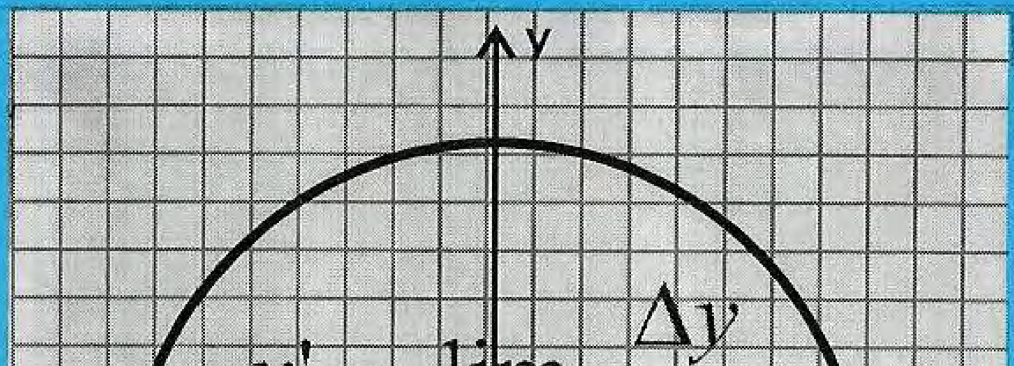
Пиров Р. Усмонов Н.

АЛГЕБРА
ВА ИБТИДОИ АНАЛИЗ



синфи

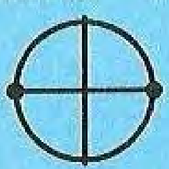
10

$\sin x = m \qquad x = (-1)^n \arcsin m + \pi n$

$\cos x = m \qquad x = \pm \arccos m + 2\pi n$

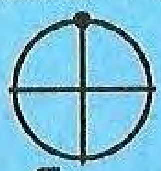
$\operatorname{tg} x = m \qquad x = \operatorname{arc\,tg} m + \pi n$

$\sin x = 0$



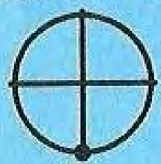
$x = \pi n$

$\sin x = 1$



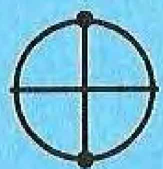
$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\sin x = -1$



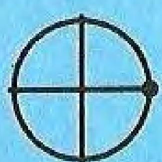
$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\cos x = 0$



$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

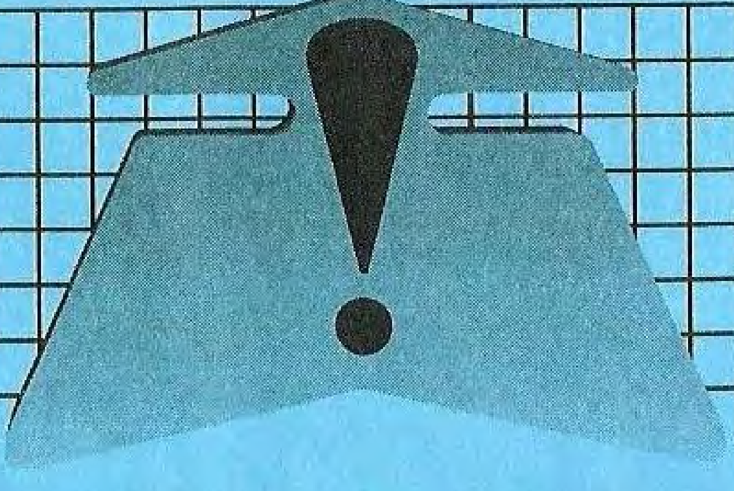
$\cos x = 1$



$x = 2\pi n$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi n$



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

ПИРОВ Раҳмон, УСМОНОВ Нурулло

АЛГЕБРА

ВА ИБТИДОИ АНАЛИЗ

китоби дарсӣ барои синфи 10

Коллегияи Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон ба чоп тавсия кардааст

ДУШАНБЕ
«СОБИРИЁН»
2005

ББК 74.26.Я72
М80

Хонандагони азиз!

Китоб Манбаи донишу маърифат аст, аз он бахрабар шавед ва эҳтиёт намоед. Кӯшиш намоед, ки соли хониши оянда ҳам ин китоб бо намуди аслиаш дастраси додару хоҳарчаҳоятон гардад ва ба онҳо ҳам хизмат кунад.

Истифодаи иҷоравии китоб:

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли таҳсил	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Аввали соли хониш	Охири соли хониш
1					
2					
3					
4					
5					

ISBN 9965-05-032-5
М 4306020600-114 / 418(05) - 2000 Инф. письмо - 99 ББК 74.26.Я72

БОБИ 1

Функсияҳои тригонометрӣ

§1. Формулаҳои тригонометрии фарқ, сумма ва натиҷаҳои онҳо
§2. Табдилдиҳии айниятии ифодаҳои тригонометрӣ. Хосиятҳо ва графики функсияҳои тригонометрӣ

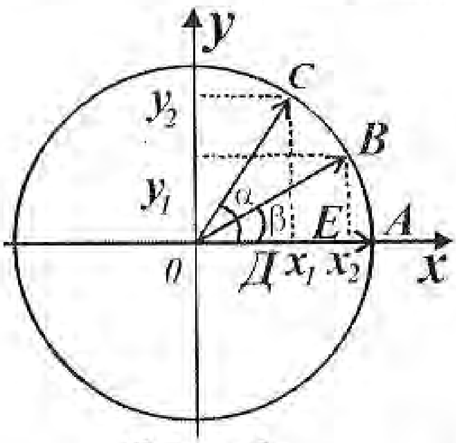
§1. Формулаҳои тригонометрии фарқ, сумма ва натиҷаҳои онҳо

1. Косинуси фарқ ва суммаи кунҷҳо

Формулаҳоеро муқаррар мекунем, ки аз рӯи онҳо қимати функсияҳои тригонометрии кунҷҳои α ва β - ро дониста, функсияҳои тригонометрии сумма ва фарқи ин кунҷҳоро ҳисоб кардан мумкин аст.

Теоремаи 1. *Косинуси фарқи ду кунҷ ба ҳосили зарби косинусҳои ин кунҷҳо плюс ҳосили зарби синусҳои ин кунҷҳо баробар аст:*

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$



Расми 1

Исбот. Дар тарафи рости тирӣ OX нуқтаи A - ро нишона мекунем ва аз он давраи марказаш нуқтаи 0-ро мегузаронем.

Радиуси OA-ро, ки ба R баробар аст, дар атрофи нуқтаи O ба кунҷи α ва ба кунҷи β гардиш медиҳем (расми 1). Пас, радиусҳои OB ва OC ҳосил мешаванд.

Зарби склярии векторҳои $\vec{OB}(x_1, y_1)$ ва $\vec{OC}(x_2, y_2)$ - ро тартиб медиҳем

$$\vec{OB}\cdot\vec{OC}=(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=x_1x_2+y_1y_2 \qquad (1)$$

мувофиқан аз ΔOBE ва $\Delta OCД$ ҳосил менамоем:

$OE=x_2=R\cos\beta$, $BE=y_1=R\sin\beta$, $OД=x_1=R\cos\alpha$, $CД=y_2=R\sin\alpha$

Қиматҳои x_1, x_2, y_1, y_2 -ро ба (1) мегузорем

$$\vec{OB}\cdot\vec{OC}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=R^2\cos\alpha\cdot\cos\beta+R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (2)$$

Аз тарафи дигар, зарби склярии векторҳои $\vec{a}\cdot\vec{b}$ чунин навишта мешавад: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$, ки дар ин ҷо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=R$, $(\vec{a}\cdot\vec{b})=\alpha-\beta$ мебошад. Аз ин ҷо чунин ҳосил мекунем

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=|\overline{OB}|\cdot|\overline{OC}|\cos(\alpha-\beta)=R^2\cos(\alpha-\beta) \qquad (3)$$

Формулаҳои (1), (2), (3) – ро муқоиса намуда, ҳосил мекунем:

$$R^2\cos(\alpha-\beta)=R^2\cos\alpha\cdot\cos\beta+R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (4)$$

Мисоли 1. $\cos15^\circ$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. Азбаски $15^\circ=45^\circ-30^\circ$ ва маълум аст, ки $\cos45^\circ=\sin45^\circ=\dfrac{\sqrt2}{2}$ ва $\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt3}{2}$, $\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}$, бинобар ин

$$\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ\cdot\cos30^\circ+\sin45^\circ\cdot\sin30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt2}{4}\left(\sqrt3+1\right)$$ мешавад.

Теоремаи 2. ***Косинуси суммаи ду кунҷ ба ҳосили зарби косинусҳои ин кунҷҳо минус ҳосили зарби синусҳои ин кунҷҳо баробар аст:***

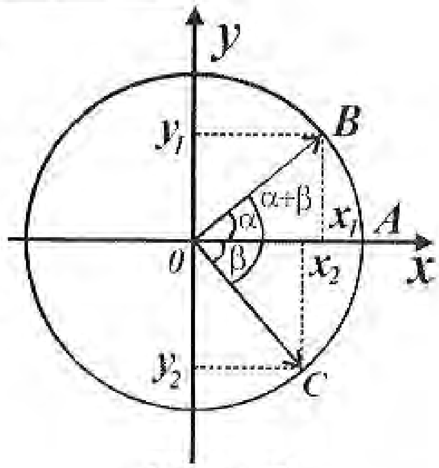
$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Исбот. Дар формулаи (4) ба ҷои $\beta, -\beta$ гузошта, онро дар расм тасвир намуда, ҳосил мекунем:

$x_1=R\cos\alpha,\ y_1=R\sin\alpha,\ x_1=R\cos(-\beta),$
$y_2=\sin(-\beta)$ ё $x_2=\cos\beta,\ y_2=-\sin\beta,$

Он гоҳ формулаи (4) намуди зеринро мегирад.

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$



Расми 2

Мисоли 2. $\cos105^\circ$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. 105° -ро ба намуди суммаи $60^\circ+45^\circ$ менависем, он гоҳ

$$\cos105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos60^\circ\cdot\cos45^\circ-\sin60^\circ\cdot\sin45^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\right)=\frac{\sqrt2}{4}\left(1-\sqrt3\right)$$ мешавад.

?

1. Формулаи косинуси фарқи ду кунҷро нависед.
2. Формулаи косинуси суммаи ду кунҷро нависед
3. Теоремаҳои косинуси фарқ ва суммаи ду кунҷро баён кунед.

1. 75°-ро чун суммаи $30^\circ + 45^\circ$ навишта $\cos 75^\circ$-ро ҳисоб кунед.
2. Аз формулаҳои фарқ ва суммаи косинуси ду кунҷ истифода карда, ифодаи $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ - ро ҳисоб кунед.
3. Бо ёрии формулаҳои фарқ ва суммаи косинуси ду кунҷ, ифодаҳои зеринро табдил диҳед:

   а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$;   б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$.
4. Аз формулаҳои фарқ ва суммаи косинуси ду кунҷ истифода бурда, баробариҳои зеринро исбот кунед:

   а) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$;   б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.
5. 135°-ро чун суммаи $45^\circ+90^\circ$ навишта $\cos 135^\circ$-ро ҳисоб кунед.
6. Ифодаи зеринро содда кунед:

   а) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$;   б) $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.
7. Қимати ифодаро ёбед:

   а) $\cos(\alpha+\beta)$;   б) $\cos(\alpha-\beta)$, агар $\sin\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$.

   α ва β кунҷҳои чоряки якум бошанд.
8. Қимати ифодаҳоро ёбед:

   а) $\cos 24^\circ\cdot\cos 31^\circ-\sin 24^\circ\cdot\sin 31^\circ$; б) $\cos 107^\circ\cdot\cos 17^\circ+\sin 107^\circ\cdot\sin 17^\circ$;

   в) $\cos 36^\circ\cdot\cos 24^\circ-\sin 36^\circ\cdot\sin 24^\circ$; г) $\cos 18^\circ\cdot\cos 63^\circ+\sin 18^\circ\cdot\sin 63^\circ$;

   д) $\cos 32^\circ\cdot\cos 58^\circ-\sin 32^\circ\cdot\sin 58^\circ$.
9. Ифодаро содда кунед:

   а) $\cos 2\varphi\cos\varphi+\sin 2\varphi\sin\varphi$;

   б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$;

   в) $\cos(60^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)$; г) $\cos(30^\circ+\alpha)-\cos(30^\circ-\alpha)$.
10. Айниятро исбот кунед:

    а) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

    б) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin^2\alpha\cdot\sin\beta$.

Машқҳо барои такрор

11. Амалҳоро иҷро кунед:

    а) $\frac{x^2+4x+3}{x-5}\cdot\frac{x^2-5x}{x+3}$;   б) $\frac{x^2-16}{4x+12}:\frac{x^2+3x-4}{x-3}$.

12. Аломати ифодаи зеринро муайян кунед:

а) $\sin 153^0$; б) $\sin 273^0$; в) $\sin 301^0$; г) $\sin\left(-402^0\right)$;

д) $\cos 73^0$; е) $\sin 910^0$; ж) $\cos\left(-1230^0\right)$; з) $\sin 140^0$;

13. Исбот кунед, ки

а) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$;

б) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=1-2\sin^2\alpha$ мешавад.

14. Нобаробарипро ҳал кунед:

а) $0{,}8x<\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{15}$; б) $\dfrac{5x-3}{4}<1{,}25x+1$

15. Ду мошин кореро дар муддати 20 соат ичро карданд. Мошини дуюм ин корро назар ба мошини якум 9 соат тезтар ичро мекунад. Ҳар як мошин ин корро дар чанд соат ичро мекунад?

2. Синуси сумма ва фарқи кунҷҳо

Теоремаи 1. ***Синуси суммаи ду кунҷ ба ҳосили зарби синуси кунҷи якум бар косинуси кунҷи дуюм плюс ҳосили зарби косинуси кунҷи якум бар синуси кунҷи дуюм баробар аст:***

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta} \quad (3)$$

Исбот. Аз формулаи (2) ва формулаҳои мувофиқоварӣ (ниг. Алгебра 9 §3) истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta$$

Пас, $\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$

Мисоли 1. $\sin 105^0$ - ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. 105^0 - ро ба намуди суммаи 60^0+45^0 менависем.

Он гоҳ $\sin 105^0=\sin\left(60^0+45^0\right)=\sin 60^0\cdot\cos 45^0+\cos 60^0\cdot\sin 45^0=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3+1}\right)$$ мешавад.

Теоремаи 2. ***Синуси фарқи ду кунҷ ба ҳосили зарби синуси кунҷи якум бар косинуси кунҷи дуюм минус ҳосили зарби косинуси кунҷи якум бар синуси кунҷи дуюм баробар аст:***

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

Исбот. Чунин рафтор мекунем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha+(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Пас, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$ мешавад.

Мисоли 2. Синуси 75^0- ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. 75^0- ро ба намуди фарқи 90^0-15^0 менависем. Он гоҳ

$$\sin 75^0=\sin(90^0-15^0)=\sin 90^0\cdot\cos 15^0-\cos 90^0\cdot\sin 15^0=$$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-0\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

($\cos 15^0$ дар саҳ. 2 нишон дода шуда буд).

> **?**
> **1.** Формулаи синуси суммаи ду кунҷро нависед.
> **2.** Формулаи синуси фарқи ду кунҷро нависед.
> **3.** Теоремаҳои синуси сумма ва фарқи ду кунҷро баён кунед.

16. 135^0-ро чун суммаи 45^0+90^0 навишта $\sin\ 135^0$ -ро ҳисоб кунед.

17. Ифодаҳоро бо ёрии формулаҳои ҷамъ ва фарқ табдил диҳед:

а) $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$.

18. Формулаҳои ҷамъро истифода карда санҷед, ки:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; б). $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

19. Ифодаро содда кунед:

а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\alpha$; б). $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha$.

20. α ва β кунҷҳои чоряки II ва $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{15}{17}$.

Ёбед: а) $\sin(\alpha+\beta)$; б) $\sin(\alpha-\beta)$.

21. Ифодаро содда кунед:

а) $\sin 38^0\cdot\cos 12^0+\cos 38^0\cdot\sin 12^0$; б) $\sin 137^0\cdot\cos 52^0-\cos 137^0\cdot\sin 52^0$.

22. Ҳисоб кунед:

а) $\sin 63^0\cdot\cos 27^0+\cos 63^0\cdot\sin 27^0$; б) $\sin 51^0\cdot\cos 21^0-\cos 51^0\cdot\sin 21^0$;

в) $\sin 21^0\cdot\cos 9^0+\cos 21^0\cdot\sin 9^0$; г) $\sin 278^0\cdot\cos 68^0-\cos 278^0\cdot\sin 68^0$.

23. Содда кунед:

а) $\sin(90^0-\alpha)+\sin(30^0+\alpha)$; б) $\sin(\alpha+60^0)-\sin(\alpha-60^0)$.

24. Айниятро исбот кунед:

а) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$;

б) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta$.

25. Содда кунед:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}$ б) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

Машқҳо барои такрор

26. Қимати ифодаҳоро ёбед:

а) $\sin 480^\circ$; б) $\cos(-570^\circ)$; в) $\sin 240^\circ$; г) $\cos(-210^\circ)$;

27. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $(x+4)(x+5)-5\le 7$; б) $6-(2x+1{,}5)(4-x)\ge 0$.

28. Ифодаро содда кунед:

а) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$; б) $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

29. Пиёдагард роҳи АВ – ро тай намуда, ҳисоб кард, ки агар ӯ соате 0,8 км зиёдтар роҳ мегашт, ба В як соат пештар омада мерасид ва агар соате 0,8 камтар роҳ мегашт, ба В якуним соат дертар омада мерасид. Масофаи АВ – ро ёбед.

3. Тангенси сумма ва фарқи кунҷҳо

Теорема. ***Барои ҳар гуна қиматҳои имконпазири кунҷҳои*** α ***ва*** β ***формулаи зерин дуруст аст:***

$$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}} \qquad (4)$$

Шарҳ. Қимати имконпазири α ва β ҳамаи он қиматҳое мебошад, ки барои онҳо тангенсҳои кунҷҳои α ва β, инчунин $\alpha+\beta$ маъно доранд. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки ин камонҳо набояд дар охирҳои диаметри амудӣ тамом шаванд ва он гоҳ барои ҳар яке аз се камоне ки дида мебароем, қимати косинус ба нул баробар нест. Яъне тангенси ҳар се камон адади охирнок аст.

Исбот. Мувофиқи таърифи тангенс (ниг. Алгебра 9 п.29), тасдиқи теоремаҳои 2 ва 3 (§1. п.1)

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$ аст.

Сурат ва махраҷро ба $\cos\alpha\cos\beta\ne 0$ тақсим мекунем:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Дар формулаҳои (4) β - ро бо $-\beta$ иваз намуда, аз хосияти тоқ будани тангенс истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$tg(\alpha-\beta)=tg(\alpha+-(\beta))=\frac{tg\alpha+tg(-\beta)}{1-tg\alpha tg(-\beta)}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}.$$

Ҳамин тавр:

$$\boxed{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}} \qquad (5)$$

Мисол 1. $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ - ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{tg\frac{\pi}{4}+tg\alpha}{1-tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\alpha}=\dfrac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}.$

Мисоли 2. Тангенси 150° - ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. 150° - ро ба намуди фарқи $180^\circ-30^\circ$ менависем, он гоҳ

$$tg150^\circ=tg(180^\circ-30^\circ)=\frac{tg180^\circ-tg30^\circ}{1+tg180^\circ\cdot tg30^\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$ мешавад.

