384 Қимати ҳосилаи функсияро дар нуқтаҳои додашуда ёбед:

а) $f(x)=\frac{1}{x^6}$, $x_0=2$; б) $f(x)=x^4+2x-9$, $x_0=3$;

в) $f(x)=x^{-3}+x^3+2$, $x_0=3$; г) $f(x)=x^{11}-2x^{21}+2\sqrt{x}$, $x_0=1$.

385. Барои кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи $f(x)$ ба нул баробар мешавад:

а) $f(x)=x^3-12x$; б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}$; в) $f(x)=x^2+5$;

г) $f(x)=x^4-x^3+9$; д) $f(x)=x^4+4x-11$; е) $f(x)=x^4-12x^2-1$?

386. Аз қоидаҳои дифференсиронӣ ва ҳосилаи функсияи дараҷагӣ истифода бурда $f'(x)$-ро ёбед:

а) $f(x)=x^9\cdot(1+x^2)$; б) $f(x)=x^4+(x^7+1)\cdot(x^2-1)$;

в) $f(x)=x^5-\frac{x^3+1}{x^6}$; г) $f(x)=\frac{x^3-3x}{1+4x^2}-x^4$;

д) $f(x)=\frac{x^4+x^2+1}{x^2+4}$; е) $f(x)=(x^9-1)(2x^3-4x+1)$.

387. Формулаи ақалан як функсияеро нависед, ки ҳосилааш ба

а) $3x^2+4$; б) $5x^9+4x^5-3x$; в) $-\frac{3}{x^2}+2$; г) $3x-\frac{1}{x^3}$

баробар бошад.

388. Аз рӯи функсияи мураккаби $F(x)=g[f(x)]$ функсияҳои $g(u)$ ва $u=f(x)$-ро муайян намоед:

а) $F(x)=\sqrt{1-\cos x}$; е) $F(x)=\arcsin\frac{x-3}{2}$; б) $F(x)=(2\sin x+3)^2$;

ж) $F(x)=(1+7x)^9$; в) $F(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$; з) $F(x)=\sqrt{\sin x}$;

г) $F(x)=tg\frac{2}{x}$; и) $F(x)=ctg(x^2-x+3)$;

д) $F(x)=(3x-11)^5$; к) $F(x)=(1+\cos x)^3$.

389. Аз рӯи функсияҳои $f(x)=2\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+1$ ва $h(x)=\frac{1}{x}$ функсияҳои зеринро бо ёрии формулаҳо нависед:

а) $f[g(x)]$; б) $g[f(x)]$; в) $f[h(x)]$;

г) $h[f(x)]$; д) $g[h(x)]$; е) $h[g(x)]$.

390. Соҳаи муайяни функсияи мураккабро ёбед:

а) $y=\sqrt{1-4x^2}$; б) $y=\sqrt{x^2-0{,}16}$; в) $y=\sqrt{25-x^2}$; г) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$;

д) $y=\sqrt{\cos x-\dfrac{1}{2}}$; е) $y=\sqrt[4]{1-ctgx}$; ж) $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x}$;

з) $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$; и) $y=\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}$; к) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}$.

391. Ҳосилаи функсияро ёбед. (№391-393);

а) $(11+x)^{21}$; б) $(9x+23)^{-4}$; в) $(0{,}1x-1)^{-10}$; г) $\sqrt{x+3{,}2}$;

д) $\sqrt{9-2x}$; е) $\sqrt{3x-91}$; ж) $\sqrt{\dfrac{x}{2}+13}$; з) $(ax+b)^n$; и) $(ax+b)^{-n}$.

392. а) $\sqrt{5x^2-27}$; б) $\sqrt{x^2+10x-61}$; в) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}$;

г) $\sqrt{8x^3+5}$; д) $\sqrt{0{,}25x^4+2}+\sqrt{x^3}$; е) $\sqrt{ax^k+bx+c}$.

393 а) $(10x-3)^2-(x+11)^3$; б) $(2x+5)^4-(3x-1)^7$; в) $\left(3x^2+7x+11\right)^{54}$;

г) $\left(x^2-3\right)^{103}$; д) $\dfrac{\left(x^2+11\right)^2}{(1-x)^3}$; е) $\dfrac{\left(x^3-7\right)^3}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Машқҳо барои такрор.

394. Касрро ихтисор кунед:

а) $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$; б) $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$.

395. Нобаробариҳоро ҳал кунед: а) $\left(x^4-3x^2-4\right)\left(x^4+8x^2-9\right)>0$;

б) $\left(x^3-5x^2-x+5\right)\left(x^3+2x^2-9x-18\right)<0$.

396. Нишон диҳед, ки қимати ифодаи

$$\frac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)+\cos^2\alpha-1}{\cos 2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos^2\alpha}$$

аз α вобастагӣ надорад.

397. Дар секунҷаи баробарпаҳлӯ яке аз кунҷҳои назди асос ба 52° баробар аст. Кунҷҳои боқимондаи секунҷаро муайян кунед.

398. b_n ва S_n -и прогрессияи геометриро аз рӯи додашудаҳои зерин ёбед:

а) $b_1=1,\quad q=5,\quad n=4$; б) $b_1=1,\quad q=-3,\quad n=5$.

399. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 3x+2y-xy=7, \\ 2x+3y+xy=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+2y^2+3xy=28, \\ 2x^2+y^2+3xy=20. \end{cases}$

400. Дар мусобиқаи байналхалқии шоҳмотбозон, ки соли 1896 дар Будапешт созмон ёфта буд, шоҳмотбози машҳури рус Чигорин ғолиб омад. Иштирокчиёни мусобиқа бо якдигар як маротибагӣ бозӣ карданд. Агар 78 бозӣ гузаронида шуда бошад, дар мусобиқа чанд шоҳмотбоз иштирок карда буд?

401. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $2\sqrt{x}+\dfrac{9}{x^5}$; б) $\left(x^3+3\right)(x-1)$; в) $\dfrac{3x^5-1}{1+2x^2}$; г) $x^6-\dfrac{5}{x}$;

д) $\left(1+\sqrt{x}\right)\left(x^2+7\right)$; е) $\dfrac{x^4+x}{\sqrt{x}}$.

402. Оё ҳосилаи функсияи $y=5x+\sqrt{x}$ дар нуқтаи $x_o=0$ вуҷуд дорад?

§ 12. Ҳосилаи функсияҳои тригонометрӣ. Ҷадвали ҳосилаи функсияҳо.

43. Ҳосилаи функсияи $\sin x$. Исбот мекунем, ки функсияи $\sin x$ дар нуқтаи дилхоҳ ҳосила дорад. Он бо формулаи

$$\left(\sin x\right)' = \cos x \qquad (1)$$

ёфта мешавад.

Дар асоси формулаи фарқи синусҳо аз п.7.-и боби I ҳосил мекунем:

$$\Delta \sin x = \sin\left(x_o+\Delta x\right)-\sin x_o = 2\cos\left(x_o+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Нисбати $\dfrac{\Delta \sin x}{\Delta x}$ намуди зеринро мегирад:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = 2\cos\left(x_o+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \quad \text{ё} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \cos\left(x_o+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

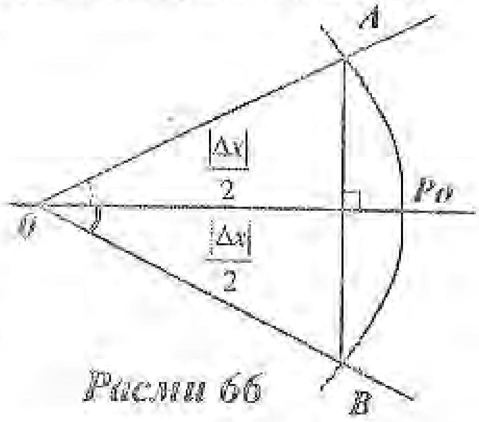
Дар навбати аввал нишон медиҳем, ки ҳангоми $\Delta x \to 0$ нисбати

$$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$$

Бо ин мақсад дар давраи воҳидӣ нуқтаҳои A ва B -ро чунон мегирем, ки камонҳои якхелаи P_oA ва P_oB дарозиаш ба $\dfrac{|\Delta x|}{2}$ баробар бошанд (ниг. ба расми 66). Он гоҳ дарозии камони $\overset{\smile}{AB}$ ба Δx ва дарозии хордаи AB ба $2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$ баробар мешавад. Барои Δx-ҳои хеле хурд дарозии хорда аз дарозии камони $\overset{\smile}{AB}$ фарқ намекунад: $AB \approx \overset{\smile}{AB}$

Пас, ҳангоми $\Delta x \to 0$

$$\frac{AB}{\overset{\smile}{AB}} = \frac{\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{2}\right|} = \left|\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right| \to 1$$



Расми 66

Акнун бо $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ машғул мешавем. Азбаски функсияи $\cos x$ (дар тамоми $(-\infty; +\infty)$) бефосила аст, пас ҳангоми $\Delta x \to 0$ кардан $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x_0$ (ниг. ба мисоли 4 в)-и п. 34.2)

Аз ин ҷо, ҳангоми $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x_0 + \Delta x) \to 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$

мешавад. Ифодаи $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} \to \cos x_0$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ (ё $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \cos x$) аз дурустии формулаи (1) шаҳодат медиҳад.

Акнун аз формулаи функсияи мураккаб истифода бурда, ҳосилаи $\sin(ax+b)$-ро меёбем:

$$[\sin(ax+b)]' = (\sin u)' \cdot (ax+b)' = \cos u \cdot (a \cdot 1 + 0) = a \cdot \cos u = a\cos(ax+b)$$

$$[\sin(ax+b)]' = a\cos(ax+b) \qquad (2)$$

44. Ҳосилаи функсияҳои $\cos x$, tgx **ва** $ctgx$. Исбот мекунем, ки функсияҳои $\cos x$, tgx ва $ctgx$ дар нуқтаҳои соҳаи муайяниашон дорои ҳосила буда, барояшон формулаҳои зерин ҷой доранд:

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (3)$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (4)$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{5}$$

а) Барои исботи формулаи (3) аз баробарихои

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ ва } \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ниг. ба китоби "Алгебра"-и с.9, § 12, боби IV), истифода мебарем:

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(0 - 1) =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Дар рафти исбот аз қоидаи ёфтани ҳосилаи функсияи мураккаб низ истифода бурдем.

б) Ҳаққонияти формулаҳои (4) ва (5) бо ёрии баробариҳои

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ва истифодаи қоидаи 3-и дифференсиронӣ (ниг. ба 39.3) нишон дода мешавад.

Дар ҳақиқат,

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ва

$$(ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

мешавад.

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияи $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$-ро меёбем.

Ҳал :

$$y' = \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(1 - \cos x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot (1 - \cos x)}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(0 + \sin x)\sin x - \cos x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{y}{\sin x}.$$

Мисоли 2. Ҳангоми $f(x)=x\sin 2x$ будан, қимати $f'(x)+f(x)+2$ дар нуқтаи $x=\pi$ ҳисоб карда шавад.

Ҳ а л: $$y'=(x\sin 2x)'=(x)'\cdot\sin 2x+(\sin 2x)'\cdot x=$$
$$=1\cdot\sin 2x+x\cdot\cos 2x\cdot(2x)=\sin 2x+2x\cos 2x.$$

Қиматҳои $f(\pi)$ ва $f'(\pi)$-ро меёбем: $f(\pi)=\pi\sin 2\pi=\pi\cdot 0=0$,

$f'(\pi)=\sin 2\pi+2\pi\cos 2\pi=0+2\pi\cdot 1=2\pi$.

Қиматҳои ёфтаамонро гузошта, қимати ифодаи матлубро меёбем:

$\left(f(x)+f'(x)+2\right)\big|_{x=\pi}=f'(\pi)+f(\pi)+2=2\pi+0+2=2(1+\pi)$.

Мисоли 3. Аз формулаи (9) -и §10 истифода бурда ҳосилаи функсияҳои $\frac{1}{\cos x}$ ва $\frac{1}{\sin x}$ ёфта шаванд.

Ҳал. Пеш аз иҷрои амалиёти зарурӣ қайд менамоем, ки ин функсияҳоро мувофиқан бо рамзҳои $\sec x$ ва $\cos ecx$ ишорат намуда, "секанс икс" ва "косеканс икс" мехонанд.

Ҳамин тариқ,

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{cox}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}=tgx\cdot\sec x$$

ва

$$(\cos ecx)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}=-ctgx\cdot\cos ecx$$

мешавад. Яъне ҳосил менамоем, ки формулаҳои

$$(\sec x)'=tgx\cdot\sec x \qquad (\cos ecx)'=-ctgx\cdot\cos ecx$$

низ ҷой доранд.

Аз рӯи формулаҳои охирин ҳосилаҳои tgx ва $ctgx$ ин хел ҳам навишта мешаванд:

$$(tgx)'=\sec^2 x,\qquad (ctgx)'=-\cos ec^2 x.$$

?

1. Кадом формулаҳои ҳосилаи функсияҳои тригонометриро медонед?.
2. Дурустии ҷумлаи "ҳангоми $\Delta x\to 0$ $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1$ -ро маънидод кунед.
3. Ҳосилаи косинусро бо истифодаи кадом формулаҳои мувофиқоварӣ меёбанд?
4. Агар дар нуқтаи x_0 функсияҳо (ақалан яктояш) дорои ҳосила набошад, он гоҳ формулаҳои аз қоидаҳои дифференсиронӣ бароянда вуҷуд дошта метавонанд?

45. Ҷадвали ҳосилаи функсияҳо. Дар ин ҷо ҷадвали дар п. 36-37-и §9 мавқеъёфтаро бо формулаҳои параграфҳои пасоянд пурра карда, ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

№ б/т	Ҳосилаи баъзе функсияҳои асосии элементарӣ	Ҳосилаи функсияҳои мураккаб
1	2	3
1	$(c)' = 0, \quad c = const$	
2	$(x)' = 1$	
3	$\left(x^2\right)' = 2x$	$\left(u^2\right)' = 2u \cdot u$
4	$\left(x^3\right)' = 3x^2$	$\left(u^3\right)' = 3u^2 \cdot u'$
5	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \qquad n \in R$	$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
6	$(kx+b)' = k$	$[f(kx+b)]' = k \cdot f'(kx+b)$
7	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
8	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
9	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
11	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
12	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
13	$(\sec x)' = tgx \cdot \sec x$	$(\sec u)' = tgu \cdot \sec u \cdot u'$
14	$(\cos ecx)' = -ctgx \cos ecx$	$(\cos ecu)' = -ctgu \cos ecu \cdot u'$

Қоидаҳои дифференсиронӣ

1	$[U(x)+V(x)]' = U'(x)+V'(x)$	3	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'(x)V(x)-V'(x)U(x)}{V^2(x)}$
2	$[U(x)\cdot V(x)]' = U'(x)\cdot V + V'(x)\cdot U(x)$	4	$[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$

Ҳосилаи функсияро ёбед: (№403-404)

403. а) $2x+3\sin x$; б) $2\cos x$; в) $3\sin x+2\cos x$; г) $3tgx$; д) $\cos x+2tgx$;

е) $\sin x+3ctgx$; ж) $tgx+4ctgx$; з) $\sin 2x$; и) $1+\cos 3x$; к) $-\frac{3}{4}\sin 8x$;

л) $2\sin\frac{5x}{2}$; м) $5\cos(-2x)$; н) $\frac{1}{2}x^2-3\sin\frac{x}{3}$.

404. а) $7\cos\frac{2x}{7}$; б) $-4\cos 1{,}5x$; в) $-\frac{1}{3}\cos(-0{,}3x)$;

г) $\sqrt{x}-tg5x$; д) $\frac{1}{x}+3tg\frac{x}{2}$; е) $x^2-0{,}2tg2x$; ж) $\frac{1}{5}tg(-4x)$;

з) $ctg3x$; и) $5-1{,}3ctg(-10x)$; к) $3x+4ctg8x$; л) $2ctg\frac{x}{4}-x^{10}$.

Ҳосилаи функсияи тригонометриро ёбед (№405-406)

405. а) $3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; б) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $0{,}1\sin(10x+\pi)$;

г) $5\cos\left(4x+\frac{3\pi}{2}\right)$; д) $-6\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)$; е) $-3\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)$;

406. а) $2tg(x-4)$; б) $-3tg\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)$; в) $\frac{5}{\cos(x+1)}$; г) $4ctg\left(\frac{3x}{2}-5\right)$;

д) $-0{,}5ctg\left(2\pi-4x+x^2\right)$; е) $x+\frac{0{,}1}{\sin(1-x)}$.

407. Ҳосилаи функсияро дар нуқтаҳои $x_o=0$, $x_o=\frac{\pi}{4}$ ва $x_o=\frac{\pi}{3}$ ёбед:

а) $f(x)=2\cos x-3x$; б) $f(x)=x^2+2tgx$; в) $f(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x$;

г) $f(x)=\sin x-\cos x$; д) $f(x)=2tgx-3x$; е) $f(x)=4x-ctg\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)$.

408. Аз қоидаҳои дифференсиронӣ ва ҷадвали ҳосилаҳо истифода бурда ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $\left(x^4+1\right)\sin x$; б) $x\sin x+\frac{1}{3}tgx$; в) $tgx-ctgx$;

г) $x\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x-x$; д) $2ctg^2x$; е) $2x-\cos^2 x$;

ж) $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$; з) $\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$; и) $\frac{\sin x-\cos x}{x}$.

409. Муодилаи $f'(x)=0$ -ро ҳангоми

а) $f(x)=\sqrt{3}x+2\cos x$; б) $f(x)=3x+tgx$; в) $f(x)=\cos^3 x+3\sin x$;

г) $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}x$; д) $f(x)=2\cos^2 x-\sqrt{2}x$;

е) $f(x)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)-x$ будан, ҳал кунед.

410. Агар а) $f(x)=3-\cos x$; б) $f(x)=\sin x-x$ бошад, он гоҳ нобаробарии $f'(x)>0$ -ро ва агар

в) $\varphi(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}x$; г) $\varphi(x)=1+2\cos x$

бошад, он гоҳ нобаробарии $\varphi'(x)<0$ -ро ҳал кунед.

411. Аз ҷадвали хосилаҳо истифода бурда як намуди функсияи $f(x)$ -ро ба воситаи формула нависед, агар

а) $f'(x)=3x^2-\frac{1}{\cos^2 x}$; б) $f'(x)=2x-3\cos 3x$;

в) $f'(x)=3\sin x+\cos x$; г) $f'(x)=\cos x-\frac{3}{2\sqrt{x}}$;

д) $f'(x)=1+\cos x$; е) $f'(x)=\sqrt{2}\cdot x+cosx$

бошад.

412. Қимати ифодаи $8f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+4$ -ро ҳангоми $f(x)=\sqrt{2}x+\cos x$ будан, ёбед

Машқҳо барои такрор

413. Ҷадвалро пур кунед:

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**3**	**5**	**6**
$y=2x+1$								
$y=1-x^2$								
$y=x^3+1$								

414. Мошини боркаш 120 км. роҳи мумфарш ва 232 км. роҳи сангфаршро тай намуд. Дар роҳи сангфарш ронанда суръатро 2км/соат кам кард. Агар тамоми роҳ дар муддати 6 соат тай карда шуданаш маълум бошад, он гоҳ суръати аввала ба чӣ баробар мешавад?

415. Экстремум ва экстремали функсияи

а) $y=2(x-5)^2+1$; б) $y=-(x-3)^2+5$ -ро ёбед.

416. График насохта нишон диҳед, ки хати каҷи $x^2-9y^2+4y+1=0$ тири $0x$ -ро намебурад.

417. Аз рӯи решаҳои додашуда муодила тартиб диҳед:

а) $x_1=1,\ x_2=-2$; б) $x_1=3,\ x_2=-1,\ x_3=1$.

418. Дар ифодаи зерин квадрати пурра ҷудо карда шавад:

а) $x^2-14x+31$; б) $x^2+10x-4$; в) $2x^2+8x-3$.

419. Муқоиса кунед:

а) 21 сомону 52 дирам ва 2218 дирам

б) 42 тоннаю 318 кг ва 41318 кг;

в) 6 соату 18 дақиқа ва 378 дақиқа.

420. Диаметри доираеро ёбед, ки масоҳаташ 400π воҳ. кв. (воҳиди квадратӣ) -ро ташкил медиҳад:

421. Агар а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+81$; б) $f(x)=x^3-16x+11$

бошад, он гоҳ муодилаи $f'(x)=0$ -ро ҳал кунед.

