омӯхта шуда бошанд, дар ин пункт рафтори функсияро ҳангоми ҷой доштани ҳолатҳои в) ва г) тадқиқ мекунем.

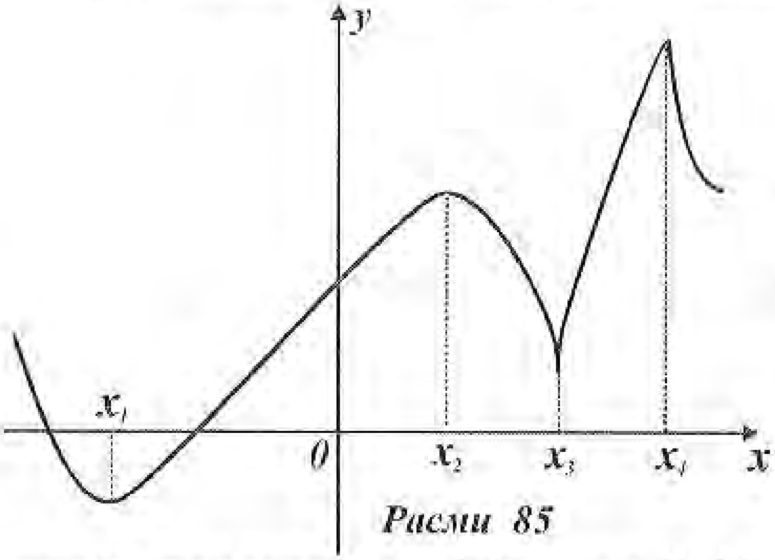
Таърифи 1.Нуқтаҳои дохилии соҳаи муайянии функсияи $f(x)$ -ро, ки дар онҳо ҳосилаи тартиби як баробари 0 аст, нуқтаи статсионарӣ[*] меноманд.

Таърифи 2. Маҷмуи нуқтаҳои статсионарӣ ва нуқтаҳои дохилии соҳаи муайянии функсия, ки дар онҳо ҳосила вуҷуд надорад, нуқтаҳои критикӣ ном доранд (ниг. ба нуқтаҳои x_1, x_2, x_3 ва x_4 -и расми 85)

Дар поён нишон медиҳем, ки фақат дар чунин нуқтаҳо функсия дорои экстремум шуда метавонад.

Масалан, ба расми 84 (ниг. ба п.48), ки дар он функсияи $y = 2x^3 - 3x^2$ акс ёфтааст, баргашта нуқтаҳои абсиссаашон $x = 0$ ва $x = 1$ -ро дида мебароем. Дар ин нуқтаҳо ҳосилаи функсия ба 0 баробар аст. Дар навбати аввал атрофи нуқтаи $x = 0$ (яъне фосилае, ки ин нуқтаро дар бар мегирад)-ро дида мебароем.

Аз нақша намоён аст, ки қимати калонтаринашро функсияи $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ дар ҳолати $x = 0 \in (-1;\ 1)$ будан, мегирад. Қимати функсияро, ки ба $x = 0$ мувофиқ меояд, максимуми он меноманд. Айнан ҳамин тавр $x = 1$ абсиссаи нуқтаи минимуми функсияи $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ мешавад, чунки қимати он дар ҳамин нуқта аз қиматҳои дилхоҳи дигари ягон атрофи $x = 1$ (масалан (1; 2)) хурдтар аст.



Расми 85

50.2. Теоремаи Ферма[**] (нишонаи зарурии мавҷудияти экстремум). Агар нуқтаи x_0 нуқтаи экстремуми функсияи дифференсиронидашавандаи $f(x)$ бошад, онгоҳ ҳосилаи он дар ҳамин нуқта ба 0 баробар аст.

---

[*] Статсионарӣ аз калимаи лотинии "Stationaris" гирифта шуда маъноаш беҳаракат аст.

[**] Ферма Пьер (1601-1665) - риёзидон ва ҳуқуқшиноси франсавӣ буда дар назарияи ададҳо асарҳои намоён навиштааст. Ӯ муаммоҳои зиёде пешниҳод кардааст, ки дар байнашон "муодилаи $x^n + y^n = z^n$ дар қиматҳои натуралии аз ду калон ҳалҳои натуралӣ надорад" то ҳоло исботи худро наёфтааст. Ӯ дар физика (аниқтараш дар қисми оптика) низ як қатор натиҷаҳои назаррас дорад. Ферма асосгузори геометрияи аналитикӣ мебошад. Хонанда як қатор маълумотҳои дигарро аз қисми таърихӣ ёфта метавонад.

Исбот. Агар нишон диҳем, ки ҳангоми $f'(x_0) \neq 0$ будан абсиссаи нуқтаи x_0 экстремуми функсия намешавад, онгоҳ теоремаро исбот кардагӣ мешавем. Бо ин мақсад аввал $f'(x)$ -ро калон аз 0 мегирем: $f'(x) > 0$. Онгоҳ аз таърифи ҳосила ҳангоми $x \to x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o) \qquad \left(\text{ё } \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o)\right).$$

Агар $f'(x) > 0$ бошад, пас худи нисбат ҳам барои ҳамаи x-ҳои ба x_0 кифоя наздик мусбат мешавад:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} > 0.$$

Аз нобаробарии охирин ҳосил мекунем:

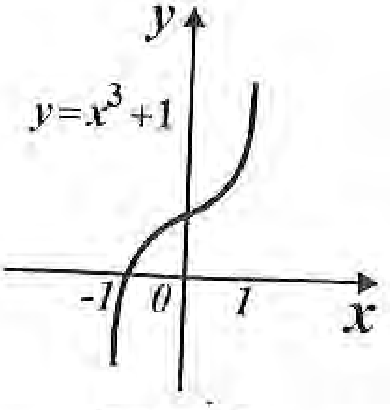
$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_O) \text{ агар } x > x_O \text{ бошад} \Rightarrow x_O - \text{абсиссаи нуқтаи} \\ \text{максимум шуда наметавонад;} \\ f(x) < f(x_O) \text{ агар } x < x_O \text{ бошад} \Rightarrow x_O - \text{абсиссаи нуқтаи} \\ \text{минимум шуда наметавонад.} \end{cases}$$

Ҳолати $f'(x) < 0$ айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад.

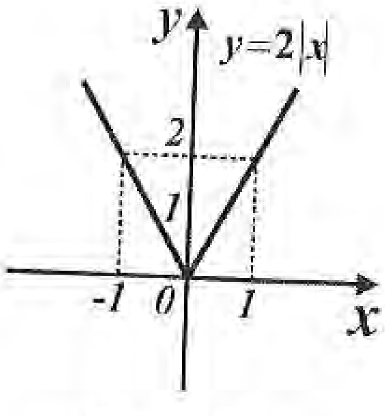
Қайд. Ҳосилаи функсияи $y = x^3 + 1$ дар нуқтаи $x = 0$ ба 0 баробар бошад ҳам, барои функсия нуқтаи экстремалӣ шуда наметавонад. (Расми 86). Функсия дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ афзуншаванда аст, чунки $f'(x) = \left(x^3 + 1\right)' = 3x^2 > 0$ мебошад. Барои ҳамин ҳам теоремаи исбот кардаамон шарти зарурии мавҷудияти экстремум буда, ҳаргиз шарти кифоягӣ шуда наметавонад.

Чӣ хеле, ки дар боло қайд кардем, функсия дар нуқтаҳои ҳосилааш мавҷуд набуда низ дорои экстремум мешавад. Ба сифати мисол функсияи $y = 2|x|$ -ро мегирем. Аз п.38-и боби IV (расми 64) маълум аст, ки функсияи $|x|$ дар нуқтаи $x = 0$ дорои ҳосила нест. Вале мушоҳидаи бевоситаи графики $y = 2|x|$ (расми 87) аз он шаҳодат медиҳад, ки 0 нуқтаи критикӣ буда, худи функсия дар он дорои минимум аст.

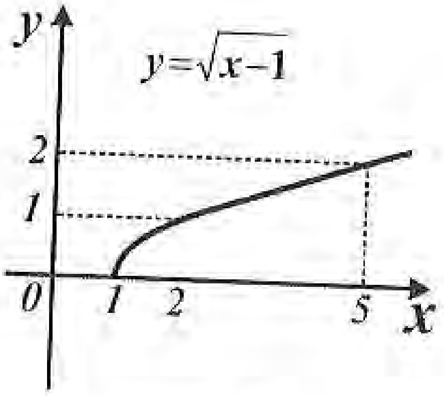
Ниҳоят қайд мекунем, ки агар чанде $f'(1)$ вуҷуд надошта бошад ҳам, нуқтаи $x = 1$ барои функсияи $f(x) = \sqrt{x-1}$ нуқтаи критикӣ шуда наметавонад (расми 88). Сабаби асосӣ дар он аст, ки нуқтаи $x = 1$ нуқтаи дохилии соҳаи муайянӣ нест.



Расми 86

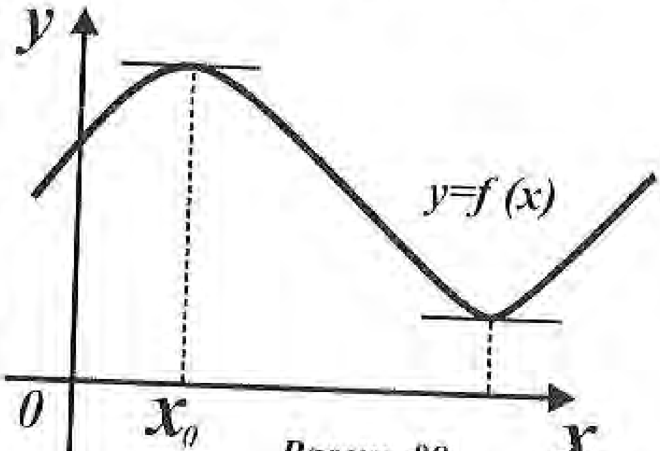


Расми 87



Расми 88

Шарти $f'(x_o)=0$ маънои геометрии зеринро дорад: дар нуқтаи экстремум функсияи дифференсиронидашавандаи $f(x)$ расандаи ба тири ОХ параллелро доро аст (расми 89)



Расми 89

Теорема (нишонаи кифоягии мавҷудияти экстремум). Агар функсияи $f(x)$-и дар нуқтаи x_o бефосила дар фосилаи $(a;\,x_o)$ шарти $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ ва дар фосилаи $(x_o;\,b)$ шарти $f'(x)<0$ $(f'(x)>0)$ -ро қаноат намояд, онгоҳ x_0 нуқтаи максимуми (минимуми) функсияи $y=f(x)$ мешавад.

Пеш аз исбот қайд мекунем, ки шарти теоремаро ин хел ҳам баён кардан мумкин аст: агар дар атрофи нуқтаи x_o аломати ҳосила аз плюс ба минус иваз шавад, x_o-нуқтаи максимум ва агар аломати ҳосила аз минус ба плюс тағйир ёбад, онгоҳ x_o-нуқаи минимум мешавад. Бо дигар ибора, агар ҳангоми гузариш аз болои нуқтаи x_o аломати ҳосила доимӣ намонад, онгоҳ функсия дар x_o дорои экстремум мешавад. Агар аломати ҳосила доимӣ монад, онгоҳ функсия дорои экстремум намешавад. Хотиррасон мекунем, ки маҳз аз ҳамин сабаб нуқтаи $x=0$ барои функсияи $y=x^3+1$ нуқтаи экстремалӣ набуд (аломати ҳосила дар атрофи нуқтаи $x=0$ фақат мусбат буд).

Акнун ба исботи теорема шурӯъ мекунем.

Исбот. Бигузор функсияи дар нуқтаи x_o бефосилаи $f(x)$ шарти $f'(x)>0$-ро дар нуқтаҳои $(a;x_o)$ қаноат намояд. Онгоҳ дар асоси теоремаи п.48 функсияи номбурда дар $(a;x_o)$ меафзояд. Аз ин ҷо $f(x)<f(x_o)$ мешавад. Дар фосилаи $(x_o;\,b)$ функсияи $f(x)$ кам

мешавад, чунки дар ин нуқтаҳо $f'(x)<0$ аст. Пас $f(x_o)>f(x)$ мешавад. Ҳамин тариқ барои x-ҳои нобаробари x_o-и фосилаи $(a;b)$ нобаробарии $f(x)<f(x_o)$ ичро мешавад, ки он аз нуқтаи максимумро ифода кардани x_o шаҳодат медиҳад.

Исботи дар боло кардаамон нишонаи кифоягии мавҷудияти максимуми функсия буд. Нишонаи кифоягии мавҷудияти минимум айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад.

Дар асоси муҳокимаҳои дар боло гузаронидаамон ҷадвали зеринро тартиб додан мумкин аст:

№№ б/т	Аломати $f(x)$ дар атрофи нуқтаи x_o		Равиши функсия дар нуқтаи x_o
	$x<x_o$	$x>x_o$	
1	–	+	Минимум
2	+	–	Максимум
3	–	–	Экстремум надорад; дар атрофи x_o функсия камшаванда аст.
4	+	+	Экстремум надорад; дар атрофи x_o функсия афзуншаванда аст.

Ҳангоми тадқиқи функсия оид ба экстремум аз рӯи дастури зерин амал мекунанд;

1). Соҳаи муайянии функсияро муайян карда ҳосилаи $f'(x)$ -ро меёбанд;

2) нуқтаҳои критикии функсияро ошкор месозанд;

3) аломати ҳосилаи функсияро дар атрофи нуқтаҳои критикӣ муайян мекунанд;

4) дар асоси нишонаи кифоягии мавҷудияти экстремум хулосаҳои заруриро мебароранд.

Ба дастури характери намунавӣ доштан боло такя намуда истода якчанд мисолу масъалаҳоро ҳал мекунем.

Мисоли 1. Функсияи $y=x^3-9x^2+24x$-ро доир ба экстремум тадқиқ мекунем.

1) Чун бисёраъзогии тартиби се функсия ва ҳосилааш дар тамоми фосилаи $(-\infty;+\infty)$ муайяну бефосила аст. $f'(x)$-ро меёбем:

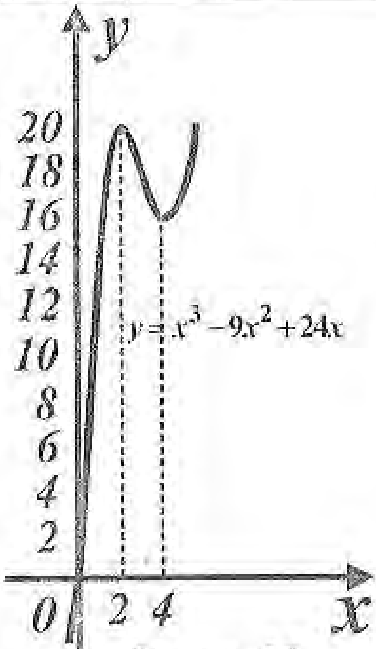
$$y'=f'(x)=\left(x^3-9x^2+24x\right)'=3x^2-18x+24.$$

2) Муодилаи $f'(x)=0$-ро ҳал карда нуқтаҳои статсионариро ошкор месозем;

$3x^2-18x+24=0;\ x^2-6x+8=0;\ x_{1,2}=3\pm1,\ x_1=4,\ x_2=2.$

3) -4). Нуқтаҳои 2 ва 4 тири ададиро ба се фосила ҷудо менамоянд. Аломати $f'(x)=(x-2)(x-4)$-ро дар онҳо ошкор сохта, қимати функсияро дар нуқтаҳои 2 ва 4 -и ба экстремум шубҳанок ҳисоб карда таблитсаи зеринро пур мекунем:

x	$(-\infty;2)$	2	$(2;4)$	4	$(4;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	20	$\downarrow$	16	$\uparrow$
Хулоса	афзуншаванда	max $\cap$	камшаванда	min $\cup$	афзуншаванда



Расми 90

Аз таблитса маълум, ки $y_{max}=f(2)=2^3-9\cdot2^2+24\cdot2=20$ ва

$$y_{min}=f(4)=4^3-9\cdot4^2+24\cdot4=64-144+96=16$$

мешавад. Графики функсия дар расми 90 тасвир карда шудааст.