Мисоли 3. $\sin 240^\circ$ ва $tg135^\circ$ - ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. 240° - ро ба намуди суммаи $180^\circ+60^\circ$ менависем. Он гоҳ мувофиқи формулаи (3)

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=\sin 180^\circ\cdot\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\cdot\cos 180^\circ=$$

$$=0\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(-1)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$ мешавад.

135° - ро ба намуди фарқи $180^\circ-45^\circ$ менависем. Он гоҳ аз рӯи формулаи (5)

$$tg135^\circ=tg(180^\circ-45^\circ)=\frac{tg180^\circ-tg45^\circ}{1+tg180^\circ\cdot tg45^\circ}=\frac{0-1}{1+0\cdot 1}=-1$$ мешавад.

?

1. Формулаи тангенси суммаи ду кунҷро нависед.
2. Формулаи тангенси фарқи ду кунҷро нависед.
3. Теоремаҳои сумма ва фарқи тангенси ду кунҷро баён намоед.
4. Қиматҳои имконпазири α ва β - ро, ки барои онҳо тангенс маъно дорад шарҳ диҳед.

30. Агар $tg\alpha=\frac{4}{3}$ ва $tg\beta=\frac{1}{4}$ бошад $tg(\alpha+\beta)$ - ро ёбед.

31. Ҳисоб кунед: а) $tg15^\circ$ б) $tg75^\circ$

32. $tg\alpha = \frac{1}{2}$; $tg\beta = \frac{1}{3}$. Ёбед: а) $tg(\alpha+\beta)$; б) $tg(\alpha-\beta)$.

33. Ҳисоб кунед:

а) $\dfrac{tg20^\circ + tg10^\circ}{1 - tg20^\circ \cdot tg10^\circ}$; б) $\dfrac{1 + tg2^\circ + tg152^\circ}{tg152^\circ \cdot tg2^\circ}$.

34. Ҳисоб кунед:

а) $\dfrac{tg\frac{\pi}{15} + tg\frac{4\pi}{15}}{1 - tg\frac{\pi}{15} \cdot tg\frac{4\pi}{15}}$; б) $\dfrac{tg\frac{2\pi}{3} - tg\frac{5\pi}{12}}{1 + tg\frac{2\pi}{3} \cdot tg\frac{5\pi}{12}}$;

в) $\dfrac{tg22^\circ + tg23^\circ}{1 - tg22^\circ \cdot tg23^\circ}$; г) $\dfrac{tg72^\circ - tg42^\circ}{1 + tg72^\circ \cdot tg42^\circ}$.

35. а) Агар $tg\alpha = 1{,}2$ ва $tg\beta = 0{,}7$ бошад, $tg(\alpha+\beta)$ ва $tg(\alpha-\beta)$ - ро ёбед.

б) Агар $tg\alpha = -0{,}2$ ва $tg\beta = 1{,}5$ бошад, $tg(\alpha+\beta)$; ва $tg(\alpha-\beta)$ - ро хисоб кунед..

36. Айниятро исбот кунед:

а) $\dfrac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha} = tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$; б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = tg\alpha + tg\beta$.

37. Содда кунед:

а) $tg(\alpha+\beta) - tg\alpha - tg\beta - tg(\alpha+\beta)tg\alpha \cdot tg\beta$;

б) $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha+\beta)} + \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha-\beta)} - 2$; в) $\dfrac{tg\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right) + tg\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}{1 - tg\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)tg\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)} - 1$;

г) $\dfrac{tg\frac{\pi}{9} + tg\frac{5\pi}{36}}{1 + tg\frac{8\pi}{9} \cdot tg\frac{5\pi}{36}} - 1$.

Машқҳо барои такрор

38. Қимати ифодаҳоро ёбед:

$\sin 300^\circ$; $\cos 330^\circ$; $\sin 570^\circ$; $\sin 810^\circ$.

39. Қимати $\sin(\alpha+\beta)$ ёфта шавад, агар $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$ буда,

α ва β кунҷҳои чоряки якум бошанд.

40. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11, \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y = 9, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$

41. Ҳосили зарби ду адад аз суммаи онҳо 15 маротиба калон аст. Агар ба адади якум дучанди адади дуюмро ҷамъ кунем, 100 ҳосил мешавад. Ин ададҳоро ёбед.

4. Формулаҳои кунҷҳои дучанда

Функсияҳои $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ва $tg 2\alpha$ - ро ба воситаи функсияҳои тригонометрии кунҷи α ифода мекунем.

Дар формулаи ҷамъ барои косинус (ниг. ба п.1) $\alpha = \beta$ ҳисобида, ҳосил мекунем:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha .$$

Бинобар ин, **косинуси кунҷи дучанда ба фарқи квадратҳои косинус ва синуси кунҷ баробар аст.**

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

Дар формулаи ҷамъ барои синус (ниг. ба п.2) $\alpha = \beta$ ҳисобида, ҳосил мекунем:

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha .$$

Ҳамин тавр, **синуси кунҷи дучанда ба ҳосили зарби дучандаи синус ва косинуси кунҷи додашуда баробар аст.**

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha.}$$

Монанди ин формулаи аргументи дучанда барои тангенс бароварда мешавад:

$$\boxed{tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.}$$

Мисоли 1. $\cos 3\alpha$ - ро ба воситаи кунҷи α ифода мекунем

Ҳал. $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha =$

$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - -2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha \cdot$

$\cdot \cos\alpha \cdot 3\sin^2\alpha$ - ро ба $1 - \cos^2\alpha$ иваз карда, ҳосил мекунем:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha .$$

Мисоли 2. $\sin 3\alpha$ - ро ба воситаи кунҷи α ифода мекунем

Ҳал. $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot$

$\cdot \cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha =$

$$= 3(1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha .$$

Мисоли 3. $tg\alpha = \frac{3}{4}$ додашудааст ва $180^0 < \alpha < 270$; $tg2\alpha$ - ро меёбем.

Ҳал. $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{16-9}{16}} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$.

Мисоли 4. Дода шуда аст:

$\sin\alpha = 0{,}8, 0^0 < \alpha < 90^0$

а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $tg2\alpha$ - ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. а) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6$

Қимати функсияи $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ - ро дар формулаи $\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha$ гузошта ҳосил мекунем:

$$\sin 2\alpha = 2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8 = 0{,}96.$$

б). Қимати функсияи $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$-ро дар формулаи $cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ гузошта ҳосил мекунем:

$$\cos 2\alpha = (0{,}6)^2 - (0{,}8)^2 = -0{,}28.$$

в) Қимати $\sin 2\alpha$ ва $\cos 2\alpha$ - ро дар формулаи $tg2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ гузошта ҳосил мекунем:

$$tg2\alpha = -\frac{0{,}96}{0{,}28} = -\frac{24}{7} = -3\frac{3}{7}.$$

?

1. Формулаи кунҷи дучандаро барои тангенс нависед. Онро исбот намоед.
2. $\sin 2\alpha$ ва $\cos 2\alpha$ - ро ба воситаи а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$ ифода намоед.

42. $\cos\alpha = -0{,}8$ ва α кунҷи чоряки II аст. Қимати $\sin 2\alpha$ - ро ёбед.

43. Ифодаи $\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cdot\cos\alpha$ - ро содда кунед.

44. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; в) $\frac{\sin 2\beta}{cos\beta} - \sin\beta$; г) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$;

д) $\cos^2\beta - \cos 2\alpha$; е) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \cos\alpha$.

45. Касрро ихтисор кунед:

а) $\frac{\sin 40^o}{\sin 20^o}$; б) $\frac{\sin 100^o}{\sin 50^o}$;

в) $\frac{\cos 80^o}{\cos 40^o + \sin 40^o}$; г) $\frac{\cos 36^o + \sin^2 18^o}{\cos 18^o}$.

46. Ифодаро содда кунед:

а) $\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$; б) $\frac{\sin 40^o}{2\cos 20^o}$;

в) $\frac{\sin 100^o}{\cos 50^o}$; г) $\frac{\cos 36^o + \sin^2 18^o}{\cos 18^o}$.

47. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha}$; б) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \cos\alpha$; в) $\cos 2\beta + \sin^2 \beta$.

48. Қимати ифодаро ёбед:

а) $2\sin 165^o \cos 165^o$; б) $\cos^2 75^o - \sin^2 75^o$.

49. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta}$; б) $\frac{1-\cos 2\beta}{2\sin\beta}$;

в) $\frac{1+\cos 4\beta}{\cos^2\beta - \sin^2\beta}$; г) $\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\beta\right)}{2\sin\beta}$.

50. Айниятро исбот кунед:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1$; б) $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$;

в) $\sin 2\alpha - tg\alpha = \cos 2\alpha \cdot tg\alpha$; г) $(tg\alpha + ctg\alpha)\sin 2\alpha = 2$.

51. Ҳисоб кунед:

а) $\sin 105^o \cdot \cos 105^o$; б) $\cos^2\frac{7\pi}{12} - \sin^2\frac{7\pi}{12}$.

в) $\cos 20^o \cdot \cos 40^o \cdot \cos 80^o$; г) $tg(\alpha+45) + tg(\alpha-45) - 2tg 2\alpha$.

52. Айниятро исбот кунед:

а) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = tg\alpha$; б) $\frac{\sin\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 5\alpha} = tg 3\alpha$;

в) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$; г) $\sin 2\alpha - tg\alpha = \cos 2\alpha \cdot tg\alpha$;

д) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1$; е) $4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$.

Машқҳо барои такрор

53. Қимати ифодаро ёбед:

а) $2\cos 0^o - 4\sin 90^o + 5tg180^o$; б) $\dfrac{2tg15^o}{1-tg^2 15^o}$;

в) $\dfrac{2tg75^o}{1-tg^2 75^o}$; г) $2ctg90^o - 3\cos 270^o + 5\sin 0^o$.

54. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 4(x-1)-2(x+1)>0; \\ 3x-1-4(x-10)<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+8-(2x-5)<0; \\ 2(6x-4)-3(x+1)>0. \end{cases}$

55. Суммаро, ки ҷамъшавандаҳояш аъзоҳои пайдарпаи прогрессияи арифметикианд, ҳисоб кунед:

а) 2+6+10+.....+198; б) 95+85+75+…+(-155).

5. Формулаҳо барои нисфи кунҷ

Функсияи тригонометрии кунҷи $\dfrac{\alpha}{2}$ - ро ба воситаи функсияҳои тригонометрии кунҷи α ифода менамоем.

Дар формулаи косинуси аргументи дучанда (ниг. ба п.4) α - ро бо $\dfrac{\alpha}{2}$ иваз мекунем:

$$\boxed{\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} \tag{1}$$

Айнияти асосии

$$\boxed{1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} \tag{2}$$

ро илова карда, (1) ва (2) – ро аъзо ба аъзо ҷамъ ва тарҳ намуда, ба

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha; \qquad 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$$

соҳиб мешавем. Аз ин ҷо,

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \tag{3}$$

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \tag{4}$$

мешавад.

Айнияти (4) – ро ба айнияти (3) аъзо ба аъзо тақсим карда, ҳосил мекунем:

$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}} \qquad (5)$$

Дар формулаҳои (3) – (5) аломати пеш аз реша буда мувофиқан ба он ҳолате, ки дар кадом чоряк кунҷи $\frac{\alpha}{2}$ тамом шудааст, интихоб карда мешавад.

Мисоли 1. $\sin\frac{\pi}{8}=\sin(22,5)^o$ ва $\cos\frac{\pi}{8}=\cos(22,5)^o$ - ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. Азбаски $\cos\frac{\pi}{4}=\cos 45^o=\frac{\sqrt{2}}{2}$ мебошад, кунҷи $(22,5)^o$ дар чоряки якум тамом мешавад ва косинусу синуси он кунҷҳо мусбатанд.

Бинобар ин $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

Мисоли 2. $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ дода шудааст, ки дар он ҷо $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ мебошад; $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$ - ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$. Азбаски $\frac{\alpha}{2}$ дар чоряки дуюм тамом мешавад, бинобар ин $\cos\frac{\alpha}{2}<0$, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ ва $tg\frac{\alpha}{2}<0$ аст. Аз ин ҷо,

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}; \qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=+\frac{3\sqrt{10}}{10}; \quad tg\frac{\alpha}{2}=-3$$

мебошад.

Мисоли 3. $\sin\frac{\pi}{12}$ - ро меёбем.

Ҳал. $\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

(Қимати реша мусбат аст, зеро $\frac{\pi}{12}$ кунҷи чоряки I буда, $\sin\frac{\pi}{12}>0$ мебошад).

Мисоли 4. $tg\frac{5\pi}{8}$ - ро меёбем.

Ҳал. Мебинем, ки $\frac{5\pi}{8}$ дар чоряки II мехобад. Бинобар ин $tg\frac{5\pi}{8}<0$ аст, пас

$$tg\frac{5\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{1+\cos\frac{5\pi}{4}}}=-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=$$

$$=-\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{4-2}}=-\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=-\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Мисоли 5. $\cos\alpha=0{,}8$ ва $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ мебошад, қиматҳои $\sin\frac{\alpha}{2}$ $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$ - ро меёбем.

Ҳал. Кунҷи $\frac{\alpha}{2}$ дар чоряки якум воқеъ аст ва $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\cos\frac{\alpha}{2}>0$, $tg\frac{\alpha}{2}>0$ аст. Бинобар ин,

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1-0{,}8}}{2}=\sqrt{0{,}1}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+0{,}8}}{2}=\sqrt{0{,}9}$;

$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1-0{,}8}}{1+0{,}8}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$ мешавад.

?

1. Формулаҳо барои нисфи кунҷро барои косинус, синус ва тангенс нависед.
2. Тарзи ҳосилкунии ин формулаҳоро баён кунед.
3. Дар ин формулаҳо аломати пеш аз реша ба чӣ асос карда мешавад?

56. Агар:

а) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

бошад, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ва $tg\frac{\alpha}{2}$ - ро ёбед.

57. Ҳисоб кунед:

а) $4\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}$; б) $\sin^4\frac{3}{8}\pi-\cos^4\frac{3}{8}\pi$; в) $tg\frac{\pi}{8}$;

г) $\sin\frac{17\pi}{12}$; д) $\cos\frac{\pi}{12}$; е) $tg\frac{\pi}{12}$

58. Агар:

а) $\cos\alpha=\frac{2}{5}$, $270^o<\alpha<360^o$; б) $\cos\alpha=0{,}8$ $0<\alpha<90^o$

бошад, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, ва $tg\frac{\alpha}{2}$ - ро ёбед.

59. $\sin\alpha=0{,}8$ ва $90^o<\alpha<180^o$ дода шудааст

а) $\sin\frac{\alpha}{2}$; б) $\cos\frac{\alpha}{2}$; в) $tg\frac{\alpha}{2}$ - ро ёбед.

60. Ҳисоб кунед:

а) $\sin 45^o$; б) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$; в) $\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}$.

61. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ва $tg\frac{\alpha}{2}$ -ҳисоб карда шавад, агар $\cos\alpha=0{,}8$ буда $180^o<\alpha<270^o$ бошад.

Машқҳо барои такрор

62. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{b^2-a^2}:\left(1-\frac{1+b}{b}\right)$; б) $\frac{ab^2-a^2b}{a+b}\cdot\frac{a+\frac{ab}{a-b}}{a-\frac{ab}{a+b}}$.

63. Муодилаи биквадратиро ҳал карда, суммаю ҳосили зарби решаҳои онро ёбед.

а) $x^4-15x^2+50=0$; б) $x^4-x^2-12=0$.

64. Агар: а) $\alpha=750^o$; б) $\alpha=810^o$; в) $\alpha=1260^o$ бошад, қиматҳои синус, косинус, тангенси кунҷи α - ро ёбед.

65. а) $\alpha=\frac{7\pi}{6}$; б) $\alpha=-120^o$ бошад, қимати ифодаи $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha$ - ро ёбед.

66. Сайёҳ 3 км роҳи кӯҳӣ ва 5 км роҳи ҳамворро дар 2 соат тай кард. Суръати ҳаракати сайёҳ дар роҳи кӯҳӣ нисбат ба суръати он дар роҳи ҳамвор 2 км/соат кам аст. Суръати сайёҳро дар роҳи кӯҳӣ ёбед.

6. Формулаҳои ба сумма ва фарқ табдил додани ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ

Айниятҳои зеринро аъзо ба аъзо ҷамъ мекунем (ниг. ба п.1):

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (2)$$

Ҳамин тариқ,

$$\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}} \qquad (3)$$

мешавад.

Ҳосили зарби косинуси ду кунҷ ба нисфи суммаи косинуси фарқ ва косинуси суммаи кунҷҳои онҳо баробар аст.

Агар аз айнияти (1) айнияти (2) – ро аъзо ба аъзо тарҳ кунем, формулаи шаклдигаркунии ҳосили зарби синусҳоро ҳосил мекунем:

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}} \qquad (4)$$

Ҳосили зарби синуси ду кунҷ ба нимфарқи косинуси фарқ ва косинуси суммаи кунҷҳои онҳо баробар аст.

Формулаҳои $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ ва $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$ - ро аъзо ба аъзо ҷамъ намуда, формулаи шаклдигаркунии ҳосили зарби синусу косинусро ҳосил мекунем:

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}} \qquad (5)$$

Ҳосили зарби синус ва косинуси ду кунҷ ба нимсуммаи синуси сумма ва синуси фарқи кунҷҳои онҳо баробар аст.

Натиҷа. Агар $\alpha=\beta$ бошад, пас аз (3-5) формулаҳои зерин ҳосил мешаванд:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\ \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot$$

Мисоли 1. Ҳосили зарби $\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha$ - ро ба сумма табдил медиҳем.

Ҳал. $\cos 4\alpha\cdot\cos 2\alpha=\dfrac{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}{2}$.

Мисоли 2. $\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha$ - ро ба сумма табдил медиҳем

Ҳал. $\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdot\dfrac{\sin^2 2\alpha}{4}=$

$$=\frac{1}{8}(1-\cos 2\alpha)\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right)=\frac{1}{16}(1-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(1-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\frac{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}{2}\right)=\frac{1}{16}-\frac{\cos 2\alpha}{32}-\frac{\cos 4\alpha}{16}+\frac{\cos 6\alpha}{32}$$

Мисоли 3. $\sin 75^{o}\cdot\cos 15^{o}$ - ро ба сумма табдил медиҳем.

Ҳал. Аз формулаи (5) истифода мебарем:

$$\sin 75^{o}\cdot\cos 15^{o}=\frac{\sin 90^{o}+\sin 60^{o}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4};$$

Мисоли 4. $\sin 45^{o}\cdot\sin 15^{o}$ - ро ба сумма табдил медиҳем.

Ҳал. $\sin 45^{o}\cdot\sin 15^{o}=\dfrac{\cos 30^{o}+\cos 60^{o}}{2}=\dfrac{1\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}.$

?

1. Ҳангоми ба сумма табдил додани ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ кадом формулаҳо истифода бурда мешавад?
2. Формулаҳои ба сумма табдил додани ифодаҳои а) $\cos\alpha\cdot\cos\beta$; б) $\sin\alpha\cdot\sin\beta$; в) $\sin\alpha\cdot\cos\beta$ -ро нависед.