422. Агар $f(x)=x^3-3x$ бошад, онгоҳ дар кадом қиматҳои x ифодаи $f'(x)+\frac{f(x)}{x}-27$ ба 0 баробар мешавад?

§ 13. Мафҳуми ҳосилаи тартиби олӣ.

Пеш аз он, ки мафҳуми ҳосилаи тартиби олиро шарҳ диҳем, ба мисол муроҷиат мекунем.

Агар $f(x)=x^5-4x^3+8$ бошад, он гоҳ $f'(x)=5x^4-12x^2$ мешавад. Тарафи рости ифодаи охирин функсияи нави $\varphi(x)$-ро ифода мекунад, ки дифференсиронидашаванда аст: $\varphi'(x)=\left(5x^4-12x^2\right)'=20x^3-24x$. Возеҳ аст, ки дар навбати худ $[f'(x)]'=20x^3-24x$ буда дар нуқтаҳои $(-\infty;+\infty)$ дорои ҳосилаи ба $60x^2-24$ баробар мешавад. Ин хосиятро дар мисоли $f(x)=x^4+2\sin x$ низ мушоҳида намудан мумкин аст: $f'(x)=4x^3+2\cos x=\varphi(x)$, $\varphi'(x)=12x^2-2\sin x=\Psi$, $\Psi'(x)=24x-2\cos x,\ldots$.

Фарз мекунем, ки функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи дилхоҳи x-и фосилаи $(a;b)$ дифференсиронидашаванда бошад, он гоҳ $y'=f'(x)$ мешавад. Чӣ хеле, ки дар мисолҳои болоӣ мушоҳида намудем, y' функсияи нави аргументаш x-ро, ки аз он y вобаста буд, ташкил медиҳад. Агар ҳосилаи ин функсияи нав (яъне $f'(x)$) вуҷуд дошта бошад

$$(y')'=[f'(x)]'$$

он гоҳ онро нисбат ба функсияи аввалаи $y=f(x)$ **ҳосилаи тартиби ду** номида бо y'' ё $f''(x)$ ишорат мекунанд $y''=(y')'$ ва онҳоро мувофиқан **"игрек ду штрих"** ва **"эф ду штрих аз икс"** мехонанд.

Айнан ҳамин тавр, ҳосила аз функсияи $f''(x)$-ро ҳосилаи тартиби сеюм номида бо $f'''(x)$, ҳосилаи функсияи $f'''(x)$-ро ҳосилаи тартиби чорум номида бо $f^{IV}(x)$ ишорат* мекунанд ва ҳоказо. Ин ҳосилаҳоро (яъне ҳосилаҳои тартибашон $n \geq 2$ -ро) **ҳосилаи тартиби олӣ** меноманд.

Мисоли 1. Ҳосилаи тартиби дуи функсияи

$$y = (6 - x^2)\sin x - 4x\cos x$$

ёфта шавад.

Ҳал. $y' = \left[(6 - x^2)\sin x - 4x\cos x\right]' = \left[(6 - x^2)\sin x\right]' - (4x\cos x)' =$

$= (6 - x^2)'\sin x + (6 - x^2)(\sin x)' - 4\left[(x)'\cos x + x(\cos x)'\right] =$

$= -2x\sin x + (6 - x^2)\cos x - 4\cos x + 4x\sin x = 2x\sin x + 2\cos x - x^2\cos x =$

$= 2x\sin x + (2 - x^2)\cos x, \qquad y' = 2x\sin x + (2 - x^2)\cos x.$

Акнун аз баробарии $y'' = (y')'$ истифода бурда y''-ро меёбем:

$y'' = (y')' = \left[2x\sin x + (2 - x^2)\cos x\right]' = (2x\sin x)' + \left[(2 - x^2)\cos x\right]' =$

$= 2\sin x + 2x\cos x - 2x\cos x - (2 - x^2)\sin x = 2\sin x - 2\sin x + x^2\sin x = x^2\sin x,$

ҷавоб: $y'' = x^2\sin x$.

Мисоли 2. $y = \sin^2 x$, $y''' = ?$.

Ҳал. $y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$.

Функсияи $\sin 2x$ дифференсиронидашаванда аст, пас

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x(2x)' = 2\cos 2x, \quad y'' = 2\cos 2x;$$

$$y''' = (y'')' = (2\cos 2x)' = 2(\cos 2x)' = 2(-\sin 2x)(2x)' = -4\sin 2x.$$

Мисоли 3. Қонуни лаппиши гармоникӣ $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ аст, ки дар он t-вақт, ω - зудӣ, α -фаза ва А -амплитудаи лаппиш мебошанд. Нишон медиҳем, ки қонун лаппиши гармоникӣ муодилаи

$$x''(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

-ро қаноат мекунонад. (A, α, ω -доимианд).

Ҳосилаҳои $x'(t)$ ва $x''(t)$ -ро меёбем:

$x'(t) = [A\cos(\omega t + \alpha)]' = A[\cos(\omega t + \alpha)]' = A[-\sin(\omega t + \alpha)](\omega t + \alpha)' =$

$= -A\sin(\omega t + \alpha)(\omega \cdot 1 + 0) = -A\omega\sin(\omega t + \alpha),$

$x''(t) = [x'(t)]' = [-A\omega\sin(\omega t + \alpha)]' = -A\omega[\sin(\omega t + \alpha)]' = -A\omega\cos(\omega t + \alpha)(\omega t + \alpha)' =$

$= -A\omega\cos(\omega t + \alpha)(\omega \cdot 1 + 0) = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha), \quad x''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha)$

Инак,

---

* Бо мақсади озодшавӣ аз навишти шумораи хеле зиёди штрихҳо ҳосилаи тартибаш аз се болоро бо рақамҳои римӣ менависанд.

$$x''(t)+\omega^2x(t)=-A\omega^2\cos(\omega t+\alpha)+\omega^2A\cos(\omega t+\alpha)=$$
$$=\left(-A\omega^2+A\omega^2\right)\cos(\omega t+\alpha)=0\cdot\cos(\omega t+\alpha)=0.$$

?

1. Мафҳуми ҳосилаҳои тартиби ду ва серо дар мисолҳои мушаххас фаҳмонед.
2. Дар зери истилоҳи "ҳосилаи тартиби олӣ" чиро мефаҳмед?
3. Лаппишҳои гармоникӣ кадом муодиларо қаноат мекунонанд?

423. Аз қоидаи дифференсиронӣ ва ҷадвали ҳосилаҳои функсияҳо истифода бурда, ҳосилаи тартиби дуи функсияро ёбед:

а) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; б) $y=\dfrac{x^2+1}{x^3+4}$; в) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$;

г) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+4}$; д) $y=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$; е) $y=x^2+2tgx$.

424. Агар а) $f(x)=x^2\cos x+x$; б) $f(x)=3+x^3\sin x$;

в) $f(x)=x^5+2x^3-3x^2+4$; г) $f(x)=x^4-3x^3+7x+6$

бошад, он гоҳ $f'''(x)$-ро ёбед:

425. Агар а) $y=5x^3-3x^2+x+1$ бошад, y'''-ро ёбед;

б) $y=4x^8-5x^6+6x^4-7x^2+8$ бошад, y^V-ро ёбед;

в) $y=6x^5-3x^3+7x+2$ бошад, y^{IV}-ро ёбед;

г) $y=7x^3-6x^2+4$ бошад, y'''-ро ёбед;

д) $y=2x^6-6x^4+1$ бошад, y^{IV}-ро ёбед;

е) $y=3x^3-5x+11$ бошад, y''-ро ёбед;

ж) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+4x-11$ бошад, y'''-ро ёбед;

з) $y=x^5-3x+81$ бошад, y^{IV}-ро ёбед.

426. Қимати ҳосилаи тартиби олиро дар нуқтаи додашуда ёбед:

а) $f(x)=7x^3-x+12$, $f''(-2)$-?; б) $f(x)=x^2\sin x$, $f''(\pi)$-?;

в) $f(x)=3\sin x$, $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$-?; г) $f(x)=2\cos x$, $f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$-?;

д) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $f''(4)$-?; е) $f(x)=3\sin x+4tgx$, $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$-?.

427. Қисми ростро ба намуди $A\cos(\omega t+\alpha)$ табдил дода амплитуда, фаза ва зудии лаппишро ёбед:

а) $x(t)=0{,}32\sin\frac{t}{3}\cos\frac{5\pi}{6}+0{,}32\cos\frac{t}{3}\sin\frac{5\pi}{6}$;

б) $x(t)=-3\left(\cos 2t\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2t\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $x(t)=6\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos t-6\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin t$; г) $x(t)=\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos 3t-\frac{5}{2}\sin 2t$.

428. Оё функсияи

а) $x(t)=2\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$ ҳалли муодилаи $x''(t)+4x(t)=0$;

б) $x(t)=4\cos 3t$ ҳалли муодилаи $x''(t)+9x(t)+9=0$;

в) $x(t)=\frac{1}{3}\cos\left(0{,}1t+\frac{\pi}{4}\right)$ ҳалли муодилаи $x''(t)+\frac{x(t)}{100}=0$ аст.?

Машқҳо барои такрор

429. Муодилаи зеринро (Регионмонтан, асри XV) ҳал намоед:

а) $10x=x^2+\frac{100}{27}$; б) $y+\frac{1}{y}=25$; в) $10x-60+\frac{10x-60}{x}=80$.

430. Графикро насохта абсиссаи нуқтаҳои буриширо бо тири $0x$ ёбед.

а) $y=3x^2-27$; б) $y=4x-12$; в) $y=3x^2+1$; г) $y=x^3-\frac{1}{8}$.

431. Самти равиши шохаҳои параболаро ёбед:

а) $y=0{,}1x^2+3x$; б) $y=-2x^2+5x+31$; в) $y=3x^2+29$;

г) $y=-4x^2+5x+11$; д) $y=1-3x-x^2$; е) $y=3-8x+5x^2$.

432. Масъалае тартиб диҳед, ки матнаш ба ҳалли ($x>0$) муодилаи $x^2+20x=150$ меорад.

433. Бо ёрии формулаҳои $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ қимати

а) $(81)^2$; б) $(39)^2$; в) $(8{,}9)^2$; г) $(299)^2$;

д) $(602)^2$; е) $(20{,}1)^2$; ж) $(51)^2$; з) $(399)^2$.

ёфта шавад.

434. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёбед:

а) $y=-3x^2+6x$; б) $y=2x^2+4x+11$;

435. Айниятро исбот кунед:

а) $\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=ctg\alpha$; б) $\frac{\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}}=tg\frac{\alpha}{2}$.

436. Қимати ифодаи

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

ҳангоми $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ будан, ёфта шавад.

437. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $\frac{x+2\sqrt{x}}{1+\cos x}$; б) $x^3-2x+tgx$; в) $\left(x^3+1\right)\cdot ctg\alpha$

438. Синну соли модар аз писараш дида 4 маротиба зиёдтар аст. Панҷ сол пеш ӯ 9 маротиба калонтар буд. Модару писар чанд солаанд?

Машқҳои иловагӣ ба боби IV.

Ба параграфи 8.

439. Барои функсияи маълуми $f(x)$ афзоиши Δf -ро дар нуқтаи x_o ба воситаи x_o ва Δx ифода кунед:

а) $f(x)=2x^3-x+3,\quad x_o=1$; б) $f(x)=x^2-3x+2,\quad x_o=-2$;

в) $f(x)=2x-x^2,\quad x_o=3$; г) $f(x)=3\sqrt{x},\quad x_o=9$.

440. $f(x_o+\Delta x)$, Δf ва $\frac{\Delta f}{\Delta x}$-ро ҳангоми

а) $f(x)=1-x^2,\quad x_o=2$; б) $f(x)=4\sqrt{x},\quad x_o=4$;

в) $f(x)=2x^3,\quad x_o=1$; г) $f(x)=2x+1,\quad x_o=3$. будан, ёбед.

441. Нисбати $\frac{\Delta f}{\Delta x}$-ро дар нуқтаи $f(x)=3x^2-4$ барои функсияҳои

а) $f(x)=3x^2-4$; б) $f(x)=-\frac{4}{x}$; в) $f(x)=1-\sqrt{x}$, тартиб диҳед.

442. Суръати миёнаи нуқтаи материалии аз рӯи қонуни

а) $x(t)=9t+1$; б) $x(t)=2t^2-3t+1$;

ҳаракаткунандаро дар $[t_o;t_o+\Delta t]$ ёбед.

443. Маълум, ки ҳангоми $x\to 3$ функсияҳои $f(x)$ ва $\varphi(x)$ мувофиқан ба 1 ва 5 майл мекунанд. Инро ба назар гирифта, лимити функсия ёфта шавад:

а) $f^3(x)$; б) $\frac{f(x)-\varphi(x)}{f^3(x)}$; в) $\frac{f(x)\cdot\varphi(x)}{f(x)+\varphi(x)}$;

444. Лимитро ёбед:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+1}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3+x^3\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4-\sqrt{x}}{16-x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2\cos x}{x+1}$.

445. Фосилаҳои бефосилагии функсияро ёбед:

а) $-3x^3+4x^5+2x-11$; б) $3x^2+13x-21$; в) $\frac{x^2+4}{x-1}$;

г) $\frac{x^4}{x^2-1}$; д) $\frac{3x}{x^2+3}$; е) $\frac{5x+1}{3}$.

446. Оё функсияи $f(x)$ дар нуқтаҳои соҳаи додашуда бефосила мешавад:

а) $f(x)=3x^9-4x^5+23$, $(-\infty;+\infty)$;

б) $f(x)=3\sqrt{x}+9x$, $(1;4)$?

447. Маълум, ки $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ ва $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$ аст. Нишон диҳед, ки

а) $\lim\limits_{x\to a}\left\{[f(x)]^2-[\varphi(x)]^2\right\}=A^2-B^2$;

б) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=A^n$, $n\in z$;

мешавад

Ба параграфи 9.

Аз алгоритми ёфтани ҳосилаҳо истифода бурда, $f'(x)$-ро дар нуқтаи маълуми x_o ёбед (№№448-449)

448. а) $f(x)=4x-11$, $x_o=3$; в) $f(x)=x^3$, $x_o=9$;

б) $f(x)=1-2x^2$, $x_o=1$; г) $f(x)=2x^2+7$, $x_o=-1$.

449. а) $f(x)=\frac{2}{x+1}$, $x_o=4$; в) $f(x)=\frac{5}{x}+x^2+1$, $x_o=2$;

б) $f(x)=7x+2\sqrt{x}$, $x_o=1$; г) $f(x)=x^3-\sqrt{x}$, $x_o=1$.

450. Аз маънои механикии ҳосила истифода бурда, суръати ҷисми аз рӯи қонуни $S(t)$ ҳаракаткунандаро дар лаҳзаи вақти t_o ёбед (S бо метрҳо, t-бо сонияҳо):

а) $S(t)=9t^2-4t+3$, $t_o=3$; б) $S(t)=\frac{1}{3}t^3-t+13$, $t_o=8$.

451. Қонуни ҳаракат бо формулаи $S(t)=0{,}5t^2+2t-1$ (S-бо метрҳо, t-бо сонияҳо) муайян гаштааст. Ҷисм дар муддати 5 сония кадом масофаро тай мекунад? Суръати он дар ҳамин лаҳзаи вақт ба чӣ баробар аст?

Ба параграфи 10.

Ҳосилаи функсияро ёбед (№№452-453):

452. а) $\frac{2}{x}+7x-31$; б) $9x^3-8\sqrt{x}$;

в) $4x^2+3\sqrt{x}-2x+19$; г) $1-2x+3x^2+4x^3$.

453. а) $x^3+\sqrt{x}$; б) $\frac{x}{2}-\frac{3}{x^2}+\sqrt{x}$;

в) $\frac{x^2}{3}-\frac{4}{x^2}+7$; г) $2x^2+3x^3-1$.

454. $f'(2)$-ро ҳангоми

а) $f(x)=9x^2+5$; б) $f(x)=2-3x^3$;

в) $f(x)=3x^2-19x+8$; г) $f(x)=3-4x^2+9x^3$.

будан, ёбед.

Ҳосилаи функсияро ёбед (455-456):

455. а) $(x^3-x)(x^2+x)$; б) $\sqrt{x}(x-1)$; в) $x(1+\sqrt{x})$; г) $x^2(x+1)$.

456. а) $x^2\sqrt{x}$; б) $x^2(x^2-2x+4)$; в) $x^3(x^2+1)$; г) $(\sqrt{x}-1)(x-1)$.

457. $f'(4)$-ро ҳангоми

а) $f(x)=3x^2\cdot\sqrt{x}$; б) $f(x)=(x^3-1)(x+1)$

будан, ёбед.

Ҳосилаи функсияро ёбед (№№458-459);

458. а) $\frac{x-1}{x+1}$; б) $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$; в) $\frac{\sqrt{x}}{x^2-x+2}$; г) $\frac{x^3}{x^2-3x+2}$.

459. а) $\frac{x^2}{x+13}$; б) $\frac{x+11}{x^3}$; в) $\frac{7}{x^2}$; г) $\frac{3}{x^3}$.

460. $f'(1)$-ро ҳангоми

а) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{1}{11}$; б) $f(x)=\frac{2x^2}{1-7x}+3$;

будан, ёбед.

Ҳосилаи функсияи $f(x)$-ро дар нуқтаҳои нишондодашуда ёбед (461-463)

461. $f(x)=x^3-2x+5$;

а) 0; б) 2; в) x_0; г) $a+1$.

462. $f(x)=2\sqrt{x}$

а) 1; б) 4; в) 9; г) a.

463. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$

а)2; б) -3; в) 4; г) x_o.

464. Муодилаи $f'(x)=0$ -ро ҳангоми

а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x$; б) $f(x)=-x^2+4x$;

в) $f(x)=x^5-x^3-2x$; г) $f(x)=x^3+4{,}5x^2$

будан, ҳал кунед.

465. Нобаробарии $f'(x)>0$ -ро ҳангоми

а) $f(x)=1+3x-5x^2$; б) $f(x)=x^2+2x$; в) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$;

г) $f(x)=(x-1)(x-2)$; д) $f(x)=x(x^2-9)$

будан, ҳал кунед.

466. Нобаробарии $f'(x)<0$ -ро ҳангоми

а) $f(x)=x^4+2x^2-1$; б) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-8x+\frac{101}{18}$; в) $f(x)=x^4+4x-3$;

г) $f(x)=\dfrac{1-x}{x+3}$; д) $f(x)=x^3-6x^2-63x+91$

будан, ҳал кунед.

467. Барои функсияҳои

а) $f(x)=x^3-3x$ ва б) $f(x)=\sqrt{3}x^2-2$

муодилаю нобаробариҳои $f'(x)=0$, $f'(x)>0$ ва $f'(x)<0$ -ро тартиб дода, онҳоро ҳал кунед.

468. Барои кадом қиматҳои x қимати ҳосилаи функсияи $f(x)=7x^2+x+19$ ба 15 баробар аст.

<u>Ба параграфи 11.</u>

Ҳосилаи функсияро ёбед (№№469-470);

469. а) x^{11}; б) $5x^8$; в) x^{-7}; г) $2x^{-4}$; д) $2x^5+x^4-5x^3+3x^2-x+7$;

е) x^4-x^2+18; ж) $\dfrac{x^n}{n}-\sqrt{x}$.

470. а) $x^n\cdot\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$; б) $x^{-3}+x^3$; в) $(x^4+1)\cdot\sqrt{x}$; г) $x^7(\sqrt{x}-2)$;

д) $\dfrac{x^4}{x^2-1}$; е) $\dfrac{x^5-1}{x+1}$; ж)* $\dfrac{2}{x\sqrt{x}}-\sqrt{x^3}$; з)* $2\sqrt{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{x^2}$.

471. $f'(2)$-ро ҳангоми

а) $f(x)=9-x^2$; б) $f(x)=\frac{3}{x^4}$; в) $f(x)=x^{-5}$; г) $f(x)=x^6+1$;

будан, ёбед.

472. Аз рӯи функсияи мураккаби $F(x)=g[f(x)]$ функсияҳои $g(u)$ ва $u=f(x)$ -ро муайян намоед:

а) $F(x)=(7x+11)^9$; б) $F(x)=\frac{1}{(x+15)^{15}}$;

в) $F(x)=\sin\left(9x^2-\frac{\pi}{3}\right)$; г) $F(x)=\cos^6 x$.

Ҳосилаи функсияро ёбед (473-476)

473. а) $(3x-10)^{23}$; б) $(x-2)^{70}$; в) $(7x-4)^{101}$.

