.

378. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2},\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3},\\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{4}{3};\end{cases}$

379. Координатаҳои қуллаи параболаро ёбед:

а) $y=x^2-10x+15$; б) $y=2x^2-5x+3$.

380. Аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро ҳангоми $S_7=-35$ ва $S_{42}=-1680$ будан ёбед.

381. Аз фурудгоҳ дар як вақт ба самти муайяншуда, ки масофааш 1600 км аст, ду ҳавопаймо парвоз мекунанд. Суръати ҳавопаймои якум назар ба дуюм 80 км зиёд мебошад, бинобар ин вай ба ҷои муайяншуда як соат пештар омада мерасад. Суръати парвози ҳавопаймоҳоро муайян кунед.

382. Нишон диҳед, ки функсияи

а) $y=2x+7$; б) $y=5x^2-10x$

дар тамоми $(-\infty;+\infty)$ бефосила аст.

40. Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ. Бигзор функсияи дараҷагии $f(x)=x^n$, ки n- адади бутуни дилхоҳ аст, дода шуда бошад. Маълум, ки он барои n-ҳои мусбат дорои соҳаи муайянии $-\infty < x < +\infty$ ва барои n-ҳои манфӣ дорои соҳаи муайянии $x \neq 0$ мешавад.

Нишон медиҳем, ки барои n-и бутуни дилхоҳ ва x-и дилхоҳ ($x \neq 0$ ҳангоми $n \leq 1$ будан) формулаи

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1} \qquad (1)$$

ҷой дорад.

Дар п.36-37 мо нишон дода будем, ки $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(x^3\right)' = 3x^2$ мешаванд. Аз формулаи ҳосилаи зарб (п.39.2)

$$\left(x^4\right)' = \left(x^3 \cdot x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot x + (x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot x + 1 \cdot x^3 = 3x^3 + x^3 = 4x^3,$$

$$\left(x^5\right)' = \left(x^4 \cdot x\right)' = \left(x^4\right)' \cdot x + (x)' \cdot x^4 = 4x^3 \cdot x + 1 \cdot x^4 = 4x^4 + x^4 = 5x^4.$$

Ин баробариҳоро дар намуди

$$\left(x^2\right)' = 2 \cdot x^{2-1}, \quad \left(x^3\right)' = 3 \cdot x^{3-1}, \quad \left(x^4\right)' = 4 \cdot x^{4-1}, \quad \left(x^5\right)' = 5 \cdot x^{5-1}$$

ҳам ифода кардан мумкин аст. Ин бошад шаҳодати дурустии формулаи (1) барои п=2, 3, 4, 5 ва ғайра аст.

Акнун фарз мекунем, ки формулаи (1) ҳангоми $n=k$ будан дуруст аст, яъне

$$\left(x^k\right) = k \cdot x^{k-1}.$$

Нишон медиҳем, ки (1) барои $n=k+1$ низ ҷой дорад.

Дар ҳақиқат,

$$\left(x^{k+1}\right)' = \left(x^k \cdot x\right)' = \left(x^k\right)' \cdot x + (x)' \cdot x^k = k \cdot x^{k-1} \cdot x + 1 \cdot x^k = k \cdot x^k + x^k =$$

$$= (k+1) \cdot x^k = (k+1) \cdot x^{(k+1)-1}.$$

Инак, агар формулаи (1) барои $n=5$ дуруст бошад, он гоҳ вай барои $n=6$ низ дуруст мондан мегирад. Пас формулаи (1) барои ададҳои пай дар пай пасояндаи 10 (яъне 11,12,13,...) то адади дилхоҳи натуралии n дуруст мондан мегирад.

Қайд мекунем, ки ҳангоми $x \neq 0$ ва $n=0$ ё $n=1$ будан формулаи (1) низ дуруст аст, чунки

$$\left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0 \cdot \frac{1}{x} = 0, \quad \left(x^1\right)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

ва инҳо ба қиматҳои маълуми ҳосилаҳои функсияҳои 1 ва x мувофиқ меоянд.

Фарз мекунем, ки $n=-m$, $m \in N$ (яъне n-адади бутуни манфӣ)бошад. Он гоҳ, аз рӯи формулаи (8)-и **§ 10** ҳосил мекунем:

$$\left(x^n\right)' = \left(x^{-m}\right)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{\left(x^m\right)'}{\left(x^m\right)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m\cdot x^{m-1-2m} = -m\cdot x^{-m-1} =$$

$$= (-m)\cdot x^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Ҳамин тариқ, барои қиматҳои бутуни манфии n формулаи (1) дуруст аст. Дурустии (1) барои ҳар гуна адади бутуни n нишон дода шуд.