67. Ҳосили зарбро ба сумма табдил диҳед:

а) $\sin 42^{o}\cdot\cos 12^{o}$; б) $\sin 40^{o}\cdot\sin 14^{o}$; в) $\sin 22^{o}\cdot\sin 8^{o}$;

г) $2\sin 18^{o}\cdot\cos 12^{o}$; д) $\cos 20^{o}\cdot\cos 40^{o}$; е) $\cos 18^{o}\cdot\cos 56^{o}$.

68. Ба сумма табдил диҳед:

а) $\sin 20^{o}\cdot\cos 10^{o}$; б) $\sin 50^{o}\cdot\cos 15^{o}$ в) $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$;

г) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-3\beta)$.

69. Ба сумма табдил диҳед:

а) $\cos 45^{o}\cdot\cos 15^{o}$; б) $\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{5\pi}{24}$; в) $\cos 20^{o}\cdot\cos 10^{o}$;

г) $\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5}$; д) $\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{8}$; е) $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$.

70. Ҳосили зарбро ба сумма табдил диҳед:

а) $\sin 20^{o}\cdot\sin 10^{o}$; б) $\sin 4\alpha\cdot\cos 2\alpha$; в) $\sin 2\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)$;

г) $\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)$; д) $2\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$;

е) $8\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha-\gamma)\cdot\cos(\gamma-\beta)$.

71. Ба сумма табдил диҳед:

а) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$; б) $2\sin 40^{o}\cdot\cos 40^{o}\cdot\cos 50^{o}$;

в) $4\cos 18^{o}\cdot\cos 20^{o}\cdot\cos 16^{o}$; г) $4\cos\alpha\cdot\cos 3\alpha\cdot\cos 5\alpha$;

д) $2\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha$; е) $8\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha-\gamma)\cdot\cos(\beta-\gamma)$.

72. Ба сумма табдил диҳед:

а) $2\cos 45^o \cdot \sin 15^o$; б) $\cos 105^o \cdot \cos 75^o$; в) $\sin\frac{\pi}{24} \cdot \sin\frac{5\pi}{24}$

73. Ба сумма табдил диҳед:

а) $2\sin^2\alpha$; б) $2\cos^2(45-\alpha)$; в) $2\sin^2(45^o-\alpha)$; г) $4\cos^4\alpha$.

74. Ба сумма табдил диҳед:

а) $\sin 30^o \cdot \cos 20^o$; б) $\cos 15^o \cdot \sin 5^o$;

в) $\sin 50^o \cdot \sin 15^o$; г) $\cos 43^o \cdot \cos 43^o$.

Машқҳо барои такрор

75. Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $3x^2+2x-5$; б) $x^2+3x-28$; в) $9x^2+6x+1$.

76. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} xy+3x-4y=12, \\ xy+2x-2y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ y^2-4x^2=9. \end{cases}$

77. Қимати ифода ёфта шавад:

а) $\cos 24^0 \cdot \cos 31^0 - \sin 24^0 \cdot \sin 31^0 - \cos 55^0$; б) $\cos 107^0 \cdot \cos 17^0 + \sin 107^0 \cdot \sin 17^0$.

78. Ду гурӯҳи сайёҳони ҷавон аз Душанбе ва Тагоб, ки масофаи байни онҳо 30 км аст, ба пешвози ҳамдигар ба роҳ баромаданд. Агар гурӯҳи якум нисбат ба гурӯҳи дуюм 2 соат пештар ба роҳ бароянд, он гоҳ онҳо баъд аз 2,5 соати ба роҳ баромадани гурӯҳи дуюм вомехӯранд. Агар гурӯҳи дуюм нисбат ба гурӯҳи якум 2 соат пештар ба роҳ бароянд, он гоҳ вохурӣ баъд аз 3 соати ба роҳ баромадани гурӯҳи якум ба амал меояд. Гурӯҳи сайёҳон бо кадом суръат ҳаракат мекунанд?

7. Формулаҳои ба ҳосили зарб табдил додани сумма ва фарқи функсияҳои тригонометрӣ

Формулаҳои табдил додани ҳосили зарби функсияҳои тригонометрии якхела ба сумма ё фарқ имконият медиҳад, ки сумма ё фарқи онҳо ба намуди ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ ифода карда шавад.

Суммаи косинуси ду кунҷ ба дучандаи ҳосили зарби косинуси нимсумма ва косинуси нимфарқи кунҷҳои онҳо баробар аст:

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Исбот. Барои исбот тарафи рости баробарии охиронро ба сумма табдил додан кифоя аст

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2}=\cos\alpha+\cos\beta.$$

Се формулаи зерин низ бо ҳамин усул исбот карда мешавад:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin}$$

Суммаи синуси ду кунҷ ба ҳосили зарби дучанди синуси нимсумма ва косинуси нимфарқи кунҷҳои онҳо баробар аст.

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Фарқи косинуси ду кунҷ ба минуси ҳосили зарби дучанди синуси нимсумма ба синуси нимфарқи кунҷҳои онҳо баробар аст.

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Фарқи синуси ду кунҷ ба ҳосили зарби дучанди косинуси нимсуммаи ба синуси нимфарқи кунҷҳои онҳо баробар аст. Ин чунин формулаҳои зерин ҷой доранд:

$$\boxed{tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} \qquad \boxed{tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

агар $\cos\alpha \neq 0$ ва $\cos\beta \neq 0$ бошад $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2},\ \ \beta \neq \frac{\pi}{2}\right)$.

Мисоли 1. $\cos 40^o + \cos 50^o$ - ро ба ҳосили зарб табдил медиҳем.

Ҳал. $\cos 40^o + \cos 50^o = 2\cos\frac{40^o + 50^o}{2}\cos\frac{50^o - 40^o}{2} =$

$$= 2\cos 45^o \cdot \cos 5^o = \sqrt{2}\cdot\cos 5^o.$$

Мисоли 2. $\sin 20^o + \cos 30^o$ - ро ба намуди ҳосили зарб менависем.

Ҳал. $\sin 20^o + \cos 30^o = \sin 20^o + \sin 60^o =$

$$= 2\sin\frac{60^o + 20^o}{2}\cos\frac{60^o - 20^o}{2} = 2\sin 40^o\cdot\cos 20^o.$$

Мисоли 3. $tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\pi}{6}$ - ро ба ҳосили зарб табдил медиҳем.

Ҳал. $tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sin\frac{5}{12}\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}\sin\frac{5\pi}{12}}{3}.$

?

1. Формулаҳои ба ҳосили зарб табдил додани сумма ва фарқи синусҳо, сумма ва фарқи косинусҳоро нависед ва онҳоро исбот кунед.
2. Сумма ва фарқи тангенсҳои ду кунҷро дар кадом ҳолат ба ҳосили зарб табдил додан мумкин аст?

79. Ифодаро ба ҳосили зарб табдил диҳед:

а) $\sin 50^o + \sin 20^o$; б) $\sin 18^o - \sin 10^o$; в) $\cos 26^o + \cos 14^o$;

г) $\cos 7^o - \cos 19^o$; д) $\sin 36^o - \cos 16^o$; е) $\sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{12}$.

80. Ба ҳосили зарб табдил диҳед:

а) $tg\frac{4\pi}{5} - tg\frac{3\pi}{5}$; б) $tg\frac{\pi}{12} + tg\frac{\pi}{3}$; в) $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$;

г) $\cos 4\alpha - \cos 6\alpha$; д) $tg3\alpha - tg\alpha$; е) $tg2\alpha + tg3\alpha$.

81. Ифодаҳоро ба ҳосили зарб табдил дода, натиҷаҳоро содда намоед:

а) $\sin 75^o + \sin 15^o$; б) $\sin 78^o - \sin 42^o$; в) $\cos 152^o + \cos 28^o$;

г) $\cos 45^o - \cos 12^o$; д) $\dfrac{\sin 25^o + \sin 15^o}{\sin 25^o - \sin 15^o}$; е) $\sin 20^o + \cos 40^o$.

ж) $\cos 20^o - \sin 20^o$; з) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

82. Ба ҳосили зарб табдил диҳед ва содда кунед:

а) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$; б) $\sin\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{12}$; в) $\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{18}$;

г) $\sin 4\alpha + \sin 2\beta$; д) $\sin(40^0 + \alpha) - \sin(40^0 - \alpha)$;

е) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$.

83. Айниятро исбот кунед:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = tg\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; б) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

в) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Машқҳо барои такрор

84. Ҳосили зарбро ба сумма табдил диҳед:

а) $\sin 20^o \cdot \cos 10^o$; б) $\cos 15^o \cdot \sin 5^o$;

в) $\sin 50^o \cdot \sin 15^o$; г) $\cos 43^o \cdot \cos 45^o$.

85. Қимати ифодаро ёбед:

а) $2\sin\pi - 2\cos\frac{3\pi}{2} + 3tg\frac{\pi}{4} - ctg\frac{\pi}{2}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\frac{\pi}{3} - tg\frac{\pi}{6} + ctg\frac{\pi}{3}$.

86. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $x^2 - 2x - 48 > 0$; б) $3x^2 - 4x - 15 > 0$

87. Асоси секунҷа аз баландиаш 5 см зиёд буда, масоҳаташ ба 42 см² баробар аст. Асос ва баландии секунҷаро ёбед.

§2. Табдилдиҳии айниятии ифодаҳои тригонометрӣ Хосиятҳои функсияҳои тригонометрӣ

8. Формулаҳое, ки функсияҳои тригонометриро ба воситаи тангенси нисфи кунҷ ифода мекунанд

Дар алгебраи синфи 9 айниятҳои асосии тригонометрии $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ - ро ба табдилдиҳии ифодаҳои тригонометрӣ истифода бурда будем (ниг. алгебра 9. §2 п. 31). Ҳоло табдилдиҳиҳои нисбатан мураккабтарро меомӯзем. Функсияҳои тригонометрии синус, косинус, тангенс ва котангенс ба мо имконият медиҳанд, ки як ифодаро ба тарзҳои гуногун нависем. Савол ба миён меояд, ки оё мумкин нест, ки ягон функсияро гирифта, функсияҳои боқимондаро ба воситаи он ифода намоем. Агар ба сифати ин гуна функсия синусро гирем, он гоҳ дар бисёр формулаҳо решаи квадратӣ ҳосил мешавад. Масалан агар $\sin 2\alpha$ - ро ба воситаи $\sin\alpha$ ифода намоем, он гоҳ ҳосил мекунем:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\sin\alpha\left(\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right) = \pm 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ Ингуна формулаҳо барои истифода бурдан ноқулай мебошанд. Агар ба сифати ин гуна функсия $tg\dfrac{\alpha}{2}$ - ро гирем, он гоҳ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ ба тaври ратсионалӣ, яъне бе решаи квадратӣ ба воситаи он ифода карда метавонанд. Ҳоло ин формулаҳоро меорем:

$$\sin\alpha = \sin 2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2},\quad \cos\alpha = \cos 2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Адади 1-ро ба намуди $1 = \sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ ифода намуда формулаҳои болоиро ин тавр менависем:

$$\sin\alpha = \sin 2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha = \cos 2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Сурат ва махраҷи ҳар кадоме аз касрҳоро ба $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \neq 0$ тақсим карда, баъд $\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ - ро ба $tg^2\dfrac{\alpha}{2}$ ва $\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ - ро ба $tg\dfrac{\alpha}{2}$ иваз намуда, ба ифодаҳои зерин соҳиб мешавем:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};}\quad \boxed{\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};}\quad \boxed{tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}};}\quad \boxed{ctg\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\alpha}}$$

Ин формулаҳоро истифода бурда, функсияи $y = a\sin\alpha + b\cos\alpha + c$ -ро ба таври ратсионалӣ ба воситаи $tg\frac{\alpha}{2}$ ифода мекунем.

Мисоли 1. $2\sin\alpha + 3\cos\alpha - 1$ - ро ба воситаи $tg\frac{\alpha}{2}$ - ифода мекунем.

Ҳал. $2\sin\alpha + 3\cos\alpha - 1 = 2\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} + 3 \cdot 3\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} - 1 =$

$$= \frac{4tg\frac{\alpha}{2} + 3 - tg^2\frac{\alpha}{2} - 1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{-4tg^2\frac{\alpha}{2} + 4tg\frac{\alpha}{2} + \alpha}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Мисоли 2. $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot ctg 2\alpha$ - ро ҳангоми $tg2\alpha = 4$ будан ҳисоб мекунем.

Ҳал. $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot ctg2\alpha = \frac{2tg2\alpha}{1+tg^2 2\alpha} + \frac{1-tg^2 2\alpha}{1+tg^2 2\alpha} \cdot \frac{1}{tg2\alpha} =$

$$= \frac{2 \cdot 4}{1+16} + \frac{1-16}{1+16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{17} - \frac{15}{17} \cdot \frac{1}{4} = \frac{32-15}{17 \cdot 4} = \frac{17}{17 \cdot 4} = \frac{1}{4}.$$

Мисоли 3. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ - ро ҳангоми $tg\frac{\alpha}{2} = 0,5$ будан ҳисоб мекунем.

Ҳал. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha) = -(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \cdot$

$\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\cos 2\alpha$. $\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$; $\cos 2\alpha =$

$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$$

Ҳамин тариқ, $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\frac{7}{25}$ мебошад.

?

1. Формулаҳое, ки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ - ро ба воситаи тангенси нисфи кунҷ ифода мекунанд, нависед.
2. Ин формулаҳо дар кадом ҳолат маъно доранд?

88. Ҳисоб кунед:

а) $\sin 4\alpha$, агар $tg2\alpha = 3$; б) $\cos 4\alpha$, агар $tg2\alpha = 8$;

в) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$, агар $tg\frac{\alpha}{2} = 0,5$ бошад.

89. Ёбед:

а) $\cos\alpha + \sin\alpha$, агар $tg\frac{\alpha}{2} = 3$; б) $\sin\alpha - \cos\alpha$, агар $tg\frac{\alpha}{2} = 3$

бошад.

90. Кадоме аз инҳо калонанд:

$tg2\alpha$ ё $2tg\alpha$, ки дар ин ҷо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ буда, $\alpha \neq 45^\circ$ аст?

91. Дода шуда аст: $tg\alpha = -0{,}75$, $tg\beta = 2{,}4$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Ёбед: а) $\sin(\alpha - 2\beta)$; б) $\cos(\alpha + 2\beta)$ - ро.

92. $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ - ро ҳисоб кунед, агар $tg\frac{\alpha}{2} = -2{,}4$ ва $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ$ бошад.

Машқҳо барои такрор

93. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\dfrac{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}$; б) $\dfrac{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 110^\circ}$.

94. $\sin 2\alpha$ - ро ҳисоб кунед, агар $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад.

95. Суммаи ду адад ба 20 ва ҳосили зарбашон ба 96 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

9. Функсияҳои тригонометрии аргументи ададӣ ва хосиятҳои онҳо

Дар мавзӯҳои гузашта функсияҳои тригонометриро омӯхтем, ки аргументи онҳо аз кунҷ ва камонҳо иборат буданд. Акнун функсияҳои тригонометрии аргументи ададиро дида мебароем. Масалан, агар мо дар бораи функсияи квадратии $y = ax^2$ сухан ронем, он гоҳ x танҳо ададро ифода мекунад.

Масалан, он адад дар қонуни Ҷоуль-Лентс $(Q = JR^2)$ муқовимати занҷири электрониро ифода мекунад.

Таъриф. ***Синуси адади х гуфта, адади ба синуси кунҷи х радиан баробарро меноманд. Косинуси адади х гуфта ба косинуси кунҷи х радиан баробарро меноманд.***

Айнан ҳамин тавр дигар функсияҳои тригонометрии аргументашон ададӣ муайян карда мешавад. Масалан $\cos 3$ (яъне косинуси адади 3) косинуси кунҷест, ки бо 3 радиан чен карда мешавад, $\sin 10$ синуси кунҷест, ки бо даҳ радиан чен карда мешавад, $\sin 0{,}5$ синуси кунҷеро ифода мекунад, ки вай ба 0,5 радиан баробар аст, $\cos 1{,}2$ косинуси кунҷеро ифода мекунад, ки он ба 1,2 радиан баробар аст, $tg(\cos\pi) = tg(-1) = -tg1$, ки дар ин ҷо $tg1$ тангенси кунҷеро ифода мекунад, ки он ба 1 радиан баробар аст.

Дар ин ҷо хосиятҳои функсияҳои тригонометрии аргументи ададиро меомӯзем.

Чи тавре, ки медонем, y функсияи аргументи x мебошад, ки ин чунин маъно дорад: қонуни мувофиқати байни тағйирёбандаҳо мавҷуд аст, ки аз рӯи он ба ҳар гуна қимати аргументи x ягон қимати муайяни функсияи y мувофиқ меояд. Ин мувофиқакуниро мо рамзан $y = f(x)$ менависем.

Маҷмӯи ҳамаи қиматҳои аргумент, ки барояшон функсия дорои маъно аст, соҳаи муайянии функсия номида мешавад.

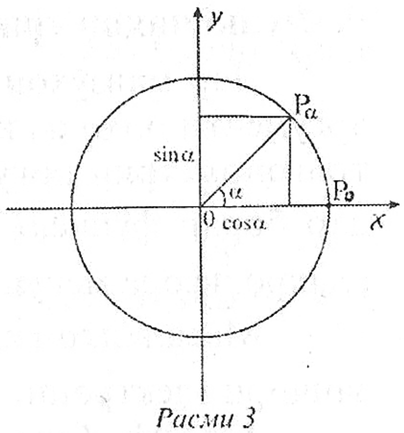
Функсияҳои тригонометрӣ соҳаи зерини муайянӣ доранд:

а) Ҳар яке аз функсияҳои $\cos\alpha$ ва $\sin\alpha$ қимати муайян доранд. Дар ҳақиқат, дар давра аз нуқтаи аввалаи $P_0(1;0)$ сар карда, камони ба адади дилхоҳи α ченшавандаро кашидан мумкин аст. Координатаҳои охири вай x ва y қимати $\cos\alpha$ ва $\sin\alpha$ мебошанд. (Расми 3).

Инак, ***маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ соҳаи муайянии функсияҳои*** $\cos\alpha$ ***ва*** $\sin\alpha$ ***аст.***

б) Функсияи $tg\alpha$ барои камони дилхоҳ ғайр аз камонҳое, ки бо ададҳои $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (дар ин ҷо k - адади бутун) чен карда мешаванд, қимати муайян дорад. Камонҳои $\frac{\pi}{2} + k\pi$ тангенс надоранд. Ин аз таърифи тангенс ҳамчун нисбати синус бар косинус бармеояд.

Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқие, ки ба $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ***баробар нестанд, яъне фосилаҳои беохир бисёри*** $\ldots, \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}\right), \ldots \left(3\frac{\pi}{2}; 5\frac{\pi}{2}\right),$ ***соҳаи муайянии тангенс мебошанд.***



Расми 3

в) Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқии ба $k\pi$ ***баробар набуда, яъне фосилаҳои беохир бисёри*** $\ldots.\ (-\pi;0), (0;\pi), (\pi;2\pi)\ldots,$ ***соҳаи муайянии функсияи*** $ctg\alpha$ ***мебошад.***

(камонҳои бо $k\pi$ ченшаванда котангенс надоранд).