474. а) $\frac{1}{(3+5x)^{11}}$; б) $\frac{4}{(1+2x)^{29}}$; в) $-\frac{1}{(3x+2)^{99}}$.

475. а) $\sqrt{25-x^3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; в) $\sqrt{2+\frac{1}{x}}$.

476. а) $x^{\sqrt{2}}+3x$; б) $(x+1)^{\sqrt{3}}$; в) $x^{\sqrt{5}}-8$.

477. Ҳосилаи функсияи $y=\left(x^3+2x^2+3x-4\right)^3$ -ро дар нуқтаҳои $x=1$ ва $x=2$ ёбед.

478. Ҳосилаи функсияи $S(t)=\sqrt{t^2+1}$ -ро дар нуқтаҳои $t=0$ ва $t=3$ ёбед.

479. $f(x)=(2x+3)^2$. Дар кадом қиматҳои x $f'(x)=f(x)$ мешавад?

480. Дар кадом қиматҳои x ҳосилаи функсияи $y=x^2$ ба 32 баробар мешавад?

Ба параграфи 12.

481. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $\sin x+3tgx$; б) $2+\sin x$; в) $1+ctgx$;

г) $3\cos x(1-\sin x)$; д) $\frac{1}{\cos x}+\frac{2}{\sin x}$; е) $\frac{4\cos x}{1+\sin x}$.

482. Ҳосилаи функсияҳои тригонометриро ёбед:

а) $\sin\frac{3x}{5}+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $2tg(1+x)-3ctg\frac{x}{2}$;

в) $5+\sin^2 x$; г) $3-\cos^3 x$;

д) $\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\cos x}$; е) $\dfrac{2\sin 2x}{1+\cos^2 x}$.

483. Ҳосилаи функсияро дар нуқтаи x_0 ҳангоми

а) $f(x)=5\sin x-2tgx,$ $x_o=\dfrac{\pi}{4}$;

б) $f(x)=4x-\cos 2x,$ $x_o=\dfrac{\pi}{6}$;

в) $f(x)=x^3+3ctgx,$ $x_o=\dfrac{\pi}{3}$;

г) $f(x)=\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x},$ $x_o=\dfrac{\pi}{2}$

будан, ёбед.

484. Муодилаи $f'(x)=0$ -ро ҳал кунед:

а) $f(x)=4\cos^3 x-9\cos x$;

б) $f(x)=2\sqrt{2}\cos^3 x-3\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x$;

в) $f(x)=x-\cos 2x$; г) $f(x)=-3\cos x-x$.

485. Нобаробарии $f'(x)>0$ -ро ҳал кунед, агар

а) $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\cos x$; б) $f(x)=2\sin x-x$

ва нобаробарии $\varphi'(x)<0$ -ро ҳал кунед, агар

в) $\varphi(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}x$; г) $\varphi(x)=4\sin\left(\dfrac{x}{4}-1\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ бошад.

486. Барои функсияҳои

а) $f(x)=x-2\sin x$ ва б) $f(x)=\sqrt{3}x-2\cos^2 x$

муодилаю нобаробариҳои $f'(x)=0$, $f'(x)>0$ ва $f'(x)<0$ -ро тартиб дода онҳоро ҳал кунед.

487. Ҳосилаи функсияи $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x}$ -ро дар нуқтаҳое ёбед, ки қимати $f'(x)$ ба 0 баробар бошад.

488. Агар $f(x)=x\sin x$ ва $x_o=\pi$ бошад, он гоҳ қимати ифодаи $2f'(x_o)+3f(x_o)-7$ ба чӣ баробар мешавад?

489. $f(x)=\sin\sqrt{3}x$. Барои кадом x - ҳо $f'(x)=f(x)$ мешавад?

490. Оё муодилаи $f'(x)=2$, ки $f(x)=\sin x$ аст, ҳал дорад?

Ба параграфи 13.

491. Аз қоидаҳои дифференсиронӣ ва ҷадвали ҳосилаҳо истифода бурда, ҳосилаи тартиби дуи функсияро ёбед:

а) $y = \dfrac{x+1}{x-42}$;

б) $y = (2x+1)tgx$;

в) $y = 2\sin^2 x + 3\cos 2x$.

492. Ҳосилаи тартиби нишондодашударо аз функсияҳои зерин ёбед:

а) $f(x) = x^3 - x\cos x$, $\quad y^{III}$ -?;

б) $f(x) = 9x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 23x - 19$, $\quad y^{IV}$ -?;

в) $f(x) = \dfrac{1}{7}x^7 - \dfrac{1}{6}x^6 + \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 + x$, $\quad y^{VI}$ -?;

г) $f(x) = 9x^8 + 11x^6 - 13x^4 + 41x - 3$, $\quad y^{VII}$ -?.

493. Ҳосилаи тартиби талабшудаи функсияи $f(x)$-ро дар нуқтаи додашудаи x_o ёбед:

а) $f(x) = (x^3 - 5)\cos x$, $\quad f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$-?;

б) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 1$, $\quad f'''(2)$-?;

в) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + x$, $\quad f^{V}(3)$-?;

г) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$, $\quad f^{IV}(1)$-?.

494. Оё функсияи

а) $x(t) = 7\cos\left(0{,}1t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ ҳалли муодилаи $x''(t) + 0{,}01x(t) = 0$;

б) $x(t) = \dfrac{1}{3}\sin\left(4t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ ҳалли муодилаи $x''(t) + 16x(t) = 0$ аст?

495. Фарз мекунем, ки $y = \sqrt{2x - x^2}$ бошад. Исбот кунед, ки айнияти $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$ ҷой дорад.

496. $y = x^2 - 2x + 2$. Ҳамон қиматҳои x – ро ёбед, ки барояшон ифодаи $y'' + 2y' - 3y$ ба 0 баробар шавад.

497. $f(x) = \sin x$. Нишон диҳед, ки айнияти $f'''(x) + f(x) = 0$ ҷой дорад.

498. Ҷадвали зеринро пур кунед:

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f''(1)$
$(x+2)^{-8}$			
$\frac{3}{x^2}$			
$\sin\frac{\pi}{2}x$			

499. $f(x)=2x^2-x$. Графики функсияҳои $f(x)$, $f'(x)$ ва $f''(x)$ - ро дар як ҳамвории координатӣ кашед.

500. $f(x)$ ба x^3 баробар буданашро ба ҳисоб гирифта баробарии $3f'(x)=f''(x)+3$ -ро табдил диҳед ва муодилаи ҳосилшударо бо тарзи графикӣ ҳал кунед.

301. а) (2,98; 3,02); б) (1,5; 2,5); в) (3,99; 4,01); г) (-1,3; -0,7). **302.** а) x=1,1, $\Delta y = 0{,}2$; б) x=2,01, $\Delta y = 0{,}02$; в) x=3, $\Delta y = 0{,}04$; г) x=4,03, $\Delta y = 0{,}06$; д) x=4,12, $\Delta y = 0{,}24$; е) x=5,02, $\Delta y = 0{,}04$. **303.** а) $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}41$; б) $\Delta x = -0{,}4$, $\Delta y = -2{,}24$; в) $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 1{,}06$; г) $\Delta x = -0{,}1$, $\Delta y = 0{,}51$; д) $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}81$; е) $\Delta x = 0{,}3$, $\Delta y = 5{,}49$. **304.** а) $\Delta y = -\frac{1}{3606}$; б) $\Delta y = -\frac{1}{2457}$; в) $\Delta y = -\frac{1}{102}$; г) $\Delta y = -\frac{1}{84}$; д) $\Delta y = -\frac{1}{105}$; е) $\Delta y = -\frac{1}{363}$; ж) $\Delta y = \frac{1}{3594}$; з) $\Delta y = \frac{1}{228}$. **305.** а) $2 \cdot \Delta x$; б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$; в) $-2x_o \cdot \Delta x - (\Delta x)^2$; г) $2(1 - x_o) \cdot \Delta x - (\Delta x)^2$; д) $2(x_o - 2) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$; е) $(6x_o^2 - 1) \cdot \Delta x + 6x_o(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$; ж) $3x_o^2 \cdot \Delta x + 3x_o(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; з) $2x_o \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

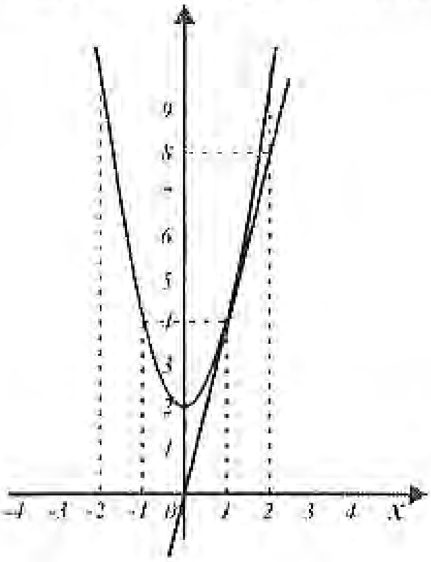
306.

$f(x)$	x	x^2	$ax+b$	ax^2+bx+c	x^3
$f(x_o+\Delta x)$	$x_o+\Delta x$	$(x_o+\Delta x)^2$	$a(x_o+\Delta x)+$ $+b$	$a(x_o+\Delta x)^2+$ $+b(x_o+\Delta x)+$ $+c$	$(x_o+\Delta x)^3$
Δy	Δx	$2x_o\Delta x+$ $+(\Delta x)^2$	$a \cdot \Delta x$	$(2ax_o+b)\Delta x+$ $+a(\Delta x)^2$	$3x_o^2\Delta x+(\Delta x)^3+$ $+3x_o(\Delta x)^2$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	1	$2x_o+\Delta x$	a	$2ax_o+b+$ $+a \cdot \Delta x$	$3x_o^2+3x_o\Delta x+$ $+(\Delta x)^2$

307. а) 4,1; б) 4,01; в) 4,001; г) 3,9; д) 3,99; е) 3,999. **308.** а) 3,31; б) 3,0301; в) 3,003001; г) 2,71; д) 2,9701; е) 2,997001. **309.** $\Delta P = 0{,}6м$; $\Delta S = 5{,}42м^2$. **310.** $\Delta S = 6(2x_o + \Delta x) \cdot \Delta x$; а) $\Delta S = 5{,}04(\text{вох}^2)$; б) $\Delta S = 0{,}03606(\text{вох}^2)$. **311.** $\Delta V = (3x^2 + 3\Delta x + \Delta x^2)\Delta x$; а) $\Delta V = 0{,}33$ вох.кубӣ; б) $\Delta V = 2{,}648$ вох.кубӣ. **312.** а) $\Delta f = (3x^2 - 2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x^2)) \cdot \Delta x$; $\frac{\Delta f}{\Delta x} = (3x^2 - 2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2)$; б)

$\Delta f=\frac{-7(2x+\Delta x)\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-7(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$; в) $\Delta f=\frac{2(\Delta x-2x)\Delta x}{(x^2-1)[(x+\Delta x)^2-1]}$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2(\Delta x-2x)\Delta x}{(x^2-1)[(x+\Delta x)^2-1]}$; г) $\Delta f=\frac{-3(2x+\Delta x)\Delta x}{(x^2+1)[(x+\Delta x)^2+1]}$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-3(2x+\Delta x)}{(x^2+1)[(x+\Delta x)^2+1]}$; д) $\Delta f=\left[1-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right]\cdot\Delta x$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}=1-\frac{1}{x(x+\Delta x)}$; е) $\Delta f=\left[1-\frac{1}{x^2(x+\Delta x)^2}\right](2x+\Delta x)\cdot\Delta x$. **313.** а)3; б) - 3; в) $\upsilon_o+gt_o-\frac{g\Delta t}{2}$; г) $-gt_o-\frac{g\Delta t}{2}$. **314.** $\upsilon_M=1{,}5$; $\upsilon_M=1$; $\upsilon_M=0{,}5$. **315.** а) $x=3$; б) $x_1=1$; $x_2=-\frac{7}{2}$; в) $x_1=3$; $x_2=8$; г) $x=0$; $(x\neq\pm1)$. **316.** а) (2;1); б) (8;4); (-8;-4). **318.** а) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; б) $x=\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **320.** а) ҷуфт; б) тоқ; в) на ҷуфт аст на тоқ. **321.** 10см, 7см. **322.** 10соат ва 15соат-ҳангоми гуногун будани иқтидори борбардории мошинҳо; 12соат –ҳангоми якхела будани иқтидори борбардорӣ. **323.** а)-1; б)8; в)$\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{4}{3}$; е) $\frac{1}{3}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) 2; и) $\frac{2}{\pi}$. **324.** а) 81; б) $\frac{13}{81}$; в)$\frac{11}{5}$. **325.** а), б), е) ва з) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$; г) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; д) дар тамоми тири ададӣ ба ғайр аз нуқтаҳои 0; ±2; ж) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **326.** а) ҳа; б) дар нуқтаҳои $[0;+\infty)$ бефосила, вале дар (-4; 0) бефосилагиаш вайрон мешавад; в) дар нуқтаҳои $x=3;4\in(-\infty;5)$ бефосила шуда наметавонад. **327.** а), г), е) ҳа; б), д) дар нуқтаи x_2 бефосила намешавад; в) дар нуқтаи x_1 бефосила нест. **329.** а) x=0; б) x=1. **330.** $a<-3$, $-3<a<0$, $0<a<1$. **331.** 20 км/соат. **332**. 20%. **333.** а) $-\frac{\sqrt{2}+9}{2}$. **334.** а) $-\frac{65}{63}$; б) $\frac{22}{21}$. **335.** а)1; б) $-\frac{1}{\cos\alpha}$. **336.** а) 1; $-\frac{7}{3}$; б) 2; 1. **337.** а) $\frac{3}{2}$; б) 1. **339.** 1), 2) $\upsilon_M=2$. **340.** 1) $\upsilon_M=3$; 2) $\upsilon_M=6{,}1$. **341.** а)5; б) $6t$. **342.** а) $\upsilon(3)=9$; б) $\upsilon(6)=21$. **343.** а)

6,005; б) 6,006002; в) $-\frac{70}{19}\approx 3,6842105\ldots$; г) 48,2604. **344.** а) $2x+6x^2$; б) $2x+3$; в) 5; г) -6х; д)4; е) $3x^2$; ж) **Нишондод.** Барои x- ҳои ғайринулӣ $\Delta\varphi=\Delta x\left[1-\frac{3}{x(x+\Delta x)}\right]$ мешавад. Аз он $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=1-\frac{3}{x(x+\Delta x)}$-ро ҳосил мекунем. Дар зинаи охирини алгоритм мебинем, ки ҳангоми $\Delta x\to 0$



Расми 67

нисбати $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ ба $1-\frac{3}{x^2}$ майл мекунад. Ҷавоб: $\varphi'(x)=1-\frac{3}{x^2},\ x\neq 0$; з) **Нишондод.** Дар ин ҷо $\Delta\Psi=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}-2x\cdot\Delta x-(\Delta x)^2$ мешавад. Зинаи ояндаи алгоритм ба $\frac{\Delta\Psi}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}-2x-\Delta x$ оварда мерасонад. Ниҳоят, ҳангоми $\Delta x\to 0$, $\frac{\Delta\Psi}{\Delta x}\to\frac{1}{2\sqrt{x}}-2x$-ро ҳосил мекунем, ки он $\Psi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-2x$; и) $g'(x)=1-\frac{3}{2\sqrt{x}}$; к) $g'(x)=1-4x+9x^2$. **345.** а)9; б) 6; в) -4; г) -9. **346.** а) $f'(100)=f'(-11)=a$; б) $f'(4)=\frac{1}{4}$; $f'(625)=\frac{1}{50}$; в) $\varphi'(-3)=-\frac{1}{9}$, $\varphi'(5)=-\frac{1}{25}$; г) $g'(6)=108$; $g'(-1)=3$. **347.** Расми 67. **348.** а)x=1; б) $x=\frac{1}{16}$. **349.** а)$x_1=0$; $x_2=1$; б) $x=-\frac{1}{3}$. **352.** а)4х-1; б) x^2-2x+2; в) x^2+2; г) x^2-3.

353. а), г) –ҷуфт; б), в)-ток. **354.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{3}$. **355.** а) $\sin 2\alpha$; б) $tg2\alpha$.

356. **Нишондод.** Пайдарпайи ададҳои натуралии ҷуфти $2;4;6;\ldots;2n$ прогрессияи арифметикиро бо фарқи $d=2$ ташкил медиҳад. Азбаски $a_n=2n$ аст, пас $a_1=2$ ва $a_{60}=120$ мешавад. Аз ин ҷо $2S_{60}=(2+120)\cdot 60$, $S_{60}=61\cdot 60=3660$. Ҷавоб: 3660. **357.** а) $x_1=-1$; $x_2=2$; $x_3=-3$; б) $x=-3$. **358.** **Нишондод.** Агар касри матлуби дурустро дар шакли $\frac{x}{y}$ гирем, онгоҳ шарти масъала ба ҳалли системаи

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12} \end{cases}$ оварда мерасонад. Ҳалҳои система (3;4), (4;3), (-3;-4) ва (-4;-3) мешаванд. Ҷавоб: $\frac{3}{4}$. **359.** а) $\frac{4}{9}$; б) $2\frac{5}{99}$; в) $-4\frac{3}{11}$; г) $\frac{3}{11}$. **360.** не; **361.** а) 1 ва 2x+1; б) 1 ва 2x-1; в) -1 ва -2x-2; г) 0 ва b. **362.** а) $3x^2+2x$; б) $3x^2-2x$; в) $3x^2$; г) 2x; д) 2x-4; е) 2x+6; ж) $3x^2+2x$; з) $-2x+3x^2$; и) $1-\frac{1}{x^2}$; к) $3x^2-\frac{1}{x^2}$; л) $1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; м) $\frac{1}{2\sqrt{x}}-2x$. **363.** а) $f'(1)=0$, $f'(9)=16$; б) $f'(1)=3$, $f'(9)=243$; в) $f'(1)=1$, $f'(\ )=17$; г) $f'(1)=9$, $f'(9)=249$; д) $f'(1)=\frac{3}{2}$, $f'(9)=\frac{29}{162}$; е) $f'(1)=-3$, $f'(9)=-\frac{1459}{81}$; ж) $f'(1)=-\frac{1}{2}$, $f'(9)=\frac{25}{162}$; з) $f'(1)=2$, $f'(9)=\frac{19682}{81}$. **364.** а) x=1,5; д) $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. **365.** а) $-6x^5+2x$; б) $\frac{3x+11}{2\sqrt{x}}$; в) $3x^2\cdot\sqrt{x}+3x^2+\frac{x^3}{2\sqrt{x}}$; г) $3x^2-2x+1$. **366.** а)3; б) 2; в) 4; г) 1,5. **367.** а) $\frac{1}{(x+3)^2}$; б) $-\frac{13}{(2x+1)^2}$; в) $-\frac{20}{(3x-10)^2}$. **368.** а) $\frac{x^2-2x+8}{(x+1)^2}$; б) $\frac{1-x^2}{(x+1)^2}$; в) $-\frac{1+3x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}$; г) $\frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$. **369.** а) $\frac{8}{25}$; в) $\frac{1}{4}$. **370.** $x_1=0$, $x_2=-2$. **371.** x=0. **372.** а) $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; б) $x>\frac{11}{4}$; в) $x\in(-\infty;+\infty)$. **373.** а) $x<2$; б) $x>\frac{1}{3}$; в) $x\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **374.** а) 3x; б) $\frac{3}{2}x^2+2x$; в) x^2-2x; г) $5x+\frac{2}{x}$. **375.** 5,8. **376.** 4,9. **377.** $x_1=1$; $x_2=4.5$; в) x=3; г) x=-4. **378.** а) (1;2), (2;1); б) $\left(\frac{6}{13};-\frac{6}{11}\right)$. **379.** а) (5;-10); б) $\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{8}\right)$. **380.** $a_1=1$, $d=-2$. **381.** 400км/соат. 320км/соат. **383.** а) $5x^4$; б) $11x^{10}$; в) $13x^{12}$; г) $103x^{102}$; д) $(n+1)x^n$; е)