Акнун ҳосилаи функсияҳои

а) $f(x) = 3\cdot x^{-9}$; б) $f(x) = 2x^{11} - \frac{7}{x^3}$.

-ро ҳангоми $x \neq 0$ будан, меёбем.

Ҳал: а). $f'(x) = \left(3\cdot x^{-9}\right)' = 3\cdot\left(x^{-9}\right)' = 3\cdot(-9)x^{-9-1} = -27x^{-10} = -\frac{27}{x^{10}}$.

б). $f'(x) = \left(2x^{11} - \frac{7}{x^3}\right)' = \left(2x^{11}\right)' - \left(\frac{7}{x^3}\right)' = 2\cdot\left(x^{11}\right)' - 7\cdot\left(x^{-3}\right)' = 2\cdot 11\cdot$

$\cdot x^{11-1} - 7\cdot(-3)x^{-3-1} = 22x^{10} + 21\cdot x^{-4} = 22x^{10} + \frac{21}{x^4}$.

Ниҳоят қайд мекунем, ки формулаи (1) ҳангоми n - адади дилхоҳи ратсионалӣ ва иратсионалиро ифода кардан низ ҷой дорад. Масалан, ҳосилаи $x^{\frac{1}{2}}$ ба $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}!\right)$.

Ҳосилаи $x^{\sqrt{2}} + 3$ бошад $\left(x^{\sqrt{2}} + 3\right)' = \left(x^{\sqrt{2}}\right)' + (3)' = \sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1}$ мешавад.

41. Дифференсиронидашавандагии функсияҳои ратсионалӣ ва касри-ратсионалӣ. Тасдиқоти зерин ҷой дорад: функсияҳои ратсионалии бутун (бисёраъзогиҳо) ва касри-ратсионалӣ дар нуқтаи дилхоҳи соҳаи муайяниашон дифференсиронидашавандаанд.

Ба сифати мисол ҳосилаи функсияҳои

в) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 9x - 13$, г) $f(x) = \frac{x^6 + 9x^2 - 1}{x^2 + 1}$

-ро дар нуқтаҳои дилхоҳи таалуқи $(-\infty; +\infty)$ меёбем.

в) Қоидаи 1 ва натиҷаи қоидаи 2-и дифференсиронӣ (**§10**) имконият медиҳанд, ки

$$f'(x) = \left(x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 9x - 13\right)' = \left(x^4\right)' + \left(5x^3\right)' - \left(4x^2\right)' + (9x)' - (13)' =$$
$$= \left(x^4\right)' + 5\left(x^3\right)' - 4\left(x^2\right)' + 9(x)' - 0$$

-ро ҳосил намоем. Дар асоси формулаи (1)

$f'(x)=4x^3+15x^2-8x+9$ мешавад.

г) Барои $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ дар асоси қоидаҳои 3,1 ва натиҷаи қоидаи 2 (§10), татбиқи бевоситаи формулаи (1) (§11) ҳосил мекунем:

$$f'(x)=\left(\frac{x^6+9x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^6+9x^2-1\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^6+9x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left[\left(x^6\right)'+9\left(x^2\right)'-(1)'\right]\cdot\left(x^2+1\right)-\left[\left(x^2\right)'+(1)'\right]\cdot\left(x^6-9x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(6x^5+18x\right)\left(x^2+1\right)-2x\left(x^6+9x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x^7+6x^5+20x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

42. Мафҳуми функсияи мураккаб ва ҳосилаи он. Маводи ин пунктро ба ду қисм ҷудо намуда, қисми аввалашро ба шарҳи мафҳуми функсияи мураккаб ва дигарашро ба ёфтани ҳосилаи он мебахшем.