Мисоли 2. Функсияи $y=\sqrt{x^2-2x}$ -ро доир ба экстремум тадқиқ мекунем.

Ин функсия дар тамоми нуқтаҳои нобаробарии $x^2-2x\geq0$ -ро қаноаткунанда муайян аст. Онро бо ёрии методи фосилаҳо ҳал карда $D(f)=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$ -ро ҳосил менамоем.

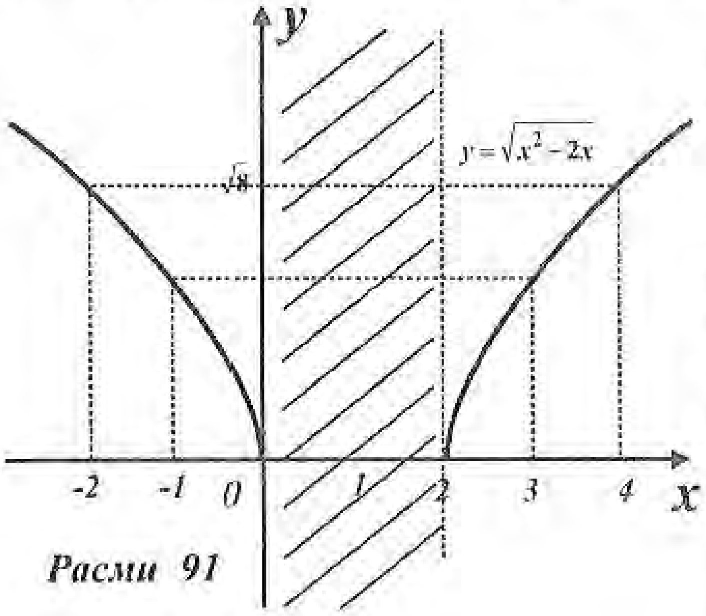
$f'(x)$-ро аз рӯи формулаи $\left(\sqrt{U}\right)'=\frac{U'}{2\sqrt{U}}$ -и ҷадвали ҳосилаҳо меёбем:

$$y'=f'(x)=\left(\sqrt{x^2-2x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}\cdot\left(x^2-2x\right)'=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

Аз $f'(x)=0$ муодилаи $x-1=0$ ҳосил мешавад, ки ҳаллаш $x=1\notin D(f)$. Нуқтаҳои $x=0$ ва $x-1=0$ -и соҳаи муайяниро, ки дар онҳо ҳосила вуҷуд надорад, дар тири ададӣ қайд мекунем. Баъд аз он, ба монанди мисоли 1 таблитсаи зеринро пур мекунем:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	–	вуҷуд надорад	вуҷуд надорад	+
$f(x)$	$\downarrow$	0	вуҷуд надорад	$\uparrow$
Хулоса	камшаванда	экстремум надорад	функсия муайян нест	афзуншаванда

Функсия дар фосилаи $(-\infty; 0)$ фақат кам ва дар фосилаи $(2; +\infty)$ фақат меафзояд. Тағирёбии аломат дар атрофи нуктаҳои 0 (аз рост муайян нест) ва 2 (аз чап муайян нест) мушоҳида карда намешавад, пас функсия дорои экстремум нест (расми 91. бо штрихҳо соҳае нишон дода шудааст, ки функсия номуайян аст).



Расми 91

Мисоли 3. Экстремуми функсияи $y = x^3(4-x)$ -ро меёбем.

Ҳал. Соҳаи муайянаш фосилаи $(-\infty; +\infty)$ мешавад (чун бисёраъзогии дараҷаи чор). Ҳосилаи ёфтаамон ҳам чун худи функсия дар ҳамаи нуктаҳои $D(f)$ муайян ва бефосила аст. Онро баробари нул кунонида решаҳои x=0 ва x=3-ро ҳосил мекунем, ки онҳ ба экстремум шубҳаноканд.

x	$(-\infty; 0)$	0	(0; 3)	3	$(3; +\infty)$
y^1	+	0	+	0	-
y	↑	0	↑	27	↓
хулоса	афзуншаванда	Экстр. надорад	афзунша-ванда	max ⌒	камшаванда

Нишондодҳои болоӣ шаҳодат медиҳанд, ки x=0 нуқтаи экстремум шуда наметавонад. Вале дар нуқтаи x=3 функсия дорои максимум аст, чунки дар атрофи он ҳосила аломаташро аз плюс ба минус иваз мекунад.

$$y_{\max} = y(3) = 3^3 \cdot (4-3) = 27 \cdot 1 = 27$$

50.3. Қайд. Функсияро доир ба экстремум бо ёрии ҳосилаи тартиби дуюм (ва аз он боло) ҳам тадқиқ мекунанд. Теоремае, ки беисбот дар поён меорем характери кифоягӣ дорад. Аз ин рӯ онро нишонаи дуюми кифоягии мавҷудияти экстремум низ меноманд.

Теорема. Бигзор $f'(x_o)=0$ ва дар нуқтаи x_0 $f''(x_o)\neq 0$ мавҷуд бошад. Онгоҳ, агар $f''(x_o)>0$ бошад, x_o-нуқтаи минимум ва ҳангоми $f''(x_o)<0$ будан x_o -нуқтаи максимуми функсияи $f(x)$ мешавад.

Барои ба дурустии теорема боварӣ ҳосил кардан функсияи $y = x^3 - 9x^2 + 24x$ -и дар мисоли 1 дида баромадаамонро, мегирем.

Маълум, ки $f'(2)=f'(4)=0$ аст. Азбаски $f''(x)=\left(3x^2-18x+24\right)=6x-18$, $f''(2)=-6<0$ ва $f''(4)=6>0$ аст, пас дар асоси нишонаи дуюми кифоягии мавҷудияти экстремум функсия дар нуқтаи $x_o=2$ дорои максимум ва дар нуқтаи $x=4$ дорои минимум мешавад. Чӣ хеле, ки мебинем ин натиҷа ба натиҷаи мисоли 1 яхкела аст.

Мисоли 4. Аз рӯи нишонаи дуюми кифоягии мавҷудияти экстремум функсияҳои зеринро татқиқ мекунем:

а) $f(x)=x^3-3x+4$;

б) $f(x)=x^4-8x^2+16$.

Ҳал. а) Худи функсия (чун бисёраъзогии тартиби се) ва ҳосилааш $f'(x)=3x^2-3$ (чун ду аъзогии квадратӣ) дар тамоми маҷмӯи $R=(-\infty;+\infty)$ муайяну бефосила аст. Муодилаи $f'(x)=0$-ро ҳал карда нуқтаҳои статсионариро меёбем:

$$f'(x)=0, \qquad 3x^2-3=0,$$
$$3\left(x^2-1\right)=0, \qquad x=\pm 1.$$

Акнун ҳосилаи тартиби дуюмро ёфта қимати онро дар нуқтаҳои ± 1 ҳисоб мекунем:

$$f''(x)=\left(3x^2-3\right)=6x-0=6x; \qquad f''(1)=6\cdot 1=6>0$$

ва

$$f''(-1)=6(-1)=-6<0$$

Пас, функсия дар нуқтаи x=1 дорои минимум мешавад:

$y_{\min}=f(1)=1^3-3\cdot 1+4=5-3=2; \qquad y_{\min}=2$

Дар нуқтаи $x=-1$ бошад, функсия дорои максимум мешавад:

$y_{\max}=f(-1)=(-1)^3-3(-1)+4=-1+3+4=6; \qquad y_{\max}=6$.

б) Чун мисоли а) $D(f)$ ва $D(f')$ тамоми маҷмӯи R мешавад. Муодилаи $f'(x)=0$ бошад ба $4x^3-16x=0$, $4x\left(x^2-4\right)=0$ меорад, ки аз он нуқтаҳои $x_1=-2, x_2=0$ ва $x_3=2$-и ба экстремум шубҳанокро меёбем.

Ҳосилаи тартиби ду ва қиматҳои он дар нуқтаҳои x_1, x_2 ва x_3

$$f''(x)=f'(x)=\left(4x^3-16x\right)'=12x^2-16;$$
$$f''(-2)=32>0, \quad f''(0)=-16<0, \quad f''(2)=32>0$$

мешаванд. Яъне дар нуқтаҳои ± 2 функсия дорои минимум $\left(y_{\min}=f(\pm 2)=0\right)$ ва дар нуқтаи 0 дорои максимум $\left(y_{\max}=f(0)=16\right)$ мешавад.

Бо мақсади аёнитар тасвир кардани рафти ҳал истифодаи таблицаи зерин хеле муфид аст:

x	-2	0	2
$f'(x)$	0	0	0
$f''(x)$	32	-16	32
$f(x)$	min $\cup$	max $\cap$	min $\cup$
Хулоса	$y_{\min} = 0$	$y_{\max} = 16$	$y_{\min} = 0$

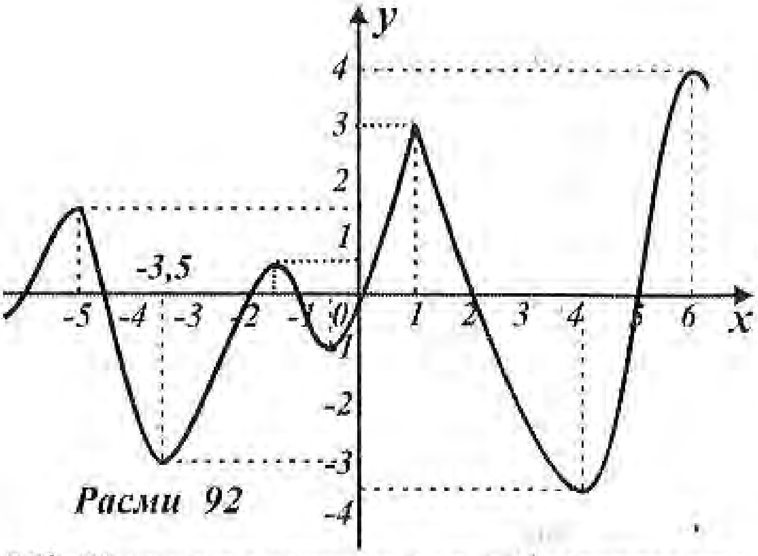
Қайд. Агар дар рафти тадқиқ аз рӯи нишонаи дуюм ба $f'(x_o) = 0$ ва $f''(x_o) = 0$ омада расем, онгоҳ масъала ҳал нашуда мемонад. Бинобар он дар ин ҳолат ба нишонаи аввала муроҷиат кардан зарур аст.

?

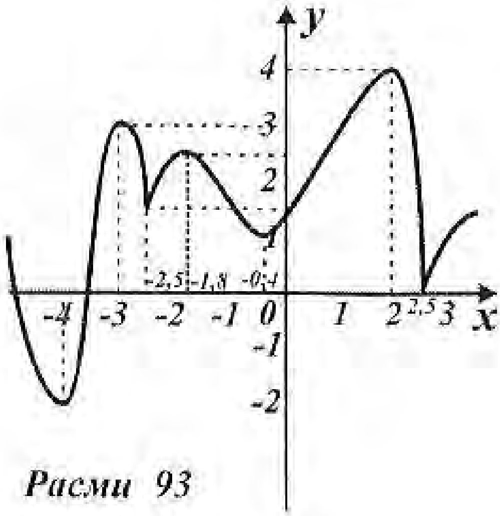
1. Таърифи минимум ва максимуми функсияро диҳед. Мисолҳо оред.
2. Кадом нуқтаҳоро нуқтаҳои статсионарӣ меноманд? Нуқтаи критикӣ чист?
3. Функсия дар кадом нуқтаҳо ба экстремум шубҳанок аст?
4. Шарти зарурии мавҷудияти экстремумро баён кунед. Оё натиҷаи ин шарт ҳамавақт нуқтаҳои ба экстремум шубҳанокро дода метавонад? Мисолҳое оред, ки шарти зарурии мавҷудияти экстремум иҷро шавад ҳам, вале дар x_0 функсия дорои экстремум намешавад.
5. Нишонаи кифоягии мавҷудияти экстремумро баён кунед. Мисолҳои аёнӣ биёред. Тарзи бо ёрии ҳосилаи тартиби ду доир ба экстремум тадқиқкунии функсияҳоро баён кунед.

567. Дар расми 92 графики функсияи $y = f(x)$ кашида шудааст. Нуктаҳои максимум ва минимуми функсияро ёбед.

568. Дар расми 93 графики функсияи $y = f(x)$ акс ёфта аст. Нуқтаҳои критикии функсияро ёбед.



Расми 92



Расми 93

569. Нуқтаҳои статсионарии функсияҳоро ёбед:

а) $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$; б) $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x$; в) $y=\sin x-\cos x$.

570. Нуқтаҳои критикии функсияҳои зеринро ёбед:

а) $y=x^2(x-12)^2$; б) $y=(x-1)(x-2)^3$;

в) $y=x^4-8x^3+24x^2-32x+12$; г) $y=\dfrac{16}{x(4-x^2)}$;

д) $y=x^3-3x^2+3x+7$; е) $y=3\sqrt{x}$.

571. Нуқтаҳои экстремум ва экстремали функсияро ёбед:

а) $y=9x^2-3x+11$; б) $y=3x^2+5x-19$; в) $y=-x^2+8x$;

г) $y=\dfrac{x}{5}+\dfrac{5}{x}$; д) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{18}{x}$; е) $y=1-6x-x^2$;

ж) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3$; з) $y=3x^3+1$; и) $y=\sqrt{x^2+1}$.

572. Агар

а) $f(x)=2x^2-8x$; б) $f(x)=x^3-27x+1$; в) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$;

г) $f(x)=\dfrac{4-x}{3x+6}$; д) $f(x)=6x^5+15x^4+10x^3$.

бошад, он гоҳ фосилаҳои монотонӣ ва нуқтаҳои экстремуми функсияро ёбед.

573. Нуқтаҳои ба экстремум шубҳанокро ошкор сохта қимати функсияро дар ин нуқтаҳо ёбед:

а) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$; б) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$;

574. Оё функсияҳои зерин нуқтаҳои ба экстремум шубҳанок доранд:

а) $y = 5x - 7$; б) $y = 9 - 11x$; в) $y = 2x^3 + x$; г) $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{x}$?

575. Функсияи

а) $f(x) = x^3(x-1)^2$; б) $f(x) = 3x^5 - x^4 - 1$;

в) $f(x) = \frac{4}{x(2-x^2)}$; г) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

-ро бо ёрии ҳосилаи тартиби ду доир ба экстремум тадқиқ намоед.