$-\frac{2}{x^3}$; ж) $-\frac{4}{x^5}$; з) $-\frac{7}{x^8}$; и) $-\frac{15}{x^{16}}$; к) $\frac{1-n}{x^n}$; л) $\frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}}$; м) $\left(1+\sqrt{3}\right)x^{\sqrt{3}}$. **384.** а) $-\frac{3}{64}$; б) 110; в) $26\frac{26}{27}$; г) -30. **385.** а) $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 2$; б) $x=\pm 1$; в) x=0; г) $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 1$; д) x=-1; е) $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{6}$. **386.** а) $11x^{10}+9x^8$; б) $9x^8-7x^6+4x^3+2x$; в) $\frac{5x^{11}+3x^3+6}{x^7}$; г) $\frac{-64x^7-32x^5+4x^4-4x^3+15x^2-3}{\left(1+4x^2\right)^2}$; д) $\frac{2x^5-16x^3+6x}{\left(x^2+4\right)^2}$; е) $24x^{11}-40x^5+9x^8-6x^2+4$. **387.** а) x^3+4x; б) $\frac{5}{10}x^{10}+\frac{2}{3}x^6-\frac{3x^2}{2}$; в) $\frac{3}{x}+2x$; г) $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}$. **388.** а) $g=\sqrt{u};\ u=1-\cos x$; б) $g=u^2;\ u=2\sin x+3$; в) $g=\sin u;\ u=3x-\frac{\pi}{4}$; г) $g=tgu;\ u=\frac{2}{x}$; д) $g=u^5;\ u=3x-11$; е) $g=\arcsin u; u=\frac{x-3}{2}$; ж) $g(u)=u^9;\ u=1+7x$; з) $g(u)=\sqrt{u};\ u=\sin x$; и) $g(u)=u^3;\ u=1+\cos x$; к) $g=ctgu; u=x^2-x+3$. **389.** а) $2\sqrt{x^2+1}$; б) 4x+1; в) $\frac{2}{\sqrt{x}}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; д) $1+\frac{1}{x^2}$; е) $\frac{1}{x^2+1}$. **390.** а) $|x|\le\frac{1}{2}$; б) $x\in(-\infty;-0{,}4]\cup[0{,}4;+\infty)$; в) $|x|\le 5$; г) $x>1$; д) $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z$; е) $\frac{\pi}{4}+n\pi<x<\pi+n\pi,\ n\in Z$; ж) $-\frac{5\pi}{8}+n\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+n\pi,\ n\in Z$; з) $-\frac{3\pi}{2}+2n\pi\le x\le-\frac{\pi}{6}+2n\pi,\ n\in Z$; и) $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; к) $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **391.** а) $21(11+x)^{20}$; б) $-39(9x+23)^{-5}$; в) $-(0{,}1x-1)^{-11}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x+3{,}2}}$; д) $\frac{1}{\sqrt{9-2x}}$; е) $-\frac{1}{2\sqrt{3x-91}}$; ж) $\frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2}+13}}$; з) $an(ax+b)^{n-1}$; и) $-an(ax+b)^{-n-1}$. **392.** а)

$\frac{5x}{\sqrt{5x^2-27}}$; б) $\frac{x+5}{\sqrt{x^2+10x-61}}$; г) $\frac{12x^2}{\sqrt{8x^3+5}}$; д) $\frac{x^3}{2\sqrt{0,25x^4+2}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}$; е) $\frac{akx^{k-1}+b}{2\sqrt{ax^k+bx+c}}$. **393.** а) $-3x^2+134x-393$; б) $8(2x+5)^3-21(3x-1)^6$; в) $54\left(3x^2+7x+11\right)^{53}\cdot(6x+7)$; г) $206x\left(x^2-3\right)^{102}$; д) $\frac{-x^4+4x^3+2x^2+4x+3}{(1-x)^4}$; е) $\frac{x\left(x^3-7\right)^2\left(5x^3-9x+28\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$. **394.** а) $\frac{a+2}{a-1}$; б) $\frac{a^2+1}{a-1}$. **395.** а) **Нишондод.** Нобарobариро аввал $\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)>0$ ва баъд ба намуди $(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)>0$ овардан мумкин аст; б) Нобарobариро ба намуди $\left(x^2-1\right)\left(x-5\right)\left(x^2-9\right)\left(x+2\right)>0$ оварда бо ёрии методи интервалҳо ҳал кардан мумкин аст. **397.** 52^o; 76^o. **398.** а) $b_4=125; S_4=156$; б) $b_5=81; S_5=61$. **399.** б) (1;3), (-1;-3). **400.** Бигзор дар мусобиқа x шоҳмотбоз иштирок карда бошад. Онгоҳ яке аз ин шоҳмотбозон бо дигарҳояш (x-1) бозӣ мекунад. Аз (x-1) шоҳмотбози боқимонда якеаш бо дигаронаш як маротибагӣ бозӣ карда (x-2) вохӯрӣ мегузаронад. Возеҳ аст, ки дар охир ду шоҳмотбоз мемонаду бо якдигар як бозии финалӣ мегузаронанд. Дар асоси муҳокимарониҳо прогрессияи арифметикии x-1; x-2; ...,3;2;1-ро ҳосил мекунем, ки суммаи аъзоҳояш мувофиқи шарти масъала ба 78 баробар аст. Пас, дар асоси формулаи суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикӣ $78=\frac{(x-1)+1}{2}\cdot(x-1)$ ва аз он муодилаи $x^2-x-156$-ро ҳосил мекунем, ки решаи мусбаташ x=13 аст. Ҷавоб: 13 шоҳмотбоз. **401.** а) $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{45}{x^6}$; б) $4x^3-3x^2+3$; в) $\frac{18x^6+15x^4+4x}{\left(1+2x^2\right)^2}$; г) $6x^5+\frac{5}{x^2}$; д) $\frac{5}{2}x\sqrt{x}+\frac{7}{2\sqrt{x}}+2x$; е) $\frac{7x^3+1}{2\sqrt{x}}$; **402.** не.

403. а) $2+3\cos x$; б) $-2\sin x$; в) $3\cos x-2\sin x$; г) $\frac{3}{\cos^2 x}$; д) $-\sin x+\frac{2}{\cos^2 x}$; е) $\cos x-\frac{3}{\sin^2 x}$; ж) $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{4}{\sin^2 x}$; з) $2\cos 2x$; и) $-3\sin 3x$; к) $-6\cos 8x$; л) $5\cos\frac{5x}{2}$; м) $10\sin(-2x)$; н) $x-\cos x$. **404.** а)

$-2\sin\frac{2x}{7}$; б) $6\sin 1{,}5x$; в) $-\frac{1}{10}\sin(-0{,}3x)$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{\cos^2 x}$; д) $-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{\cos^2\frac{x}{2}}$; е) $2x-\frac{2}{\cos^2 10x}$; ж) $-\frac{4}{5\cos^2(-4x)}$; з) $-\frac{3}{\sin^2 3x}$; и) $-\frac{13}{\sin^2(-10x)}$; к) $3-\frac{32}{\sin^2 8x}$; л) $-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{4}}-10x^9$. **405.** а) $-3\sin x$; б) $6\sin 3x$; в) $-\cos 10x$; г) $20\cos 4x$; д) $2\cos\frac{x}{3}$; е) $1{,}5\sin 0{,}5x$. **406.** а) $2\sec^2(x-4)$; б) $6\sec^2\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)$; в) $-5ctg(x+1)\cos ec(x+1)$; г) $-6\cos ec^2\left(\frac{3}{2}x-5\right)$; д) $(x-2)\cos ec^2(2\pi-4x+x^2)$; е) $1+\frac{\cos(1-x)}{10\sin^2(1-x)}$. **407.** а) $f'(0)=3$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3-\sqrt{2}$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$; б) $f'(0)=2$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4+\frac{\pi}{2}$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}(4+\pi)$; в) $f'(0)=0$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$; г) $f'(0)=1$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$; д) $f'(0)=-1$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}$; е) $f'(0)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=8$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{28}{3}$. **408.** а) $x^3(3\sin x+x\cos x)+\cos x$; б) $\sin x+x\cos x+\frac{1}{3}\sec^2 x$; в) $4\cos ec^2(2x)$; г) $-\sin x(\sin x+2x\cos x)$; д) $-4ctgx\cos ec^2 x$; е) $2+\sin 2x$; ж) $-\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}$; з) $-\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$; и) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\cos x+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\sin x$. **409.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi,\quad n\in Z$; б) $x=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+2k\pi,$; $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2k\pi,\ k\in Z$ в) $x=n\pi,\ n\in Z$; г) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k,\quad k\in Z$; д) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\quad n\in Z$; е)

$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,$ $n\in Z$. **410.** а) $2n\pi<x<(2n+1)n\pi,$ $n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi,$ $n\in Z$; в) $\frac{7}{24}\pi+n\pi<x<\frac{25\pi}{24}+n\pi,$; $n\in Z$ г) $2k\pi<x<(2k+1)\pi,$ $k\in Z$. **411.** а) x^3-tgx; б) $x^2-\sin 3x$; в) $\sin x-3\cos x$; г) $\sin x-3\sqrt{x}$; д) $x+\sin x$; е) $2x+\cos x$. **412.** $6+\frac{7\pi}{2}$. **414.**

Нишондод. Шарти масъала ба ҳалли муодилаи $\frac{120}{x}+\frac{232}{x-2}=6$ оварда мерасонад, ки дар он х суръати аввалаи мошини боркашро ифода мекунад. **415.** а) $x=5,\ y_{\min}=1$; б) $x=3,\ y_{\max}=5$. **416.** **Нишондод.** Хати кач тири ОХ-ро ҳангоми y=0 будан буриданаш мумкин аст. Вале дар ин ҳолат муодилаи $x^2-9y^2+4y+1=0$ ба $x^2+1=0$ табдил меёбад, ки он решаҳои ҳақиқӣ надорад. Ҷавоб: Хати кач тири ОХ-ро намебурад. **417.** а) $x^2+x^2-2=0$; б) $x^3-3x^2-x+3=0$. **418.** а) $(x-7)^2-18$; б) $(x+5)^2-29$; в) $2(x+2)^2-11$. **419.** а) 21сомону 52 дирам<2218дирам; б) 42т318кг>41318кг; в) 6с18дақ=378дақ. **420.** 40воҳ. **421.** а) $x=\pm3$; б) x=8. **422.** $x=\pm3$. **423.** а) $\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$; б) $\frac{32-24x-24x^3+12x^4-2x^6}{(x^3+4)^3}$; в) $\frac{2x(x^2-3x+3)}{x-1}$; г) $\frac{15x^4-72x^2-16}{4x\sqrt{x}(x^2+4)^3}$; д) $\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^3 x}$; е) $2+4tgx\cdot\sec^2 x$. **424.** а) $-6x\cos x-(6-x^2)\sin x$; б) $(6-9x^2)\sin x+(18x-x^3)\cos x$; в) $12(5x^2+1)$; г) $6(4x-3)$. **425.** а) 30; б) $26880x^3-360x$; в) 0; г) 42; д) $720x^2-144$; е) 18x; ж) 6x-2; з) 120x. **426.** а) –84; б) -4π; в) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; г)1; д) $\frac{71}{864}$; е) $30{,}5\sqrt{3}$. **427.** а) $A=0{,}32,\ \omega=\frac{1}{3},\ \alpha=\frac{\pi}{3}$; б) $A=-3,\ \omega=2,\ \alpha=\frac{\pi}{4}$; в) $A=6,\ \omega=1,\ \alpha=\frac{\pi}{3}$; г) $A=5,\ \omega=3,\ \alpha=\frac{\pi}{6}$. **428.** а) ҳа; б) не; в) ҳа. **429.** а) $x=5-\sqrt{21\frac{8}{27}}$; б) $y=\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{621}{4}}$; в) $x=\frac{13}{2}+\sqrt{\frac{193}{4}}$. **430.** а) $x=\pm3$; б) x=3; в) параболаи $y=x^2+1$ тири ОХ-ро намебурад; г) $x=\frac{1}{2}$. **431.** а) ба боло; б) ба поён; в) ба боло; г) ба поён; д) ба поён; е) ба боло. **432.**

Намуна. Дарозии майдони росткунҷашакл аз бараш дида 20м зиёдтар буда, масоҳаташ ба 1500м² баробар аст. Бар ва дарозии майдонро ёбед. Ҷавоб: 30м ва 50м. **433.** а) 6561; б) 1521; в) 79,21; г) 89401; д) 362404; е) 404,01; ж) 2601; з) 159201. **434.** а) $(-\infty;1)$ - афзуншаванда, $(1;+\infty)$ - камшаванда; б) $(-\infty;-1)$ - камшаванда, $(-1;+\infty)$ - афзуншаванда. **436.** $1\frac{5}{6}$. **437.** а) $\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)(1+\sin x+\cos x)+\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}(1+\cos x)^2}$; б) $3x^2-2+\sec^2 x$; в) $3x^2ctgx-\left(x^3+11\right)\cos ec^2x$. **438. Нишондод.** Бо x-солҳои писарро ишорат карда ба ҳалли муодилаи $\frac{4x-5}{x-5}=9$ омадан мумкин аст. Ҷавоб: Модар 32сола ва писар 8сола аст. **439.** а) $5\Delta x+6(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3$; б) $-7\Delta x+(\Delta x)^2$; в) $-4\Delta x-(\Delta x)^2$; г) $\frac{\Delta x}{\sqrt{9+\Delta x}+3}$. **440.**

№ б/т	$f(x_o)$	$f(x_o+\Delta x)$	$\Delta f=f(x_o+\Delta x)-f(x_o)$	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
а)	-3	$-3-4x-(\Delta x)^2$	$-4\Delta x-(\Delta x)^2$	$-4-\Delta x$
б)	8	$4\sqrt{4+\Delta x}$	$\frac{4\Delta x}{2+\sqrt{4+\Delta x}}$	$\frac{4}{2+\sqrt{4+\Delta x}}$
в)	2	$2(1+\Delta x)^3$	$6\Delta x+6(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3$	$6+6\Delta x+2(\Delta x)^2$
г)	7	$7+2\Delta x$	$2\Delta x$	2

441. а) $6x_o+3\Delta x$; б) $\frac{4}{x_0^2+x_o\Delta x}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{x_o}+\sqrt{x_o+\Delta x}}$. **442.** а)9; б) $4t_o-3+2\Delta t$. **443.** а) 1; б)-4; в) $\frac{5}{6}$. **444.** а) $L=19$; б) $L=4$; в) $L=\frac{1}{6}$; г) $L=-1$. **445.** а),б),д),е) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; г) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. **446.** а) ҳа; б) не. **448.** а)4; б)-4; в) 243; г) $-\frac{2}{25}$. **449.** а) $-\frac{2}{25}$; б)8; в) $\frac{11}{4}$; г) $\frac{5}{2}$. **450.** а) $86\frac{м}{сон}$; б) $63\frac{м}{сон}$. **451.** $S(4)=3{,}5м$; $\upsilon(4)=7\frac{м}{сон}$. **452.** а) $7-\frac{2}{x^2}$; б) $27x^2-\frac{4}{\sqrt{x}}$; в) $8x-2+\frac{3}{2\sqrt{x}}$; г) $12x^2+16x-2$. **453.** а) $3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{1}{2}+\frac{6}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{2}{3}x+\frac{8}{x^3}$;г)

$4x+9x^2$. **454.** а)36; б)-36; в)-7; г)92. **455.** а) $x(5x^3+4x^2-3x+2)$; б) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$; в) $1+\frac{3}{2}\sqrt{x}$; г) $x(3x+2)$. **456.** а) $\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$; б) $2x(2x^2-3x+4)$; в) $x^2(5x^2+3)$; г) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-1$. **457.** а)60; б)183. **458.** а) $\frac{2}{(x+1)^2}$; б) $\frac{2+x-x^2}{2\sqrt{x}(x^2-x+2)}$; г) $\frac{x^2(x^2-6x+6)}{(x^2-3x+2)^2}$. **459.** а) $\frac{x^2+26x}{(x^2+13)^2}$; б) $-\frac{2x+33}{x^4}$; в) $-\frac{14}{x^3}$; г) $-\frac{9}{x^4}$. **460.** а)1; б) $-\frac{5}{18}$. **461.** а)-2; б)10; в) $3x_0^2-2$; г) $3a^2+6a+1$. **462.** а)3; б)6; в)9; г) $3\sqrt{a}$. **463.** а) $\frac{1}{4}$; б)4; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{4}{(x_o+2)^2}$. **464.** а)1 ва 2; б) 2; в) ±1; г) 0 ва -3. **465.** а) $\left(-\infty;\frac{3}{10}\right)$; б) $(-1;+\infty)$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; д) $(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$. **466.** а) $(-\infty;0)$; б) $(-2;2)$; в) $(-\infty;-1)$; г) $(-\infty;+\infty)$; д) $(-3;7)$. **468.** x=1. **469.** а) $11x^{10}$; б) $40x^7$; в) $-7x^{-8}$; г) $-8x^{-5}$; д) $10x^4+4x^3-15x^2+6x-1$; е) $4x^3-2x$; ж) $x^{n-1}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **470.** а) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{x^n}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$; б) $3x^2-\frac{3}{x^4}$; в) $\frac{9x^4+1}{2\sqrt{x}}$; г) $\frac{15x^7-28x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; д) $\frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$; е) $\frac{4x^5+5x^4+1}{(x+1)^2}$; ж) $\frac{-3x^3-3}{x^2\sqrt{x}}$. **471.** а) -384; б) $-\frac{3}{8}$; в) $-\frac{5}{16}$; г) 384. **472.** а) $g=u^9$, $u=7x+11$; б) $g=u^{15}$, $u=x+15$; в) $g=\sin u$, $u=9x^2-\frac{\pi}{3}$; г) $g=u^6$, $u=\cos x$. **473.** а) $69(3x-10)^{22}$; б) $70(x-2)^{69}$; в) $707(7x-4)^{100}$. **474.** а) $-\frac{5}{(3x+5)^{12}}$; б) $-\frac{116}{(1+2x)^{30}}$; в) $\frac{297}{(3x+2)^{100}}$. **475.** а) $\frac{-3x^2}{2\sqrt{25-x^3}}$; б) $\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$; в) $-\frac{1}{x\sqrt{2x^2+x}}$. **481.** а) $\cos x+\frac{3}{\cos^2 x}$; б) $\cos x$; в) $-\frac{2}{\sin^2 x}$; г) $-3(\sin x+\cos 2x)$; д) $tgx\sec x-2ctgx\operatorname{cosec}x$; е) $-\frac{4}{1+\sin x}$. **482.** а)

$\frac{3}{5}\cos\frac{3x}{5}+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $2\sec^2(1+x)+\frac{3}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$; в) $\sin 2x$; г) $3\cos^2 x\sin x$. **483.** а) $\frac{5\sqrt{2}}{2}-4$; б) $4+\sqrt{3}$; в) $\frac{\pi^2}{3}-4$; г)0. **484.** а) $x=4\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z$; б) $x=\pi n,\ x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z$; в) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$; г) $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+n\pi,\ n\in Z$. **485.** а) $-\frac{\pi}{6}+2n\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2n\pi,\ n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z$; в) $\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{5\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z$; г) **Нишондод.** Бигзор $\frac{x}{4}-1=y$ бошад, онгоҳ нобаробарии $\varphi'(x)<0$ ба нобаробарии $\cos y<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ меорад, ки ҳаллаш $\frac{3\pi}{4}+2n\pi<y<\frac{5\pi}{4}+2n\pi$ мешавад. Ба ҷои y $\frac{x}{4}-1$ гузошта $\frac{3\pi}{4}+2n\pi<\frac{x}{4}-1<\frac{5\pi}{4}+2n\pi$-ро ҳосил мекунем, ки аз он $1+\frac{3\pi}{4}+$ $+2n\pi<\frac{1}{4}x<1+\frac{5\pi}{4}+2n\pi$ пайдо мешавад. Ҷавоб: $4+3\pi+8n\pi<$ $<x<4+5\pi+8n\pi,\ n\in Z$. **486.** а) $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $f'(x)>0\Rightarrow\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi$; $f'(x)<0\Rightarrow-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi,$ $k\in Z$; б) $f'(x)=0\Rightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$; $f'(x)>0\Rightarrow\frac{\pi}{3}+n\pi<x<\frac{7\pi}{6}+n\pi$; $f'(x)<0\Rightarrow\frac{\pi}{6}+n\pi<x<\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z$. **491.** а) $\frac{86}{(x-2)^3}$; б) $\frac{4\cos x+2(2x+1)\sin x}{\cos^3 x}$; в) $-8\cos 2x$. **492.** а) $3\cos x-(1+x)\sin x$; б) 216; в) 120(6x-1); г) 362880x. **493.** а) $\frac{\sqrt{2}}{128}\left(320+96\pi-12\pi^2-\pi^3\right)$; б) 240; в) 6552; г) -24. **494.** а),б)-ха. **496.** $x_1=2,\ x_2=\frac{4}{3}$. **500.** $x_1=1;\ x_2=-\frac{1}{3}$.