42.1. Функсияи мураккаб. Мисоли зеринро муоина мекунем. Фарз менамоем, ки функсия бо формулаи

$$y=F(x)=\sqrt{4-x^2}$$

дода шуда бошад. Масъалаи аз рӯи қимати маълуми x ёфтани қимати мувофиқи y-и функсияи $F(x)$-ро мегузорем. Барои ин ишорати $u=f(x)=4-x^2$-ро дохил карда функсияро ба намуди $y=\sqrt{u}$ менависем. Ин имконият медиҳад, ки аз рӯи қимати маълуми x аввал қимати $u=f(x)=4-x^2$-ро, сипас $y=g(u)=\sqrt{u}$-ро ёбем. Аз муҳокимаронии боло чунин бармеояд,ки функсияи f ба адади x адади u-ро ва функсияи g ба адади u адади y-ро мувофиқ мегузорад. Дар ин ҳолат F-ро функсияи мураккаби аз функсияҳои f ва g ташкилёфта номида, ба шакли

$$F(x)=g[f(x)] \tag{1}$$

менависанд. Бо ибораи дигар, функсияҳои мураккабро **функсия аз функсия** ҳам меноманд. Дар мисоли гирифтаамон $f(x)=4-x^2$ аргументи мобайниро ифода мекунад.

Ҳамин тариқ, агар x нуқтаи дилхоҳи соҳаи муайянии функсияи мураккаби (1) бошад, он гоҳ барои ҳисоб кардани қимати $F(x)$ аз рӯи дастури болой амал карда, аввалан қимати u-и функсияи f-ро ва баъдан қимати $g(u)$ - ро меёбанд.

Соҳаи муайянии функсияи мураккаби (1) маҷмӯи ҳамон x-ҳои соҳаи муайянии f мебошад, ки барояшон $f(x)$ ба соҳаи муайянии g дохил мешавад.

Ба мисоли гирифтаамон баргашта, қайд мекунем, ки соҳаи муайянии $u = f(x) = 4 - x^2$ тамоми $(-\infty; +\infty)$ мешавад. Аммо $g(u) = \sqrt{u}$ барои u-ҳои ғайриманфӣ маъно дорад, пас соҳаи муайянии функсияи мураккаб $u \geq 0$, $4 - x^2 \geq 0$, $|x| \leq 2$ ё $x \in [-2; 2]$ аст.

Агар $y = \sqrt{1 - u^2}$ ва $u = \dfrac{3}{x-1}$ бошад, он гоҳ соҳаи муайянии y маҷмуи қиматҳои нобаробарии $1 - u^2 \geq 0$-ро қаноаткунанда мебошад, ки аз он $|u| \leq 1$ ҳосил мешавад. $u = \dfrac{3}{x-1}$ буданашро ба назар гирифта, нобаробарии $\left|\dfrac{3}{x-1}\right| \leq 1$-ро ҳосил мекунем, ки ҳаллаш

$$-1 \leq \frac{3}{x-1} \leq 1, \quad -1 \geq \frac{x-1}{3} \geq 1, \qquad -3 \geq x-1 \geq 3, \quad -2 \geq x \geq 4$$

ба $x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$ меорад. Яъне, соҳаи муайянии функсияи мураккаби $y = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{x-1}\right)^2}$ аз нимфосилаи $(-\infty; 2]$ ва нимпорчаи $[4; +\infty)$ иборат аст.

Баъзан муайян кардани функсияи мураккаби $\varphi[\Psi(x)]$ ва ё $\Psi[\varphi(x)]$ аз рӯи $\varphi(x) = 3\sqrt{x}$ ва $\Psi(x) = x^4 + 2$ талаб карда мешавад. Дар ин ҳолат $\varphi[\Psi(x)] = 3\sqrt{\Psi(x)} = 3\sqrt{x^4 + 2}$ ва $\Psi[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^4 + 2 = = (3\sqrt{x})^4 + 2 = 81x^2 + 2$ мешавад.

42.2. Ҳосилаи функсияи мураккаб.

1°. Ёфтани ҳосилаи функсияи $y = (8x-3)^2$ ҳеҷ душворие надорад. Кифоя аст, ки қавсро кушода онро ба шакли бисёраъзогӣ (онҳо бошанд дар асоси тасдиқоти п. 41 дар $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ дорои ҳосилаанд) биёрем:

$$(8x-3)^2 = 64x^2 - 48x + 9\,.$$

Аз ин ҷо,

$$y' = \left[(8x-3)^2\right]' = \left(64x^2 - 48x + 9\right)' = 128x - 48$$

мешавад.