Машқҳо барои такрор

576. Қатора аз назди одами дар платформа беҳаракат истода дар муддати 6 сония, аз платформаи дарозиаш 150 м дар муддати 15 сония гузашт. Суръати ҳаракати қатора ва дарозии онро ёбед.

577. Ҳисоб кунед:

а) $\frac{3\left(0,5:1,25+\frac{7}{5}\right):1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}}{\left(1,5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$; б) $\left(\frac{3,75+2,5}{2\frac{1}{3}-1,875}-\frac{2.75-1,5}{8\frac{1}{8}+1,5}\right):\frac{10}{11}$.

578. Касрро содда кунед:

а) $\frac{a^2+2x-15}{a^2-9}$; б) $\frac{2b^2-5b-3}{b^2+b-6}$; в) $\frac{2c^2-3c-2}{c^2+3c-10}$.

579. Исбот кунед, ки суммаи

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

ба $\frac{n}{n+1}$ баробар аст.

580. Муодиларо ҳал кунед:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{18}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

581. Чор адади пай дар паи натуралиеро ёбед, ки ҳосили зарбаш ба 5040 баробар бошад.

582. Ҳосилаи тартиби дуи функсияро ҳангоми

а) $y = 4x - 3\sin 2x$; б) $y = 5x + 3\cos 5x$.

будан, ёбед.

583. Исбот кунед, ки функсияи $y = x + \frac{1}{x}$ дар фосилаи (-1; 1) камшаванда аст.

584. Агар $y = 2x + 1$ бошад, онгоҳ дар кадом қиматҳои x ифодаи $-3y' + 8y$ баробари 0 мешавад.

51. Муайян кардани миқдори решаҳои муодила

Тадқиқи функсия доир ба экстремум имконият медиҳад, ки миқдори решаҳои муодиларо муайян намоем. Бо ин мақсад ду муодилаҳои

$3x^5 - 4x^3 - 3x - 24 = 0$ ва $x^6 + 2x^4 + x^2 - 3 = 0$

-ро дида мебароем.

а) Тарафи чапи муодилаи якум функсияи

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 - 3x - 24$$

аст, ки соҳаи муайяниаш $D(f) = (-\infty; +\infty)$ мешавад. Онро доир ба экстремум тадқиқ мекунем. Баробарии $f'(x) = 0$ ба муодилаи биквадратии

$$15x^4 - 12x^2 - 3 = 0$$

ё

$$5x^4 - 4x^2 - 1 = 0$$

меорад. Онро бо ёрии гузориши $x^2 = t$ (ниг. ба п.14, боби II, синфи 9) ҳал карда решаҳои $x = \pm 1$-ро ҳосил мекунем. Аз рӯи нуқтаҳои ± 1, ки ба экстремум шубҳаноканд, ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

x	$(-\infty; -1)$	-1	(-1; 1)	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	↑	-20	↓	-28	↑
хулоса	афзуншаванда	max ∩	камшаванда	min ∪	афзуншаванда

Аз он аён аст, ки дар фосилаи $(-\infty; -1)$ функсия аз $-\infty$ то -20 афзуда, инчунин аломати қимати функсия дар нугҳои порча якхелаанд (манфӣ аст) бинобарон муодилаи $f(x) = 0$ реша надорад.

Дар фосилаи (-1;1) ҳам муодила реша дошта наметавонад, чунки қимати функсия аз –20 то –28 кам шуда, аломаташро тағйир намедиҳад. Решаи ягонаи муодилаи

$$3x^5 - 4x^3 - 3x - 24 = 0$$

дар фосилаи $(1; +\infty)$ мешавад, чунки дар он қимати функсия аз -28 то $+\infty$ афзуда аломаташро дар нугҳои фосила тағйир медиҳад.

б) Аз руи схемаи болоии тадқиқот амал карда, барои $f'(x) = 0$ муодилаи

$$6x^5 + 8x^3 + 2x = 0$$

ё

$$2x(3x^4 + 4x^2 + 1) = 0$$

-ро ҳосил мекунем. Барои х-ҳои дилхоҳи ҳақиқӣ $3x^4+4x^2+1>1$ (яъне $\neq 0$ аст) мешавад. Бинобарон, муодила якто решаи ҳақиқии x=0-ро дорад, ки соҳаи муайяниро ба ду фосилаҳои $(-\infty;\ 0)$ ва $(0;\ +\infty)$ ҷудо мекунад.

Барои функсияи тадқиқшаванда ҷадвали зерини натиҷаҳо дуруст аст:

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ +\infty)$
y^1	+	0	+
y	↑	-3	↑
хулоса	афзуншаванда	экстремум надорад	афзуншаванда

Аз ҷадвал намоён аст, ки решаи ягонаи муодила дар фосилаи $(0;\ +\infty)$ ҷойгир аст, чунки дар ин фосила қимати функсия аз –3 то $+\infty$ меафзояд (ба аломати қимати функсия дар нугҳои фосила диққат диҳед).

?

1. Бо иҷрошавии кадом шартҳо функсияи $y=f(x)$ -и дар фосилаи $(a,\ b)$ бефосила ба нул баробар мешавад.
2. Оё мавҷудияти решаи муодиларо бо ёрии ҳосила нишон додан мумкин аст?

585. Оё муодилаи зерин дар интервали додашуда реша дорад:
а) $x^3+5x-3=0$, (0; 0,6); б) $x^5+x^4-x^2+10x-5=0$ (0; 0,5)?

586. Миқдори решаҳои муодилаи
а) $x^6-6x^4+3=0$; б) $x^5-5x^3+11=0$;
в) $x^6+2x^4+x^2-3=0$; г) $x^4-32x+15=0$.
-ро ёбед.

587. Бо ёрии тадқиқи функсия доир ба экстремум мавҷудияти решаҳои муодилаи $f(x)=0$ -ро дар фосилаҳои монотонӣ нишон диҳед;
а) $f(x)=2x^5-x^3-7x+1$; б) $f(x)=3x^3-x^2-7x+6$;
в) $f(x)=4x^2-8x+1$; г) $f(x)=x^5-45x+4$.

588. Нишон диҳед, ки муодилаҳои
а) $x^5-2x^4-x^2-5=0$; б) $x^5-5x+6=0$;
в) $x^3-6x+10=0$; г) $\frac{1}{4}x^4+x-3=0$

решаҳои ягонаи ҳақиқӣ доранд. Дар ҷавоб фосилае, ки ин решаро дар бар мегирад, нависед.

589. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x+y=12; \\ xy=32; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y^2=3, \\ xy^2=28. \end{cases}$

590. Дар кадом қиматҳои х ифодаҳои зерин маъно доранд:

а) $\sqrt{x^2+5x+6}$; б) $\sqrt{x^2-5x+6}$; в) $\sqrt{x^3-5x^2+6x}$?

591. Оё нуқтаи (-2;1) ба графики функсияи

а) $y=3x^2+9x-29$; б) $y=|4-3x|-9$; в) $y=\dfrac{2x^2+4}{x-1}$.

таалуқ дорад ё не?

592. Фосилаҳои бефосилагии функсияи

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-36}{x+6}, & x\neq -6, \\ -13, & x=-6. \end{cases}$$

-ро ошкор созед.

593. Ҳосилаи функсияро дар нуқтаҳои нишондодашуда ёбед (яъне $f'(x_o)$-ро):

а) $f(x)=x^3-2x+18,\ x_o=2$; б) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}+3,\ x_o=1$;

в) $f(x)=3x+\dfrac{1}{3x},\ x_o=-1$; г) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^3+1},\ x_o=-2$.

594. Фосилаҳои монотонии функсияро бо ёрии ҳосила ёбед:

а) $y=x^2+3$; б) $y=2x^2-4$.

595. Координатаи қуллаи параболаи $y=2x^2-4x+9$-ро ёбед.

52. Сохтани графики функсия

Бо мақсади хусусиятҳои муҳими функсияҳоро ба ҳисоб гирифтан ва бе хато сохтани тарҳи (эскизи) графики функсия дохил намудани схемаи зерин хеле муфид аст:

1. Хосияти функсияҳои тадқиқшавандаи $y=f(x)$-ро ба ҳисоб гирифта соҳаи муайянии онро меёбанд. Барои осонии кор онро дар фосилаи $(a;\ b)$ маълум мешуморем: $D(f)=(a;\ b)$ (он тамоми нуқтаҳои тири ададиро низ ифода карданаш мумкин аст);

2. Ҷуфт, тоқ, даврӣ будан ё набудани функсияро ошкор месозанд. Ин пункт имконият медиҳад, ки мувофиқан нисбат ба тири ОУ, ибтидои координата ва ё дар фосилаҳои муайян симметрӣ будани графикро муайян намоем;

3. Нуқтаҳои буриши графики функсияро бо тирҳои координата меёбем (яъне ба ёфтани нуқтаҳои $(0; f(0))$ ва $(x_o;\ 0)$, ки барои охиринаш $f(x_o)=0$ аст, машғул мешавем). Координатаи якчанд нуқтаҳоеро меёбем, ки ҷойгиршавии графикро дар чорякҳо ифода кунад;

4. Муодилаи $f(x)=0$-ро ҳал намуда фосилаҳои доимияти аломатро муайян мекунем, чунки фақат ҳангоми гузариш аз болои нулҳо[*] функсия аломаташро дигар менамояд;

5. Муодилаи $f'(x)=0$-ро ҳал карда нуқтаҳои статсионарии функсияро ёфтан мумкин аст. Ба онҳо нуқтаҳои ба соҳаи муайянӣ дохилшавандаю, вале дар онҳо ҳосилаи тартиби якаш мавҷуд набударо илова намуда нуқтаҳои критикиро ошкор сохтан зарур аст. Аломати ҳосилаи функсияро дар атрофи нуқтаҳои критикӣ муайян намуда фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро меёбем;

6. Характери нуқтаҳои критикиро омӯхта (дар асоси нишонаи кифоягии мавҷудияти экстремум) қиматҳои экстремалии функсияро дар ин нуқтаҳо меёбем;

7. Рафтори функсияро ҳангоми $x \to a$ ва $y \to b$ (яъне дар нугҳои фосилаи соҳаи муайянӣ) тадқиқ мекунем;

8. Дар асоси пунктҳои 1-7 графики функсияро месозем.

Қайд. Ҳангоми тадқиқи баъзе функсияҳо на ҳамаи пунктҳои болоӣ истифода бурда мешаванд.

Масалан, агар ҳосилаи функсия дар тамоми нуқтаҳои $D(f)$ нобаробари 0 бошад (яъне ё камшаванда ва ё афзуншаванда), онгоҳ ҳоҷат ба тадқиқ аз рӯи пункти 6 намемонад.

Мисоли 1. Графики функсияи $y=3x^2-6x+4$-ро месозем.

Ҳал. 1. $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$. 2. Функсия на ҷуфт аст ва на тоқ, чунки барояш шартҳои $f(-x)=f(x)$ ва $f(-x)=-f(x)$ дар $(-\infty;\ +\infty)$ иҷро намешаванд. Яъне график ба тири OY ва нисбат ба ибтидои координата симметрӣ нест. 3. График тири OX-ро намебурад, чунки дискриминанти муодилаи $3x^2-6x+4=0$ (яъне $f(x)=0$) манфӣ аст. График бо тири OY дар нуқтаи (0; 4) бурида мешавад. 5. $f'(x)=0$-ро ҳал мекунем:

$$\left(3x^2-6x+4\right)'=0,\ 6x-6=0,\ 6x=6,\ x=1.$$

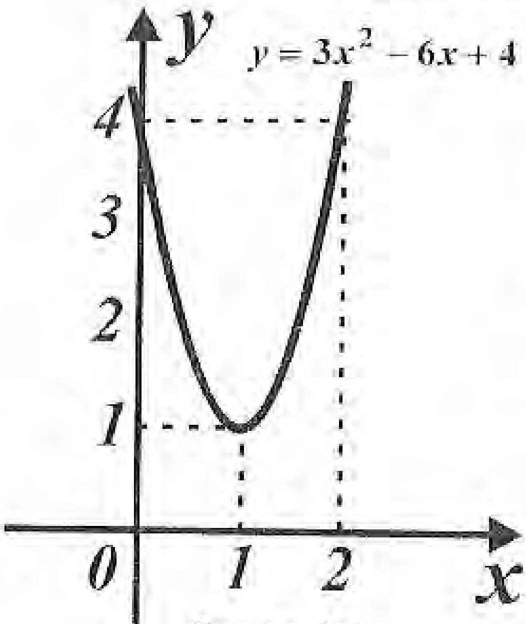
Азбаски дар фосилаи $(-\infty; 1)$ аломати ҳосила манфӣ ва дар $(1; +\infty)$ мусбат аст, пас дар нуқтаи x=1 функсия дорои минимум мешавад:

$$y_{\min}=y(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1+4=3-6+4=1.$$

---

[*] мисолҳои зиёде мавҷуданд, ки ҳангоми гузариш аз болои нуқтаҳои канишн (яъне нуқтаҳои бефосилагиро вайронкунанда) аломати қимати худро тағйир медиҳанд.

8. Графики функсия намуди зеринро дорад (Расми 94).



Расми 94

Мисоли 2. Функсияи

$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ - ро тадқиқ намуда графикашро месозем.

Ҳал: Тадқиқро аз рӯи схемаи пешниҳодшуда амалӣ мегардонем.

1. Функсия чун бисёраъзогӣ дар тамоми $R = (-\infty; +\infty)$ муайян аст.

2. Соҳаи муайянӣ нисбат ба 0 симметрӣ буда, вале худи функсия дар он на ҷуфт асту ва на тоқ. Функсия даврӣ ҳам нест, чунки барои ихтиёри $x \in R = (-\infty; +\infty)$ $f(x + \omega) \neq f(x)$

3-6. График тири 0У-ро (яъне x=0) дар нуқтаи (0;1) мебурад.

Муодилаи $f'(x) = 0$ -ро ҳал мекунем:

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \ (x-1)(x-3) = 0, \ x_1 = 1, \ x_2 = 3.$$

Аз рӯи ин ду нуқтаи ба экстремум шубҳанок ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↑	$\frac{7}{3}$	↓	1	↑
Хулоса	афзуншаванда	max ∩	камшаванда	min ∪	афзуншаванда

Қимати функсия дар фосилаи $(-\infty; 1)$ аз $-\infty$ то $\frac{7}{3}$ меафзояд (аломатҳо дар нугҳои порча гуногунанд!), пас фақат дар ҳамин фосила (аниқтараш дар $(-1; 0) \in (-\infty; 1)$ муодилаи $f(x) = 0$ расо як реша доошта метавонад. Онро бо x_o ишорат карда $(x_o \in (-1; 0))$ муайян менамоем, ки график тири ОХ-ро дар нуқтаи (x_o; 0) мебуридааст.

Аз тарафи дигар графики функсия дар нуқтаҳои абсиссаашон тааллуқи фосилаи $(-\infty; x_o)$ дар чоряки сеюми нимҳамвории поёнии тири OX ва дар нуқтаҳои абсиссаашон тааллуқи $(x_o; +\infty)$ буда дар нимҳамвории аз тири ОХ боло ҷойгир мешаванд.