Боби V
Баъзе татбиқҳои бефосилагӣ ва ҳосила

§ 14. Татбиқи бефосилагӣ дар ҳалли нобаробариҳо
§ 15. Баъзе татбиқҳои ҳосила

§ 14. Татбиқи бефосилагӣ дар ҳалли нобаробариҳо.

Дар навбати аввал тасдиқоти зеринро ба қайд мегирем: **агар дар $(a;b)$ функсияи $f(x)$ бефосила буда, дар он ба 0 баробар нашавад, он гоҳ функсия дар фосилаи номбурда аломаташро нигоҳ медорад.**

Ин тасдиқоти ба мафҳуми бефосилагӣ вобаста имконият медиҳад, ки методи ба мо аз синфи 9 маълуми фосилаҳоро (дар п.11-и §4 бо ёрии он нобаробариҳои яктағйирёбандаро ҳал карда будем) пурратар намуда, нобаробариҳои қатъии $f(x)>0$ ва $f(x)<0$ ро ҳал намоем.

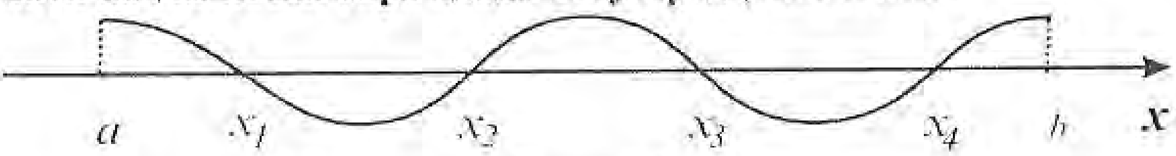
Функсияи $f(x)$-ро дар $(a;b)$ бефосила шуморида схемаи зерини ҳалли нобаробариҳои болоиро пешниҳод менамоем:

1). Нуқтаҳоеро (шумораашон охирнок аст) ошкор месозанд, ки дар онҳо $f(x)=0$ аст (яъне нулҳои функсияро меёбанд);

2). Аз рӯи нулҳои ёфташуда фосилаи $(a;b)$-ро ба шумораи охирноки фосилаҳое, ҷудо мекунанд, ки дар ҳар кадомашон функсия аломаташро нигоҳ медорад (мувофиқи тасдиқот!);

3). Барои муайян кардани аломат қимати функсияро дар ягон нуқтаи фосила ҳисоб кардан кифоя аст.

4) Тағйирёбии аломатро дар хати рости координатӣ бо хатҳои мавҷӣ аз рӯи нишонаи зерин ба қайд мегирем: дар он фосилаҳое, ки $f(x)>0$ аст, хати каҷ аз болои тир ва дар интервалҳое, ки $f(x)<0$ аст, хати каҷ аз поёни тири ададӣ мегузарад (Расми 68).*)



Расми 68

Масалан, аз расм чунин бармеояд, ки

-ҳангоми $x\in(a;x_1)$	будан $f(x)>0$
-ҳангоми $x\in(x_1;x_2)$	будан $f(x)<0$
-ҳангоми $x\in(x_2;x_3)$	будан $f(x)>0$
-ҳангоми $x\in(x_3;x_4)$	будан $f(x)<0$

*) дар бисёр адабиётҳои таълимӣ онро ин хел ҳам менависанд:

-ҳангоми $x \in (x_4;b)$ будан $f(x) > 0$ мешавад.

Агар $f(x) > 0$ бошад, он гоҳ ҳалли нобаробарӣ якҷояшавии фосилаҳои $(a;x_1), (x_2;x_3), (x_4;b)$ ва агар $f(x) < 0$ бошад, фосилаҳои $(x_1;x_2)$, ва $(x_3;x_4)$ мешаванд.

Қайд мекунем, ки агар нобаробари ғайриқатъӣ бошад, он гоҳ нулҳои сурат ба фосилаҳои мувофиқ дохил карда мешаванд.

Акнун истифодаи схемаи болоиро дар ҳалли якчанд нобаробариҳои мушаххас меорем.

М и с о л и 1. Нобаробарии $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4} > 0$ -ро ҳал мекунем.

Тарафи чап функсияи касрӣ-ратсионалӣ буда, дар нуқтаҳои 1 ва 3 ба 0 баробар мешавад. Аз нуқтаҳои тири ададӣ нулҳои махраҷро истисно карда соҳаи муайяниро, ки дар он функсия бефосила аст, ба панҷ фосилаҳои $(-\infty;-2), (-2;1), (1;2), (2;3), (3;+\infty)$ ҷудо мекунем, (пункти 1-2-и схема):

Расми 69 а)

Бо ёрии санҷиши бевосита аломати қимати функсияро дар интервалҳо ошкор менамоем (пункти 3)-и схема).

Натиҷаҳоро дар нақша тасвир менамоем (пункти 4):

Расми 69 б)

Ҳалли нобаробарии матлуб якҷояшавии фосилаҳои $(-\infty;2), (1;2)$ ва $(3;+\infty)$ мебошад.

Мисоли 2. Нобаробарии ғайриқатъии $\dfrac{x(2x-3)}{x+1} \le 0$ -ро ҳал мекунем.

Нулҳои сурат ададҳои 0 ва $\dfrac{3}{2}$ буда, нули махраҷ адади -1 мебошад. Функсияи касрӣ-ратсионалии $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{x+1}$ дар тамоми тири ададӣ бе нули махраҷ (яъне адади -1) муайян ва бефосила аст. Нуқтаҳои -1; 0 ва $\dfrac{3}{2}$ тирро ба чор фосила ҷудо мекунад, ки дар

$$\forall x \in (-\infty; -1), \quad f(x) < 0,$$
$$\forall x \in (-1; 0), \quad f(x) > 0,$$
$$\forall x \in \left(0; \frac{3}{2}\right), \quad f(x) < 0,$$
$$\forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right), \quad f(x) > 0$$

мебошад. Ин натиҷаҳоро дар тири ададӣ тасвир менамоем:

Расми 70

Қиматҳои $x = 0$ ва $x = \frac{3}{2}$ ба ҳал дохил мешаванд (нобаробарии матлуб ғайриқатъӣ аст). Аз ин ҷо ҳалли нобаробари $(-\infty; -1) \cup [0; 1{,}5]$ мешавад.

Мисоли 3. Соҳаи муайянии функсияи $y = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}$ -ро меёбем.

Ҳал. Дар асоси хосияти решаи квадратӣ маҷмуи ҳамаи x-ҳои нобаробарии $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$-ро қаноаткунанда соҳаи муайянии функсияро ташкил медиҳад.

Нобаробарии охиринро аз рӯи схемаи болоӣ ҳал мекунем. Нулҳои бисёраъзогии $x^4 - 5x^2 + 4$ решаҳои муодилаи биквадратии $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ мебошанд. Гузориши $x^2 = t$ -ро татбиқ намуда онро ҳал мекунем:

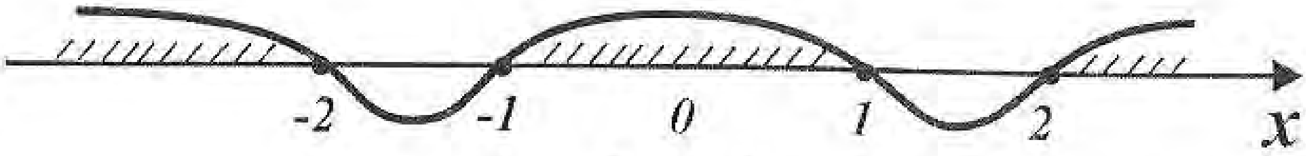
$$t^2 - 5t + 4 = 0, \qquad t_1 = \frac{8}{2} = 4, \qquad x_{1,2} = \pm 2,$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}, \qquad t_2 = \frac{2}{2} = 1, \qquad x_{3,4} = \pm 1,$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}, \qquad -2; -1; 1; 2 \text{ - нулҳои функсия.}$$

Ададҳои ёфтаамон тири ададиро ба панҷ фосилаҳои $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; 2)$ ва $(2; +\infty)$ ҷудо мекунанд.

Амалиёти минбаъдаамон аз рӯи схема (қимати бисёраъзогиро дар ягон нуқтаи дилхоҳи ҳар як фосила ҳисоб карда, аломаташро, ки барои нуқтаҳои дигари ҳамон интервал доимӣ нигоҳ медорад, ба назар мегирем) ба нақшаи зерин меорад:



Расми 71

Аз рӯи он соҳаи муайянии функсияро навишта метавонем:
$D(y) = (-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty)$.

1. Бо иҷрои кадом шартҳо функсияи $f(x)$ дар интервал аломаташро нигоҳ медорад?
2. Схемаи ҳалли нобаробариҳои қатъиро аз рӯи методи фосилаҳо баён кунед.
3. Ҳангоми ҳалли нобаробариҳои ғайриқатъӣ чӣ хел амал мекунанд? Мисолҳо оред.

Нобаробариҳои зеринро бо методи фосилаҳо ҳал кунед (501-503)

501. а) $(x-3)(x-4)>0$; б) $(x+1)(x-2)(x+5)\ge 0$;
в) $(x+0{,}5)(x-1)(x-6)<0$; г) $(x-0{,}5)(x+2)(x-7)\ge 0$;
д) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2-9}<0$; е) $\dfrac{x^2-4}{(x+1)(x-3)}\ge 0$;
ж) $\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-6)}<0$; з) $\dfrac{(x-2)(x-5)}{(x+2)(x+5)}\ge 0$.

502. а) $7x^2-3x-4\ge 0$; б) $2x^2-5x+3<0$; в) $3x^2-x-10>0$;
г) $x^2-8x-9\le 0$; д) $x^4-4x^2+3\le 0$; е) $x^4-3x^2+2\ge 0$;

503. а) $\dfrac{(x-4)^2(x+4)^3(x-1)}{(x+1)(x-3)^2}\le 0$; б) $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)^4}{x^3(x-4)^2}\le 0$;
в) $(x^2-4)(x+3)(x^3-1)\ge 0$; г) $(x^4-1)(x^3+8)(x-3)\ge 0$;
д) $\dfrac{x-2}{5-x}>1$; е) $3x^3+x^2+12x-2>x^3-3x^2-4x+12$.

504. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y=\sqrt{x^3+5x^2-x-5}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{5x-3-x^2}{x^2+1}}$.

505. Дар кадом қиматҳои x ифода маъно дорад:

а) $\dfrac{x^3+1}{\sqrt{(3-x)(x^2+1)}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}+\dfrac{x}{3}$?

506. Оё муодила (а)-д)) ва нобаробариҳои (е)-и)) зерин баробарқувваанд:

а) $x^2+14=7x+4$ ва $(x-5)(x-2)=0$; б) $x^2-3x+2=0$ ва $x^3+3x+2=0$;

в) $3x-7=5x+5$ ва $2(x+6)=0$; г) $\frac{1}{5}(2x-1)=1$ ва $\frac{3x-1}{8}=1$;

д) $(x-5)^2=3(x-5)$ ва $x-5=3$; е) $2x-1\geq 2$ ва $2(x-1)\geq 1$;

ж) $(x-1)(x+2)<0$ ва $x^2+x<2$; з) $(x-2)(x+1)<3x+3$ ва $x-2<3$;

и) $x(x+3)\geq 2x$ ва $x^2(x+3)\geq 2x^2$.

507. Ифодаи $\frac{1+\sin\alpha-\cos2\alpha-\sin3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$ -ро содда кунед.

508. Ба ҳосили зарб табдил диҳед:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha$; б) $2\sin\alpha+\sqrt{3}$.

509. Барои кадом қиматҳои x қимати хосилаи функсияи $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ ба 11 баробар аст?

510. Суммаи $-17+(-14)+(-11)+...+13$ -ро ёбед.

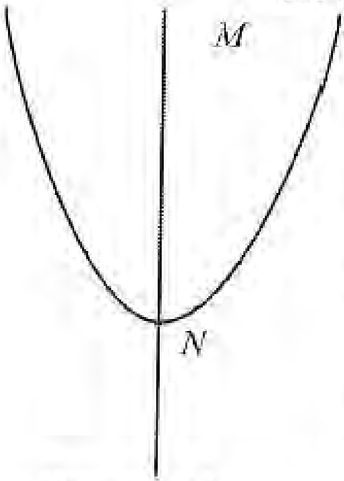
511. Аз ду шаҳр, ки масофаи байнашон 700 км аст, дар як вақт ду қатора ба пешвози якдигар баромаданд. Суръати ҳаракати як қатора аз дигараш $20\frac{\text{км}}{\text{соат}}$ зиёдтар аст. Агар қатораҳо беист ҳаракат карда баъди 5 соат вохӯрда бошанд, он гоҳ суръатҳояшонро ёбед.

512. Ҳосилаи функсияҳои зеринро ёбед:

а) $y=9x^{13}-4x$; б) $y=3\cos x-7\sin x$.

§ 15.Баъзе татбиқҳои ҳосила.

46. Муодилаи расанда ба графики функсия.



Расми 72

46.1 Дар навбати аввал мафҳуми расанда ба графики функсияро шарҳ медиҳем.

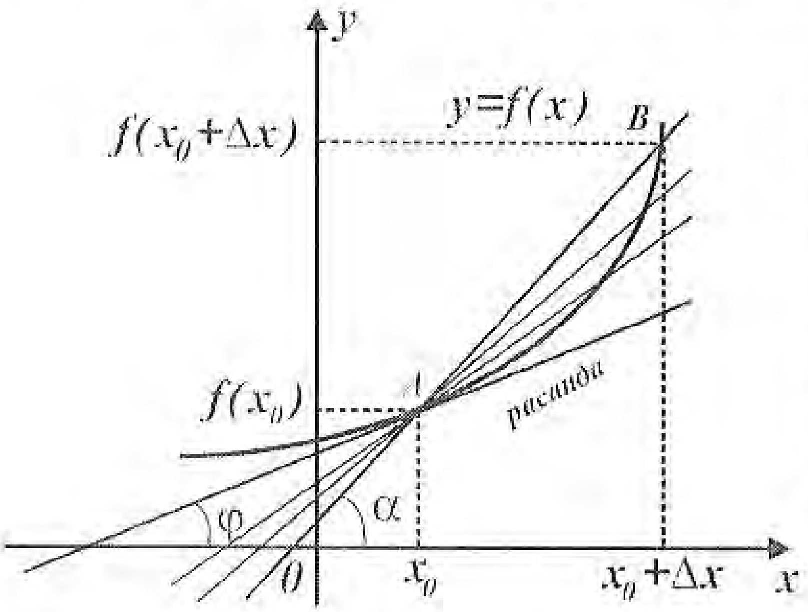
Чӣ тавре аз геометрия медонем расанда ба давра хати ростест, ки бо давра як нуқтаи умумӣ дорад. Агар ба ҷои давра хати качи дилхоҳро гирем, он гоҳ маънидоди болоиямон характери ҷузъиро мегирад.

Аз рӯи он гуфтаҳо мо бояд хати рости MN-ро, ки бо хати каҷи дар расми 72 аксёфта якто нуқтаи умумии N-ро дорад, расанда ҳисобем. Таърифи дақиқу пурраи расанда чунин аст.

Таъриф. Хати рости аз нуқтаи $(x_0; f(x_0))$ гузарандаро, ки ба графики функсияи $f(x)$ дар қиматҳои ба x_0 наздики x ҳамҷоя мешавад, расанда ба графики функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $(x_0; f(x_0))$ меноманд.

Бо мақсади ёфтани мавкеи дақиқи расанда ба графики функсияи $f(x)$ дар нуқтаи маълуми $(x_0; f(x_0))$ коэффитсиенти кунҷии онро ёфтан зарур аст. Нишон медиҳем, ки чунин коэффитсиенти кунҷи мавҷуд буда қиматаш ба $f'(x_0)$ баробар аст.

Ба расми 73 муроҷиат мекунем, ки дар он хати каҷи $y = f(x)$ бо нуқтаи беҳаракати $(x_0; f(x_0))$ тасвир ёфтааст. Инчунин, дар хати каҷ нуқтаи B-ро мегирем, ки дар натиҷаи ба x додани афзоиши Δx ҳосил мешавад $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Бархилофи A нуқтаи B вазъияти худро аз болои нуқтаҳои хати каҷи $f(x)$ тағйир дода мегардад.



Расми 73

Тағйирёбии мавкеи нуқтаи B аз болои хати каҷ (ба сӯи A) ба ҳолате меорад, ки бурандаи AB вазъияти расандаи AM -ро мегирад. Аз ин рӯ, дар навбати аввал коэффитсиенти кунҷии бурандаи AB ва баъди гузариш ба лимит коэффитсиенти кунҷии расандаи AM -ро ёфтан зарур аст.

Дар асоси маълумотҳои п.33.3 коэффитсиенти кунҷии бурандаи AB ба

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

баробар аст.

Аён аст, ки дар қиматҳои хеле хурди Δx (яъне ҳангоми $\Delta x \to 0$ ё $x \to x_0$) коэффитсиенти кунҷии бурандаи AB ба k-коэффитсиенти кунҷии расандаи AM наздик мешавад:

$$tg\alpha \to tg\varphi = k\ ^{*)} \qquad (2)$$

Формулаи (1)-ро ба назар гирифта ҳангоми $\Delta x \to 0$ барои (2) ҳосил мекунем:

---

[*] агар φ кунҷи тез бошад адади k мусбат ва ҳангоми φ кунҷи кунд будани k адади манфиро ифода мекунад.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = k .$$

Дар асоси таърифи ҳосила (ниг. ба *п.* 36)

$$k = f'(x_o)^{*)} \qquad (3)$$

мешавад.

Формулаи (3) ба хулосаи муҳими зерин меорад: **агар функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_o дорои ҳосила бошад, он гоҳ аз болои нуқтаи $(x_o; f(x_o))$-и хати качи графики $f(x)$-ро ифодакунанда расанда гузаронидан мумкин аст.**

46. 2. Акнун ба хосил кардани муодилаи расанда ба хати каҷи $y = f(x)$ дар нуқтаи $(x_o; f(x_o))$ шуруъ мекунем. Бо ин мақсад муодилаи матлубро дар шакли $y = kx + b$ мекобем.

Азбаски хати матлуб аз болои нуқтаи $(x_o; f(x_o))$ мегузарад, пас $f(x_o) = kx_o + b$ мешавад. Аз он $b = f(x_o) - kx_o$ -ро ҳосил мекунем. Қимати b-и ёфтаамонро ба ҷояш (яъне ба ҷои b дар $y = kx + b$) гузошта

$$y = kx + [f(x_o) - kx_o] \qquad \text{ё} \qquad y = k(x - x_o) + f(x_o)$$

-ро пайдо мекунем. Дар асоси формулаи (3) муодилаи расанда ба графики функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $(x_o; f(x_o))$ намуди

$$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \qquad (4)$$

ё

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$

-ро мегирад.

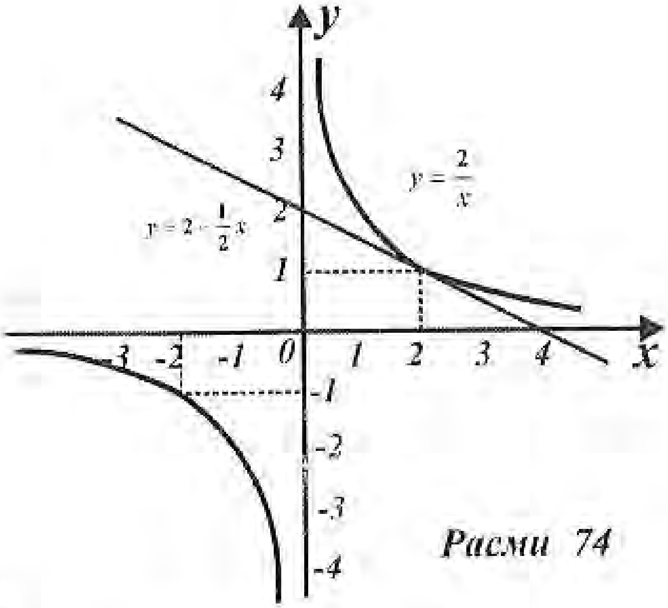
Мисоли 1. Муодилаи расандаро ба гиперболаи $y = \dfrac{2}{x}$ дар нуқтаи абсиссааш $x_o = 2$ тартиб медиҳем.