Хосиятҳои маҳдудӣ ва номаҳдудии функсияҳои тригонометриро муоина менамоем.

Агар чунин адади мусбати М мавҷуд бошад, ки барои ҳамаи қиматҳои аргумент бузургии мутлақи функсия аз адади М калон набошад, функсия маҳдуд номида мешавад. Агар бузургии мутлақӣ функсия ҳаргуна қимати калон гирифта тавонад, он гоҳ вай номаҳдуд номида мешавад.

Функсияҳои $\cos\alpha$ **ва** $\sin\alpha$ **маҳдуд мебошанд, чунки бузургии мутлақи қиматҳои онҳо аз 1 калон шуда наметавонанд:**

$$|\cos\alpha| \le 1, \quad |\sin\alpha| \le 1 .$$

Функсияҳои $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ номаҳдуданд, чунки ҳар яки онҳо қимати дилхоҳи ҳақиқӣ гирифта метавонанд.

Ин тасдиқот аз айниятҳои асосии тригонометрии

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ ва } ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{бармеояд.}$$

Мисоли 1. Кадоме аз ин ададҳо мусбат ва кадомашон манфианд:

$$\sin 67^o;\ \cos 267^o,\ \cos 375^o,\ \sin(-68^o);\ \cos(-68^o);\ \sin 2\,.$$

Ҳал. $\sin 67^o > 0$, чунки кунҷи 67^o дар чоряки якум ҷойгир аст. Дар ин маврид синус мусбат хоҳад буд. $\cos 267^o < 0$ чунки 267^o дар чоряки сеюм ҷойгир аст, ки дар он ҷо косинус манфӣ мебошад.

$\cos 375^o > 0$, чунки кунҷи 375^o дар чоряки якум ҷойгир аст, дар ин чоряк косинус мусбат аст.

$\sin(-68^o) < 0$, чунки -68^o дар чоряки чорум ҷойгир аст, дар ин ҷо синус манфӣ аст.

$\cos(-68^o) > 0$, чунки -68^o дар чоряки чорум ҷойгир мебошад, дар ин ҷо косинус мусбат аст.

$\sin 2 > 0$, чунки кунҷе, ки бузургиаш ба 2 радиан баробар аст, дар чоряки дуюм ҷойгир мебошад, ки дар ин ҷо синус мусбат аст.

$$\sin 2 = \sin\frac{2\cdot 180^o}{\pi} = \sin\frac{360^o}{3{,}14} = \sin 115^o 3' > 0\,.$$

Мисоли 2. Аломати ифодаҳоро муайян мекунем:

а) $\sin 3$; б) $\cos 6$ в) $tg 9$; г) $ctg 12$; д) $\cos(-5)$;

е) $tg(-10)$; ж) $\sin(-15)$; з) $ctg(-20)$.

Ҳал. $\sin 3 > 0$ зеро кунҷе, ки бузургиаш ба 3 радиан баробар аст, дар чоряки дуюм ҷойгир мебошад. $\cos 6 > 0$, зеро кунҷе, ки бузургиаш ба 6 радиан баробар аст, дар чоряки чорум ҷойгир мебошад.

$tg 9 < 0$ зеро кунҷе, ки бузургиаш ба 9 радиан баробар аст, дар чоряки чорум ҷойгир мебошад.

$ctg 12 < 0$ чунки кунҷе, ки бузургиаш ба 12 радиан баробар аст, кунҷи чоряки чорум мебошад.

Айнан ба монанди боло муҳокима ронда, ҳосил мекунем

$$\cos(-5) > 0;\ tg(-10) < 0;\ \sin(-15) < 0;\ ctg(-20) < 0\,.$$

Мисоли 3. Ҳангоми маълум будани $\sin\alpha = -\frac{1}{8}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ қимати $\cos\alpha$ - ро меёбем.

Ҳал. $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{64}} = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$.

Аломати пеши решаро муайян мекунем. Аз рӯи шарт $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

(яъне ин кунҷ дар чоряки сеюм ҷойгир аст), ки косинус дар он манфӣ мебошад, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{63}}{8}$ хоҳад шуд.

?

1. Ба синус ва косинуси адади x таъриф диҳед.
2. Соҳаи муайянии функсияро таъриф диҳед.
3. Соҳаи муайянии функсияҳои $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ - ро баён кунед.
4. Чигуна функсияро маҳдуд меноманд?
5. Оё функсияҳои $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ маҳдуданд?

96. Аломати ифодаҳоро муайян кунед:

а) $\sin 70^o \cdot \cos 70^o \cdot tg100^o$; б) $\sin 130^o \cdot \cos(-15^o) \cdot tg(-100^o)$;

в) $\sin 1 \cdot \cos 3 \cdot tg7$; г) $\sin 8 \cdot \cos 0{,}2 \cdot tg(-6{,}2)$.

97. Агар қимати α ба:

а) $\frac{3}{7}\pi$; б) $\frac{8}{9}\pi$; в) $\frac{12}{7}\pi$; г) $-\frac{7}{9}\pi$,

баробар бошад, аломати қиматҳои $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ - ро муайян кунед.

98. Магар синус ва косинуси як адад мувофиқан ба ададҳои зер баробар шуда метавонанд:

а) $-\frac{7}{25}$ ва $\frac{24}{25}$; б) 0,4 ва 0,7; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ва $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ва $\frac{1}{\sqrt{5}}$?

99. Магар тангенс ва котангенс як адад мувофиқан ба ададҳои зер баробар шуда метавонанд:

а) $-\frac{3}{5}$ ва $-\frac{5}{3}$; б) $(\sqrt{3}-2)$ ва $(\sqrt{3}+2)$;

в) 2,4 ва $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ва $\frac{2\sqrt{5}}{5}$?

100. Аз рӯи қимати маълуми яке аз функсияҳои тригонометрӣ ва фосилае, ки дар он α воқеъ аст. Қиматҳои се функсияи асосии тригонометрии дигарро ёбед:

а) $\sin\alpha = -0{,}8$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; г) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

101. Қимати ифодаҳои зеринро муқоиса кунед:

$\sin 0^o$; $\cos 90^o$; $\cos 270^o$; $\sin 180^o$; $\sin 270^o$; $\cos 180^o$.

Машқҳо барои такрор

102. Бе сохтан, координатаҳои нуқтаҳои буриши:

а) параболаи $y = x^2 - 3x + 3$ ва хати рости $2x - y - 1 = 0$ - ро ёбед;

б) параболаи $y = 2x^2 - x + 1$ ва хати рости $x = 1{,}5$ - ро ёбед;

в) давраи $x^2 + y^2 = 100$ ва хати рости $x + y = 14$ - ро ёбед;

103. Экстремум ва экстремалҳои функсияи $y = -x^2 + 6x - 8$ - ро ёбед.

104. Як адад аз адади дигар 7 воҳид калон аст ва ҳосили зарбашон ба – 12 баробар мебошад. Ин ададҳоро ёбед.

105. Ҳисоб кунед:

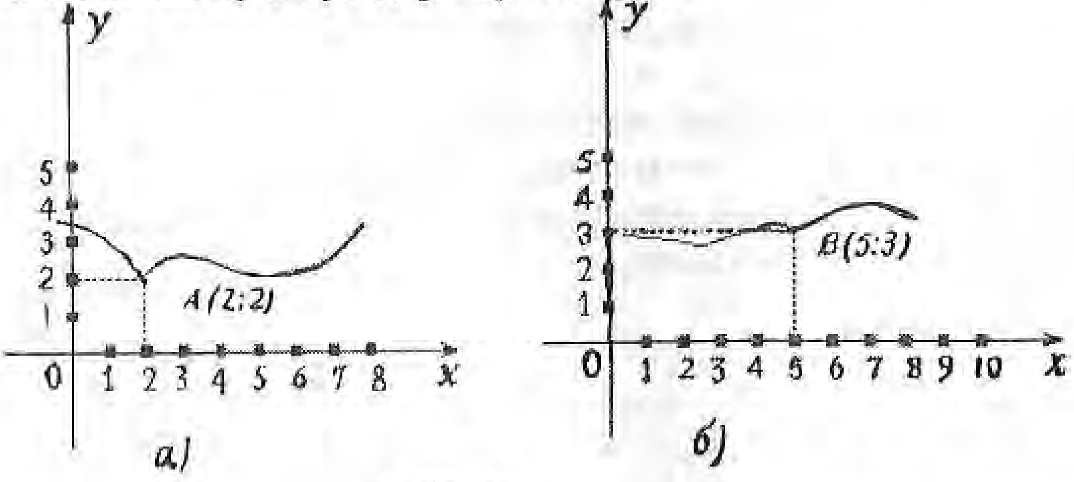
а) $\cos 0{,}3\pi \sin 0{,}2\pi + \sin 0{,}3\pi \cdot \cos 0{,}2\pi$;

б) $\cos 35^\circ \sin 65^\circ - \sin 35^\circ \cdot \cos 65^\circ$.

10. Экстремуми функсияҳо

Мо дар алгебраи синфи 9 экстремуми функсияҳои ихтиёриро истисно намуда, фақат экстремуми функсияҳои квадратиро омӯхта будем (ниг. ба алгебра 9 п.8), дар он ҷо қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро қиматҳои экстремалӣ ё экстремуми он номида будем. Нуқтаҳое, ки дар онҳо ин қиматҳо қабул карда мешаванд, экстремалӣ ё экстремал номида шуда буд.

Ҳангоми тадқиқ кардани функсияи ихтиёрӣ аз мафҳуми «атроф» истифода мебаранд. Атрофи нуқтаи $x=a$ гуфта фосилаи хурдеро меноманд, ки ин нуқтаро дар бар мегирад.



Расми 4

Масалан, фосилаи (1;4) яке аз атрофҳои 3, фосилаи (-3,3; -2] атрофи нуқтаи –3 мебошад.

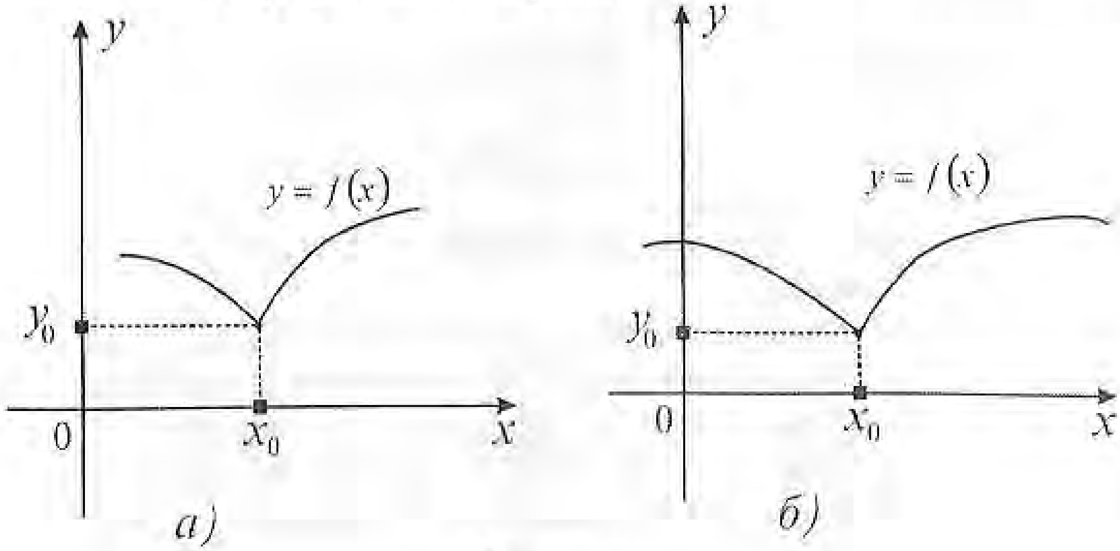
Графики дар расми 4а, б тасвиршударо омӯхта, якчанд нуқтаҳои ҷолиби диққатро ёфтан мумкин аст. Онҳо нуқтаҳое мебошанд, ки камшавӣ ва афзуншавии функсияро аз ҳамдигар ҷудо мекунанд.

Ин нуқтаҳо нуқтаҳои A(2;2); B(5;3) (расми 4а,б) мебошанд. Онҳоро мувофиқан нуқтаҳои минимум, максимум ё нуқтаҳои экстремалии функсия меноманд.

Ҳангоми сохтани графики функсияи мушаххас чунин нуқтаҳоро пешакӣ меёбем. Масалан, барои функсияи $\sin x$ ин нуқтаҳо $\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (k- адади ихтиёрии бутун) мебошад. Барои муайянӣ $x_0=\frac{\pi}{2}$ - ро мегирем. Ин нуқта нӯги тарафи ростии яке аз фосилаҳои афзуншавии синус мебошад ва аз ҳамин сабаб агар $-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}$ бошад, $1=\sin x_0>\sin x$ аст. Ғайр аз ин, $x_0=\frac{\pi}{2}$ нӯги тарафи чапи фосилаи камшавӣ мебошад ва пас, ҳангоми $\frac{\pi}{2}<x\le\frac{3\pi}{2}$ будан $\sin x<\sin_0$ аст. Инак, барои ҳар гуна x, ки дар атрофи $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$ - и нуқтаи $x_0=\frac{\pi}{2}$ воқеъ аст, нобаробарии $\sin\frac{\pi}{2}>\sin x$ ҷой дорад; бинобар ин $x_0=\frac{\pi}{2}$ нуқтаи **максимуми функсияи синус** мебошад.

Баръакс, дар нуқтаи $-\frac{\pi}{2}$ камшавӣ бо афзуншавӣ иваз мешавад (чаптари $-\frac{\pi}{2}$ функсия кам мешавад) ва росттараш меафзояд). Айнан ҳамин тавр муҳокима ронда, ҳосил мекунем, ки дар ягон атрофи нуқтаи $x=-\frac{\pi}{2}$, $\sin x>\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ мебошад ва бинобар ҳамин $x=-\frac{\pi}{2}$ нуқтаи **экстремали минимуми функсияи синус** мебошад.

Қиматҳои максимум ва минимуми функсияҳоро дар якҷоягӣ экстремуми (ё қимати экстремалӣ) функсия меноманд. Таърифи дақиқи нуқтаҳои экстремумро баён мекунем.

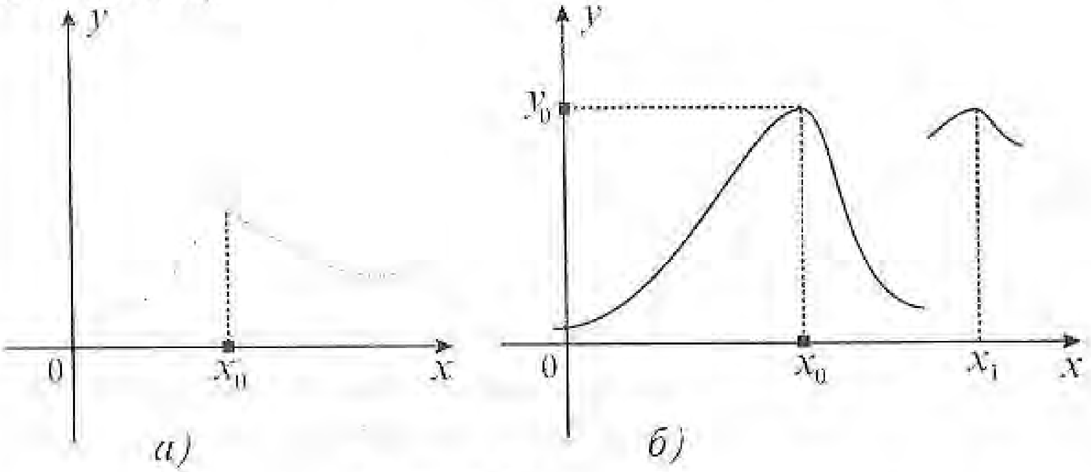


Расми 5

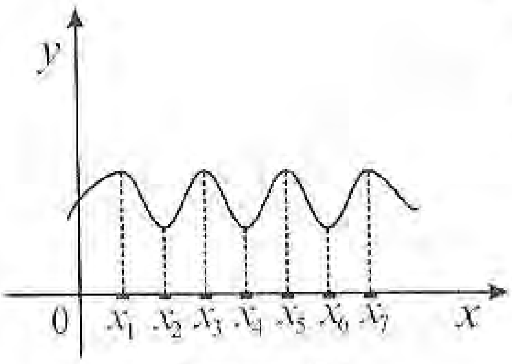
Таърифи 1. ***Нуқтаи x_0 барои функсияи $y = f(x)$ нуқтаи минимум номида мешавад, агар барои ҳамаи x – ҳои ягон атрофи нуқтаи x_0 нобаробарии $f(x) \geq f(x_0)$ ҷой дошта бошад. (расми 5 а, б)***

Таърифи 2. ***Нуқтаи x_0 барои функсияи $y = f(x)$ нуқтаи максимум номида мешавад, агар барои ҳамаи x – ҳои ягон атрофи нуқтаи x_0 нобаробарии $f(x) \leq f(x_0)$ ҷой дошта бошад. (расми 6 а, б)***

Мувофиқи таъриф қимати функсия дар нуқтаи максимум (x_0) байни нуқтаҳои ягон атрофи ин нуқта калонтарин мебошад (расми 6 а,б ва расми 7 нуқтаҳои x_1, x_3, x_5, x_7). Қимати функсия дар нуқтаи минимум дар ягон атрофи ин нуқта хурдтарин мебошад (расми 7 - нуқтаҳои x_2, x_4, x_6).



Расми 6



Расми 7

Нуқтаи максимумро бо Xmax ва нуқтаи минимумро бо Xmin ишорат мекунанд. Қиматҳои функсияро дар ин нуқтаҳо мувофиқан бо max ва min ишорат мекунанд. max(максимум) ва min (минимум) аз калимаҳои лотинии maxsimum ва minimum гирифта шуда, маънои онҳо мувофиқан аз ҳама калонтарин ва аз ҳама хурдтарин мебошанд. Максимум ва минимуми функсияро дар якҷоягӣ экстремум меноманд.

Акнун ба ёфтани фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ, нуқтаҳои максимум ва минимум, максимум ва минимумҳои функсияҳои мушаххас мисолҳо меорем.

Мисоли 1. Экстремуми $y = \sin\frac{x}{2}$ – ро дар фосилаи $[-\pi;3\pi]$ меёбем.

Ҳал. Функсияро дар порчаи $[-\pi;3\pi]$ меомӯзем.

а) Функсия дар порчаи $[-\pi;\pi]$ аз –1 то 1 меафзояд, чунки ба қимати хурди аргумент, қимати хурди функсия мувофиқ меояд ва дар порчаи $[\pi;3\pi]$ аз $+1$ то -1 кам мешавад, чунки ба қимати хурди аргумент қимати калони функсия мувофиқ меояд.

б) Дар нуқтаи $x=\pi$ қимати калонтарини функсия ба 1 баробар аст ва дар нуқтаи $x=3\pi$ функсия ба қимати хурдтарини -1 доро мешавад.