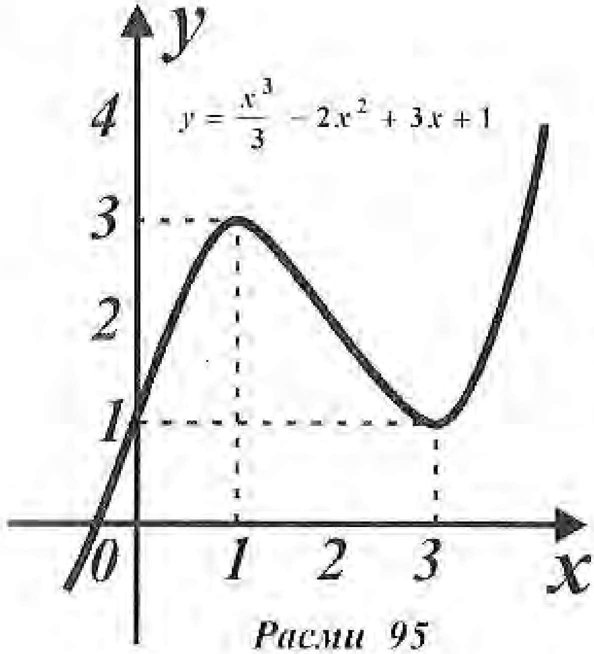
Ниҳоят аз ҷадвал чунин бармеояд, ки функсия дар фосилаҳои $(-\infty;1)$ ва $(3;+\infty)$ афзуда, дар фосилаи (1; 3) кам мешавад. Яъне дар атрофи нуқтаҳои 1 ва 3 ҳосила аломаташро иваз мекунад ва

$$y_{\max} = f(1) = \frac{7}{3}, \quad y_{\min} = f(3) = 1$$

мешавад.

7. Маълум, ки ҳангоми $x \to -\infty$ $y \to -\infty$ ва ҳангоми $x \to +\infty$ $y \to +\infty$.

8. Дар асоси маълумотҳои 1-7 эскизи график намуди расми 95 -ро мегирад.



Расми 95

Мисоли 3. Функсияи $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ -ро тадқиқ карда графикашро месозем.

Ҳал . $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

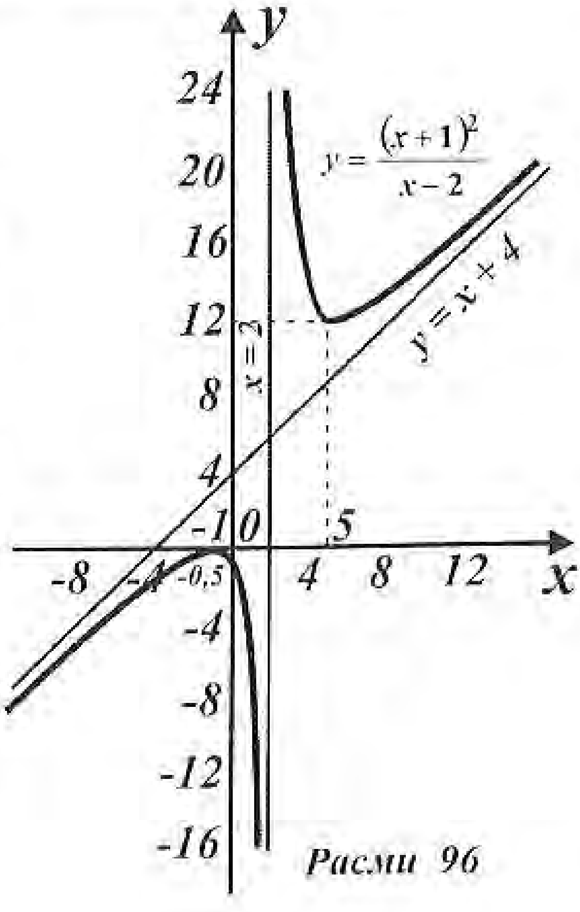
Бефосилагиаш дар нуқтаи x=2 вайрон мешавад, яъне адади 2 абсиссаи нуқтаи каниш буда, хати каҷи графикро ифодакунанда дар он канда мешавад.

2. Функсия на даврӣ, на ҷуфт ва на тоқ аст, яъне график ба ягон хел хосиятҳои симметрӣ доро нест.

3. График тирҳои координатавиро дар нуқтаҳои (-1; 0) ва $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ мебурад.

4. Функсия дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$ ва (-1; 2) қиматҳои фақат манфӣ (яъне график дар нимҳамвории дар поёни тири OX воқеъ буда, ҷойгир аст) ва дар қиматҳои $(2;+\infty)$ қиматҳои фақат мусбат мегирад (яъне график дар нимҳамвории дар болои тири OX воқеъ буда, ҷойгир аст)

5;6. Муодилаи $f'(x) = 0$ -ро ҳал мекунем:



Расми 96

$$f'(x)=\left[\frac{(x+1)^2}{x-2}\right]'=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{(x+1)(2x-4-x-1)}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}=0\Rightarrow(x+1)(x-5)=0,\ x_1=-1,\ x_2=5.$$

Бо мақсади ёфтани интервалҳои монотонӣ ва экстремуми функсия ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

x	$(-\infty;-1)$	-1	(-1; 2)	2	(2; 5)	5	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	Вуҷуд надорад	—	0	+
$f(x)$	↑	0	↓	Вуҷуд надорад	↓	12	↑
Ху-лоса	афзуншаванда	∩ max	камшаванда	Экст. нест	камшаванда	∪ min	афзуншаванда

Аз таблитса аён аст, ки (-1; 0) нуқтаи максимуми функсия ва (5; 12) -нуқтаи минимуми функсия мешавад.

7. Ҳангоми $x\to 2$ $y\to\infty$ мекунад.

8. Натиҷаи пунктҳои 1-7-ро ҷамъбаст намуда графики функсияро месозем, ки он дар расми 96 акс ёфтааст.

Мисоли 4. Функсияи $y=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$-ро тадқиқ намуда графикашро месозем.

Ҳал. 1. Соҳаи муайянӣ ва бефосилагии (чун суммаи алгебравии функсияҳои бефосила) функсия тамоми нуқтаҳои тири ададӣ мешавад.

2-4. Функсия тоқ аст, чунки дар соҳаи нисбат ба 0 симметрии $(-\infty;+\infty)$ шарти

$$f(-x)=\sin(-x)-\frac{1}{2}\sin(-2x)=-\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x=-\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=-f(x)$$

иҷро мешавад. Пас, графикаш нисбат ба ибтидои координата симметрӣ аст.

Функсия даврӣ буда давраш $\omega=2\pi$. Аз ин рӯ тадқиқотро фақат дар порчаи $[-\pi;\ \pi]$ гузаронида, графикашро сохта натиҷаро (дар асоси хосияти давригӣ) ба тамоми тири ададӣ давом медиҳем.

Тоқ будани функсия имконият медиҳад, ки графикро на дар тамоми $[-\pi;\ \pi]$ балки дар $[0;\ \pi]$ созему баъд онро нисбат ба ибтидои координата симметрӣ инъикос намоем ва баъд даврӣ будани $f(x)$-ро ба ҳисоб гирем. Ҳамин тариқ, минбаъд тадқиқотро дар $[0;\ \pi]$ мегузаронем.

Барои ёфтани абсиссаи нуқтаҳои буриш бо тири OX муодилаи
$$\sin x - 0{,}5\sin 2x = 0$$
-ро ҳал мекунем.
Аз он
$$\sin x - \sin x \cdot \cos x = 0$$
ва ё
$$\sin x(1-\cos x) = 0$$
-ро ҳосил мекунем. Дар порчаи номбурдаи $[0;\ \pi]$ муодилаи охирин ду решаҳои $x_1 = 0$ ва $x_2 = \pi$ -ро дорад. Яъне графики функсия тири OX -ро дар ягон нуқтаи дохилии порча намебурад.

Дар фосилаи $(0;\ \pi)$ функсия факат қимати мусбат гирифта графикаш дар нимҳамвории болои тири OX ҷой мегирад (дар $\forall x \in (-\pi; 0)$ бошад $f(x) < 0$ шуда, графикаш дар нимҳамвории поёнӣ мавқеъ дорад).

Дар нугҳои порча $f(0) = f(\pi) = 0$ мешавад.

5,6. Барои ба фосилаҳои монотонӣ ноил гаштан муодилаи $f'(x) = 0$-ро ҳал мекунем:
$$\cos x - \cos 2x = 0,$$
$$\cos x - (1+\cos 2x) + 1 = 0,$$
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0,$$
$$\cos x = 1,\ \ \cos x = \frac{1}{2}.$$

Аз муодилаи якум $x_1 = 0$ ва аз дуюмаш $x_2 = \dfrac{2\pi}{3}$-ро мёбем. Нуқтаи $\dfrac{2\pi}{3}$ сегменти $[0;\ \pi]$-ро ба ду сегментҳои $\left[0;\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$ ва $\left[\dfrac{2\pi}{3};\ \pi\right]$ ҷудо мекунад.

Дар нуқтаҳои сегменти якум нобаробарии $f'(x) = \cos x - \cos 2x \geq 0$ иҷро мешавад. Пас, функсия дар он меафзояд.

Азбаски дар нуқтаҳои сегменти дуюм шарти $f'(x) \leq 0$ иҷро мешавад, пас дар он функсия кам мешавад.

Дар атрофи нуқтаи $x = \dfrac{2\pi}{3}$ афзуншавӣ ба камшавӣ иваз шуда функсия дорои максимум аст:

$$y_{max} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \; y_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

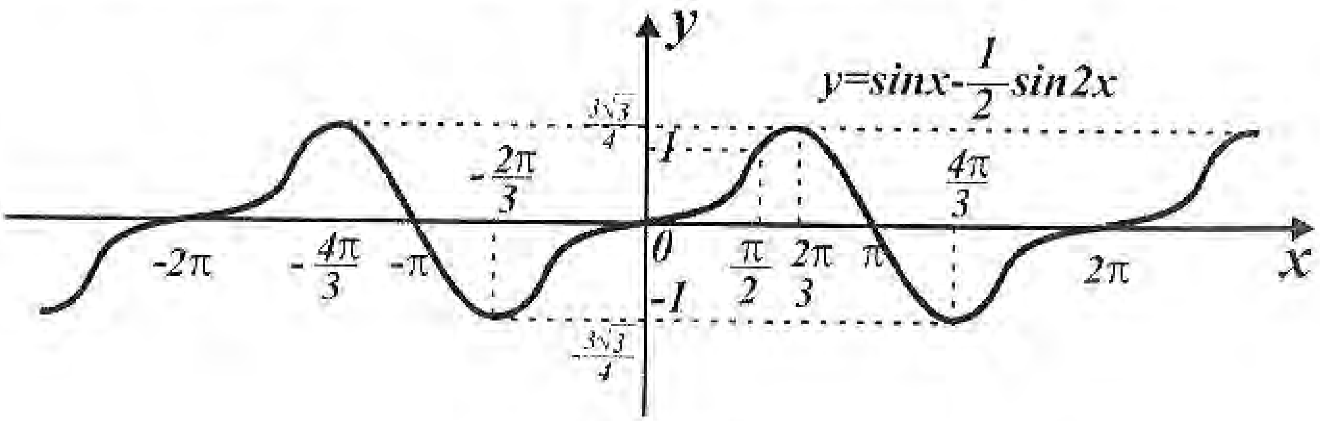
(дар нуқтаи $x = -\frac{2\pi}{3}$ функсия дорои минимум аст:

$$y_{min} = f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

7. Барои тарҳи (эскизи) дурусти графикро сохтан ҷадвали зерини баъзе қиматҳои функсияро меорем:

x	0	$\arccos\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f(x)$	0	$\approx\frac{3}{4}$	1	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

8. Графики функсия намуди зеринро дорад:



Расми 97

?

1. Барои сохтани графики функсия бо ёрии ҳосила аз рӯи кадом схема амал мекунанд?
2. Оё истифодаи ҳамаи 8 пункт дар тадқиқи функсияҳо ҳатмист?
3. Мисоли функсияҳоеро оред, ки барояш дастури пешниҳодшуда характери намунавиро дорад.

596. Аз рӯи графики функсияи $y = f(x)$-и дар расми 98 тасвирёфта

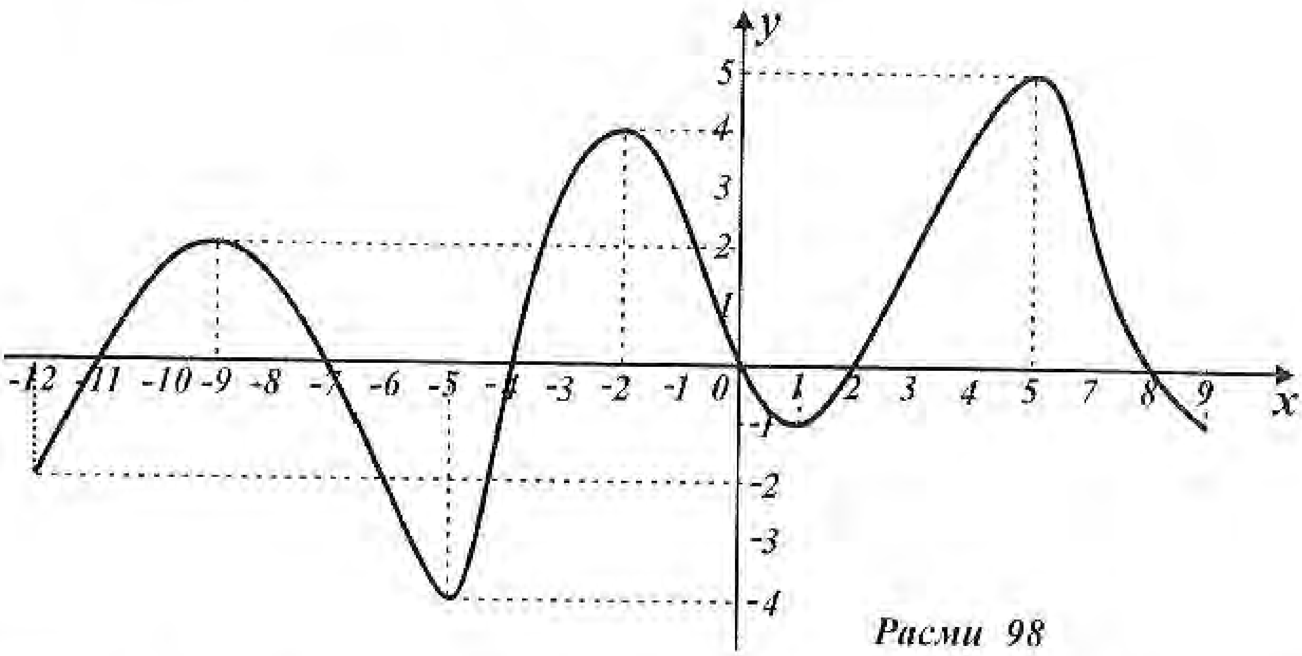
а) соҳаи муайянӣ ва тағйирёбии функсия;

б) нулҳои функсия;

в) фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсия;

г) қиматҳои экстремалии функсия

-ро ёбед.