Ҳал. Маълум, ки абсиссаи нуқтаи расиш $x_o = 2$ аст, ординатааш бошад $f(x_o) = f(2) = 1$ мешавад. Азбаски $y' = \left(\dfrac{2}{x}\right)' = -\dfrac{2}{x^2}$ аст, пас $f'(2) = -\dfrac{1}{2}$. Қиматҳои $x_o = 2$, $f(2) = 1$ ва $f'(2) = -\dfrac{1}{2}$-ро ба (4) гузошта муодилаи расандаро дар шакли зерин меёбем:

$$y = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 2), \qquad y = 1 - \frac{1}{2}x + 1, \qquad y = 2 - \frac{1}{2}x$$

---

*) маънои геометрии $f'(x_o)$ коэффитсиенти кунҷии расанда ба $f(x)$ дар нуқтаи x_o аст.



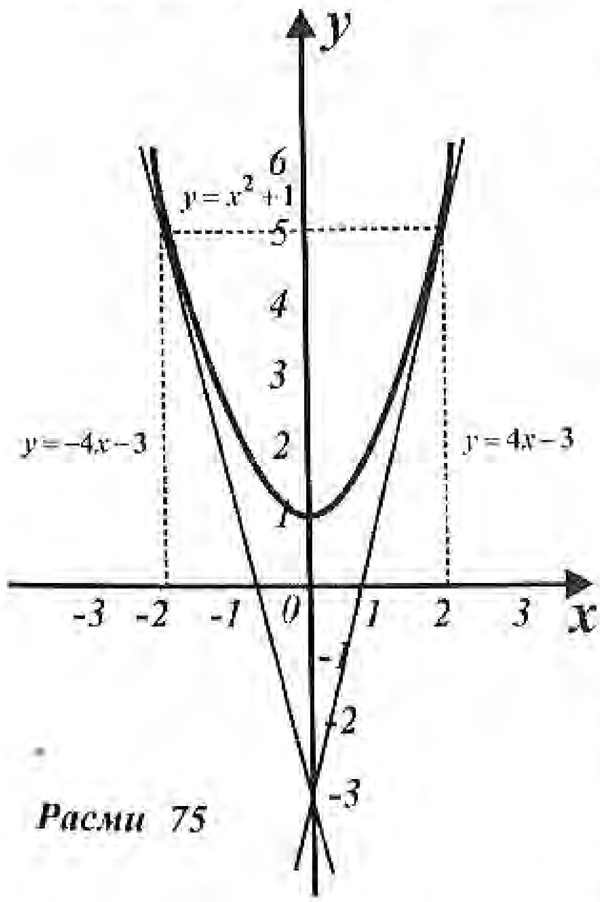
Расми 74

(ниг. ба расми 74).

Мисоли 2. Аз нуқтаи (0; -3) -и ҳамворӣ ба параболаи $y=x^2+1$ расанда гузаронида, муодилаашро тартиб медиҳем.

Ҳал. Бигузор $x_0=a$ абсиссаи нуқтаи расиш бошад. Он гоҳ $f(a)=a^2+1$, $f'(x)=2x$, $f'(a)=2a$ мешавад.

Аз ин ҷо муодилаи (4) намуди



Расми 75

$$y=a^2+1+2a(x-a)$$

-ро мегирад. Азбаски ин хати рост аз болои нуқтаи (0; -3) мегузарад, пас

$$-3=a^2+1+2a(0-a),$$

$$-3=a^2+1-2a^2,$$

$$-4=-a^2,\quad a=\pm 2$$

мешавад.

Ҳангоми $a=2$ будан муодилаи расанда $y=4x-3$ ва ҳангоми $a=-2$ будан муодилаи расанда $y=-4x-3$ мешавад.

Ҳамин тариқ, мо ду расандаеро ёфтем, ки муодилахояшон $y=4x-3$ ва $y=-4x-3$ буда шартҳои масъаларо қаноат менамоянд (расми 75).

Нишон додан мумкин аст, ки агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила ва дар фосилаи $(a;b)$ дифференсиронидашаванда бошад, онгох дар байни a ва b аққалан як нуқтаи абсиссааш c ёфт мешавад, ки барояш баробарии

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (5)$$

ҷой дорад.

Дар тасдиқот маънои геометрии ҳосила дар тасвири аёнии яке аз далелҳои асосии математика, баръало намоён аст.

Ниҳоят қайд мекунем, ки формулаи (5)-ро формулаи Лагранж*) ҳам меноманд.*)

?

1. Мафҳуми расандаро бо мисолҳо шарҳ дода, сипас, ба он таъриф диҳед.
2. Формулаи расанда ба хати каҷро дар нуқтаи x_0 нависед.
3. Кадом тасдиқот ба формулаи Лоrранж оварда мерасонад?
4. Формулаи Лагранжро нависед.

513. Коэффитсиенти кунҷии расандаро ба параболаи $y=x^2-4x+4$ дар нуқтаи абсиссааш $x_0=3$ ёбед.

514. Коэффитсиенти кунҷии расандаро ба параболаи $y=x^2-4x+4$ дар нуқтаҳои буриш бо тири OX ёбед.

515. Коэффитсиенти кунҷии расанда ба графики функсия дар нуқтаи додашуда ба чӣ баробар аст:

а) $f(x)=x^2+1$, $M(1;2)$, $M(2;5)$, $M(0;1)$;

б) $f(x)=-\frac{1}{x}$, $M(1;-1)$, $M(-1;1)$, $M\left(2;-\frac{1}{2}\right)$?

516. Муодилаи расандаро ба хати каҷи додашудаи $f(x)$ дар нуқтаи абсиссааш x_0 тартиб диҳед:

а) $y=x^3$, $x_0=1$; б) $f(x)=x^2-4$, $x_0=3$;

в) $y=1-2x+3x^2$, $x_0=2$; г) $f(x)=\sqrt{x}-1$, $x_0=4$.

517. Муодилаи расандаро ба хати каҷи $f(x)$ дар нуқтаи ординатааш додашуда ёбед:

а) $y=x^3+1$, $y_0=9$; б) $y=x^2-4x$, $y_0=-3$;

в) $y=\sqrt{x}$, $y_0=3$; г) $y=\frac{5}{x}$, $y_0=5$.

*) Лагранж Жозеф Луи (1936-1813) - риёзидон ва механики франсавӣ. Илми риёзиётро мустақилона омӯхта дар синни 19-солагӣ профессори мактаби артиллерии ш. Турин интихоб гаштааст. Натиҷаҳои назарраси ӯ ба ҳисоби вариатсионӣ ва механика таалуқ доранд. Ба хонандаи мактаб назарияи экстремумҳои шартии эҷодкардааш хеле наздик ва фаҳмо аст. Ҳалҳои махсус ва методи вариатсияи доимиҳои ихтиёрии Лагранж дар назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ҷои махсусро ишғол мекунад.

518. Муодилаи расандаро ба хатҳои каҷи $y=2x^2-5$ ва $y=x^2-3x+5$ дар нуқтаи буришашон ёбед.

519. Муодилаи хати каҷ намуди $y=x^2-4x+3$ -ро дорад. Берун аз хат дар ҳамвори нуқтаи $M(2;-5)$ дода шудааст. Муодилаи расанда ба параболаро тартиб диҳед, ки он аз болои нуқтаи М гузарад.

520. Муодилаи расандаро ба параболаи $y=x^2+4x-5$ дар нуқтаи (1; 0) ёбед.

Машқҳо барои такрор

521. Барои кадом қиматҳои х ҳосили зарби касрҳои $\frac{8x-3}{6x-3}$ ва $\frac{3x-4}{4x-5}$ ба 1 баробар аст?

522. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $x^2-5x+6>0$; б) $14x-5x-x^2<0$.

523. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} xy+x=54; \\ xy+y=56; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3xy=10x+y, \\ 10x+y=10y+x-18. \end{cases}$

524. Ҳосили зарби ду адад ба 135 ва фарқашон ба 6 баробар аст. Ададҳоро ёбед.

525. Ёбед

а) $\cos\alpha$ -ро, агар $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{5}$, б) $\sin\alpha$ -ро, агар $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

бошад.

526. Ифодаро содда намуда, қимати ададиашро ҳангоми $\alpha=\frac{\pi}{3}$ будан ёбед:

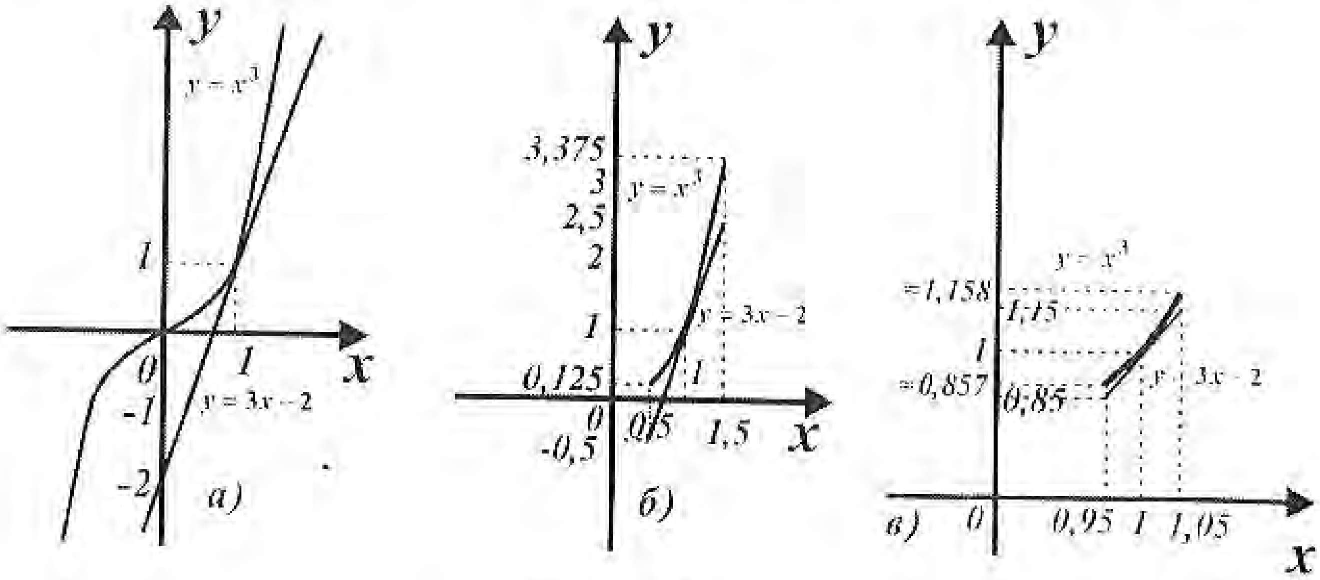
а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$; б) $\cos^2\alpha+tg^2\alpha+\sin^2\alpha$

527. Ҳосилаи функсияи $y=3x^2+8x-25$ -ро дар нуқтаи $x_0=2$ ёбед.

47. Ҳисоби тақрибии қимати функсияҳо

Дар ин пункт ба ёфтани қимати тақрибии функсияҳо бе ёрии ҷадвалҳои мавҷуда ва ё калкулятору компютер машғул мешавем.

Оғози корро аз ҳалли мисол сар мекунем. Бо ёрии формулаи (4)-и п.46 муодилаи расандаро ба хати каҷи $y=x^3$ дар нуқтаи (1; 1) ҳосил мекунем, ки намуди $y=3x-2$ -ро дорад. Графики онҳоро дар ҳамвории координатавӣ мекашем (Расми 76 а)). Сохти геометрии ин хати каҷи бефосиларо дар нуқтаҳои аргументҳояшон ба 1 хеле наздик, меомӯзем. Ба ин **мақсад аввал дар ҳамворӣ масштабро нисбат ба расми 76 а) 10** маротиба зиёд намуда, $y=x^3$-ро дар порчаи [0,5; 1,5] ва баъд масштабро нисбат ба графики ҳосилгашта 10 маротиба зиёд карда, функсияи болоиро дар порчаи [0,95; 1,05] месозем (расмҳои 76 б), в)).



Расми 76

Мушоҳидаи бевоситаи расмҳои болоӣ аз он шаҳодат медиҳанд, ки графики функсияи $y=x^3$ аз порчаи хурдакаки графики хати рости $y=3x-2$ хеле кам фарқ мекунад.

Ҳамин тариқ, мо ба баробарии тақрибии $x^3 \approx 3x-2$ омада мерасем. Бо дигар ибора нуқтаҳои графики $y=x^3$ қад-қади хати рости $y=3x-2$ ҷой мегиранд.

Ба масъала характери умумӣ дода қайд менамоем, ки дар қиматҳои $\Delta x = x - x_0$ -и нобаробари 0 графики функсияи дифференсиронидашавандаи $f(x)$ ба расандаи аз нуқтаи абсиссааш x_0 гузарандаи графики $f(x)$ наздик мешавад. Ин аст сабаби асосии хеле кам фарқ кардани қиматҳои функсияи $f(x)$ аз функсияи хаттии дар график расандаро ифодакунанда. Аз расми 77 нобаробарии тақрибии $\Delta f \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$ баръало намоён аст. Аз ин ҷо барои қиматҳои $\Delta x = x - x_0 \neq 0$ қиматҳои тақрибии $f(x)$-ро бо ёрии формулаи

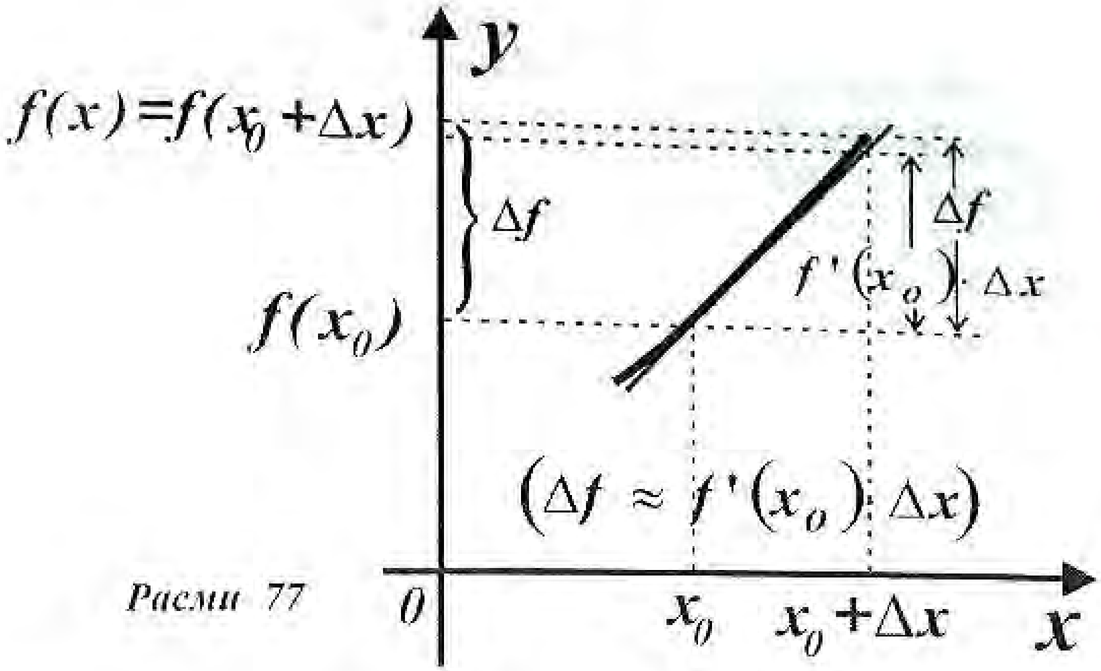
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

ёфтан мумкин аст.

Қайд мекунем, ки барои истифодаи формулаи (1) дар ҳисобкуниҳои тақрибӣ ба ҷои x a мегиранд. Он гоҳ

$$f(a) \approx f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) \qquad (2)$$

мешавад.



Расми 77

Ҳамин тариқ, барои қимати тақрибии ягон бузургии A-ро ёфтан аз рӯи схемаи зерин амал кардан қулай аст:

1). A-ро дар шакли ягон қимати функсия дар нуқтаи a ифода кардан зарур мебошад: $A = f(a)$;

2). Қимати x_0-ро чунон интихоб кардан даркор аст, ки он ба a хеле наздик бошаду инчунин қимати $f(x_0)$ бо осонӣ ҳисоб карда шавад;

3). Ёфтани $f(x_0)$ ва $f'(x_0)$;

4). Гузоштани қиматҳои a, x_0, $f(x_0)$ ва $f'(x_0)$ ба формулаи (2).

Схемаи болоиро дар ёфтани қимати тақрибии $(2,003)^4$ амалӣ мегардонем:

1). Дар ин ҷо $A = (2,003)^4$ аст. Агар $f(x) = x^4$ гирем, он гоҳ $A = f(a)$, ки $a = 2,003$ аст, мешавад;

2). x_0-ро баробари 2 мегирем: $x_0 = 2$

3). $f(x_0) = f(2) = 2^4 = 16$, $f(2) = 16$, $f'(x) = 4x^3$;

$f'(x_0) = f'(2) = 4 \cdot 2^3 = 32$.

4). Аз рӯи формулаи (2) ҳосил мекунем:

$A = (2,003)^4 = f(a) \approx 16 + 32(2,003 - 2) = 16 + 32 \cdot 0,003 = 16,096$;

$A = (2,003)^4 \approx 16,096$.

Агар $(2,003)^4$-ро бо ёрии микрокалкулятор ҳисоб кунем, он гоҳ адади 16,096216...-ро ҳосил мекунем, ки он аз қимати пештара на камтар аз 0,0001 фарқ мекунад.

Барои ёфтани қимати тақрибии $\sin 2^o$ аввал қимати радиании 2^o-ро ёфта, сипас бевосита аз формулаи (2) истифода мебаранд.

Маълум, ки $2^o = \frac{\pi}{180} \cdot 2 \approx 2 \cdot 0{,}0174533 = 0{,}0349066$. $x_o = 0$,

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f(0) = \sin 0 = 0$ аст, пас

$\sin 2^o \approx 0 + 1 \cdot 0{,}0349066 = 0{,}0349066$ мешавад.

Агар ҷадвали ҳосилаҳоро истифода бурда, ба ҷои $f(x)$ функсияҳои гуногунро гирем, он гоҳ формулаҳои тақрибии зиёдеро ҳосил мекунем.

Барои тасдиқи ин гуфтаҳо нишон медиҳем, ки формулаҳои

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \Delta x \qquad (3)$$

$$(1+\Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x \qquad (4)$$

ҷой доранд.

Аз рӯи схемаи болоӣ амал карда $f(x)$-ро ба $\sqrt{x}$ баробар мегирем: $f(x) = \sqrt{x}$. Ҳангоми $x_o = 1$ ва $x = x_o + \Delta x = 1 + \Delta x$ будан ҳосил мекунем:

$$f(x_o) = f(1) = \sqrt{1} = 1, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(x_o) = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Аз формулаи (1) истифода бурда

$f(x) = \sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \Delta x$ -ро, ки ба (3) монанд аст, пайдо мекунем.

Барои ҳосил кардани формулаи (4) $f(x) = x^n$, $x_o = 1$

$x = x_o + \Delta x = 1 + \Delta x$ мегиранд. Азбаски $f(x_o) = f(1) = 1^n = 1$ аст, пас дар асоси формулаи (1)

$$f(x) = (1+\Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x$$

мешавад.

Мисоли 1. Қиматҳои тақрибии

а) $\sqrt{9{,}04}$; б) $(0{,}999)^{50}$; в) $\frac{1}{(1{,}001)^{20}}$

-ро меёбем.

Ҳал: а) Дар асоси формулаи (3)

$$\sqrt{9.04} = \sqrt{9+0.4} \approx \sqrt{9(1+0.044)} \approx 3\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0.044\right) = 3(1+0.022) = 3 \cdot 1.022 = 3.066$$

ҳосил мешавад.

б) Мувофиқи формулаи (4)

$$(0{,}999)^{50} = (1-0{,}001)^{50} = 1 + 50(-0{,}001) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

мешавад.

в) Маълум, ки дар ин ҷо $n=-20$ ва $\Delta x=0{,}001$ мешавад. Пас, боз дар асоси ҳамон формулаи (4) ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{(1{,}001)^{20}}=(1{,}001)^{-20}=(1+0{,}001)^{-20}\approx 1-20\cdot 0{,}001=1-0{,}02=0{,}98$$

Мисоли 2. Қимати тақрибии функсияи

$$f(x)=x^9-5x^4-x+2$$

-ро дар нуқтаи $x_0=1{,}01$ меёбем.