Вале татбиқи ин схемаи амалиёт, масалан, барои $y=(2x-4)^{100}$ (гарчанде ба ёфтани ҳосилаи бисёраъзогӣ биёрад ҳам) кори пурмашшақат буда, меҳнати зиёдеро талаб мекунад.

Аз ин рӯ, роҳи дигари ҳалли масъаларо, ки ба қоидаи ёфтани ҳосилаи функсияи мураккаб оварда мерасонад, пешниҳод мекунем.

Агар, функсияи $y=(8x-3)^2$-ро дар намуди $y=u^2$, ки $u=8x-3$ аст, нависем, он гоҳ ҳосилаи ҳар кадомашро бо осонӣ ёфта метавонем: $y'(u)=2u$, $u'(x)=8$.

Маълум, ки $y'(u)$ чанд маротиба тезтар тағйирёбии y-ро нисбат ба u, $u(x)$ чанд маротиба тағйирёбии u-ро нисбат ба x (ниг. ба қисми охирини эзоҳ дар п. 36-37) ифода мекунад.

Агар y нисбат ба u $y'(u)$ маротиба ва u нисбат ба x $u'(x)$ маротиба тезтар тағйир ёбад, он гоҳ y нисбат ба x $y'(u)\cdot u'(x)$ маротиба тезтар тағйир меёбад. Аз ин ҷо, формулаи

$$y'(x)=y'(u)\cdot u'(x) \tag{2}$$

-ро ҳосил мекунем, ки бо ёрии он бе машшақати зиёд

$$y'(x)=\left(u^2\right)'\cdot(8x-3)'=2u\cdot 8=16(8x-3)=128x-48$$

ёфт мешавад. Натиҷаи охирин ба ҷавоби дар аввали пункт ҳосилшуда монанд аст. Муқоисаи бевоситаи ду тарзи болоии ёфтани ҳосила аз бартарии тарзи охирин шаҳодат медиҳад.

Айнан ҳамин тавр, ҳосилаи $y=(4x-7)^3$ $\left(y=u^3,\ u=4x-7\right)$ -ро меёбем:

$$y'(x)=\left(u^3\right)'\cdot(4x-7)'=3u^2\cdot 4=12u^2=12(4x-7)^2=$$
$$=12\left(16x^2-56x+49\right)=192x^2-672x+558.$$

2°. Тасдиқоти зеринро исбот мекунем: агар функсияи f дар нуқтаи x_o ва функсияи g дар нуқтаи $u_o=f(x_o)$ ҳосила дошта бошад, он гоҳ функсияи мураккаби (1) низ дар нуқтаи x_0 дорои ҳосила шуда, илова бар он

$$F'(x_o)=g'[f(x_o)]\cdot f'(x_o) \tag{3}$$

аст.

Нисбати $\dfrac{\Delta F}{\Delta x}$-ро $(\Delta x\neq 0)$ ҳангоми $\Delta x\to 0$ дида мебароем.

Ишорати $$\Delta u=f(x_o+\Delta x)-f(x_o)=\Delta f \tag{4}$$

-ро дохил карда

$$\Delta F=F(x_o+\Delta x)-F(x_o)=g[f(x_o+\Delta x)]-g[f(x_o)]=g(u_o+\Delta u)-g(u_o)=\Delta g$$

-ро ҳосил мекунем.

Азбаски f дар нуқтаи x_o дорои ҳосила аст, пас ҳангоми $\Delta x \to 0$ низ $\Delta u \to 0$ (ниг. ба (4)). Давоми исботро барои ҳамон f-ҳое ичро менамоем, ки дар атрофи нуқтаи x_o ичрои шарти $\Delta f \neq 0$-ро таъмин намоянд.

Пас, ҳангоми $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \to g'(x_o) \cdot f'(x_o),$$

чунки ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_o)$ ва (чӣ хеле дар боло қайд кардем, аз $\Delta x \to 0$ шарти $\Delta u \to 0$ мебарояд)

$$\frac{\Delta g}{\Delta u} \to g'(u_o)$$

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияҳои зеринро меёбем:

а) $y = (9x^2 - 1)^4$ ва б) $y = \sqrt{5x^3 - 3x^2 + x - 9}$.

Ҳал. а) Функсияи $y = (9x^2 - 1)^4$-ро ба намуди функсияи мураккаб бо ёрии $g(u) = u^4$, $u = 9x^2 - 1$ ифода карда, $g'(u) = (u^4)' = 4u^3$ ва $u'(x) = (9x^2 - 1)' = 9 \cdot 2x - 0 = 18x$-ро ҳосил менамоем.