в) Дар нуқтаи $x=\pi$ афзуншавӣ ба камшавӣ иваз мешавад, бинобар ин $x=\pi$ нуқтаи максимуми функсия мебошад ва баръакс, дар нуқтаи $x=3\pi$ камшавӣ ба афзуншавӣ иваз мешавад (то чаптари функсия кам мешавад ва баъди росттараш меафзояд) бинобар ин $x=3\pi$ нуқтаи минимуми функсия мебошад, пас

$$y_{max}=y(\pi)=\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad y_{min}=y(3\pi)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1.$$

Ҷавоб. Дар $[-\pi;\pi]$ меафзояд; дар $[\pi;3\pi]$ кам мешавад;

$$y_{max}=y(\pi)=1;\quad y_{min}=y(3\pi)=-1$$

Мисоли 2. Экстремуми $y=3\cos\frac{x}{2}$ - ро дар фосилаи $[-\pi;3\pi]$ меёбем.

Ҳал. Функсияро дар порчаи $[-\pi;3\pi]$ меомӯзем.

а) Функсия дар порчаи $[-\pi;0]$ аз 0 то 3 меафзояд, зеро ба қимати хурди аргумент, қимати хурди функсия мувофиқ меояд ва дар порчаи $[0;2\pi]$ аз 3 то -3 кам мешавад, зеро дар фосила ба қимати калони аргумент қимати хурди функсия мувофиқ меояд. Дар порчаи $[2\pi;3\pi]$ функсия аз -3 то 0 меафзояд.

б) Дар нуқтаи $x=0$ қимати калонтарини функсия ба 3 баробар буда дар нуқтаи $x=2\pi$ қимати хурдтарин ба -3 баробар аст.

в) Дар атрофи нуқтаи $x=0$ афзуншавӣ ба камшавӣ иваз мешавад, бинобар ин дар нуқтаи $x=0$ функсия ба максимум доро буда, максимумаш ба 3 баробар аст. Дар нуқтаи $x=2\pi$ функсия қимати минимум қабул карда, минимумаш -3 мебошад, чунки дар атрофи нуқтаи $x=2\pi$ камшавии функсия ба афзуншавӣ иваз мешавад, пас $y_{max}=y(0)=3,\ y_{min}=y(2\pi)=-3$.

Ҷавоб. Дар $[-\pi;0]$ ва $[2\pi;3\pi]$ меафзояд, дар $[0;2\pi]$ кам мешавад;

$$y_{max}=y(0)=3;\quad y_{min}=y(2\pi)=-3.$$

?

1. Таърифи функсияҳои синус ва косинусро диҳед.
2. Атрофи нуқта чист?
3. Таърифи афзуншавӣ ва камшавии функсияро баён намоед.
4. Таърифи нуқтаҳои максимум ва минимуми функсияро диҳед.

Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ, нуқтаҳои максимум ва минимум, қиматҳои максимум ва минимумҳои функсияро ёбед (106-108).

106. а) $y=3\sin x$; б) $y=0{,}5\sin x$; в) $y=2\cos x+1$; г) $y=0{,}5\sin x-1{,}5$.

107. а) $y=-\sin 2x$; б) $y=\sin 2x$; в) $y=1-2\sin 2x$; г) $y=1-0{,}5\sin 2x$.

108. а) $y=\cos\frac{x}{2}$; б) $y=2\cos\frac{x}{2}$; в) $y=-2\cos x+1$; г) $y=2\cos x+1$.

Машқҳо барои такрор

109. Ифодаро пешакӣ содда карда қиматашро ёбед:

а) $\dfrac{\cos 68^\circ-\cos 22^\circ}{\sin 68^\circ-\sin 22^\circ}$; б) $\dfrac{\sin 130^\circ+\sin 110^\circ}{\cos 130^\circ+\cos 110^\circ}$.

110. Ифодаро содда кунед:

а) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{b}{b-a}$; б) $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$.

111. Пайдарпайи $\{C_n\}$ прогрессияи арифметикӣ мебошад. Агар $C_2=-19$; $C_5=-11{,}5$ бошад фарқ ва аъзои чоруми онро ёбед.

112. Фарқи дарозии катетҳои секунҷаи росткунҷа ба 5 дм баробар аст. Агар дарозии катети калонро 4 дм зиёд ва дарозии катети хурдро 8 дм кам кунем, он гоҳ дарозии гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи ҳосилшуда ба дарозии гипотенузаи секунҷаи додашуда баробар мешавад. Дарозии катетҳои секунҷаи додашударо ёбед.

113. Решаҳои муодилаи квадратӣ ба $x_1=3-\sqrt{2}$, $x_2=3+\sqrt{2}$ баробаранд. Ин муодилаи квадратиро тартиб диҳед.

11. Функсияҳои даврӣ

Бисёр ҳодисаҳое, ки бо онҳо дар амалия дучор мешавем, хусусияти такроршавандагӣ доранд. Масалан, мавқеи байни ҳамдигарии Офтоб ва Замин баъди як сол такрор меёбад. Мавқеи раққосак дар лаҳзаи вақте, ки бо бузургии даври лаппиши он фарқ мекунад, якхел аст. Чунин просесҳоро даврӣ ва функсияҳоеро, ки онҳоро тасвир менамоянд, функсияҳои даврӣ меноманд.

Функсияи $y=f(x)$ даврӣ номида мешавад, агар чунин як адади давр ном доштаи $T\neq 0$ мавҷуд бошад, ки қимати функсия дар вақти ба қимати дилхоҳи аргументи он илова кардани ин адад тағйир наёбад, яъне барои қимати дилхоҳи x $f(x+T)=f(x)$ ичро гардад.

Функсияҳои асосии тригонометрии $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ даврӣ мебошанд. Масалан, барои адади дилхоҳи x ва адади бутуни ихтиёрии k баробарии $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ ҷой дорад. Аз ин ҷо бармеояд, ки $T=2\pi k$ даври функсияи синус аст ($k\neq 0$ - адади бутуни ихтиёрӣ).

Азбаски синус ва косинус дар тамоми тири ададӣ муайян буда, барои x- и дилхоҳ $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ аст, пас, синус ва косинус функсияҳои даврии даври хурдтаринашон 2π мебошанд. Дар ҳақиқат, соҳаи муайянии ин функсияҳо ҳамроҳи ҳар як x ададҳи $x+\pi$ ва $x-\pi$-ро дарбар мегиранд ва баробариҳои $tg(x+\pi)=tgx$, $ctg(x+\pi)=ctgx$ дурустанд.

Гуфтаҳои болоро ба намуди се ҷумлаи зерин ҷамъбаст мекунем:

1) Функсияҳои тригонометрӣ функсияҳои даврӣ мебошанд ва даври умумиашон 2π аст.
2) Хурдтарин даври мусбати функсияҳои $\cos\alpha$ ва $\sin\alpha$ ба 2π баробар аст.
3) Хурдтарин даври мусбати функсияҳои $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ ба π баробар аст.

Исбот. Қиматҳои дилхоҳи тригонометрӣ аз аргументҳои α ва $\alpha+2k\pi$ (дар ин ҷо k – адади дилхоҳи бутун) якхелаанд:

$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha+\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha\ ,$$

бинобар он ҳар яке ададҳои $\pm2\pi$; $\pm4\pi$; $\pm6\pi$ ва ғайра даври умумии чор функсияи тригонометрӣ мебошанд.

Масалан, 2π даври умумии онҳо.

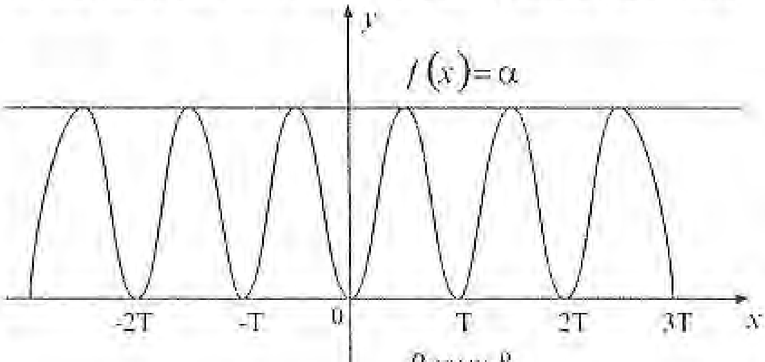
Барои функсияи $\cos\alpha$ адади 2π даври хурдтарини мусбат мебошад. Дар ҳақиқат, агар Т даври дилхоҳи косинус бошад, он гоҳ барои қимати дилхоҳи α ифодаи $\cos(\alpha+T)$ ҷой дорад $\alpha=0$ фарз карда, меёбем, ки $\cos T=\cos 0=1$ аст. Вале α адади хурдтарини мусбати Т, ки барояш $\cos x=1$ ба 2π баробар аст. Ба монанди ҳамин исбот карда мешавад, ки 2π даври хурдтарини мусбати синус аст. Барои ин дар айнияти $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ гузошта $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ - ро ҳосил мекунем. Аз тарафи дигар мувофиқи формулаҳои мувофиқоварӣ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)=\cos T$ аст. Пас, $\cos T=1$ мебошад. Вале дар ҳолати $0<T<2\pi$ будан баробарии $\cos T=1$ ҷой надорад.

Даври функсияи $tg\alpha$ адади π мебошад, зеро барои қимати дилхоҳи α $tg(\alpha+\pi)=tg\alpha$, ки дар ин ҷо $\alpha\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ ҳисоб карда мешавад. Адади π даври хурдтарини мусбати тангенс мебошад. Дар ҳақиқат, агар адади мусбати аз π хурдтарини Т даври тангенс мешуд, он гоҳ дар айнияти $tg(\alpha+T)=tg\alpha$, $\alpha=0$ фарз карда мо $tgT=0$ ҳосил менамудем, ки ин дар ҳолати $0<T<\pi$ имконнопазир аст. Ба монанди ҳамин исбот карда мешавад, ки адади π хурдтарин даври мусбати котангенс мебошад.

Даври хурдтарини мусбати функсияро мухтасар даври функсия меноманд. Бинобар ин мегӯянд, ки 2π даври косинус ва синус, π даври тангенс ва котангенс мебошад.

Барои сохтани графики функсияи даврии дорои даври Т онро дар порчаи дарозиаш Т сохта, баъд хати каҷи ҳосилшударо қад-қади тири $0X$ ба таври параллел (ба рост ва ба чап) ба масофаи nТ кӯчонидан кифоя аст (расми 8), ки дар ин ҷо n адади натуралии дилхоҳ мебошад.

Дар ҳақиқат, агар $(x_0;y_0)$ нуқтаи графики функсияи даврии $y=f(x)$ бошад, он гоҳ нуқтаи x_0+nT барои қимати дилхоҳи бутуни n ба соҳаи муайянии f мутааллиқ аст ва бинобар даврӣ будани $f(x)$ баробарии $f(x_0+nT)=f(x_0)=y_0$ дуруст мебошад. Пас, нуқтаи $(x_0+nT=y_0)$ ки ҳангоми қад-қади тири $0X$ параллел кӯчонидани нуқтаи $(x_0;y_0)$ ҳосил шуда, низ ба графики f тааллуқ дорад.



Расми 8

Эзоҳи 1. Даври функсияе, ки аз суммаи якчанд функсияҳои даврӣ иборат аст, ба хурдтарин каратноки умумии даври он ҷамъшавандаҳо баробар мебошад.

Эзоҳи 2. Даври функсияҳои $\sin ax$ *ва* $\cos ax$ ба $\dfrac{2\pi}{a}$, даври функсияҳои $tgax$, $ctgax$ мувофиқан ба $\dfrac{\pi}{a}$ баробар. Дар ин ҷо a адади дилхоҳи ҳақиқӣ мебошад.

Мисолҳои зеринро ҳал мекунем:

1) $\sin(-330^o)=\sin(-330^o+360^o)=\sin 30^o=\dfrac{1}{2}$. Дар ин ҷо ба аргумент давраш ҷамъ карда шудааст.

2) $\sin 765^o=\sin(45^o+2\cdot 360^o)=\sin 45^o=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Дар ин ҷо ба аргумент ду даври синус ҷамъ карда шудааст.

3) $tg\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)=tg\left(-\dfrac{17\pi}{3}+6\pi\right)=tg\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

Ба аргументи манфӣ $\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)$ шаш давр (6π) ҷамъ карда шудааст, ки дар натиҷа аргументи мусбати $\dfrac{\pi}{3}$ ҳосил шуд.

4) $\sin 1200^o = \sin(3\cdot 360^o + 120^o) = \sin 120^o = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) $\sin\frac{41}{6}\pi = \sin\left(6\pi + \frac{5\pi}{2} + \right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Акнун даври баъзе функсияҳоро меёбем:

6) $y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x-\pi) + 5\sin(x+\pi)$.

Ҳал. Функсияи додашударо содда менамоем:

$y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x-\pi) + 5\sin(x+\pi) = 3\sin 4x + 6\sin x - \sin x - 5\sin x = 3\sin 4x$

Ҳамин тавр $y = 3\sin 4x$. Даври ин функсия мувофиқи эзоҳи 2 ба $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ баробар аст. Ин давр низ даври функсияи додашуда мешавад. Даври ҷамъбастшавандаҳои дигар ба назар гирифта намешавад, чунки суммаи он ҷамъшавандаҳо ба нол баробар аст, яъне

$6\sin x + \sin(x-\pi) + 5\sin(x+\pi) = 0$.

7) $y = \sin 2x + tg\frac{x}{2}$.

Ҳал. Мувофиқи эзоҳи 2 даври ҷамъшавандаи якум $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ буда, даври ҷамъшавандаи дуюм $tg\frac{x}{2}$ ба $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ баробар аст.

Мувофиқи эзоҳи 1 даври функсияи додашуда хурдтарин каратнокии хар дуи онҳо, яъне $T = 2\pi$ мешавад.

> **?**
> **1.** Даври функсия чист?
> **2.** Чӣ гуна функсияҳоро функсияҳои даврӣ меноманд?
> **3.** Даври функсияҳои $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ - ро номбар кунед.
> **4** Даври функсияе, ки аз якчанд ҷамъшавандаҳо иборат аст, чӣ гуна ёфта мешавад?

Ҳисоб кунед (114-120):

114. а) $\cos 420^o$; б) $\sin 420^o$; в) $tg19\frac{\pi}{3}$.

115. а) $ctg19\frac{\pi}{3}$; б) $\cos 405^o$; в) $\sin 405^o$.

116. а) $tg1080^o$; б) $ctg1080^o$; в) $\cos 390^o$.

117. а) $\sin 390^o$; б) $tg540^o$; в) $ctg540^o$.

118. а) $\sin(-330^o)$; б) $\sin 765^o$; в) $tg\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

119. а) $\sin 1200^o$; б) $\sin(-5{,}6\pi)$; в) $tg135^o$.

120. а) $\cos 315^o$; б) $\sin\frac{5}{4}\pi$; в) $tg\frac{7}{8}\pi$.

Машқҳо барои такрор

121. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{tg\alpha-tg\beta}$; б) $\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

122. Графики функсияро созед ва хосиятҳояшро баён кунед:

а) $y=0{,}5x^2-3x+4$; б) $y=4-0{,}5x^2$; в) $y=6x-2x^2$.

123. Айниятро исбот кунед:

а) $1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin 2\alpha$; б) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$.

124. Ду коргар якҷоя кор карда, супоришро дар 30 соат иҷро карда метавонанд. Агар коргари якум танҳо кор кунад, ба иҷрои ин супориш назар ба коргари дуюм (агар ӯ ҳам танҳо кор кунад) 11 соат зиёдтар вақт сарф мекунад. Ҳар як коргар ин супоришро дар чанд соат иҷро карда метавонад?

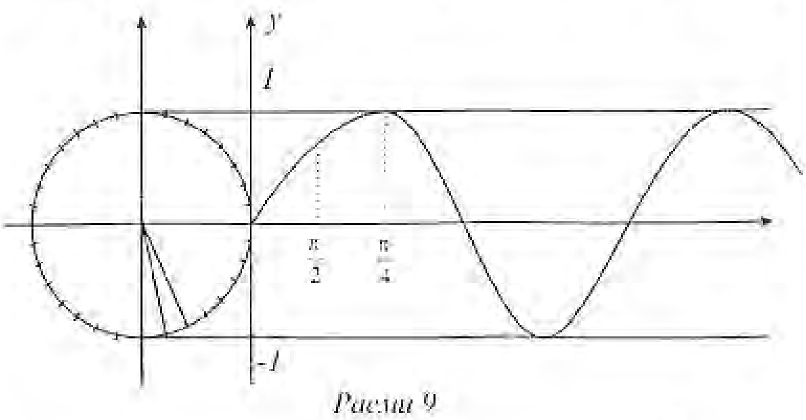
12. Графики функсияи $y=\sin x$

Сохтани графики функсияҳои гуногунро дар синфҳои 7-9 омӯхта будем. Дар синфи 7 графики функсияи $y=kx+b$, $y=kx$, дар синфи 8 графики функсияи $y=\frac{k}{x}$, дар синфи 9 графики функсияи $y=ax^2+bx+c$ - ро сохтем.

Акнун сохтани графики функсияҳои тригонометриро нишон медиҳем.

Дар вақти сохтани график қимати аргумент бо нуқтаҳо дар тири абсиссаҳо тасвир карда мешавад, бинобар ин аргументи функсияҳои тригонометриро бо ҳарфи x ифода намудан равост.

Дар вақти аз $x=0$ то $x=2\pi$ ё ки ченаки градусӣ аз 0^0 то 360^0 тағйир ёфтани қимати функсияи $y=\sin x$ - ро графикӣ тасвир мекунем. Инро бо тарзи зер иҷро кардан осон аст.



Расми 9

Давраи радиусаш воҳидро кашида, онро ба 16 ҳиссаҳои баробар тақсим мекунем (расми 9). Ба ҳар як тақсимоти камон кунҷи марказии 20^o30^I ё ки бо ченаки радиани $\frac{\pi}{8}$ (радиан) мувофиқ меояд. Ин кунҷҳоро ба воситаи радиус ва тири (0X) қайд мекунем.

Инчунин дар тири 0X порчаи $[0;2\pi]$ - ро ба 16 қисми баробар тақсим мекунем. Аз ҳар яке аз нуқтаҳои тақсимоти давра ба тири $0x$ ва аз ҳар яке аз нуқтаҳои тақсимоти порчаи $[0;2\pi]$ -и тири $0x$ ва тири 0у параллел хатҳои рости гузаронидашуда дар нимҳамвории рости $x0y$ 16 – то нуқтаҳо ҳосил мешаванд, онҳоро пайваст намуда хати каҷеро ҳосил мекунем.

Ин хати каҷ синусоида номида мешавад. Мо танҳо як «мавҷи» синусоидаро сохтем, ки он ба аз 0 то 2π тағйир ёфтани қимати аргумент мувофиқ меояд. Аз сабаби даврӣ будани функсияи $y=\sin x$ дар натиҷаи аз 2π то 4π тағйир ёфтани аргументи x мавҷи дигари синусоида ҳосил мешавад, ки он бо аввала якхела мебошад.