<u>**Ҳал:**</u> Маълум, ки қимати функсия дар нуқтаи $x_0=1$-и ба 1,01 наздик бо осонӣ ёфта мешавад: $f(1)=-3$.

Азбаски $f'(x)=9x^8-20x^3-1$, $\quad f'(1)=-12$ аст, пас

$$f(1{,}01)\approx -3-12\cdot(1{,}01-1)=-3-12\cdot 0{,}01=-3-0{,}12=-3{,}12$$

мешавад.

?

1. Формулаи тақрибии (1) аз кадом муҳокимаронӣҳо мебарояд?
2. Схемаи ёфтани қимати тақрибии ягон бузургии А-ро баён кунед.
3. Формулаҳои (3) ва (4) ба кадом функсияҳо алоқамандӣ доранд?
4. Оё қимати тақрибии функсияҳои ратсионалиро ёфтан мумкин аст. Мисолҳо оред.

528. Бо ёрии формулаи $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ қимати тақрибии функсияро дар нуқтаҳои нишондодашуда ҳисоб кунед:

а) $f(x)=1-2x+x^3$, $\quad x_0=1{,}003$, $\quad x_0=0{,}998$;

б) $f(x)=x^5+8$, $\quad x_0=2{,}001$, $\quad x_0=1{,}002$;

в) $f(x)=2x^4-x$, $\quad x_0=3{,}02$, $\quad x_0=0{,}98$;

г) $f(x)=x^3+2x$, $\quad x_0=1{,}05$, $\quad x_0=2{,}96$;

д) $f(x)=3x^6-8$, $\quad x_0=2{,}003$, $\quad x_0=1{,}999$;

е) $f(x)=x^2+2x+3$, $\quad x_0=0{,}994$, $\quad x_0=2{,}006$.

529. Қимати тақрибии

а) $(1{,}004)^{58}$; б) $(0{,}997)^{72}$; в) $(1{,}003)^{100}$; г) $(0{,}991)^{32}$;

д) $(1{,}003)^{81}$; е) $(0{,}995)^{48}$; ж) $\frac{1}{(1{,}004)^{30}}$; з) $(0{,}993)^{-20}$;

и) $(0{,}992)^{-78}$; к) $(1{,}04)^{-51}$

-ро ёбед.

530. Бо ёрии формулаи (3) қимати тақрибии

а) $\sqrt{4.004}$;   б) $\sqrt{80,997}$;   в) $\sqrt{16,0003}$;   г) $\sqrt{9,02}$;

д) $\sqrt{8,992}$;   е) $\sqrt{49,001}$.

-ро ёбед.

531. Аз формулаҳои мувофиқи ҳисоби тақрибӣ истифода бурда, қимати тақрибии

а) $\sin 3^o$;   б) $\sin 18^o$;   в) $2\sin 3^o + 0,5\sin 18^o$ -ро ёбед.

Машқҳо барои такрор

532. Қимати b-ро ёбед, агар графики функсияи хаттии

а) $y = 5x + b$ аз болои нуқтаи (-2; 3);

б) $y = \frac{4}{3}x - b$ аз болои нуқтаи (3; 4)

гузарад.

533. Масофа аз хона то мактаб 700 м аст. Талаба ин масофаро дар чанд қадамаш тай мекунад, агар маълум бошад, ки бародари калониаш бо қадами назар ба ӯ 20 см дарозтар масофаро 400 қадам камтар зада тай мекунад?

534. Чор адади пайдарпаи прогрессияи геометриро ёбед, агар аъзои сеюм аз якум 9 ва дуюм аз чорум 18 воҳид зиёд бошанд.

535. Қимати ифодаи $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$ -ро ёбед, агар маълум бошад, ки $tg\alpha + ctg\alpha = 3$ аст.

536. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 13; \\ x - y = 1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 3y = -5; \\ 7x + 3y = 23 \end{cases}$.

537. Муодилаи расандаро ба пораболаи $y = -2x^2 + 3x + 2$ дар нуқтаи абсиссааш $x = 2$ ёбед.

48. Ҳосила дар физика ва техника

Пеш аз баёни мақсади асосӣ хотиррасон менамоем, ки «ҳосилаи координата аз рӯи вақт суръат аст» (маънои механикии ҳосила), чунки ҳангоми $\Delta t \to 0$

$$\upsilon_{\text{миёна}}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \to \upsilon(t_o) \qquad \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \upsilon(t_o)\right)$$

ва барои функсияи дифференсиронидашавандаи $x(t)$ (қонуни ҳаракат) $\upsilon(t) = x'(t)$ мебошад.

Азбаски суръати лаҳзагӣ функсияи вақт мебошад, **пас ҳосилаи он (чун тағйирёбии суръат дар фосилаи вақт) шитоби ҳаракат номида мешавад.**

Агар хати рости координатавӣ амудӣ ба поён ва мавкеи ибтидоии нуқтаи материалӣ ба 0 ҳамҷоя шавад, он гоҳ

$$x(t) = \frac{gt^2}{2}, \qquad g = 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{сон}^2}, \quad \vartheta(t) = gt$$

ва $a(t) = g = 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{сон}^2}$, яъне шитоб бузургии доимӣ мешавад.

Агар ҳаракати нуқтаи материалӣ аз рӯи қонуни квадратӣ, ки муодилааш

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + \upsilon_0 t + x_0$$

$(a \neq 0, \upsilon_0 = \upsilon(0))$ ва $x_0 = x(0)$ аст, ба амал ояд, он гоҳ $\upsilon(t) = at + \upsilon_0$ ва шитобаш $\upsilon'(t) = a = const$ мешавад.

Агар $a > 0$ бошад, мо ба ҳаракати собитшитоб (тезшаванда) ва агар $a < 0$ бошад бо харакати сустшаванда дучор мешавем.

Ҳангоми $a = 0$ будан ҳаракати нуқтаи материалӣ мунтазам аст. Бояд кайд намуд, ки баръаксаш ҳам ҷой дорад: агар ҳаракати нуқтаи материалӣ (ё ҷисм) аз рӯи хати рост ба шитоби доимии a доро бошад, он гоҳ қонуни ҳаракат

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$

-ро қаноат менамояд.

Баъзе масъалаҳоеро дида мебароем, ки ба суръату шитоб вобаста буда, вале қонуни ҳаракаташон квадратӣ нестанд. Инчунин масъалаҳои физикиеро ҳал мекунем, ки мазмуни техникӣ доранд.

Масъалаи 1. Суръати ҷисми ростхатта ҳаракаткунанда ба решаи квадратӣ аз роҳи тайшуда нисбат дорад (масалан ҳангоми озодафтӣ). Нишон медиҳем, ки ин ҳаракат дар зери таъсири қувваи доимӣ ба амал меояд.

Ҳал. Аз рӯи қонуни Нютон кувваи F - и ҳаракатро ба амал оваранда ба шитоб мутаносиб аст:

$$F = k \cdot a(t), \qquad a(t) = x''(t)$$

$k = const$ - коэффитсиенти мутаносибӣ. Азбаски мувофиқи шарти масъала $x'(t) = \lambda \cdot \sqrt{x}$ ва λ - доимӣ аст, пас $x = x(t)$ -ро ба назар гирифта, онро чун ҳосилаи функсияи мураккаб дифференсиронида (п.42).

$$x''(t) = (x'(t))' = \left(\lambda \cdot \sqrt{x(t)}\right)' = \lambda \cdot \left(\sqrt{x(t)}\right)' = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} \cdot x'(t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} \cdot \lambda \cdot \sqrt{x} = \frac{\lambda^2}{2}$$

-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо қувваи таъсиркунандаи матлуб

$$F = \frac{k\lambda^2}{2} = const$$

мешавад.

Масъалаи 2. Нуқтаи материалӣ аз рӯи қонуни $x(t) = A\sin\omega t$ (ҳаракат характери даврӣ дошта лаппишҳои гармоникиро ба амал меорад; ниг. ба мисоли 3-и § 13) ҳаракат мекунад. Суръат ва шитоби онро дар лаҳзаи вақти $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ меёбем.

Ҳал. Дар навбати аввал суръат ва шитобро дар лаҳзаи дилхоҳи вақт меёбем:

$$\upsilon(t) = x'(t) = (A\sin\omega t)' = A\cos\omega t\cdot(\omega t)' = A\omega\cos\omega t,$$

$$a(t) = \upsilon'(t) = (A\omega\cos\omega t)' = A\omega(-\sin\omega t)(\omega t)' = -A\omega^2\sin\omega t.$$

Дар лаҳзаи $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ суръату шитоби матлуб мувофиқан $\upsilon = A\omega$ ва $a = 0$ (яъне ҳаракат мунтазам аст) мешаванд. Аз вобастагии охирини $a(t) = -A\omega^2\sin\omega t$ хулоса кардан мумкин аст, ки дар байни шитобу қонуни ҳаракат мутаносибӣ ҷой дорад:

$$a = -\omega^2\cdot x, \qquad \frac{a}{x} = -\omega^2.$$

Масъалаи 3. Мила дар гирди тир аз марказаш бо қонуни $\varphi(t) = At + Bt^3$ -ро қаноаткунанда чарх мезанад $\left(A = 4\dfrac{рад}{сон};\ B = 0{,}2\dfrac{рад}{сон^3}\right)$. Моменти чархзании М-и ба мила таъсиркунандаро дар лаҳзаи $t = 2сон$. меёбем, ки агар моменти инерсияи мила $I = 0{,}048кг\cdot м^2$ бошад.

Ҳал. Муодилаи асосии динамикаи ҳаракати чархзананда $M = I\cdot\mathcal{E}$ аст, ки дар ин ҷо $\mathcal{E}$ - шитоби кунҷиро ифода мекунад. Барои ёфтани $\mathcal{E}$ аз муодилаи ҳаракат пай дар пай ду маротиба ҳосила мегирем:

$$\varphi'(t) = \left(At + Bt^3\right)' = (At)' + \left(Bt^3\right)' = A + 3Bt^2,$$

$$\varphi''(t) = [\varphi'(t)]' = \left(A + 3Bt^2\right)' = 0 + 3\cdot 2Bt = 6Bt.$$

Дар лаҳзаи $t = 2сон$, $\quad \mathcal{E} = \varphi''(2) = 6\cdot 0{,}2\cdot 2 = 2{,}4\left(\dfrac{рад}{сон^2}\right)$ ва аз ин ҷо моменти чархзании матлуб

$$M = I\cdot\mathcal{E} = 0{,}048\cdot 2{,}4 = 0{,}1152н\cdot м$$

мешавад.

?

1. Тасдиқоти «ҳосилаи координата аз рӯи вақт суръат аст»-ро шарҳ диҳед.
2. Мафҳуми шитобро бо ёрии ҳосилаҳои тартиби якум ду шарҳ диҳед. Мисолҳо оред.
3. Дар кадом ҳолатҳо шитоби ҳаракати нуқтаи материалӣ бузургии доимиро ифода мекунад?

538. Дар гирди тир чархзании ҷисм бо қонуни $\varphi(t)=7t^2-3t+4$ мувофиқ аст. Суръати кунҷиро дар лаҳзаи дилхоҳи вақт ва ҳангоми $t=5сон.$ будан ёбед (кунҷ бо радианҳо, суръат бо радиан дар сония ва вақт бо сонияҳо чен карда мешаванд).

539. Қонуни ҳаракати ростхаттаи нуқтаи материалӣ $x(t)=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+3t$ мебошад. Формулаи ҳисоб кардани суръат ва шитоби ҳаракатро дар лаҳзаи дилхоҳи вақт тартиб диҳед. Аз рӯи он $\upsilon(3)$ ва $a(3)$ро ёбед, ки агар вақт бо сонияҳо ва кӯчиш бо метрҳо чен карда шавад.

540. Нуқтаи материалӣ ростхатта аз рӯи қонуни $x(t)=At+Bt^2$ $\left(A=3\frac{м}{сон.}, B=0{,}06\frac{м}{сон^2}\right)$-ро қаноаткунанда, ҳаракат мекунад. Суръат ва шитоби нуқтаи материалиро дар лаҳзаҳои $t_1=0$ ва $t_2=3сон.$ ёбед. Суръат ва шитоби миёна дар се сонияи аввали ҳаракат ба чӣ баробар мешавад?

541. Нуқтаи материалӣ аз рӯи қонуни характери лаппишнок доштаи $x(t)=2\sin 4t$ ҳаракат мекунад. Суръат ва шитоби онро дар лаҳзаи вақти $t=\frac{\pi}{2}$ меёбем.

542. Дар хати рост ду нуқтаҳои материалӣ аз рӯи қонунҳои $S_1(t)=2t^2-t$ ва $S_2(t)=t^3+1$ ҳаракат мекунанд. Дар кадом фосилаи вақт

а) суръатҳои ҳаракати нуқтаҳо баробар мешаванд;

б) суръати ҳаракати нуқтаи якум аз дуюм калонтар мемонад?

543. Қонуни ҳаракати ростхатаи нуқтаи материалии массааш $m=15кг$ намуди $S(t)=5t^3-3t^2+2t$ -ро дорад. Қувваи ба нуқта дар лаҳзаи $t=3$ сония таъсиркунандаи F-ро ёбед.

544. Кунҷи гардиши ҷисм дар атрофи тир бо тағйирёбии t аз рӯи қонуни $\varphi(t)=0{,}1t^2-0{,}5t+2$ ба амал меояд. Суръати кунҷии

$\left(\text{бо } \frac{\text{рад}}{\text{сон}}\right)$ чархзании ҷисмро дар лаҳзаи $t = 10$*сон.* ёбед.

545. Ҷисми массааш $m = 5кг$ аз рӯи қонуни $S(t) = 3 - t + t^2$ (S – бо метрҳо ва t - бо сонияҳо чен мешаванд) ростхатта ҳаракат мекунад. Энергияи кинетикии $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ онро баъди 5 сонияи ҳаракаташ ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

546. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 1$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$.

547. Содда кунед:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos a)\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; б) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

548. Нобаробариро бо методи фосилаҳо ҳал кунед:

а) $x^2 - 2x - 3 \le 0$; б) $x - x^2 - 1 \ge 0$.

549. Барои кадом қиматҳои x ададҳои x, $\sqrt{4-3x}$, $3 - x$ аъзоҳои пай дар пайи прогрессияи геометрӣ мешаванд?

550. Суммаи n аъзои аввалаи прогрессияи арифметикиро ҳангоми $a_1 = 3$, $a_n = 81$ ва $n = 40$ будан ёбед.

551. Агар

а) $f(x) = 3x^2 - 5x + 19$; б) $f(x) = 3x^2 - x + 11$.

бошад, он гоҳ дар кадом қиматҳои x $f'(x)$ баробари 0 мешавад.

552. Қимати тақрибии

а) $(1{,}003)^{13}$; б) $\frac{1}{(0{,}997)^{15}}$; в) $\sqrt{9{,}005}$; г) $\sin 5^0$

-ро ёбед.

49. Аломатҳои афзуншавӣ ва камшавии функсия

Ин ду мафҳум ба мо аз синфи 9 шинос аст. Кӯтоҳакак хотиррасон мекунем, **ки «функсияи $y = f(x)$ дар ягон қисми $(a; b)$-и соҳаи муайянӣ (ё дар тамоми нуқтаҳои $D(f)$ афзуншаванда (камшаванда) номида**

мешавад, агар дар ин фосила ба қимати калони аргумент қимати калони (хурди) функсия мувофиқ ояд». Бо дигар ибора, функсия дар фосилаи $(a;b)$ афзуншаванда (камшаванда) номида мешавад, агар ҳангоми $x_2 > x_1$ будан шарти $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$ иҷро гардад.

Акнун бошад аз формулаи Лагранж (§ 15, п.46) истифода бурда аломатҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро бо ёрии ҳосила исбот мекунем.

Теорема. **Функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(a;b)$ меафзояд (кам мешавад), агар дар ҳар як нуқтаи фосила шарти $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ иҷро гардад.**

Исбот. Дар фосилаи $(a;b)$ ду нуқтаҳои x_1 ва x_2-ро бо тарзи дилхоҳ интихоб мекунем. Барои аёнӣ фарз мекунем, ки $x_1 < x_2$ $(x_2 - x_1 > 0)$ аст.

Мувофиқи формулаи Лагранж

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

ва аз ин ҷо

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \qquad x_1 < c < x_2$$

мешавад.

Агар $f'(x) > 0$ бошад, он гоҳ $f'(c) > 0$ ва $f(x_2) - f(x_1)$ чун ҳосили зарби ду ададi мусбат (яъне $f'(c) > 0$ ва $x_2 - x_1 > 0$) калон аз 0 мешавад: $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

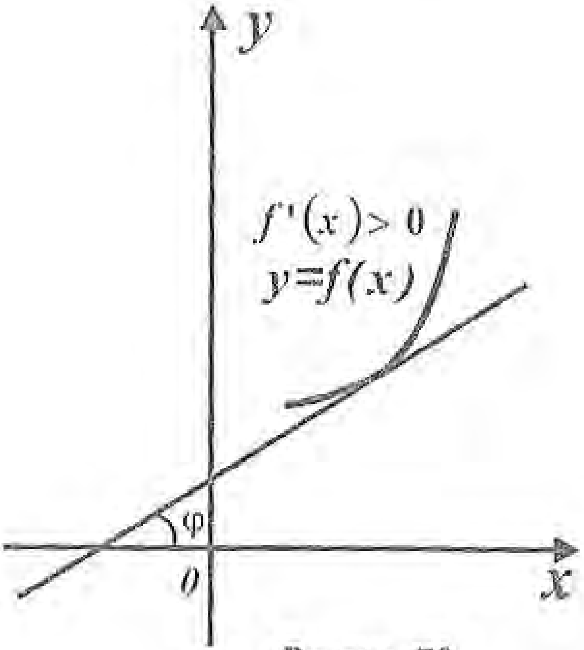
Нобаробарии охирин афзуншавандагии $f(x)$-ро дар $(a;b)$ ифода мекунад.

Ҳолати камшаванда будан низ ҳамин тавр исбот мешавад.

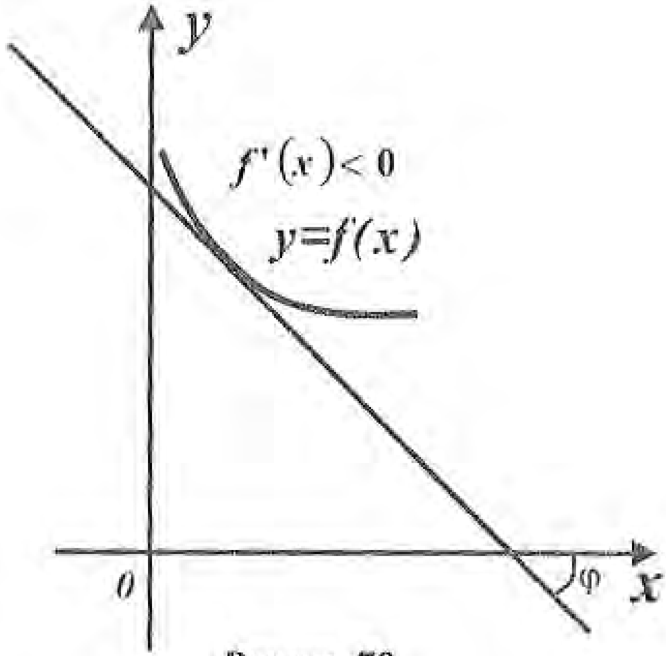
Натиҷаи теоремаи исботшуда аз мазмуни геометрии ҳосила ҳам бармеояд.

Дар ҳақиқат, агар дар ягон фосила $f'(x) > 0$ бошад, он гоҳ $f'(x) = k = tg\varphi > 0$ мешавад. Ин бошад мазмуни онро дорад, **ки расандаи ба хати каҷ гузаронидашуда ба боло равона буда, графики функсия дар ин фосила «баланд» мешавад, яъне функсия меафзояд.** (Расми 78).

Айнан ҳамин тавр ҳангоми $k = tg\varphi = f'(x)$ будан расандаи график ба поён равон буда, худи график дар фосилаи муҳокимашаванда «паст» мефурояд, яъне $f(x)$ камшаванда аст (расми 79).



Расми 78



Расми 79

Мисоли 1. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияи $f(x)=x^3-3x+2$ -ро ёфта, графикашро месозем.