Аз ин ҷо, $y'(x) = \left[(9x^2 - 1)^4\right]' = 4u^3 \cdot 18x = 4(9x^2 - 1)^3 \cdot 18x = 72x \cdot (9x^2 - 1)^3$.

б) Азбаски $g(u) = \sqrt{u}$, $u = 5x^3 - 3x^2 + x - 9$ аст, пас

$$y'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = (\sqrt{u})' \cdot (5x^3 - 3x^2 + x - 9) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (15x^2 - 6x + 1) =$$

$$= \frac{15x^2 - 6x + 1}{2\sqrt{5x^3 - 3x^2 + x - 9}}, \qquad y' = \frac{15x^2 - 6x + 1}{2\sqrt{5x^3 - 3x^2 + x - 9}}$$

мешавад.

Натиҷаи 1. Агар функсияи мураккаб дар шакли $y = f(ax + b)$, ки k ва b ададҳои ҳақиқӣ ва $u = kx + b$ аст, дода шуда бошад, он гоҳ

$$y' = k \cdot f'(u) = k \cdot f'(kx + b) \qquad (5)$$

мешавад.

Натиҷаи 2. Агар функсияи мураккаб дар шакли $y = f(ax^2 + bx + c)$, ки a, b, c -ададҳои ҳақиқӣ ва $u = ax^2 + bx + c$, дода шуда бошад, он гоҳ

$$y' = (2ax + b) \cdot f'(u) = (2ax + b) \cdot f'(ax^2 + bx + c) \qquad (6)$$

мешавад.

Мисоли 2. Ҳосилаи функсияи $y = \frac{(2x+1)^3}{(x^2+x+1)}$ -ро меёбем.

Ҳал. Аз қоидаи дифференсиронии каср ва натиҷаҳои 1 ва 2 ҳосил мекунем:

$$y' = \left[\frac{(2x+1)^3}{(x^2+x+1)}\right]' = \frac{\left[(2x+1)^3\right]' \cdot (x^2+x+1)^2 - \left[(x^2+x+1)^2\right]' \cdot (2x+1)^3}{\left[(x^2+x+1)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot (2x+1)^2 \cdot (x^2+x+1)^2 - 2(x^2+x+1)\cdot(2x+1)\cdot(2x+1)^3}{(x^2+x+1)^4} =$$

$$= \frac{6(2x+1)^2 \cdot (x^2+x+1)^2 - 2(x^2+x+1)(2x+1)^4}{(x^2+x+1)^4} = -\frac{2(x^2+x-2)(2x+1)^2}{(x^2+x+1)^3}.$$

Мисоли 3. Ҳосилаи функсияи $f(x) = \sqrt{3+5x^3}$ -ро меёбем.

Ҳал. Функсияро дар шакли функсияи мураккаби $F(x) = g[f(x)]$ мегирем, он гоҳ $g(u) = \sqrt{u}$, $u(x) = 3+5x^3$ мешавад. Азбаски $g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ ва $u' = 15x^2$ аст, пас $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 15x^2 = \frac{15x^2}{2\sqrt{3+5x^3}}$ мешавад.

?

1. Формулаи ҳосилаи функсияи дараҷагиро барои дараҷаи бутун нависед. Мисолҳо оред.
2. Оё функсияҳои ратсионалӣ ва касрӣ-ратсионалӣ дар нуқтаҳои соҳаи муайяниашон дорои ҳосила шуда метавонанд? Мисолҳо оред.
3. Функсияи мураккаб аз дигар функсияҳо бо кадом нишонаҳо фарқ мекунад? Мисолҳо оварда, аргументи мобайниро нишон диҳед.
4. Формулаи ҳосилаи функсияи мураккабро нависед.
5. Натиҷаҳои 1 ва 2 ҳосилаи кадом функсияҳоро ифода мекунанд?

383. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) x^5; б) x^{11}; в) x^{13}; г) x^{103}; д) x^{n+1}; е) x^{-2}; ж) x^{-4};

з) x^{-7}; и) x^{-15}; к) x^{-n+1}; л) $x^{\frac{3}{5}}$; м) $x^{1+\sqrt{3}}$; н) $x^{\sqrt{5}-4}$.