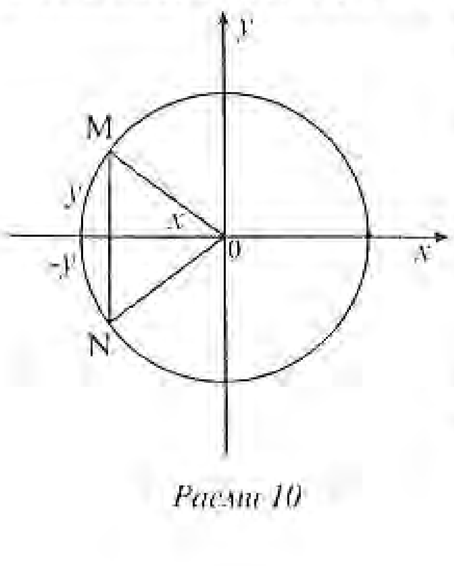
Агар мо он қисми хати каҷ, ки ба он аз 0 то -2π тағйир ёфтани аргументи x мувофиқ меояд, сохтанӣ шавем, боз ҳамон ҳодисаро ҳосил мекунем. График рафти тағйирёбии функсияро инъикос мекунад. Аз график хосиятҳои функсияи $y=\sin x$ - ро нишон додан осон аст.

1) Барои қиматҳои дилхоҳи ҳақиқии аргументи x функсияи $y=\sin x$ муайян аст, яъне ҳамаи ададҳои ҳақиқие, ки ба сифати ченаки радиании кунҷ қабул карда мешавад, соҳаи муайянии он мебошад.

2) Ҳамаи қиматҳои функсияи $\sin x$ порчаи [-1; 1] – ро пур мекунад, яъне $-1 \le \sin x \le 1$ аст.

3) Функсия ҷуфт нест, зеро $\sin(-x)=-\sin x$. Дар ҳақиқат, фарз мекунем, ки кунҷи додашуда α бошад; кунҷи $(-\alpha)$ - ро дида мебароем. Кунҷҳои ба ҳам муқобили α ва $(-\alpha)$ дар натиҷаи аз вазъияти аввалини умумии 0A ба самтҳои бо ҳам муқобил як хел гардонидани радиуси ҳаракатнок ташкил меёбад; бинобар он тарафҳои охирони онҳо OM ва ON нисбат ба тири абсисса симметрӣ мебошанд (расми 10). Аз ин ҷо, абсциссаҳои нуқтаҳои M ва N баробар буда, ординатаҳои онҳо муқобили якдигар мебошанд. Координатаҳои нуқтаи M(x;y) – ро, ки $x=\cos\alpha$ ва $y=\sin\alpha$ мебошад, бо координатаҳои нуқтаи N(x;-y), ки дар ин ҷо $x=\cos(-\alpha)$ ва $-y=\sin(-\alpha)$ аст, муқоиса карда, ҳосил мекунем:

$$\cos\alpha=\cos(-\alpha);\ \ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha\ .$$



Расми 10

Графики он ҳамчун функсияи тоқ нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ мебошад. (ниг. Алгебра 9. §1.п3).

4) Функсияи $y=\sin x$ дар фосилаи

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ аз –1 то 1 меафзояд ва дар фосилаи $\left(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right)$ аз 1 то –1 кам мешавад.

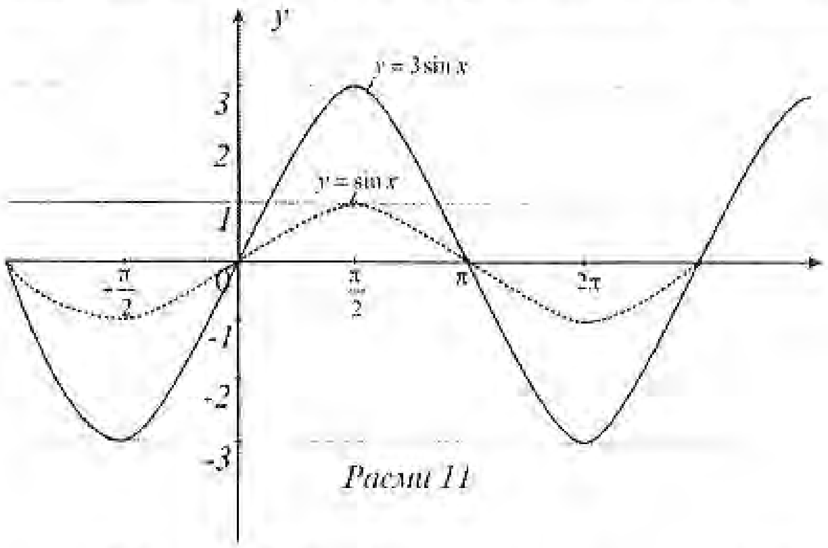
5) Ҳангоми $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ будан функсия қимати калонтарин дорад. Дар ин ҷо k – ададҳои бутуни дилхоҳи мусбат, манфӣ ва нол аст. Дар ин нуқтаҳо синус ба 1 баробар мебошад.

6) Ҳангоми $x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + 2\pi, -\frac{\pi}{2} + 4\pi, ...$ ва умуман ҳангоми $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ будан, синус қимати хурдтаринро ба –1 баробарро қабул мекунад.

7) Ҳангоми $x = ..., -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...$ ва умуман ҳангоми $x = \pi k\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ будан, функсия ба нол баробар мешавад.

Мисоли 1. Графики функсияи $y = 3\sin x$ - ро месозем.

Ҳал. Ҳаминро мушоҳида кардан кифоя аст, ки барои қимати мазкури x ординатаи графики $y = 3\sin x$ ба ординатаи сечанд гирифта шудаи синусоидаи муқаррарӣ баробар аст. Пас, графики $y = \sin x$ синусоидаи деформасияшуда буда, дар натиҷаи се маротиба калон кардани тамоми ординатаҳои синусоидаи муқаррарӣ ҳосил мешавад (расми 11). Функсияи $y = 3\sin x$ монанди функсияи $y = \sin x$ ҳамон хел фосилаи аломатҳояшон доимӣ ва ҳамон хел даври 2π дорад. Қимати калонтарин ба 3 ва хурдтарин ба –3 баробар мебошад.



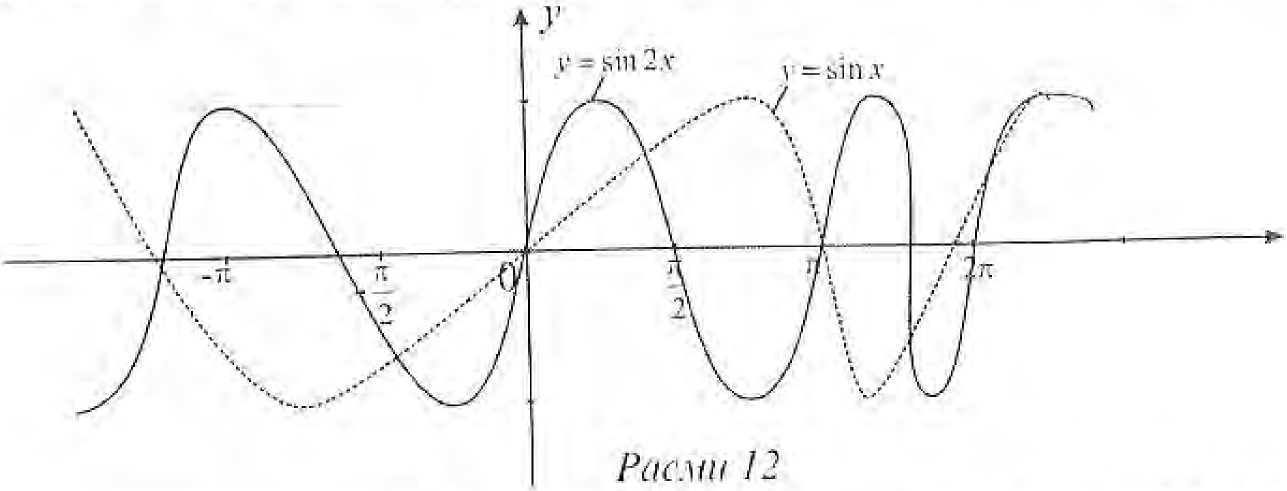
Расми 11

Мисоли 2. Графики функсияи $y = \sin 2x$ - ро месозем.

Ҳал. Ҳаминро мушоҳида кардан кифоя аст, ки барои қимати додашудаи x қимати функсияи $y = \sin 2x$ ба ординатаи синусоидаи муқаррарӣ дар нуқтаи абсиссааш дучанд гирифта шудаи $2x$ баробар аст.

Масалан, барои $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \sin 2\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ барои $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ аст.

Бинобар ин, графики функсияи $y=\sin 2x$ - ро аз синусоидаи муқаррарӣ бо роҳи аз рӯи (ё қад-қади) тири Ox ду маротиба фишурдан (ду маротиба давврашро хурд кардан) ҳосил кардан мумкин аст (расми 12).



Расми 12

Функсияи $y=\sin 2x$ даврӣ буда, давраш π мебошад, зеро дар мавриди ба аргументи он илова кардани π қимати он тағйир намеёбад:

$\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x$. (Дар ин ҳолат мегӯянд, ки зуддии лапиши синусоида, $\omega=2$ аст)

?

1. Таърифи соҳаи мавҷудияти функсияро диҳед.
2. Нуқтаи буриши графики функсияро бо тирҳои координатаҳо чӣ тавр меёбанд.
3. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро чӣ тавр меёбанд.
4. Хосиятҳои асосии синусро номбар кунед.

125. Графики функсияро созед:

а) $y=\sin\frac{1}{2}x$; б) $y=\sin 3x$; в) $y=\frac{1}{2}\sin x$;

г) $y=\frac{1}{2}\sin 3x$; д) $y=2\sin\frac{1}{2}x$; е) $y=\frac{1}{3}\sin 2x$.

Машқҳо барои такрор

126. Баробариҳоро санҷед:

а) $\sin 25^o+\sin 35^o=\cos 5^o$; б) $\cos 58^o-\cos 2^o=-\sin 28^o$;

в) $tg20^o+4\sin 20^o=\sqrt{3}$; г) $4\cos 20^o-\sqrt{3}\cdot ctg20^o=-1$

127. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\frac{y+2}{y+1}=\frac{y-2}{1-y}-\frac{4}{y-1}$; б) $7-\frac{48}{9x^2-1}=\frac{6x}{3x-1}-\frac{8}{3x+1}$.

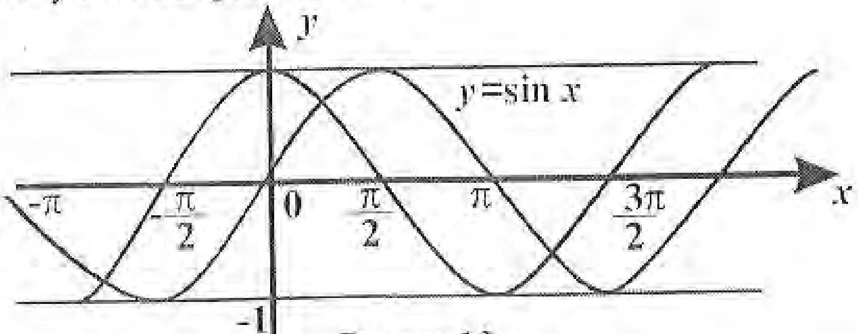
128. Сурати каср аз махрачи он ба 5 воҳид хурд аст. Агар ба сурати ин каср 17-ро ва ба махраҷи он адади 2 – ро ҷамъ кунем, он гоҳ касри ба касри додашуда чаппа ҳосил мешавад. Он касрро ёбед.

13. Графики функсияи $y = \cos x$

Графики функсияи $y = \sin x$ -ро дониста, графики функсияи $y = \cos x$ - ро сохтан осон аст.

Дар ҳақиқат аз формулаҳои мувофиқоварӣ (ниг.п.Алгебра 9 §3) $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ равшан аст, ки ординатаи графики косинус дар нуқтаи абсиссааш x ба ординатаи синусоидаи муқаррарӣ дар нуқтаи абсиссааш $x + \frac{\pi}{2}$ баробар аст. Масалан, дар вақти x=0 ординатаи график $\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ мебошад; дар вақти $x = \frac{\pi}{2}$ ординатаи он $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ва дар вақти $x = \frac{\pi}{2}$ будан ордината $\sin\pi = 0$ мешавад. Бо роҳи ба тарафи чапи тири абсисса (расми 13) ба масофаи $\frac{\pi}{2}$ - параллел кӯчониданӣ синусоида графики пурраи функсияи $y = \cos x$ - ро ҳосил кардан мумкин аст.

Хусусияти ҷуфт будани $\cos x = \cos(-x)$ нишон медиҳад, ки графики он нисбат ба тири 0у симметрӣ мебошад.



Расми 13

Аз график хосиятҳои зерини косинусро муқаррар мекунем:

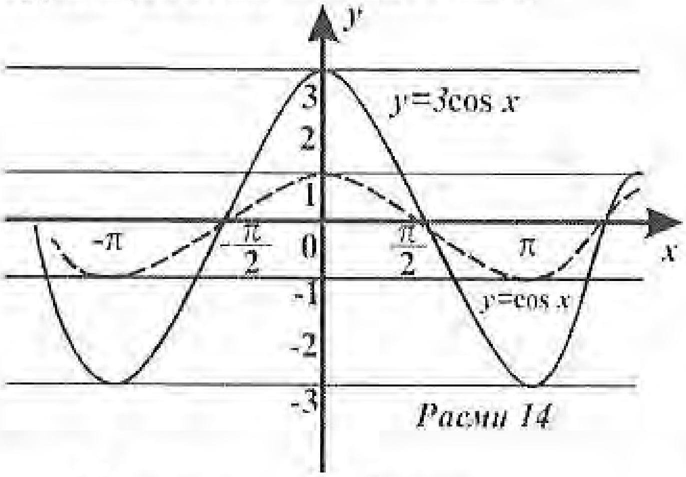
1. Функсияи $y = \cos x$ дар тамоми тири ададӣ муайян аст, зеро бо ҳар як адади ҳақиқии x, ки ба сифати ченаки радианӣ қабул карда шудааст, қимати тамоман муайяни косинус мувофиқ меояд.
2. Маҷмӯи қиматҳои функсия порчаи [-1; 1] – ро пур мекунад.
3. $y = \cos x$ функсияи ҷуфт аст, зеро $\cos(-x) = \cos x$; графики он нисбат ба тири 0у симетрӣ мебошад.
4. Функсияи $y = \cos x$ дар фосилаи аз $(0, \pi)$ то –1 кам мешавад ва дар фосилаи $-\pi; 0$ аз –1 то 1 меафзояд.
5. Агар $x = 0, 2\pi, 4\pi, ...$ бошад, он гоҳ $\cos x$ дорои қимати калонтарини 1 ва агар $x = \pi, 3\pi, 5\pi, ...$ бошад, он гоҳ $y = \cos x$ дорои қимати хурдтарини -1 аст.

6. Агар аргумент $x=\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}$ ва умуман $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ ки $k=0,\pm1,\pm2,...$ бошад қимати функсия ба нол баробар мешавад.

Мисоли 1. Графики функсияи $y=3\cos x$ - ро месозем.

Ҳал. Барои қимати мазкури x ординатаи графики $y=\cos x$ баробар аст. Пас, графики функсияи матлуб дар натиҷаи се маротиба калон кардани тамоми ординатаҳои $y=\cos x$ ҳосил мешавад. (расми 14) (A=3).

Функсияи $y=3\cos x$ монанди функсияи $y=\cos x$ ҳамон хел фосилаҳои аломатҳояшон доимӣ ва 2π дорад. Қимати калонтарин ва хурдтарини он ±3 мебошад.



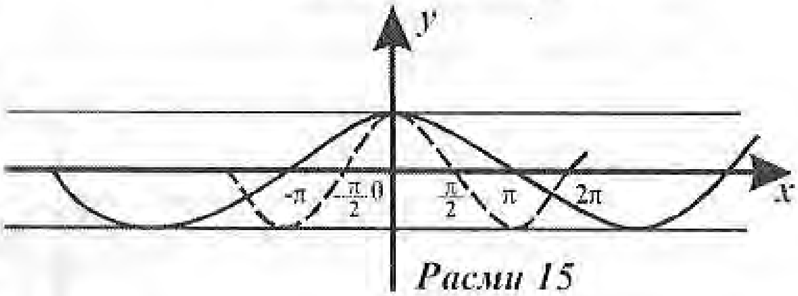
Расми 14

Мисоли 2. Графики функсияи $y=\cos\frac{x}{2}$ - ро месозем.

Ҳал. Ҳаминро мушоҳида кардан кифоя аст, ки барои қимати додашудаи x қимати функсияи $\cos\frac{x}{2}$ ба ординатаи $y=\cos x$ дар нуқтаи абсиссааш ба ду тақсим карда шуда баробар аст.

Масалан, барои $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\cos\frac{\pi}{12}$ барои $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\cos\frac{\pi}{8}$ аст.

Бинобар ин графики функсияи $y=\cos\frac{x}{2}$ аз графики $y=\cos x$ бо роҳи қад-қади тири абсисса ду маротиба дароз кардани дарозии он ҳосил кардан мумкин аст (расми 15).



Расми 15

?

1. Маҷмӯи кадом ададҳо соҳаи муайянии функсияи косинус мешавад?
2. Оё функсияи $y=\cos x$ маҳдуд аст?
3. Даври хурдтарини косинусро нависед.
4. Барои кадом қиматҳои x косинус меафзояд ва барои кадом қиматҳояш кам мешавад?

129. Графики функсияи зеринро созед:

а) $y=\frac{1}{3}\cos x$; б) $y=\cos 2x$; в) $y=-\cos 2x$;

г) $y=\frac{1}{2}\cos 3x$; д) $y=\frac{1}{3}\cos 2x$; е) $y=2\cos x$;

ж) $y=2-\cos x$; з) $y=2-\cos 3x$; и) $y=1-2\cos 2x$.

Машқҳо барои такрор

130. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x-y=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+3xy=18, \\ 3y^2+xy=6. \end{cases}$

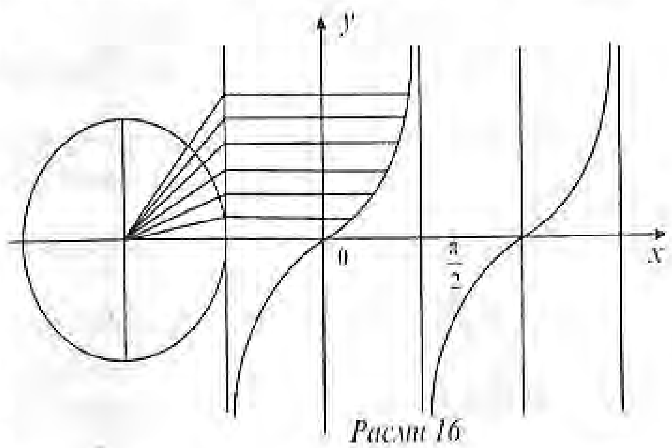
131. а) $\sin\alpha=\frac{3}{4}$; $0<\alpha<90^o$ дода шудааст; $\cos 2\alpha$ - ро ёбед.

б) $tg\alpha=\frac{3}{2}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $tg2\alpha$ - ро ёбед.

132. Агар периметри квадратро 40м кӯтоҳтар гирем, он гоҳ масоҳати он $1\frac{7}{9}$ маротиба хурд мешавад. Периметри квадратро ёбед.

14. Графики функсияи $y=tgx$

Графики функсияи $y=tgx$ - ро тангенсоида меноманд. Дар фосилаи $0\le x<\frac{\pi}{2}$ функсияи $y=tgx$ аз 0 то ∞ меафзояд. Чоряки якуми давраи воҳидӣ ва порчаи $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ тири абсциссаҳо ба якчанд қисмҳои баробар (дар расми 16 ба 8 қисм) тақсим карда шудаанд. Дар тири тангенсҳо аз маркази давра сар карда, проексияи нуқтаҳои тири тангенс ба намуди перпендикулярҳое, ки аз нуқтаҳои мувофиқи тири абсцисса гузаронида шудаанд, кӯчонида мешаванд. Охири ин перпендикулярҳоро пайваст кардан лозим аст.