Расми 98

597. Дар порчаи [-2; 5] тарҳи графики функсияи бефосилаи $y = f(x)$-ро аз рӯи маълумотҳои ҷадвали

x	-2	(-2; 1)	1	(1; 4)	4	(4; 5)
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	-2	↑	3	↓	0	↑

ва шартҳои $f(-1)=0$, $f(4)=0$, $f(0)=2$, $f(5)=1$ созед.

598. Графики функсияи квадратиро созед:

а) $f(x)=3x^2-2x+11$; б) $f(x)=5x^2-3x-2$; в) $f(x)=x^2-2x$;

г) $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}$; д) $f(x)=-x^2+4x-4$; е) $f(x)=\frac{x^2}{5}-x+3$;

ж) $f(x)=3-4x-x^2$; з) $f(x)=3x^2-7x+4$); и) $f(x)=-2x^2-2x+5$;

к) $f(x)=-6x^2-24x+13$; л) $f(x)=x^2+8x+1$.

599. Функсияро тадқиқ намуда графикашро созед:

а) $y=2x^3-7x+5$; б) $y=x^3-3x$; в) $y=3x^3-9x+6$;

г) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x$; д) $y=x^3+x^2$; е) $y=x^4-3x^2+2$;

ж) $y=3x^4-x^2-2$; з) $y=x^4-x^2$; и) $y=0{,}2x^5-\frac{1}{3}x^3$;

к) $y=\frac{12}{5}x^5-4x^3$; л) $y=x^5-5x^4$; м) $y=\frac{x^4-16}{x}$;

н) $y=\frac{16}{x^2(x-4)}$; о) $f(x)=x+2\sqrt{-x}$; п) $y=x\sqrt{1-x}$.

600. Функсияи тригонометриро тадқиқ карда графикашро созед:

а) $y=2\sin\frac{x}{2}$; б) $y=\frac{1}{2}\cos 2x$; в) $y=1+\cos x$; г) $y=-1+\sin x$.

Машқҳо барои такрор.

601. Қимати решаро ёбед:

а) $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}}$; б) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{73}}$; в) $\sqrt{\frac{288}{176^2-112^2}}$.

602. Моҳигир бо қаиқ аз пункти А ба болооби дарё (яъне муқобили ҷараён) ҳаракат кард. Баъди 6км-ро тай намудан белҳои қаиқрониро ба як тараф гузошта ӯ бо моҳигирӣ машғул шуданд. Ҷараёни дарё қаикро баъди 4 соату 30 дақиқаи аз пункти A баромаданаш боз ба мавқеи аввала овард. Агар суръати ҷараёни дарё $2\frac{\text{км}}{\text{соат}}$ бошад, суръати қаикро дар оби ором ёбед.

603. Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

а) $\frac{x+15}{4}-\frac{21}{x+2}=2$; б) $\frac{16}{x-3}+\frac{30}{1-x}=3$.

604. Хатогиро дар исботи зерин нишон диҳед:

$16-36=25-45$; $16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$;

$4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2$;

$\left(2\cdot2-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$; $2\cdot2-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$; $2\cdot2=5$.

605. Графики функсияи $y=f(x)$ -и дар сегменти $[a;\ b]$ бефосиларо дар ҳолатҳои зерин созед:

а) $a=-4,\ b=2,\ f(-4)=-2,\ f(x)$ дар порчаи $[-4;\ 0]$ афзояду дар $[1;\ 2]$ функсияи $f(x)=x$ -ро ифода кунад;

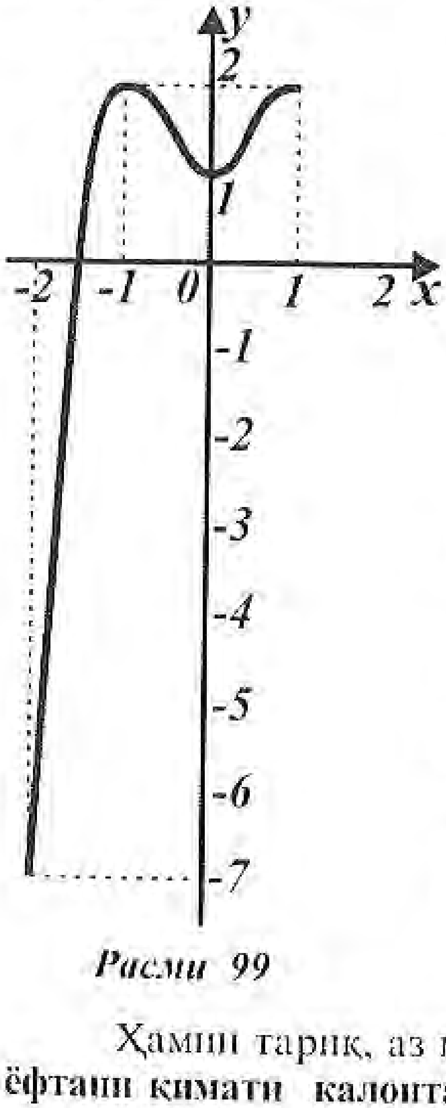
б) $a=1$, $b=6$, $f(6)=2$, дар $[1;\ 2]$ $f(x)=x^2$ -ро ифода намуда, дар $(2;\ 6]$ кам шавад.

606. Муодилаи расандаро ба хати качи $y=x^3+1$ дар нуқтаи $x_0=1$ тартиб диҳед.

53. Ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия

Дар амалия масъалаҳоеро ҳал кардан зарур меояд, ки дар онҳо ёфтани қимати калонтарин ва ё хурдтарини функсия дар ягон порча зарур аст.

Духтани курта аз рӯи як миқдор мовут бо назардошти сарфи камтарин, ёфтани росткунҷаи масоҳаташ калонтарин аз байни росткунҷаҳои периметрашон баробар ва ҳоказо мисоли чунин масъалаҳоянд.



Расми 99

Функсияи $y=x^4+2x^2+1$-ро дар порчаи $[-2;\ 1]$ дида мебароем, ки графикаш дар расми 99 акс ёфтааст. Қимати калонтаринро дар $[-2;\ 1]$, ки ба 2 баробар аст, функсия дар ду нуқтаҳои $x=-1$ ва $x=1$ мегирад. Қимати хурдтаринро бошад, ки ба -7 баробар аст, дар нуқтаи x=-2 қабул менамояд. Нуқтаи x=0 нуқтаи минимуми функсия мешавад. Яъне чунин атрофи нуқтаи x=0 мавҷуд аст, ки (масалан, фосилаи $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$) қимати хурдтаринро функсия фақат дар нуқтаи $x=0$ мегирад. Вале дар порчаи дорознаш нисбат ба $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ калонтарини $[-2;\ 1]$ қимати хурдтаринро функсия на дар нуқтаи минимум, балки дар аввали порча (яъне дар нуқтаи x=-2) мегирад: $f(-2)=-7$

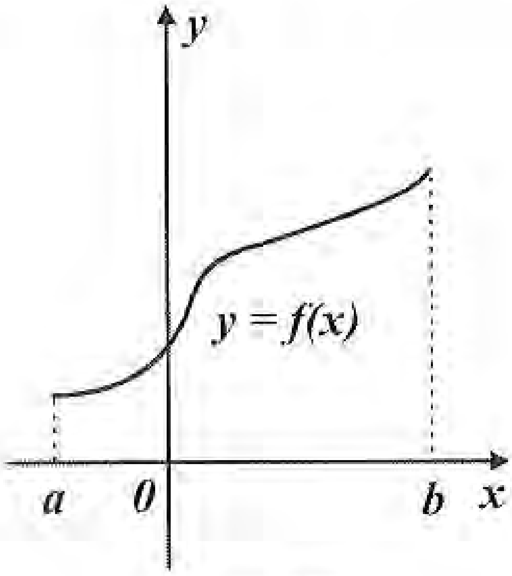
Ҳамин тариқ, аз мисоли гирифтаамон чунин бармеояд, ки **барои ёфтани қимати калонтарину хурдтарини функсия дар порча зарур аст, қиматҳои онро дар нуқтаҳои максимуму минимум ва охирҳои порча муқоиса намоем.**

Исбот намудан мумкин аст, ки **функсияи** $y=f(x)$ **-и дар порчаи** $[a;\ b]$ **муайяну бефосила дар порчаи номбурда ба қимати калонтарин ва хурдтарин соҳиб мешавад.**

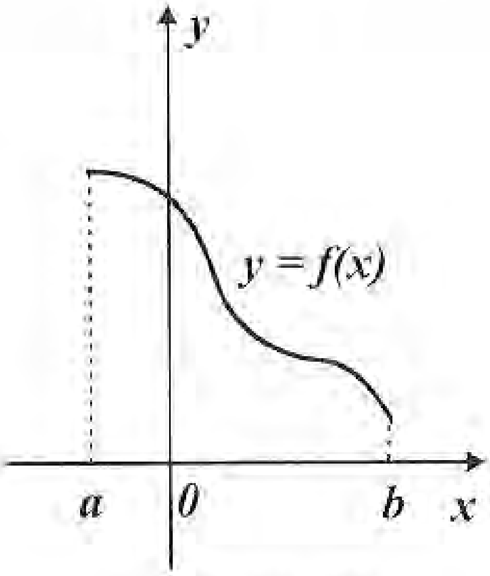
Ин тасдиқот ба Вейерштрас*) тааллуқ дорад.

Барои ошкор сохтани қоидаҳои умумии ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсия омӯзиши ду мавридҳои имконпазири зерин хеле муфид аст.

1^0. Мавриде, ки функсияи $f(x)$ дар $[a;\ b]$ нуқтаи критикӣ надорад. Дар ин маврид функсия ё фақат меафзояд (расми 100) ё фақат кам мешавад (расми 101)



Расми 100



Расми 101

Мушоҳида нишон медиҳад, ки қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;\ b]$ аз қиматҳои $f(x)$ дар нугҳои порча (яъне дар нуқтаҳои a ва b) иборатанд.

2^0. Мавриде, ки $f(x)$ дар $[a;\ b]$ шумораи охирноки нуқтаҳои критикӣ дорад. Ин нуқтаҳо дар якҷоягӣ бо a ва b порчаи $[a;\ b]$-ро ба порчаҳои миқдорашон охирнок ҷудо мекунанд. Нисбати ҳар кадоми ин порчаҳо мулоҳизаҳои дар 1^0 кардаамон дурустанд.

Ҳамин тариқ, дар ин ҳолат нуқтаҳои калонтарин ва хурдтарини функсия дар нуқтаҳои критикии функсия ё дар нуқтаҳои a ва b ҳосил мегарданд.

Дар асоси гуфтаҳои боло схемаи зеринро пешниҳод менамоем:

1). Ҳамаи нуқтаҳои $x_1, x_2, ..., x_n$-и шумораашон охирноки ба экстремум шубҳаноки функсияро меёбем.

---

*) Вейерштрасс Карл Теодор Вилгелм (1815-1897)- риёзидони немис. Аз солҳои таҳсил дар гимназия, ки онро ба ҷои 7 сол дар 5.5 сол ба итмом расонд, ба риёзиёт мароқи зиёд дошт. Дар соҳаҳои гуногуни математика (геометрияи дифференсиалӣ, алгебраи хаттӣ, ҳисоби вариатсионӣ, назарияи функсияҳои бисёртағйирёбандаи комплексӣ,...) теоремаҳои классикиро исбот намудааст. Корҳои илмии ӯ дар асосноккунӣ ва бунёди назарияи қатъии анализи математикӣ мақоми бузург бозидаанд.

2). Қимати функсияро дар ҳар яки онҳо ва дар нугҳои порчаи $[a;\ b]$ яъне $f(x_1), f(x_2),...,f(x_n), f(a), f(b)$ меёбем;

3). Қиматҳои ёфтаи функсияро муқоиса карда аз байнашон калонтарин ва хурдтаринашро интихоб мекунем (ин ду адад - ду хати горизонталӣ - сарҳадеро ифода мекунанд,ки дар байнашон ҳамаи қиматҳои $f(x)$-и абсиссаашон $[a;\ b]$ ҷойгир мешавад).

Мисоли 1. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $y = x^4 - 2x^2 + 5$-ро дар порчаи $[-2;\ 3]$ меёбем.

Ҳ а л. 1). $f'(x)$ -ро ёфта ба нул баробар мекунем: $f'(x) = 0$. Аз он

$4x^3 - 4x = 0,\ 4x(x^2 - 1) = 0,\ 4x(x-1)(x+1) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$ -ро ҳосил мекунем.

2) Қиматҳои $f(-2), f(-1), f(0), f(1)$ ва $f(3)$-ро меёбем:

$f(-2) = 13,\ f(-1) = 4,\ f(0) = 5,\ f(1) = 4,\ f(3) = 68$.

3) Муқоисаи бевоситаи ададҳои 13,4,5,4 ва 68 ба натиҷаи матлуби зерин меорад:

$$y_{калонтарин} = f(3) = 68,\quad y_{хурдтарин} = f(\pm 1) = 4.$$

Мисоли 2. Андозаҳоеро меёбем, ки аз рӯяшон ба доираи радиусаш R росткунҷаи масоҳаташ калонтарин ҷой гирад.

Ҳал. Ба сифати аргумент яке аз тарафҳои росткунҷаро интихоб намуда, онро бо x ишорат мекунем. Онгоҳ тарафи дигари росткунҷа (аз рӯи теоремаи Пифагор) ба

$$\sqrt{(2R)^2 - x^2} \qquad ё \ \sqrt{4R^2 - x^2}$$

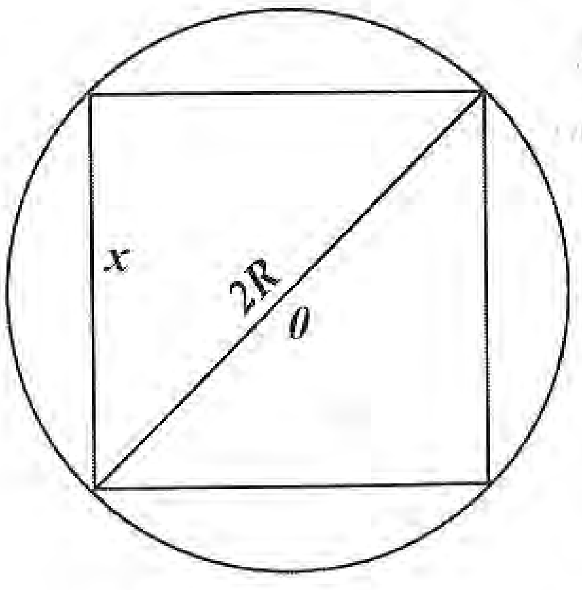
ва масоҳаташ ба $S = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$ баробар мешавад. Аён аст, ки x дар порчаи $[0;\ 2R]$ тағйир меёбад. Аз ин рӯ ҳалли масъала ба ёфтани қимати калонтарини функсияи

$$S(x) = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$$

дар порчаи $[0;\ 2R]$ меорад. Ҳосила

$$S'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2R^2 - x^2}}$$

аст. Вай ҳангоми $x = 2R$ будан вуҷуд надорад.