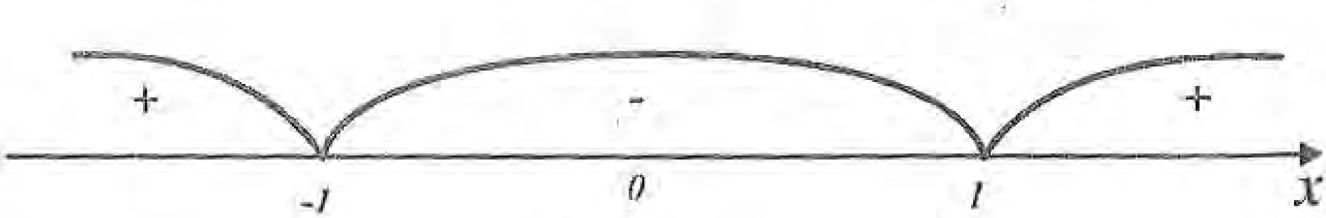
Ҳал. Маълум, ки $D(f)=(-\infty;+\infty)$ аст. Ҳосилаи функсияро дар фосила ёфта нобаробариҳои $f'(x)>0$ ва $f'(x)<0$ -ро ҳал мекунем.

Нобаробарии $f'(x)>0$ ба

$$f(x)=\left(x^3-3x+2\right)'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)>0, \qquad (x-1)(x+1)>0$$

меорад, ки онро ҳал карда, ба натиҷаи зерин меоем: дар $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ $f(x)>0$ буда, функсия дар ин фосила меафзояд.

Нобаробарии $f'(x)<0$ ба $3x^2-3<0$ оварда шуда, ба монанди боло ҳосил мекунем, ки дар $x\in(-1;1)$ $f(x)$ кам мешавад.



Расми 80

Бо мақсади сохтани графики функсия қимати функсияро дар нуқтаҳои $x=\pm1$ ҳисоб мекунем:

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=-1+3+2=4, \qquad f(1)=1^3-3\cdot1+2=-3+3=0$$

Азбаски

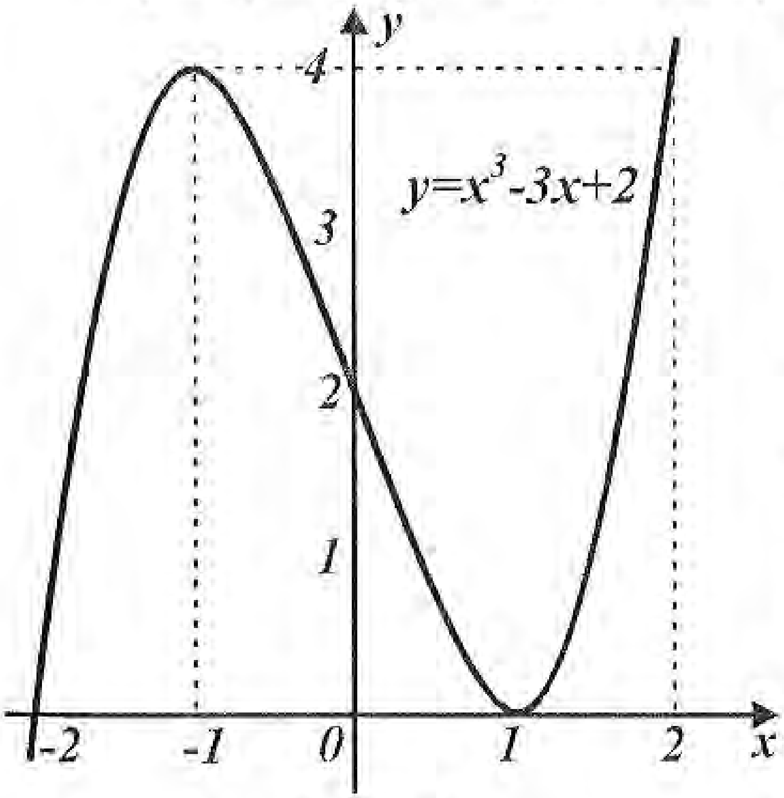
$$x^3-3x+2=\left(x^3-x\right)-(2x-2)=x\left(x^2-1\right)-2(x-1)=(x-1)\left(x^2+x-2\right)=$$

$= (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)$ аст, пас нуқтаҳои бурриши график бо тири ОХ (дарин ҳолат у=0 мегиранд) (1; 0) ва (-2; 0) мешаванд.

Ниҳоят қайд мекунем, ки график тири *ОУ*-ро (дар ин ҳолат x=0 гирифтан зарур аст) дар нуқтаи (0; 2) мебурад.

Нуқтаҳои (-1; 4), (-2; 0), (0; 2) ва (1; 0) -ро дар ҳамвории координатавӣ қайд карда, графики функсияи дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$ ва $(1;+\infty)$ афзуншаванда ва дар фосилаи (-1; 1) камшавандаи $f(x) = x^3 - 3x + 2$ -ро месозем (расми 81).

Барои муайян кардани фосилаҳои афзуншавӣ (онро бо рамзи ($\uparrow$) ишорат мекунем) ва камшавии ($\downarrow$) функсия аз рӯи дастури зерин амал кардан қулай аст:



Расми 81

-нуқтаҳоеро, ки дар онҳо ҳосила ба нул баробар аст ё вуҷуд надорад, дар тири ададӣ қайд мекунем;

-бо ёрии ин нуқтаҳо фосилаҳоеро, ки дар якҷоягӣ соҳаи муайяниро ташкил дода дар ҳар якаш $f'(x)$ аломаташро нигоҳ медорад, муайян мекунем.

Мисоли 2. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияи

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

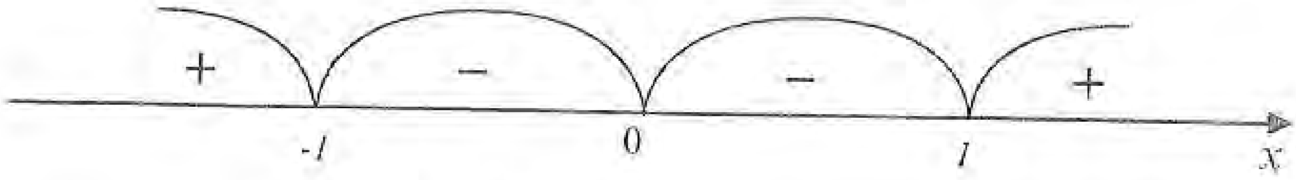
-ро ёфта, графикашро месозем.

Ҳ а л. Барои ин функсия соҳаи муайянӣ ҳамаи нуқтаҳои тири ададӣ ғайр аз нуқтаи 0 аст.

Аз рӯи қоидаҳои дифференсиронӣ

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

-ро ҳосил мекунем ,ки дар нуқтаҳои $x = \pm 1$ $f'(x)$ -ро ба 0 мубадал мегардонад. Дар нуқтаи $x = 0$ функсия ва ҳосилааш вуҷуд надорад, пас нуқтаҳои ± 1 ва 0 соҳаи муайяниро ба чор фосилаҳои $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ ва $(1;+\infty)$ ҷудо мекунанд. Аломати ҳосиларо дар ҳар яки ин фосилаҳо муайян мекунем:

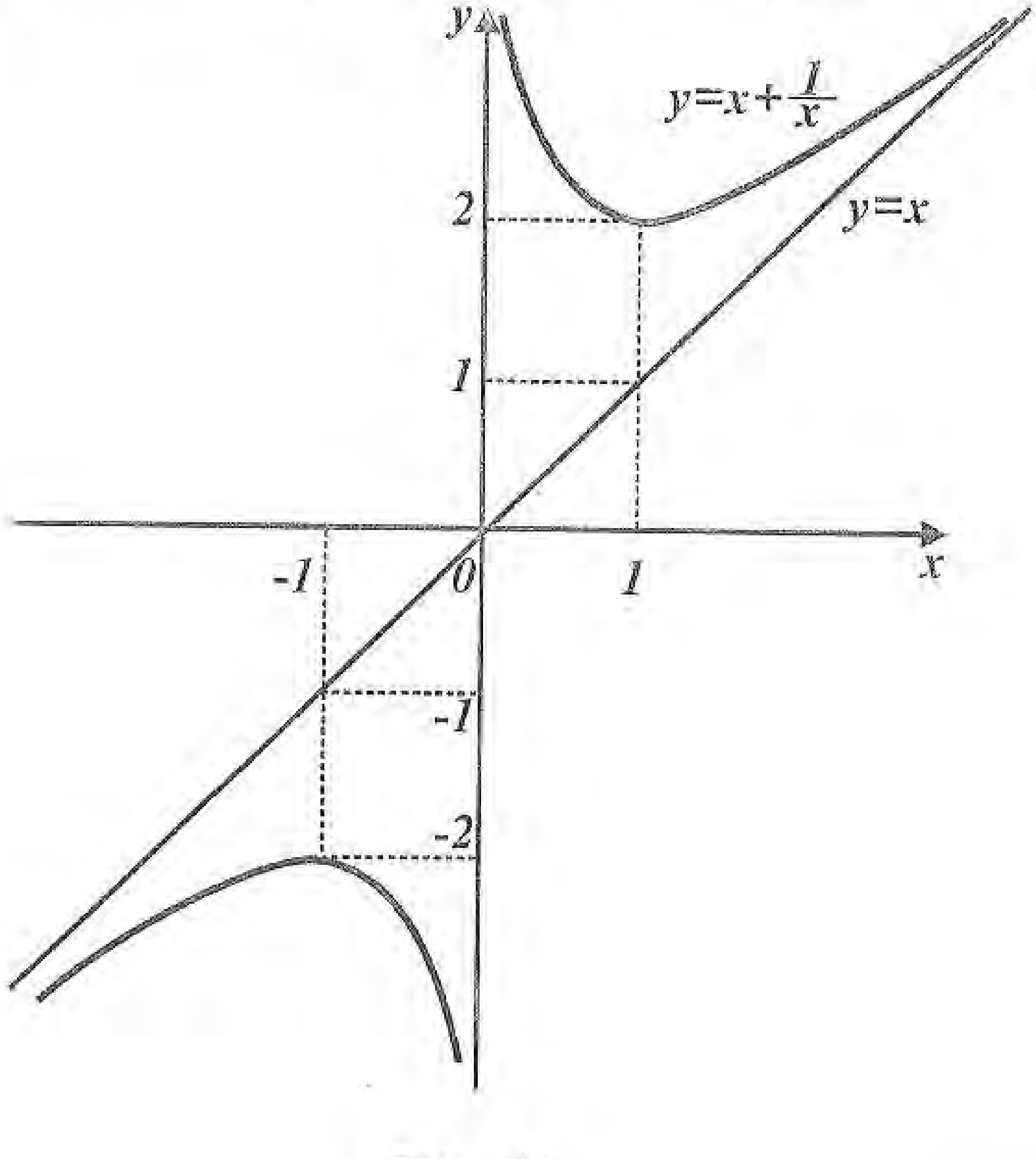


Расми 82

Аз расм намоён аст, ки функсия дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$ ва $(1;+\infty)$ афзуншаванда $(\uparrow)$ ва дар фосилаҳои (-1; 0), (0; 1) камшаванда $(\downarrow)$ аст.

Ҳангоми сохтани график дар назар медорем, ки функсия ток буда, тирҳои координатавиро намебурад. Нуқтаҳои $(\pm1;\pm2)$ ба графики функсия тааллуқ дошта абсиссаҳояшон фосилаҳои афзуншавиро аз камшавӣ ҷудо мекунанд дар атрофи нуқтаи ба $x=0$ хеле наздик ҷамъшавандаи $\frac{1}{x}$ беҳад афзуда беҳад афзуншавии қимати $f(x)$-ро таъмин мекунад.

Дар асоси ин маълумотҳо графики функсияро месозем (расми 83).



Расми 83

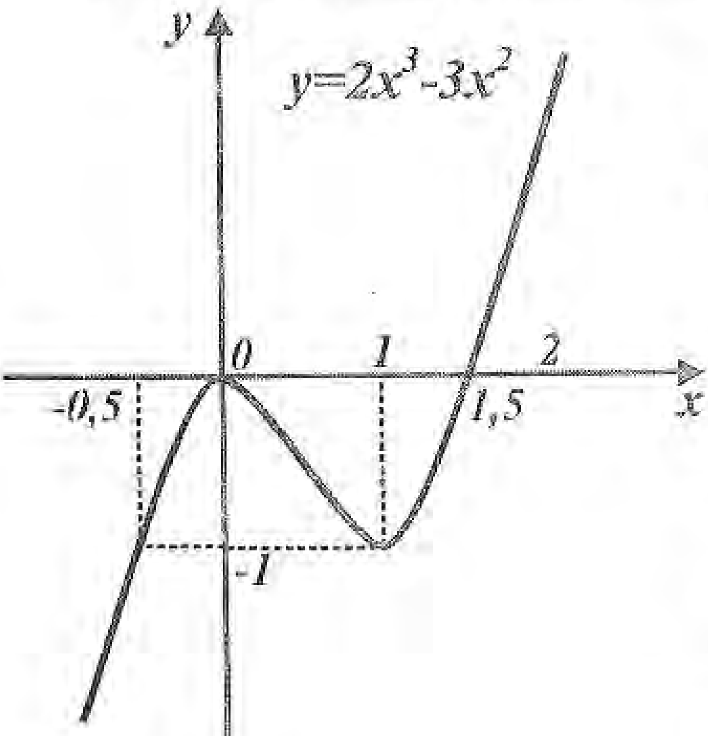
Мисоли 3. Нишон медиҳем, ки дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ функсияи $y = x^3 + 3x$ афзуншаванда ва $y = \cos 4x - 8x$ камшаванда аст.

Ҳал. а) Азбаски $y' = \left(x^3 + 3x\right)' = 3x^2 + 3 = 3\left(x^2 + 1\right)$ асту дар $(-\infty; +\infty)$ шарти $y' = 3\left(x^2 + 1\right) > 0$ иҷро мешавад, пас, худи функсия ҳам мувофиқи теоремаи исботкардаамон дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ афзуншаванда мешавад.

б) Маълум, ки фосилаи $(-\infty; +\infty)$ соҳаи муайянии функсияи $y = \cos 4x - 8x$ -ро ташкил медиҳад. Азбаски $y' = -4\sin 4x - 8$ ва $|\sin 4x| \le 1$ аст, пас барои x-и. дилхоҳ $f'(x) < 0$ аст. Аз ин ҷо камшавандагии функсия дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ бармеояд.

Дар охир қайд менамоем, ки фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро кӯтоҳ- **фосилаҳои монотонии функсия ҳам мегӯянд.**

Мисоли 4. Фосилаҳои монотонии функсияи $y = 2x^3 - 3x^2$ -ро меёбем.



Расми 84

Ҳал. Азбаски $y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ аст, пас нобаробарии $y' > 0$ -ро, ки ба $6x(x-1) > 0$ баробарқувва аст, ҳал намуда фосилаҳои афзуншавиро меёбем: $x < 0$ ва $x > 1$ Нобаробарии $y' < 0$ ё $6x(x-1) < 0$ -ро ҳал карда аниқ менамоем.ки фосилаи камшавӣ $0 < x < 1$ аст.

Графики функсияи $y = 2x^3 - 3x^2$ дар расми 84 акс ёфтааст. Дар он фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии дар боло ёфтаамон, баръало намоён аст.

?

1. Мафҳуми афзуншавӣ ва камшавии функсияро бе ёрии ҳосила шарҳ диҳед. Мисолҳо оред.
2. Теоремаро оиди афзуншавӣ ва камшавии функсия бён намоед. Дар рафти исбот аз кадом формула истифода мебаранд?
3. Барои муайян кардани фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсия аз кадом дастур истифода мебаранд? Мисолҳо оред.

553. Эскизи графики функсияи бефосилаи $y = f(x)$ -и дар порчаи $[a; b]$ додашударо ёбед, агар

а) $a = -1; b = 6; f'(x) > 0$ дар $-1 < x < 6$, $f(0) = 0$, $f(6) = 4$;

б) $a = -4; b = 2; f'(x) < 0$ дар $-4 < x < 2$, $f(-4) = 1$, $f(1{,}5) = -3$; бошад.

554. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёфта графикашро созед:

а) $f(x) = 2x - 3$;

б) $f(x) = 1 - 4x$;

в) $f(x) = -0{,}25x - 2$;

г) $f(x) = 3x + 5$;

д) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$;

е) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;

ж) $f(x) = x^2 + x + 1$;

з) $f(x) = -x^2 + x + 1$;

и) $f(x) = x^3 - 3x^2$;

к) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$;

л) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 8$;

м) $f(x) = x^3 + 9x$;

н) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$;

о) $f(x) = \frac{3}{x-1}$;

п) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$;

р) $f(x) = \frac{x-5}{2x}$.

555. Нишон диҳед, ки функсия афзуншаванда аст:

а) $f(x) = x^3 + 4x - 100$;

б) $f(x) = x^5 + x^3 + x - 8$;

в) $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$;

г) $f(x) = x(x^2 + 1)$;

д) $f(x) = 3x^9 + x^7 + 2x^5 - 1$;

е) $f(x) = 0{,}2\sin 5x + 2x$.

556. Исбот кунед, ки функсияи $g(x)$ дар нуқтаҳои соҳаи муайяниаш камшаванда аст:

а) $g(x) = -\frac{1}{7}x^7 - 9x$;

б) $g(x) = 1 - 3x^3$;

в) $g(x) = \frac{5}{x} + 3$;

г) $g(x) = \frac{x+9}{x}$;

д) $g(x) = \frac{1}{x} - x^3 + 100$;

е) $g(x) = \cos 3x - 6x$.

557. Барои кадом қиматҳои a функсияи $y = ax - \sin x$ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ меафзояд?

558. Барои кадом қиматҳои a функсияи $y = ax^3 + 3x^2 - 2x + 7$ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ кам мешавад?

559. Графики функсияро созед:

а) $y=|x+2|+|x-3|$; б) $y=\dfrac{3x-2}{|x-1|}$,

560. Р-фоизи адад a-ро ҳангоми
а) $a=2{,}5$, $P=240$; б) $a=14{,}5$, $P=2{,}5$
будан, ёбед.

561. Ифодаро дар намуди бисёраъзогии стандартӣ нависед:

а) $(x-7)(x+5)-x^3(x^2+2x-1)$; б) $(3a-b)^2+4\left(a-\dfrac{b}{2}\right)\left(a+\dfrac{b}{2}\right)$.

562. Содда кунед:

а) $\dfrac{x^2+12}{x^2-4}-\dfrac{x+3}{x-2}$; б) $\dfrac{3-x}{xy-x^2}-\dfrac{3-y}{y^2-x^2}$.

563. Қуллаи параболаи $y=x^2-8x+11$ дар кадом чоряк ҷойгир аст?

564. Аъзои якум ва махраҷи аъзоҳояш мусбати прогрессияи геометрии беохир камшавандаи (b_n)-ро ҳангоми аъзои дуюмаш ба $\dfrac{1}{4}$ ва суммааш аз суммаи (b_n^2) се маротиба зиёд будан, ёбед.

565. Дарозӣ ва бари росткунҷаро ҳангоми фарқи ченакҳояш ба 5м ва масоҳаташ ба $500м^2$ баробар будан, ёбед.

566. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $y=x^2-\dfrac{5}{x}$; б) $y=x^3-x\cos x$.

50. Нуқтаҳои критикӣ ва экстремуми функсия

Бояд қайд кард, ки мо дар синфи 9 борҳо ба мафҳумҳои нуқтаҳои экстремалӣ ва экстремуми функсия дучор шуда будем. Охирин маротиба бо онҳо ҳангоми омӯзиши функсияҳои тригонометрӣ (боби I) шинос шудем.

Акнун мафҳуми нишонаҳои мавҷудияти экстремумро бо ёрии ҳосила баён мекунем.

50.1. Маълум, ки барои функсияи дилхоҳи дар ягон фосила муайян ҳолатҳои имконпазири зерин ҷой доранд: а) $f'(x)>0$; б) $f'(x)<0$; в) $f'(x)=0$; г) $f'(x)$ вуҷуд надорад.

Мисоли функсияҳоеро овардан мумкин аст, ки барояшон фақат як қисми ин ҳолатҳо иҷро мешаванд.

Агар дар п.48 рафтори функсияи дар нуқтаҳои дохилии ягон фосила (аз соҳаи муайянӣ) фақат шартҳои а) ва б) -ро қаноаткунанда