Расми 16

Функсияи $y=tgx$ тоқ, чунки $tg(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-tg\alpha$. Аз ин ҷо хулоса мебарояд, ки графики он нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ мебошад. Бинобар ин, барои фосилаи $0\le x<\frac{\pi}{2}$ график сохта, онро аз рӯи симметрӣ, ба фосилаи $-\frac{\pi}{2}<x<0$ (чоряки IV) давом додан мумкин.

Фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аз ҷиҳати дарозӣ ба даври тангенс баробар аст; барои ҳосил кардани тангенсоидаи пурра хатти ҳосилшударо ба тарафҳои рост ва чап ба масофаҳои $\pi, 2\pi, 3\pi,...$ параллел кӯчондан кифоя аст. Ба ҳамин тариқ, хатте ҳосил мешавад, ки вай аз шумораи беохири шохаҳои якхелаи даврии такроршаванда иборат мебошад.

Хосиятҳои функсияи $y = tgx$ инҳоянд:

1) Тангенс функсияи даврӣ буда, давраш ба π баробар аст.

2) Функсия дар тамоми тири ададӣ, ғайр аз нуқтаҳои $\frac{\pi}{2}(2K+1)$, $k = 0,\pm1;\ \pm2$ муайян мебошад.

3) $y = tgx$ функсияи номаҳдуд аст, зеро вай қимати дилхоҳи бузургии мутлақаш калонро қабул карда метавонад.

4) Функсия ҷуфт нест, зеро $tg(-x) = -tgx$. Графики он нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ мебошад.

5) $y = tgx$ дар фосилаи $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0;\pm1;,...$ меафзояд.

6) $y = tgx$ қимати калонтарин ва хурдтарин надорад.

7) Агар $x = \pi k(k = 0;\pm1;\pm2,...)$ бошад, функсия ба нол баробар мешавад.

Мисоли 1. Графики функсияи $y = tg2x$ - ро месозем.

Ҳал. 1) Соҳаи муайянии функсия ҳамаи қиматҳои x ғайр аз $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ мебошад, ки дар ин ҷо $k \in Z$ аст, чунки $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ мебошад.

2) Соҳаи қиматҳои функсия тамоми тири ададӣ яъне фосилаи $(-\infty;+\infty)$ аст.

3) Функсия номаҳдуд аст.

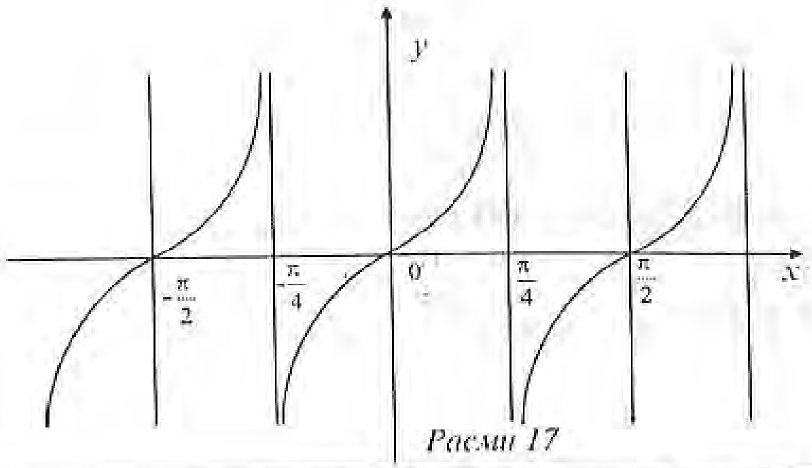
4) Функсия ба қиматҳои экстремалӣ доро нест.

5) Функсия даврӣ буда, давраш ба $T = \frac{\pi}{2}$ баробар аст, зеро $y = tg2x = tg(2x+\pi) = tg2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ мебошад.

6) Функсия дар тамоми соҳаи мавҷудияташ монотонӣ нест, аммо вай дар фосилаи $\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$ афзуншаванда мебошад.

Графики функсия тирҳои координатаро дар нуқтаҳои $\left(\frac{\pi k}{2};0\right)$, ки $k \in Z$ аст, мебурад.

Графики $y = tg2x$ дар расми 17 тасвир шудааст.



Расми 17

?

1. Соҳаи мавҷудияти функсияи $y = tgx$ - ро нависед.
2. Оё функсияи тангенс маҳдуд аст, ё не?
3. Тангенс функсияи ҷуфт аст ё тоқ?
4. Фосилаи афзуншавӣ ва даври $y = tgx$ - ро нависед.

133. Графики функсияро созед:

а) $y = tg3x$; б) $y = -tg3x$; в) $y = \frac{1}{2}tg3x$; г) $y = \frac{1}{3}tg3x$.

134. Графики функсияро созед:

а) $y = tg\frac{x}{2}$; б) $y = -tg\frac{x}{2}$; в) $y = 3tgx$; г) $y = -3tg2x$.

Машқҳо барои такрор

135. Ифодаи зеринро содда кунед:

а) $\frac{tg2\alpha \cdot tg\alpha}{tg2\alpha - tg\alpha}$; б) $\frac{1}{tg2\alpha \cdot tg\alpha + 1}$

136. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} = \frac{3x-10}{4}$; б) $\frac{x(x+4)}{2} - 3 = \frac{7x}{4} - \frac{5x-4}{6}$.

137. Экстремум ва экстремалҳои функсияи $y = 2x^2 - 5x + 3$ - ро ёбед.

138. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 12 баробар аст. Агар ҷои рақамҳо иваз карда шавад, адад 75% зиёд мешавад. Ин ададро ёбед.

15. Графики функсияи $y = ctgx$

Хосиятҳои функсияи $y = ctgx$ - ро хотиррасон мекунем:

а) Ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ ғайр аз ададҳои $\pi k,\ k \in Z$ соҳаи мавҷудияти функсияи $y = ctgx$ мебошад;

б) Ҳамаи тири ададӣ маҷмӯи қиматҳои $y = ctgx$ мебошад, бинобар ин вай функсияи номаҳдуд аст.

в) Котангенс функсияи тоқ мебошад:

$$ctg(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -ctgx;$$

г) Котангенс функсияи даврӣ буда, даври хурдтарини мусбаташ ба π баробар аст, яъне

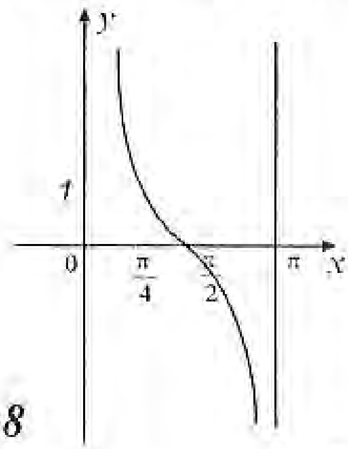
д) $ctgx = 0$, ҳангоми $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

е) $ctg>0$ барои ҳамаи қиматҳои $x\in\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$.

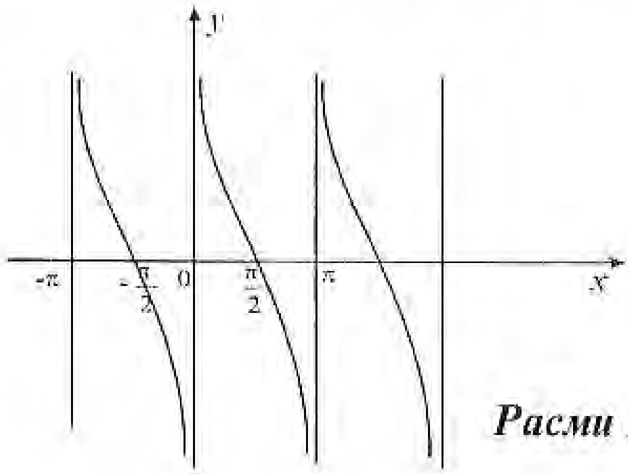
ж) $ctg<0$ барои ҳамаи $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right), k\in Z.$

з) Дар ҳар яке аз фосилаҳои $(\pi k,\pi+\pi k)$, $k\in Z$, $y=ctgx$ камшаванда мебошад.

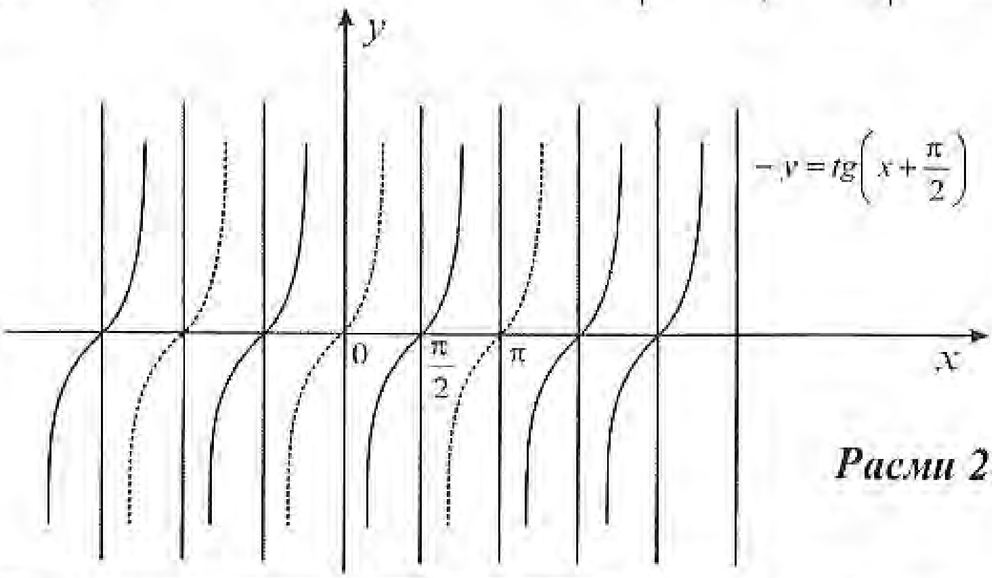
Хосиятҳои котангенсро истифода карда, графики онро аввало дар порчаи $(1;\pi)$, яъне дар порчае, ки дарозиаш ба даври функсия баробар аст, месозем. Баъд аз он дар тамоми тири ададӣ (расми 19) графики $y=ctgx$ - ро месозем.



Расми 18



Расми 19



Расми 20

?

1. Соҳаи мавҷудияти функсияи $y=ctgx$ - ро баён кунед.
2. Магар функсияи тангенс маҳдуд аст, ё не?
3. Ҷуфт ё тоқ будани котангенсро нишон диҳед?
4. Даври хурдтарини функсияи $y=ctgx$ чанд аст?
5. Фосилаи камшавии котангенсро нависед.

139. Графики функсия сохта шавад (139-141):

а) $y = 2ctg2x$; б) $y = -ctg2x$; в) $y = \frac{1}{2}ctg2x$; г) $y = \frac{1}{2}ctgx$;

140. а) $y = ctg3x$; б) $y = 3ctgx$; в) $y = \frac{1}{2}ctg3x$; г) $y = \frac{1}{3}ctg3x$.

141. а) $y = 2ctg(x - 30^o)$; б) $y = 2ctg(30^o - x)$;

в) $y = ctg(-x - 60^o)$; г) $y = 3ctg\left(\frac{x}{2} + 30^o\right)$.

Машқҳо барои такрор

142. Ифодаро содда намуда, қимати ададии онро ҳангоми $x = -\frac{1}{2}$; $y = -2$ будан ёбед: $\left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) : \frac{x+y}{2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right] \cdot \frac{xy}{(x+y)^2}$.

143. Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

$а) - x^2 + 2x + 36; б) 8x^2 + 10x + 3; в) n + mn(2 - n)x - 2m^2n^2x^2$.

144. Экстремум ва экстремалҳои функцияи $y = x^2 - 8x + 64 -$ ро ёбед.

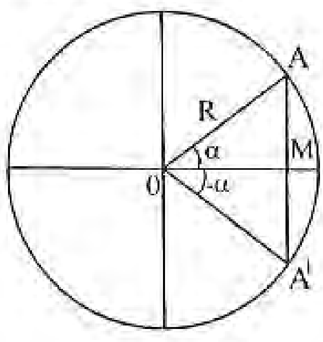
145. Ифодаро содда кунед:

$а) \sin 4\alpha \cdot ctg2\alpha - \cos 4\alpha; б) 4\cos 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha - \cos 4\alpha - 2\sin 2\alpha$.

146. Дар прогрессияи геометрӣ $b_3 = 16$ ва $b_5 = 1024$ аст. Суммаи аъзои аввалаи прогрессияро ёбед.

Маълумоти таърихӣ

Функсияҳои тригонометрӣ ҳанӯз дар асри III пеш аз милод дар асарҳои математикҳои бузурги Юнони Қадим Евклид, Архимед, Аполлони Перги вомехуранд. Синуси кунҷи α -и ҳозиразамон чун нимхорда, ки ба он кунҷи марказии бузургиаш α такя мекунад, ё чун хордаи камони дучанда омӯхта мешуд. Минбаъд олимони Ҳинд ва Араб дар ин соҳа саҳми арзанда гузоштаанд. Дар асрҳои IV-V олими Ҳинд Ариабхата (456-550) истилоҳи махсусро истифода кард. Порчаи АМ-ро ӯ ардҳаҷи (ардха-нисф; ҷивазеҳи камон, ки хордамонанд аст) номид (расми 21). Баъдтар номи мухтасари ҷива истифода шудан гирифт. Дар асри IX матаматикҳои Араб калимаи ҷива (ё ҷиба)-ро бо калимаи арабии ҷайб (барҷастагӣ) иваз карданд. Ҳангоми тарҷумаи матнҳои арабӣ оид ба математика дар асри XII ин калима бо калимаи лотинии синус (*sinus*-хамӣ, каҷӣ) иваз шуд.



Расми 21

Калимаи косинус баъдтар дохил карда шуд. Косинус ихтисори калимаи лотинии complementy sinus, яъне «синуси илова» мебошад (ё ки «синуси камони илова»; $\cos = \sin(90^o - \alpha)$ -ро; ба хотир оред).

Бо функсияҳои тригонометрӣ сару кор доштa, мо асосан аз ҳудуди масъалаи «омӯзиши секунҷаҳо» мебароем. Бинобар ин математики машҳур Ф. Клейн (1849-1925) пешниҳод карда буд, ки таълимоти оид ба функсияҳои «тригонометрӣ» - ро ба таври дигар – гониометрия ном барем (калимаи лотинии gonio маънои «кунҷ» -ро дорад). Вале ин ном ҷорӣ нашуд.

Тангенсҳо бо муносибати ҳал кардани масъала оид ба дарозии соя пайдо шудаанд. Тангенс ва котангенс дар асри X аз тарафи математики Араб Абул-Вафо, ки ҷадвалҳоро аввалин барои ёфтани тангенсҳо ва котангенсҳоро низ тартиб дода буд, дохил карда шудааст. Вале ин кашфиёт муддати тӯлонӣ ба олимони аврупоӣ маълум набуд ва тангенсҳо дар асри XIV аввал аз тарафи олими англис Т.Бровердин, баъдтар аз тарафи олими немис Регимонтан (соли 1467) аз нав кашф карда шудаанд. Исми «тангенс», ки аз калимаи лотинии langens (расидан) баромадааст, соли 1583 пайдо шудааст. Tangens «расидаистода» тарҷума мешавад (ба хотир оред: хати тангенсҳо –ин расидан ба давраи воҳидӣ).

Олими машҳури форсу тоҷик Муҳаммад ба дунё омада дар Бағдод зиндагӣ кардааст. Абул-вафо оид ба илмҳои риёзӣ ва нуҷум тадқиқот бурда, асарҳое офарид, ки то имрӯз маълуманд. Асари ӯ «Китоб дар бораи он, ки косиб аз шаклсозиҳои геометрӣ бояд чиро донад?» то замони мо омада расидааст. Дастури «Китоб барои Мирзоҳо» ба таълими арифметика ва геометрия бахшида шудааст. Дар тафсирҳояш ба «Алмачост»-и Птолемей аввалин шуда радиусҳои давраро ба воҳид баробар қабул кард. Ҳамчунин ӯ аввалин шуда дар илми математика тангенсро ҳамчун функсияи тригонометрӣ ворид намуда, ба он ҷадвал тартиб дод. Ӯ бо асарҳои тригонометриаш ҳамчун «Птоломеи дуюм» машҳур шуд. Вобастагиҳои зерини байни функсияҳои тригонометрии зеринро маълум намуд:

$$tg\alpha : r = \sin\alpha; tg\alpha : \sec\alpha = \sin\alpha : r, \sec\alpha = \sqrt{r^2 + tg^2\alpha};$$

$$ctg\alpha : r = \cos\alpha : \sin\alpha; tg\alpha : r = r : ctg\alpha, \operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{r^2 + ctg^2\alpha}$$

Абул-вафо синуси сумма ва фарқи ду камонро танҳо ба воситаи синусҳо ифода мекунанд: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sqrt{\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)} = \sqrt{\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)}$ ин натиҷаҳоро ҳангоми тартиб додани ҷадвалҳои тригонометрии синус ва тангенс истифода менамоянд. Кори ӯро баъдтар шогирдонаш Абдураҳмон ибни Юнус (950-1009) идома дода, ҷадвалҳоро тартиб дод ва мукамал намуд.

Математик ва астраноми суриягӣ Ҷобирал Батонӣ (858-929) бошад, дар қатори ҷадвалҳои синус ва тангенс боз ҷадвалҳои котангенсро тартиб дод, ки на танҳо дар Шарқ, балки дар Аврупо низ маълум буданд. Ҳамагуна ҷадвалҳоро дар солҳои гуногун Абурайҳони Берунӣ (973-1048), Насириддини Тӯсӣ (1201-1264) ва дигар олимон таргиб доданд. Хусусан, ҷадвали синусҳои Абурайҳони Берунӣ, ки ба асари «Қонуни Масъудӣ» (1036) дохил шудааст, ҷолиби диққат мебошад. Зеро дар онҳо аввалин маротиба интерполи хаттӣ (лотинӣ-интерполиа-тағйирот) истифода шудааст. Бо аломатҳои ҳозиразамон онро бо таври зайл навиштан мумкин:

$$\sin x = \sin x_o = (x + x_o) \cdot \frac{\sin(x_o - 15') - x_o}{15'}$$

Ӯ барои ҳамаи ҷадвалҳо ин қоидаро татбиқ намуда интерполи квадратиро шарҳ медиҳад.

Машқҳои иловагӣ ба боби 1.

147. Суммаро ба ҳосили зарб табдил диҳед:

$а)\sin 20^o + \sin 40^o$; $б)\sin 24^o - \sin 36^o$; $в)\sin 110^o - \sin 130^o$; $г)\cos 70^o + \cos 50^o$

148. а) Маълум, ки $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ аст $\sin 2\alpha$ - ро ёбед.

б) Маълум, ки $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ ва $0 < \alpha < 90^o$ аст, $\cos 2\alpha$ -ро ёбед.

149. Ба ҳосили зарб табдил дода, қимати ифодаро ёбед.