Расми 102

Акнун ҳамон қиматҳоеро меёбем, ки барояшон $S'(x) = 0$ мешавад:

$$\sqrt{4R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{2R^2-x^2}}=0, \qquad 4R^2-x^2-x^2=0,$$

$$x^2=2R^2, \qquad x=\pm R\sqrt{2}.$$

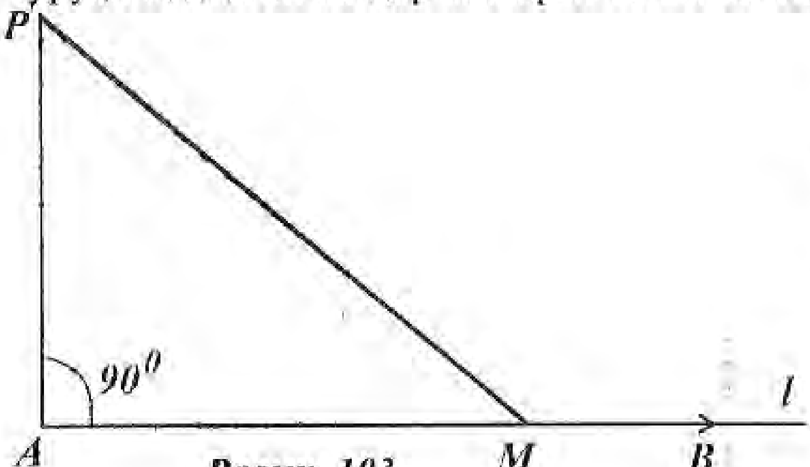
Азбаски мувофиқи шарт $0\le x\le 2R$ аст, пас қиматҳои функсияи $S(x)$ -ро дар нуқтаи $x_1=0$, $x_2=R\sqrt{2}$ ва $x_3=2R$ ёфтан кифоя аст:

$$S(0)=S(2R)=0,\ S\left(R\sqrt{2}\right)=R\sqrt{2}\cdot\sqrt{4R^2-2R^2}=2R^2.$$

Аз байни қиматҳои ёфтаамон калонтаринаш $2R^2$ мебошад. Ҳангоми яке аз тарафҳои росткунҷа $R\sqrt{2}$ будан дигараш ҳам $\sqrt{4R^2-x^2}=\sqrt{4R^2-2R^2}=\sqrt{2R^2}=R\sqrt{2}$,яъне тарафҳо ба ҳам баробар мешаванд.

Аз ин ҷо хулосаи зерин дуруст аст: **дар байни росткунҷаҳои дарункашидашуда масоҳати калонтаринро квадрат дорад.**

Мисоли 3. Шоссе равиши ҳаракатро аз ғарб ба шарқ муайян мекунад. Аз шоссе дар масофаи 9км ба тарафи шимол дуртари маҳал, гурӯҳи геологон ва дар масофаи 15 км ба тарафи шарқу аз нуқтаи ба гурӯҳ наздиктарини шоссе, маркази ноҳия ҷойгир аст. Гурӯҳ ба маркази ноҳия алоқачии велосипедсаворро фиристод, ки дар маҳал бо суръати $8\frac{\text{км}}{\text{соат}}$ ва дар шоссе бо суръати $10\frac{\text{км}}{\text{соат}}$ ҳаракат мекунад.



Расми 103

Алоқачӣ бояд аз рӯи кадом маршрут ҳаракат кунад, то ки барои тай намудани роҳи зарурӣ вақти камтарин сарф шавад?

Ҳал. Дар навбати аввал нақшаро мекашем, ки дар он P мавкеи гуруҳи геологон, хати рости l -шоссе B -маркази ноҳия ваРМВ - роҳи ҳаракати алоқачиро ифода мекунад (Расми 103).

Мувофиқи шарти масъала РА=9км ва АВ=15км буда, мавкеи нуқтаи М дар байни нуқтаҳои А ва В алҳол маълум нест. Бо t вақти ҳаракати алоқачиро аз пункти Р то В ифода мекунем.

Бигзор $AM=x$ $(x\ge 0)$ бошад. Аз рӯи шарти масъала M мавкеи дилхоҳро дар порчаи AB гирифта метавонад. Пас, сарҳади аниқи тағйирёбии x сегменти $0\le x\le 15$ мешавад.

Азбаски $PM=\sqrt{PA^2+AM^2}=\sqrt{81+x^2}$

аст, пас вақти ба тай кардани ин масофа сарфшуда $t_1 = \dfrac{\sqrt{81+x^2}}{8}$ мешавад.

Инчунин, $MB = 15 - x$ буда, вақти сарфкардаи алоқачӣ дар ин қисми роҳ ба $t_2 = \dfrac{15-x}{10}$ баробар аст.

Вақти умумии сарфшуда $t = t_1 + t_2 = \dfrac{\sqrt{81+x^2}}{8} + \dfrac{15-x}{10}$ мешавад.

Ҳамин тариқ, мо функсияи $t(x) = \dfrac{\sqrt{81+x^2}}{8} + \dfrac{15-x}{10}$ -ро ҳосил кардем, ки мувофиқи шарти масъала қимати хурдтаринашро дар $[0;\ 15]$ ёфтан зарур аст.

Бо ин мақсад ҳосилаашро ёфта

$$t'(x) = \frac{1}{8}\left(\sqrt{81+x^2}\right)' + \frac{1}{10}(15-x)' = \frac{1}{8}\cdot\frac{2x}{\sqrt{81+x^2}} + \frac{1}{10}(0-1) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{x}{\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{10}, \qquad t'(x) = \frac{1}{8}\cdot\frac{x}{\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{10}$$

онро ба нул баробар карда муодилаи ҳосилшударо ҳал мекунем:

$$\frac{x}{8\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{10} = 0,$$

$$10x - 8\sqrt{81+x^2} = 0,$$

$$10x = 8\sqrt{81+x^2},$$

$$100x^2 = 64\left(81+x^2\right),$$

$$100x^2 = 64\cdot 81 + 64x^2,$$

$$100x^2 - 64x^2 = 64\cdot 81,$$

$$36x^2 = 64\cdot 81,$$

$$x^2 = 144 \ (x \geq 0), \qquad x = 12км.$$

Қимати $x = 12 \in (0;\ 15)$ аст ва дар атрофи он аломати ҳосила аз минус ба плюс иваз мешавад. Муқоисаи бевоситаи қиматҳои

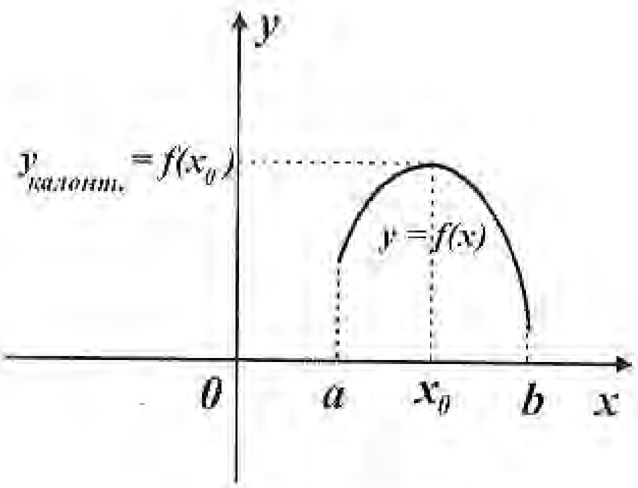
$$t(0) = \frac{105}{40} = 2{,}625,$$

$$t(12) = \frac{87}{40} = 2{,}175 \text{ ва } t(15) = \frac{5\sqrt{306}}{40} \approx 2{,}187$$

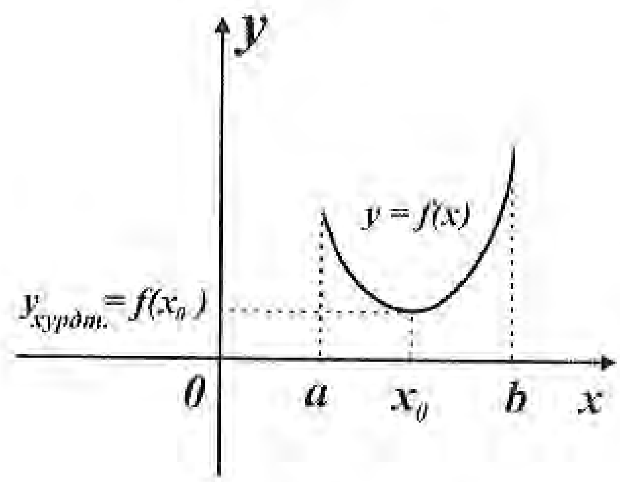
ба он оварда мерасонад, ки функсияи $t(x)$ фақат ҳангоми $x = 12$ будан, ба қимати хурдтарин доро мешавад.

Ҳамин тариқ, алоқачии велосипедрон вақти камтаринро аз маҳали ҷойгиршавӣ то маркази ноҳия танҳо дар ҳолате сарф мекунад, ки агар аз километри 12-уми шоссе сар карда (мавкеи нуқтаи M) 3 км-и охиринашро (MB) тай намояд.

Қайд. Ҳангоми ҳалли масъалаҳо баъзан эҳтиёҷот ба ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарин на дар порча, балки дар фосила ба миён меояд. Инчунин мисоли функсияҳое вомехӯранд, ки дар фосилаи додашуда факат як нуқтаи статсионарӣ доранд: ё нуқтаи максимум ё минимум. Онгоҳ дар нуқтаи ягонаи максимумро ифодакунанда функсия ба қимати калонтарин ва дар нуқтаи ягонаи минимумро ифодакунанда функсия ба қимати хурдтарин соҳиб мегардад (ниг. ба расмҳои 104 ва 105).



Расми 104



Расми 105

Мисоли 4. Адади 50-ро ба намуди суммаи ду адади мусбати бутун чунон менависем, ки суммаи кубҳояшон хурдтарин бошад.

Ҳал. Агар ҷамъшавандаи якумро бо x ишорат кунем, он гоҳ дуюмаш 50-x мешавад. Мувофиқи шарт функсияи $f(x) = x^3 + (50 - x)^3$ -ро ҳосил мекунем, ки барояш $x > 0,\ 50 - x > 0$ аст.

Ҳамин тариқ, масъала ба ёфтани ҳамин гуна қимати x оварда расонида шуд, ки дар он функсияи $f(x) = x^3 + (50 - x)^3$ дар фосилаи (0; 50) қимати хурдтаринро мегирад.

Ҳосилаи функсияро меёбем:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(50 - x)^2 = 300x - 7500.$$

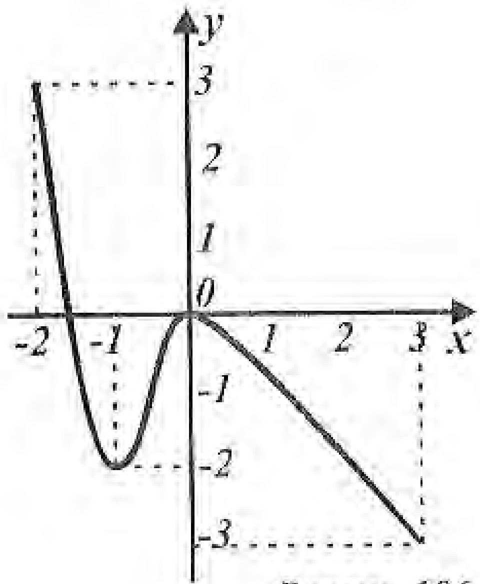
Нуқтаи ягонаи статсионариаш x = 25 мешавад, ки дар нуқтаҳои атрофаш ҳосила аломатро аз « – » ба « + » иваз мекунад. Функсия дар нуқтаи x=25 дорои минимум мешавад ва азбаски он ягона аст, қимати хурдтаринро ифода мекунад:

$$f(25) = 25^3 + (50 - 25)^3 = 25^3 + 25^3 = 31250.$$

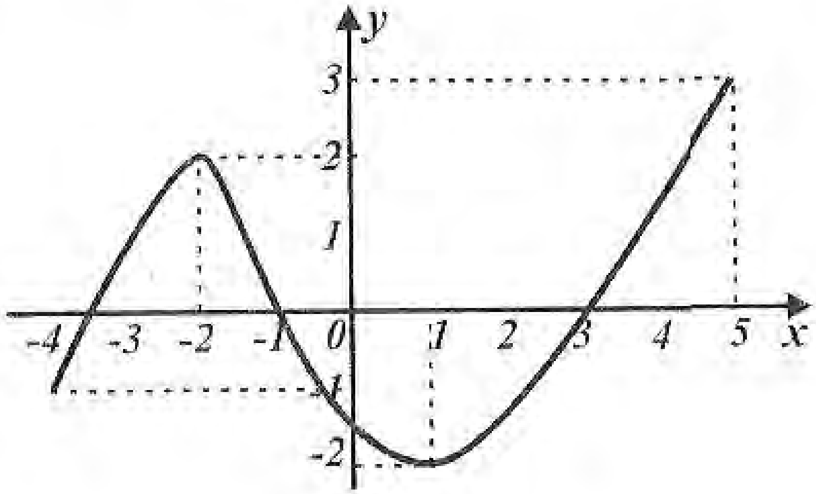
Ҳамин тариқ, навишти адади 50 дар шакли суммаи 25 + 25 суммаи кубҳои хурдтаринро дорад.

1. Дар зери мафҳуми қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия чиро мефаҳмед? Муҳокимаронииро бо нақшаҳо асоснок кунед.
2. Аз рӯи кадом схема қимати калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро меёбанд?
3. Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила бошаду ягон нуқтаи критикӣ надошта бошад, он гоҳ нисбати қимати калонтарину хурдтарин чиҳо гуфтан мумкин аст?
4. Агар дар фосилаи $[a;b]$ функсия дорои нуқтаи ягонаи статсионарӣ бошад, он гоҳ дар кадом мавриД он дорои қимати калонтарин ва дар кадом мавриД дорои қимати хурдтарин мешавад?

607. Аз рӯи графики функсия (ниг. ба расмҳои 106-107) нуқтаҳои экстремум ва қиматҳои калонтарину хурдтарини функсияро ёбед.



Расми 106



Расми 107

608. Экстремуми функсияи

а) $f(x)=x^4-3x^2+2$ -ро дар порчаи $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$;

б) $f(x)=x^5-5x^4$ -ро дар порчаи $[3;\ 5]$;

в) $f(x)=3x^3-9x+6$ -ро дар порчаи $[-2;\ 0]$;

г) $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ -ро дар порчаи $[0;\ \pi]$

ёбед.

609. Қимати калонтарин ё хурдтарини функсияро дар фосилаҳои нишондодашуда ёбед:

а) $f(x)=x^2+\frac{16}{x^2},\quad 0<x<+\infty$; б) $f(x)=\frac{2}{x}-x^2,\quad -\infty<x<0$.

610. Ададп 16-ро ба ду ҷамъшавандаи мусбати бутун чунон ҷудо кунед, ки ҳосили зарбашон калонтарин бошад.

611. Ададп мусбати ғайринулиеро ёбед, ки дар ҷамъ бо ададп чаппааш суммаи хурдтаринро медиҳад.

612. Ҳамин хел ададп мусбатеро ёбед, ки дар фарқ бо кубаш калонтарин бошад.

613. Ададеро ёбед, ки дар ҷамъ бо квадраташ суммаи хурдтаринро диҳад.

614. Қонуни ҳаракати ростхаттаи нуқтаи материалӣ $S(t)=3t-2t^2+\frac{2}{3}t^3$ аст (S - роҳ бо метрҳо). Дар кадом лаҳзаи вақт суръати ҳаракат калонтарин буда, ба чӣ баробар аст?

615. Барои бо панҷараи дарозиаш 160 м иҳота кардани майдончаи росткунҷашакли наздиҳавлигии масоҳаташ калонтарин андозаҳояшро чӣ хел гирифтан зарур аст?

616*. Буриши туннел росткунҷашакл буда, дар намуди нимдоира тамом мешавад. Пиреметри буриш 18 м аст. Барои он ки масоҳати буриш калонтарин бошад, радиуси доира бояд чанд метр гирифта шавад?

617. Дар нимдоираи радиусаш R росткунҷаи масоҳаташ калонтарини дарункашидашуда ҷой гирифтааст. Андозаҳои росткунҷаро муайян кунед.

Машқҳо барои такрор

618. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{x^2-4}{x}=\frac{3+2x}{2}$; в) $\frac{2x^2}{3x-5}-x=0$;

б) $\frac{x^2+5}{2x}=\frac{3x+10}{6}$; г) $\frac{1+x-6x^2}{3x+1}=x$.

619. Сурати каср аз махраҷаш 2 воҳид хурдтар аст. Агар суратро як воҳид кам карда, махраҷашро 3 воҳид зиёд кунем, он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки ба $\frac{1}{4}$ баробар аст. Касрро ёбед.

620. Оё муодилаҳои $2x$-1=11 ва $3x$=18 баробарқувваанд?

621. Ронандаи автобус 120 км масофаро дар як муддати муайяни вақт тай карданӣ буд. Баъди як соати ҳаракат ба муддати 15 дақиқа автобусро нигоҳ дошт. Бо мақсади дар вақти зарурӣ ба ҷои таъиншуда расидан ронанда суръатро 1,2 маротиба зиёд намуд. Суръати аввалаи ҳаракати автобусро ёбед.

622. Муодилаи $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)=22$ -ро ҳал кунед.

623. Ифодаи $\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2(\pi-\alpha)$-ро содда кунед.

624. Нишон диҳед, ки система ҳал надорад:

а) $\begin{cases} x-y=3; \\ -2x+2y=-10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y=7, \\ -9x+6y=21. \end{cases}$

Маълумоти таърихӣ

Дохилкунии методи координатаҳоро Декарт ихтироъ карда буд. Минбаъд тараққӣ додани назарияи ҳисоби дифференсиалӣ аз тарафи риёзидон ва файласуфи немис Г.Лейбниц (1646-1716) ва риёзидону физики англис И.Нютон (1643-1727) дар таърихи илми риёзиёт саҳифаи нав кушод.

Ин табадулот, ки ба дигаргуниҳои қатъӣ оварда расонид, аз тарафи К.Маркс ва Ф.Энгелс ин хел баҳо гирифт: «Пункти дигаргуниҳои қатъӣ дар риёзиёт бузургии тағйирёбандаи декартӣ буд. Бо шарофати он ба риёзиёт харакат ва диалектика дохил шуданд». Даврaи аввали тараққиёти шохаҳои риёзиётро бошад, ки ба мафҳумҳои беохир хурдҳо, лимит, ҳосила, …, алоқаманд буданд, Маркс «муаммо» номида буд.

Акнун назаре ба он солҳо карда кӯшиш менамоем, ки ба хонанда сабаби чунин баҳои баланд гирифтани риёзиёти он давраро каме бошад ҳам, кушоем.

Масъалаҳои ёфтани экстремуми функсия, гузаронидани расанда ба хати кач ва ғайраҳоро пештар аз рӯи ягон усули чун ҳозира (яъне усули ҳисоби дифференсиалӣ) системанок ва ягона ҳал намекарданд.

Масалан, барои ҳалли масъалаи гузаронидани расанда ба хати кач методҳои махсусро истифода мебурданд, ки ба хосиятҳои хатҳои каҷи маълум (ба монанди эллипс, парабола,…) такя мекард.

Дар асри XVII диққати риёзидононро масъалаҳои ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарин ҷалб карда буд. Як қатор чунин масъалаҳо дар асари илмии олими итолиявӣ В.Вивиани «Дар бораи қиматҳои максималӣ ва минималӣ», ки соли 1659 аз чоп баромада буд, тадқиқи худро ёфтаанд. Бояд қайд кард, ки дар асар масъалаҳо бо роҳи қадимаи геометрӣ ҳал шуда буданд.

Тараққиёти алгебра ва методи координатаҳо ба риёзидонон имконият дод, ки ҳалли масъалаҳои ба экстремум вобастаро асоснок ва амалӣ намоянд.

Ҳанӯз дар асри XIV риёзидони франсавӣ Н.Орезм қайд карда буд, ки дар наздикии қимати максималӣ ё минималӣ қиматҳои дигари функсия хеле суст тағйир меёбанд.

Риёзидон ва ситорашиноси машҳури немис И.Кеплер (1871-1630) бошад, дар мақолааш «Стреометрияи бочкаҳои вино» ғояҳои худро ба ҳалли масъалаи ёфтани силиндри ҳаҷмаш калонтарини дарункашидашуда дар кура вобаста кардааст.

Методҳои гузаронидани расандаҳо ба хатҳои каҷро, дар асоси фаҳмишҳои кинематикӣ, шогирди Галилей Э.Торричелли (1608-1647) ва риёзидони франсавӣ Ж.П.Робервал (1602-1672) тараққӣ додаанд. Торричелли аввалин шахсе буд, ки дар масъалаи гузаронидани расандаҳо ҷамъи суръатҳоро татбиқ кард. Вале дар ин ҷо ҳам зарурияти дар ҳар як ҳолати алоҳида хосиятҳои хати каҷро ба ҳисобгирӣ ба миён меомад. Ҳамаи ин ҳолатҳо эҳтиёҷотро ба методи умумии ҳалли чунин масъалаҳо хеле зиёд менамуд. Ниҳоят ин метод ҳам кор карда баромада шуд. Он методи алгебравӣ буд. Методи алгебравӣ характери кифоягӣ ва умумияти ба худ хосе дошта, бо ёриаш ҳамаи масъалаҳои ба гузаронидани расанда вобаста бо роҳи ягона ҳал карда мешуд. Дар ин бора тадқиқотҳои Р.Декарт (дар китобаш «Геометрия») ва риёзидони голландӣ И.Гудде (1628-1704) ҷолиби диққат аст. Гудде корҳои Декартро оиди методҳои алгебравии ҳалли масъалаи гузаронидани расанда ба хати каҷ давом додааст.

П.Ферма новобаста аз Декарт ба идеяҳои ӯ хеле наздик омада буд. Соли 1638 Ферма роҳи ёфтани минимум ва максимумро пешниҳод мекунад, ки ба тартибдиҳии муодилаи

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

асос ёфта буд. Ферма баъди тақсимкунӣ ба h фарз мекунад, ки $h=0$ аст. Ҳамин тариқ, ӯ бузургиеро ба нул баробар мекунад, ки мо онро ҳоло ҳосилаи функсияи $f(x)$ меномем. Ниҳоят қайд мекунем, ки методи Ферма фақат барои функсияи ратсионалӣ татбиқшаванда асту халос. Ӯ инчунин усули ёфтани нуқтаҳои хамии графики функсияро нишон додааст. Ғояҳои Фермаро як қатор риёзидонони охири асри XVII, аз он ҷумла, риёзидон ва механики голландӣ Х.Гюйгенс (1629-1695) инкишоф додаанд.

То нимаи дуюми асри XVIII доираи масъалаҳое, ки бо методи ҳисоби дифференсиалӣ*) ҳал мешуданд, аниқ шуда буд. Илова бар он, алоқаи байни суръати лаҳзагӣ ва расандаҳо ошкор шуда буд. Методҳои алоҳидаи ҳалли масъалаҳо кор карда баромада шуда бошанд ҳам, вале алгоритми умумӣ, аниқтараш худи ҳисоби дифференсиалӣ сохта нашуда буд.

Назарияи умумии ҳосилаҳо ва методҳои ҳисоб карда ёфтани

*) фасли риёзиёт, ки дар он ҳосилаҳо ва татбиқоти онҳо дар тадқиқи функсия омӯхта мешаванд, **ҳисоби дифференсиалӣ** ном дорад.

онҳоро, новобаста аз якдигар И.Нютон ваГ.Лейбнитс*) дар охирҳои асри XVII кор карда баромаданд.

Нютон дар асоси баъзе фаҳмишҳои механикаи классикии худ (аз он ҷумла суръати лаҳзагӣ) ҳосиларо маънидод кардааст. Ӯ ҳосиларо **флюксия** (аз калимаи лотинии *fluere* - ҷорӣ) ва худи функсияро **флюента** меномид. Ҳатто дар баъзе корҳояш ба мафҳуми лимити функсия хеле наздик шуда, истилоҳи «лимит»-ро дохил мекунад.

Ишоратҳои дохил кардаи Нютон, ки бисёр риёзидонони англис ба монанди Дж.Грегори, Б.Тейлор, К.Маклорен ва дигарон истифода мебурданд, хеле кулай буданд. Вале системаи пурратари ишоратҳоро, ки то ҳоло истифода мебаранд, Лейбнитс пешниҳод карда буд. Дар асоси системааш Лейбнитс мафҳуми дифференсиалро гузошта (пайдоиши назарияи ҳисоби дифференсиалӣ ба ин ном вобаста аст), чун «афзоиши беохир хурд (аниқтараш чун қисми афзоиши функсия), ҳосиларо бошад чун нисбати дифференсиалҳо маънидод мекунад (бо рамзи df - дифференсиали функсияи f ва бо рамзи $\frac{df}{dx}$ - ҳосиларо ишорат мекунад). Масъалаи асосиро дар маънои анализи беохир хурдҳо мефаҳмид. Номи ҳозираи предмети «Анализи математикӣ» аз номи пештараи «Анализи математикии беохир хурдҳо» бармеояд.

Ба мактаби илмии Лейбнитс баргашта, қайд менамоем, ки онҳо хатҳои каҷро чун бисёркунҷаҳо бо тарафҳои шумораашон беохир зиёд дида мебаромаданд. Шогирдони Лейбнитс бародарон Якоб ва Иоган Бернулли ғояҳои устодашонро ривоҷ додаанд.

Дар тараққиёти назарияи ҳисоби дифференсиалӣ ва татбиқоти он китоби Л.Эйлер (1707-1783) «Ҳисоби дифференсиалӣ» роли бузургро бозид. Дар ин китоб, ки соли 1755 дастрас шуд, аввалин маротиба мафҳуми ҳосила дар шакли аналитикӣ бе такя ба фаҳмишҳои физикӣ ва геометрӣ маънидод карда мешавад.

Гарчанде мафҳуми дифференсиал ба маънои Лейбнитс пурра набошад ҳам, вале ҳосиларо чун нисбати дифференсиалҳо фаҳмиданаш чӣ дар ҳалли масъалаҳои назариявии анализ ва чӣ дар татбиқотҳояш қулаи фароҳам овард.

---

*) Лейбнитс Готфрид Вилгелм (1646-1716) – олими бузурги немис буда, дар фалсафа, риёзиёт, ҳуқуқ ва забон корҳои илмии зиёд дорад. Соли 1666 ӯ унвони доктори илмҳои ҳуқуқро мегирад ва чанд муддат ба корҳои дипломатӣ машғул мешавад. Корҳои аввали ба риёзиёт бахшидаи ӯ солҳои 1668-1671 чоп шудаанд.

Чӣ хеле қайд карда шуд, ӯ яке аз бунёдкунандагони (новобаста аз Нютон) назарияи ҳисоби дифференсиалӣ мебошад. Лейбнитс ба баҳс бо Нютон оиди «кӣ пештар назарияи номбурдаро кашф кардааст» кашида мешавад. Гуфтугузор ва каҷфаҳмиҳои зиёд саломатиашро заиф мегардонад ва ӯ соли 1716 вафот мекунад. Аз паси тобути Лейбнитс фақат як нафар меравад. На академияи улуми ш.Берлин ва на ҷамъияти лондонии таъсисдодаи шох аз фавти ӯ ягон хабаре намедиҳанд. Ҳақиқати баҳс дар он аст, ки назарияи ҳисоби дифференсиалиро аввалин маротиба Нютон кашф кардааст. Вале новобаста аз ӯ Лейбнитс низ дар кори бунёди анализи математикӣ ҳиссагузорӣ карда натиҷаҳои илмиашро нисбат ба Нютон пештар дастраси умум гардонда буд.

Дар бунёд ва асосноккунии анализи математикӣ (бо назардошти имрӯза) хизмати бузурги О.Коши (1788-1857) намоён аст. Вай таърифҳои дақиқтари лимити функсия ва пайдарпаиро додааст. Ин бошад, ба ӯ имконият дод, ки як қатор теоремаҳои асосии анализро исбот кунад.

Бо мурури инкишофи назарияи функсияҳои канишдор мафҳуми ҳосила барои чунин функсияҳо умумӣ гардонида шуд. Дар ин ҷода хизмати риёзидони Иттиҳоди Шӯравӣ А.Н.Колмогоров (1903-1987) назаррас аст.

Риёзидони дигари Шӯравӣ Хинчин А.Я. (1894-1959) ҳанӯз солҳои студентиаш дар Донишгоҳи Давлатии Маскав дар яке аз маърӯзаҳояш дар маҳфили илмӣ (с.1914) мафҳуми ҳосиларо умумӣ гардонидааст, ки ба илм бо номи «ҳосилаи асимптотикӣ» дохил гардид.

Машқҳои иловагӣ ба боби V

Ба параграфи 14

Нобаробариҳоро бо методи фосилаҳо ҳал кунед (625-628):

625. а) $(x-2)(x-4)(x-6)\le 0$; д) $(2x-1)(x+1)>0$;

б) $3x(10x-3)>0$; е) $(10x-1)(5x-2)<0$;

в) $(0{,}5x-1)(x-5)<0$; ж) $(0{,}6+x)\cdot x<0$;

г) $(5x+3)(2x-5)>0$; з) $(4x-3)(2-3x)\ge 0$.

625. а) $\dfrac{(x+3)(x-1)}{x^2-25}>0$; в) $\dfrac{(x+4)(x-10)}{(x+1)(x+5)}\ge 0$;

б) $\dfrac{x^2-1}{(x-3)(x-13)}<0$; г) $\dfrac{x+11}{(x-1)(x+2)}\le 0$; д) $1-\dfrac{x+1}{2x^2}\ge 0$.

627. а) $x^2-16x+64>0$; в) $3x^2-31x-22\le 0$;

б) $25-20x+4x^2>0$; г) $2x^2+5x-63\le 0$; д) $3x^2+5x-8\ge 0$.

628. а) $\left(x^3-8\right)\left(x^2-81\right)\cdot x\ge 0$; б) $\dfrac{(x-1)^3(x-6)^4}{(x+3)(x+1)^2}\le 0$;

в) $\dfrac{(x-1)^2(x-5)}{(x-3)^3}>0$; г) $\dfrac{x^2-7x+6}{(x-4)^2}<0$.