$а)\sin 40^o + \sin 50^o$; $б)\sin 75^o - \sin 15^o$;

$в)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$; $г)\cos 35^o + \cos 25^o$

150. Айниятро исбот кунед:

$а)4\sin\alpha \cdot \sin(60^o - \alpha) \cdot \sin(60^o + \alpha) = \sin 3\alpha$. $б)\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

151. Ифодаро содда кунед:

$а)\frac{1}{\cos\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + tg^2\alpha\right)}$; $б)\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{ctg^2\alpha}$

152. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ, нуқтаҳои экстремалӣ ва экстремумҳои функсияро ёбед:

$а)y = x^2 - 2|x|$; $б)y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

153. Ҳисоб кунед:

$\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot ctg 2\alpha$, агар $tg 2\alpha = 4$, бошад.

154. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ -ро ёбед, агар $tg\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$ бошад.

155. Ифодаро содда кунед:

$а)\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$; $б)\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$;

$в)\frac{\cos\alpha \cdot tg\alpha}{\sin^2\alpha} - ctg\alpha \cdot \cos\alpha$; $г)(tg\alpha + ctg\alpha)^2 - (tg\alpha - ctg\alpha)^2$.

156. Айниятро исбот кунед: $a) 1+\cos\alpha = +2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $б) 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

$в) 1+\sin\alpha = 2\cos^2\alpha\left(45^o - \frac{\alpha}{2}\right)$; $г) 1-\sin\alpha = 2\sin^2\left(45^o - \frac{\alpha}{2}\right)$.

157. Ифодаро содда кунед: $\sin 4^o \cdot \sin 86^o - \cos 2^o \sin 6^o + 0{,}5\sin 4^o$.

158. $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot ctg2\alpha$ -ро ҳисоб кунед, агар маълум бошад, ки $tg2\alpha = 4$ аст.

159. Ҳисоб кунед: $\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}$.

Ҷавобҳо:

1. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; **2.** $2\cos\alpha\cdot\cos\beta$; **3.** $а)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)$; $б)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi)$; **5.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **6.** $\cos\alpha$; **7.** $а)\frac{36}{85}$; $б)\frac{84}{85}$; **8.** $а)\frac{\sqrt{2}}{2}$; $б)0; в)\frac{1}{2}; г)\frac{\sqrt{2}}{2}; д)0$; **9.** $а)\cos\varphi$; $б)\sin 2\alpha$; $в)\cos\alpha$; $г)-\sin\alpha$; **11.** $а)x^2+x$; $б)\frac{x-4}{4(x-1)}$. **12.** Ифодаҳои $а)$ ва $д)$ мусбатанд; ифодаҳои боқимонда манфӣ. **14.** $а)(-\infty;-1)$; $б)\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right)$; **15.** Адади хурд 395; адади калон 495. **16.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **19.** $-\sin\alpha$; **20.** $-\frac{84}{85}; -\frac{36}{85}$; **21.** $а)\sin 50^\circ$; $б)\sin 85^\circ$; **22.** $а)1; б)\frac{1}{2}; в)\frac{1}{2}; г)-0,5$; **23.** $а)\cos\alpha$; $б)\sqrt{3}\cos\alpha$. **25.** $а)1; б)1$; **26.** $а)\frac{\sqrt{3}}{2}; б)-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $в)-\frac{\sqrt{3}}{2}; г)-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **27.** $а)[-\infty;-1]$; $б)(-\infty;0]\cup\left[3\frac{1}{4};+\infty\right)$; **28.** $а)\cos\alpha$; $б)-\sin\alpha$; **29.** $24 км$; **30.** $2\frac{3}{8}$; **31.** $а)2-\sqrt{3}$; $б)2+\sqrt{3}$; **32.** $а)1; б)\frac{1}{7}$; **33.** $а)\frac{1}{\sqrt{3}}$; $б)-\sqrt{3}$; **34.** $а)\sqrt{3}; б)1$; $в)1; г)\frac{1}{\sqrt{3}}$; **35.** $а)11\frac{7}{8}; \frac{25}{62}$; $б)1$ ва $-2\frac{3}{7}$. **37.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **38.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1$. **39.** 0; **40.** $а)(-3;-2),(3;1)$; $б)(3;-5),(5;-8)$; **41.** $а)60$ ва 20 ё 25 ва 37,5. **42.** $-0,96$; **43.** $\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha$; **44.** $а)2\cos\alpha$; $б)ctg\alpha$; $в)\sin\beta$; $г)\cos^2\alpha$; $д)\sin^2\beta$; $е)-\sin\alpha$; **45.** $а)2\cos 20^\circ$; $б)2\sin 50^\circ$; $в)\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$; $г)\cos 18^\circ$; **46.** $а)\cos^2\alpha$; $б)\sin 20^\circ$; $в)2\sin 50^\circ$; $г)1$; **47.** $а)\sin 2\alpha$; $б)\cos\alpha+\sin\alpha$; $в)\cos^2\beta$; **48.** $а)\frac{\sqrt{3}}{2}$; $б)-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **49.** $а)tg\beta$; $б)\sin\beta$; $в)2\cos 2\beta$; $г)\sin\beta$; **51.** $а)-\frac{1}{4}$; $б)-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $в)\frac{1}{8}$; $г)0$; **53.** $а)-2$; $б)\frac{1}{\sqrt{3}}$; $в)-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $г)0$; **54.** $а)(39;\infty)$; б) ҳал надорад. **55.** $а)5000$; $б)-780$; **56.** $а)5\sqrt{26}; -1\sqrt{26}; -5$. **57.** $а)-1$; $б)-0,5\sqrt{2}$; $в)\sqrt{2}-1$; $д)\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. **59.** $а)\sqrt{0,8}$;

б) $\sqrt{0}$;2; в) ± 2. **60.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$. **61.** $\sqrt{0.9}$; $-\sqrt{0.1}$; -3. **62.** а) b; б) $-ab$. **63.** а) $-\sqrt{10}$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$ б) 2; -2. **65.** а) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; б) 0.

66. 3км / соат. **67.** в) $\frac{1}{2}\cos 14^{\circ} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$. **68.** а) $\frac{1}{2}(\sin 30^{\circ} + \sin 10^{\circ})$;

б) $\frac{1}{2}(\cos 38^{\circ} - \cos 65^{\circ})$; в) $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2};\right)$ г) $\frac{1}{2}[\cos 2(\alpha+\beta) + \cos 4\beta]$. **69.**

а) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}\cos 10^{\circ}$; д) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{10} - \cos\frac{13\pi}{40}\right)$. **70.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos 10^{\circ}$;

в) $\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \cos(3\alpha+\beta)$; д) $\frac{1}{2}(\sin 4\alpha - \sin 6\alpha + \sin 2\alpha)$. **71.** а) $0{,}5\sin 2\alpha +$;

$+0{,}5\sin 2\beta$ б) $0{,}5\cos 40^{\circ} + 0{,}25$; в) $\cos 54^{\circ} + \cos 22^{\circ} \cdot \cos 18^{\circ} + \cos 14^{\circ}$;

г) $\cos 9\alpha + \cos 7\alpha + \cos 3\alpha + \cos\alpha$; д) $0.5\sin 2\alpha + 0{,}5\sin 4\alpha - 0{,}5\sin 6\alpha$;

е) $2\cos(2\alpha - 2\beta) + 2\cos(2\beta - 2\gamma) + 2\cos(2\gamma - 2\alpha) + 2$. **72.** а) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$;

б) $\frac{1}{4}(\sqrt{3}-2)$; в) $\frac{1}{4}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **73.** а) $\frac{1}{2}(1-\cos 4\alpha)$; б) $1+\sin 2\alpha$; в) $1-\sin 2\alpha$;

г) $1{,}5 + 2\cos 2\alpha + 0{,}5\cos 4\alpha$. **74.** а) $\frac{1}{2}(\sin 50^{\circ} + \sin 10^{\circ})$; б) $\frac{1}{2}(\sin 20^{\circ} - \sin 10^{\circ})$;

в) $\frac{1}{2}(\cos 35^{\circ} - \cos 65^{\circ})$; г) $\frac{1}{2}(\cos 2^{\circ} + \cos 88^{\circ})$. **75.** а) $3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-1)$;

б) $(x+7)(x-4)$; в) $9x^2 + 6x + 1 = 9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$. **76.** а) $(-3;-3)$; $(4;0{,}5)$;

б) $(2;5)$, $(2;-5)$, $(-2;5)$, $(-2;-5)$. **77.** а) 0; б) 0. **78.** $\begin{cases} 4{,}5x + 2{,}5y = 30, \\ 5x + 3y = 30. \end{cases}$

5км / с; 3км / с. **79.** а) $2\sin 35^{\circ}\cos 15^{\circ}$; б) $2\sin 4^{\circ}\cos 14^{\circ}$; в) $2\cos 20^{\circ}\cos 6^{\circ}$;

г) $2\sin 13^{\circ}\sin 6^{\circ}$; д) $-2\sin 19^{\circ}\cos 65^{\circ}$; е) $-2\sin\frac{7\pi}{48}\cdot\cos\frac{17}{48}\pi$. **80.**

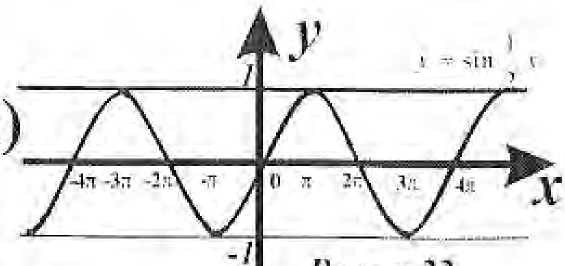
а) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{4}{5}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}}$; б) 2; в) $2\sin\alpha\cdot\cos 4\alpha$; г) $2\sin 5\alpha\cdot\sin\alpha$; д) $\dfrac{2\sin\alpha}{\cos 3\alpha}$;

е) $\dfrac{\sin 5\alpha}{\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha}$. **81.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; в) 0; д) $ctg 5^{o}\cdot tg 20^{o}$; ж) $\sqrt{2}\sin 25^{\circ}$. **82.**

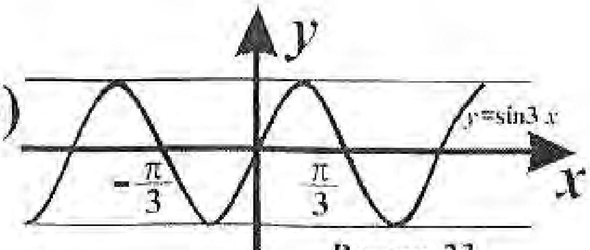
а) $-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$; в) $-2\sin\frac{13}{144}\pi\sin\frac{5}{144}\pi$. **84.** а) $\frac{1}{2}(\sin 30^\circ+\sin 10^\circ)$; б) $\frac{1}{2}(\sin 20^\circ-\sin 10^\circ)$; в) $\frac{1}{2}(\cos 35^\circ-\cos 65^\circ)$; г) $\frac{1}{2}(\cos 2^\circ+\cos 88^\circ)$. **85.** а) 3; б) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$. **86.** а) $(-\infty;-6)\cup(8;\infty)$; б) $\left(-\infty;-1\frac{2}{3}\right)\cup(3;\infty)$. **87.** 7см ва 12см. **88.** а) 0,6; б) $-\frac{63}{65}$; в) $\frac{4}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{3};\frac{3}{4}$. **89.** а) $-0,2$; б) 1,4. **90.** $tg2\alpha>2tg\alpha$; агар $0^\circ<\alpha<45^\circ$ бошад; $tg2\alpha<2tg\alpha$; агар $45^\circ<\alpha<90^\circ$. **91.** а) $\frac{123}{845}$; б) $\frac{323}{325}$. **92.** $-\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$. **93.** а) -1; б) $-\sqrt{3}$. **94.** $\sin 2\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **95.** 8 ва 12. **96.** а) манфӣ; б) мусбат; в) манфӣ; г) манфӣ. **97.** а) ҳама мусбат; в) манфӣ;мусбат, манфӣ, манфӣ. **98.** в) не; г) ҳа. **99.** в) не; г) ҳа. **100.** г) $\sin\alpha=-\frac{8}{17}, tg\alpha=-\frac{8}{15}, ctg\alpha=-\frac{15}{8}$. **101.** $\sin 270^\circ=$ $=\cos 180^\circ<\sin 0^\circ=\cos 90^\circ=\cos 270^\circ=\sin 180^\circ$. **103.** $x_{\max}=3$, . $y_{\max}=1$ **104.** 3 ва -4 ё 4 ва -3. **105.** а) 1; б) 0,5. **106.** а) $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ камшаванда, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ афзуншаванда, $\left[\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right]$ камшаванда, $y_{\min}=y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3$, $y_{\max}=$ $=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$, $y_{\min}=y\left(3\frac{\pi}{2}\right)=-3$; б) $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ камшаванда, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ афзуншаванда, $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ камшаванда, $y_{\min}=y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-0,5$, $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,5$; г) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ афзуншаванда, $\left[\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right]$ камшаванда, $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $y_{\max}=y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$. **107.** а) $\left[-\pi,-3\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[-3\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[\frac{\pi}{4};3\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $y_{\min}=y\left(-3\frac{\pi}{4}\right)=-1$, $y_{\max}=y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1$, $y_{\min}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $y_{\max}=y\left(3\frac{\pi}{2}\right)=1$, б) $\left[-\pi,-3\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $\left[-3\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

афзуншаванда, $\left[\frac{\pi}{4};3\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $y_{max}=y\left(-3\frac{\pi}{2}\right)=1$. $y_{min}=y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

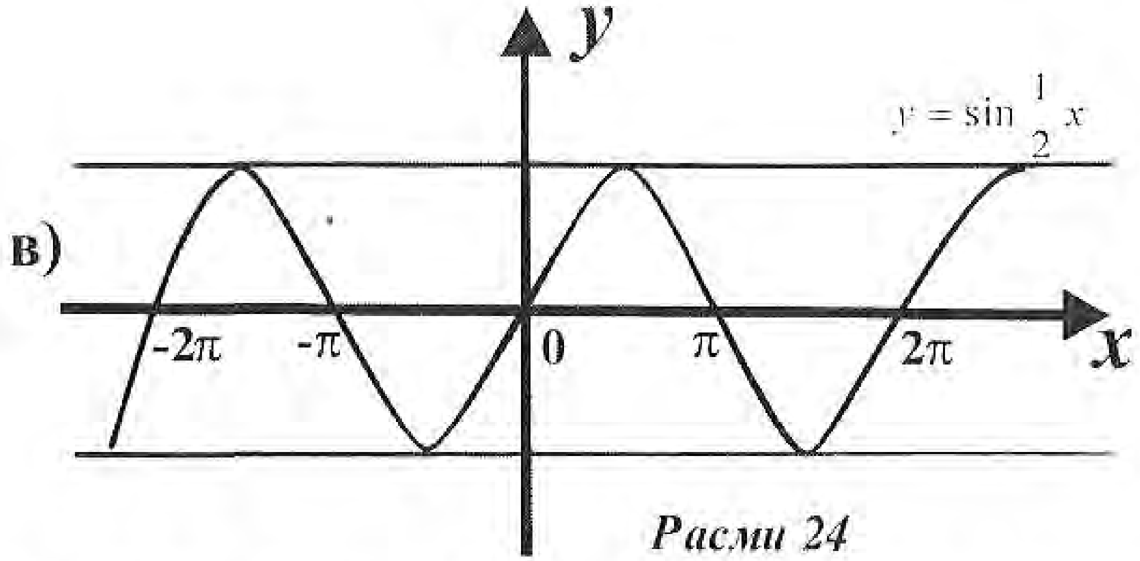
$y_{max}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $y_{min}=y\left(3\frac{\pi}{4}\right)=-1$; *в)* $\left[-\pi;-3\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда.
$\left[-3\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[\frac{\pi}{4};3\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда.
$y_{min}=y\left(-3\frac{\pi}{4}\right)=-1$. $y_{max}=y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=3$. $y_{min}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $y_{max}=y\left(3\frac{\pi}{4}\right)=3$.
г) $\left[-\pi;-3\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда. $\left[-3\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right]$ афзуншаванда, $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда, $\left[\frac{\pi}{4};3\frac{\pi}{4}\right]$ афзуншаванда, $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ камшаванда.
$y_{min}=y\left(-3\frac{\pi}{4}\right)=0,6$. $y_{max}=y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1,5$, $y_{min}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,5$.
$y_{max}=y\left(3\frac{\pi}{4}\right)=1,5$. **108.** *а)* $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ афзуншаванда. $[0;2\pi]$ камшаванда. $[2\pi;3\pi]$ афзуншаванда, $y_{max}=y(0)=1$, $y_{min}=y(2\pi)=-1$. **109.** *а)* -1; *б)* $-\sqrt{3}$. **110.** *а) 1; б) 0.* **111.** $d=7,5$, $C_4=-4$. **112.** *15дм ва 20дм.* **113.** $x^2-6x+7=0$. **114.** *а)* $\frac{1}{2}$; *б)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *в)* $\sqrt{3}$. **115.** *а)* $\frac{1}{\sqrt{3}}$; *б)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *в)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **116.** *а)* 1; *б)* 1; *в)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **117.** *а)* $\frac{1}{2}$; *б)* $\frac{1}{\sqrt{3}}$; *в)* $\sqrt{3}$. **118.** *а)* $\frac{1}{2}$; *б)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *в)* $\sqrt{3}$. **119.** *а)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *б)* 0,305; *в)* -1. **120.** *а)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; *в)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **121.** *а)* $\cos\alpha\cdot\cos\beta$;
б) $\frac{1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ **124.** *700 нафар мардон, 550 нафар занон.*
125.

а)


Расми 22

б)


Расми 23



Расми 24

127. а) $-2;0$; б) $-1,4;1$. **128.** $\frac{17}{2}$; **130.** *а) -1; -2 ва 2; 1;* *б) -3; -1 ва 3;1.*

131. а) $-\frac{1}{8}$; б) $-\frac{12}{5}$. **132.** *160м.* **135.** а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$. **136.** а) $2,5;6$; б) $-4;1\frac{5}{6}$. **137.** $x_{min}=\frac{5}{4}$; $y_{min}=\frac{1}{8}$. **138.** *48.* **143.** а) $(x+5)(7-x)$; б) $(2x+1)(4x+3)$; в) $n(2mx+1)(1-mnx)$. **144.** $x_{min}=4$; $y_{min}=-84$. **145.** *а) 1; б) 1.* **146.** $S_5=341$. **147.** а) $\cos 10^\circ$; б) $-\sqrt{3}\sin 6^\circ$; в) $\sin 10^\circ$; г) $\cos 10^\circ$. **148.** а) $\sin 2\alpha=\frac{4}{9}\sqrt{5}$; б) $\cos 2\alpha=-\frac{1}{8}$. **149.** а) $\sqrt{2}\cos 5^\circ$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sqrt{3}\cos 5^\circ$. **152.** а) $(-\infty,-1];[0,1]$ камшаванда, $[-1;0];[1;\infty]$ афзуншаванда,. $x_{max}=0$; $y(0)=0$, $x_{min}=\pm 1$, $y(-1)=y(1)=-1$; б) $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$ афзуншаванда, $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;4\frac{\pi}{3}+2n\pi\right]$ камшаванда, $x_{max}=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $y\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=1$, $x_{max}=\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $y\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)=-1$.