629. Соҳаи муайянии функсияҳоро ёбед:

а) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$;

в) $y=\sqrt{\dfrac{(x-3)^2}{x-5}}$; г) $y=\sqrt{4-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$

630. Дар кадом қиматҳои a нобаробарӣ маъно дорад:

а) $\frac{(a-3)^2}{a^2-25} \geq 0$; б) $\frac{(a-1)^2}{a(a-2)} \leq 0$;

в) $\frac{(a-2)^3(a+3)^2}{a(a^2+1)} < 0$; г) $\frac{\left(a^2+4\right)(a-4)^3}{2a^2(a+5)} < 0$?

Ба параграфи 15.

631. Коэффитсиенти кунҷии расандаро ба графики функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи абсиссааш x_o ёбед:

а) $f(x) = \sin x$, $x_o = \frac{\pi}{4}$; б) $f(x) = 3x^2 - 9x + 17$, $x_o = 2$.

632. Кунҷи байни расанда ба хати каҷи $y = f(x)$ дар нуқтаи абсиссааш x_o бо тири ОХ ёфта шавад:

а) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x_o = 1$; б) $f(x) = -\frac{18}{\sqrt{x}}$, $x_o = 3$.

633. Муодилаи расандаро ба хати каҷ дар нуқтаи абсиссааш додашуда ёбед:

а) $f(x) = 1 + \sin x$, $x_o = \frac{\pi}{6}$; б) $f(x) = \cos^2 x$, $x_o = \frac{\pi}{4}$;

в) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x_o = 2$; г) $f(x) = x^2 + 1$, $x_o = 2$;

д) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $x_o = 3$; е) $f(x) = x^3 - x^2$, $x_o = 4$.

634*. Нишон диҳед, ки расанда ба параболаи $y = x^2 + 2$ дар нуқтаи абсиссааш $x_o = 4$ тири ОХ-ро дар нуқтаи $\frac{7}{4}$ мебурад.

635*. Хати рост ба гиперболаи $y = \frac{2}{x}$ дар нуқтаи (1; 2) расанда аст.

Масоҳати секунҷаеро ёбед, ки бо ин расанда ва тирҳои координатавӣ маҳдуд аст.

636. Бо ёрии формулаи $f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ қимати тақрибии функсияро дар нуқтаҳои додашуда ҳисоб кунед:

а) $f(x) = 2x^3 - 3$, $x_o = 2{,}001$, $x_o = 0{,}998$, $x_o = -2{,}003$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_o = 1{,}002$, $x_o = 4{,}001$, $x_o = 8{,}997$

637. Қимати тақрибии

а) $\frac{1}{(1,01)^{83}}$; б) $\sqrt{100,02}$; в) $5\sin 2^{o} + 0,9\cos 4^{o}$; г) $(0,983)^{21}$

-ро ёбед.

638. Ҷисм аз рӯи хати рости OX мувофиқи қонуни $x(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$ ҳаракат мекунад. Суръат ва шитоби ҳаракатро ҳангоми $t = 2$ сон. будан муайян кунед.

639. Баландшавии об дар зарфи силиндршакли диамeтраш ба 6 см баробар дар 1 сон. 1 см аст. Суръати бо об пуршавии зарф ёфта шавад.

640. Ҷисми массааш 4 кг аз рӯи қонуни $S = t^2 + t + 1$ ростхатта ҳаракат мекунад (масофа бо метр чен карда мешавад). Энергияи кинетикии ҷисмро дар лаҳзаи вақти $t = 5$ сон. ёбед.

641. Ҷисм аз рӯи қонуни $x(t) = \cos\omega t$ $(\omega = const)$, ҳаракат мекунад. Суръат ва шитоби онро дар лаҳзаи $t_0 = \frac{\pi}{4\omega}$ ёбед.

642. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияҳоро ёбед:

а) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$; б) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 27x^3$; в) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;

г) $f(x) = 4x^3 - 6x^2$; д) $f(x) = 5 - x^2$; е) $f(x) = 2x(x^4 + 1)$;

ж) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$; з) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$; и) $f(x) = x - \sin 2x$;

к) $f(x) = 3x + 2\cos 3x$.

643. Исбот кунед, ки дар нуқтаҳои соҳаи муайяниашон функсияҳои

а) $f(x) = 7 - \frac{13}{x}$; б) $f(x) = x^5 + 2x - 100$

афзуншаванда ва функсияҳои

в) $f(x) = 5x^3 - x$; г) $f(x) = -5x - \sin 2x$ камшавандаанд.

644. Нуқтаҳои критикии функсияро ҳангоми

а) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$; б) $y = x^2 - |x| - 2$

будан, ёбед.

645. Муодилаи $f'(x) = 0$-ро ҳал карда, нуқтаҳои статсионарии функсияро ёбед:

а) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{8}{x} + 9$; б) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 13$.

646. Нуқтаҳои экстремум ва экстремали функсияҳоро ёбед:

а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-25x+21$; б) $f(x)=x^4-4x$; в) $f(x)=x^2+\frac{54}{x}$;

г) $f(x)=4x-x^2$; д) $f(x)=2x-\sqrt{x}$; е) $f(x)=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}$.

647. Нишон диҳед, ки функсияи зерин доир ба экстемум шубҳанок нест:

а) $y=-5x+11$; б) $y=\frac{x-1}{3}$; в) $y=4x^3+8x-19$;

648. Функсияи

а) $y=2x^3-3x^2+19$; б) $y=7x^2-2x+13$

-ро бо ёрии ҳосилаи тартиби ду доир ба экстремум тадқиқ намоед.

649. Миқдори решаҳои ҳақиқии муодилаи

а) $x^4-4x^3+20=0$; б) $8x^3-3x^4-7=0$.

-ро ёбед.

650. Функсияро тадқиқ намуда, графикашро созед:

а) $f(x)=1+2\sin x$; б) $f(x)=9x+3x^2-x^3$;

в) $f(x)=7x^2+4x-11$; г) $f(x)=2-5x-3x^2$;

д) $f(x)=\frac{x}{1-x}$; е) $f(x)=x+\sqrt{1-x}$.

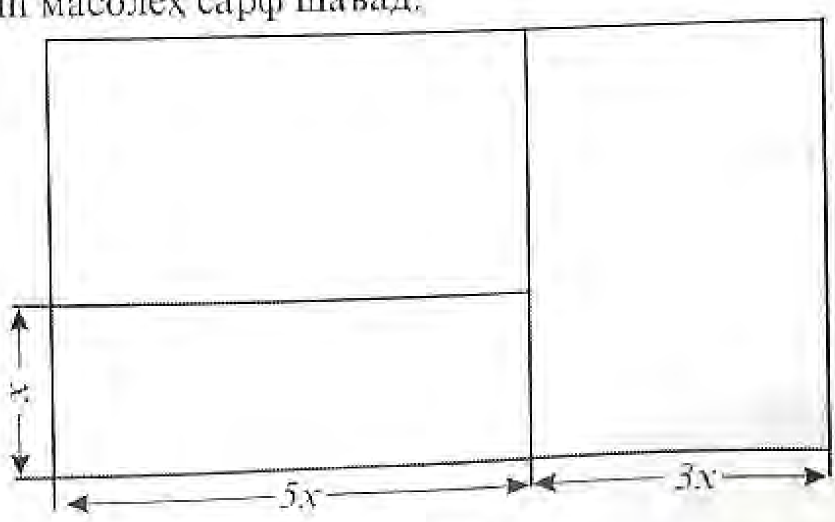
651. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро дар порчаи нишондодашуда ёбед:

а) $y=8x^3-24x^2$, $[1;\ 3]$; б) $y=3x-x^3$, $[-2;\ 3]$;

в) $y=4x^3+6x^2$, $[-2;\ 1]$; г) $y=\cos^2 x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

652. Андозаҳои ҳавзи кушодро, ки тагаш квадратшаклу ҳаҷмаш 32м³ аст, чунон муайян кунед, ки барои руйкаш кардани деворҳою таги он миқдори камтарини масолеҳ сарф шавад.

653. Дарозии умумии девори дар нақшаи бино тасвирёфта (расми 108) 90 м шуданаш лозим аст. Бари роҳравро (бо х ишорат шудааст) чӣ хел гирем, ки се хонаи дигари бино масоҳати калонтарин дошта бошад?



Расми 108

МИСОЛУ МАСЪАЛАҲОИ ҲАЛЛАШОН НИСБАТАН МУШКИЛ

654. Қимати ифодаи

а) $\frac{\sin\alpha}{3-2\cos\alpha}$-ро ёбед, агар $tg\frac{\alpha}{2}=2$;

б) $\frac{tg\alpha+\sin\alpha}{tg\alpha-\sin\alpha}$-ро ёбед, агар $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{15}$

бошад.

655. Дар трапетсияи баробарпаҳлӯ асоси хурдаш ба тарафи паҳлӯиаш баробар аст. Тангенси кунҷи байни диогонал ва асоси калони он ба 3/4 баробар аст. Кунҷҳои назди асоси хурди трапетсия ёфта шаванд.

656. Ифодаро содда кунед:

а) $\sqrt{\frac{1-\cos4\alpha}{2}}$; б) $\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{4}}{2}}$; в) $\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{6}}{1-\cos\frac{\alpha}{6}}}$;

г) $\sqrt{\frac{1-\cos3\alpha}{1+\cos3\alpha}}$; д) $\sqrt{\frac{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+1}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}}$; е) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha$.

657. Ба ҳосили зарб табдил диҳед:

а) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}$, агар $90^o<\alpha<180^o$;

б) $\sqrt{1-\cos\alpha}+\sqrt{1+\cos\alpha}$, агар $180^o<\alpha<360^o$;

в) $\sqrt{2+2\sin2\alpha}-\sqrt{1-2\sin2\alpha}$, агар $45^o<\alpha<135^o$;

г) $\sqrt{1-\sin2\alpha}+\sqrt{1+\sin2\alpha}$, агар $-45^o<\alpha<45^o$

бошад.

658. Ифодаро содда кунед:

а) $\sin2\alpha+2\sin^2(45^o-\alpha)$; б) $\sin2\alpha-2\cos^2(45^o-\alpha)$;

в) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}$, $(0<\alpha<\pi)$.

659. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{tg2\alpha\cdot tg\alpha}{tg2\alpha-tg\alpha}$; б) $\frac{1}{tg2\alpha\cdot tg\alpha+1}$; в) $\frac{\cos\alpha+\cos3\alpha}{\sin\alpha+\sin3\alpha}$;

г) $(\sin\alpha+\sin 2\alpha)^2+(\cos\alpha+\cos 2\alpha)^2$; д) $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$.

Муодилаҳоро ҳал кунед (660-665):

660. а) $2x=arctg(ctgx)$; б) $\arccos(x-1)=2\arccos x$;

в) $arctg 2x=2arctgx$; г) $\arcsin 2x=2\arcsin x$.

661. а) $\arcsin 3x=2\arcsin 2x$; б) $2\arccos x=2\arccos\dfrac{3x}{\sqrt{2}}$;

в) $2\arcsin x=2\arccos\sqrt{1-4x^2}$; г) $2\arcsin\sqrt{3}x=2\arcsin 2x\sqrt{2}$.

662. а) $2\arcsin 6x=\arccos 28x^2$; б) $arctg^2x=2arctgx$;

в) $arctg\dfrac{4}{x}=2arctgx$; г) $\arccos x-\dfrac{1}{2}\arccos\sqrt{3}x=\dfrac{\pi}{4}$.

663. а) $2\cos 2x+2\cos 4x+3\sin^2 2x=1$; б) $\sin 2x=tgx$;

664. а) $\sin^4 x+\cos^4 x=1$; б) $(1-2\sin x)\cdot\sin x=2\cos 2x-1$;

в) $tg\dfrac{x}{2}=3ctg\dfrac{2\pi-x}{4}$; г) $8\cos^4 x-\cos 4x=1$.

665. а) $\cos 7x+\sin^2\dfrac{3x}{2}=\cos^2\dfrac{3x}{2}-\cos x$; б) $tgx-2\sin^2\dfrac{x}{2}=\sin x$;

в) $tg2x+\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=2$; г) $ctg^2x=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$.

666. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\cos x\cdot\cos 2x<\sin x\cdot\sin 2x$; б) $\sin x+\sqrt{3}\cos x<0$;

в) $\sin 3x\cdot\cos x>\sin x\cdot\cos 3x$; г) $\sin x\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)>0$.

667. Исбот кунед, ки:

а) $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $(\alpha\in[-1;\ 1])$;

б) $arctg\alpha+arcctg\alpha=\dfrac{\pi}{2}$; в) $\cos(arctg\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$;

г) $tg(\arccos\alpha)=\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$ $(\alpha\in[-1;\ 1]$ ва $\alpha\neq 0)$.

668. Ифодаҳоро содда кунед:

а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, агар $\sin\alpha+\cos\alpha=m$;

б) $\cos^8\alpha - \sin^8\alpha$, агар $\cos 2\alpha = m$ бошад.

669. Ҳисоб кунед:

а) $\dfrac{1}{\cos 290^o} + \dfrac{1}{\sqrt{3}\sin 250^o}$; б) $\cos 84^o \cdot \cos 24^o \cdot \cos 48^o \cdot \cos 12^o$.

670*. Исбот кунед, ки $\sin 47^o + \sin 61^o - \sin 11^o - \sin 25^o = \cos 7^o$

671. Оё x_o решаи муодила аст:

а) $arctgx = \dfrac{\pi}{12}$, $\quad x_o = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$;

б) $arctgx = \dfrac{\pi}{24}$, $\quad x_o = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$?

672. Айниятро исбот кунед:

а) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha} - \sin\alpha = 1$; б) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} - \cos\alpha = 1$.

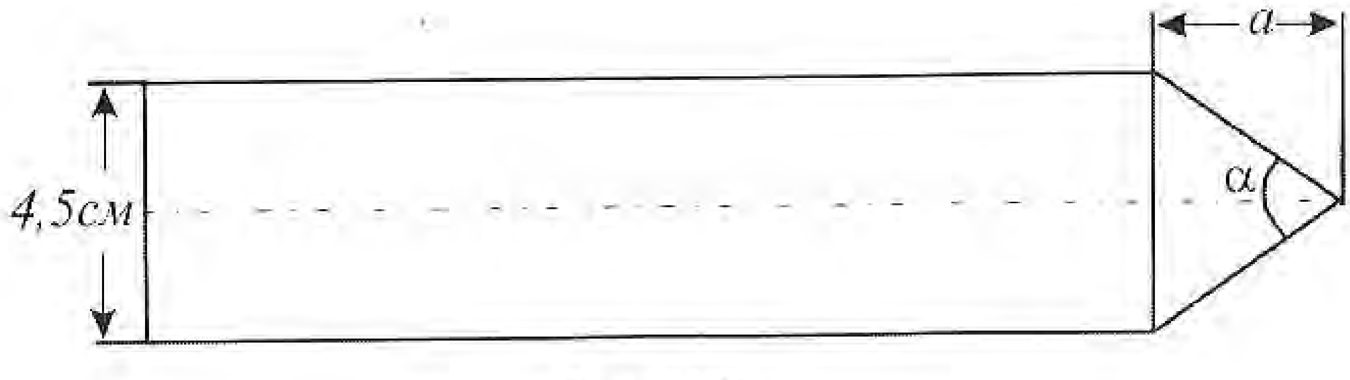
673. Ифодаи

$$\frac{\sin^2(\pi+\alpha) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)} \cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$$

-ро содда намуда, қиматашро ҳангоми $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ будан ёбед.

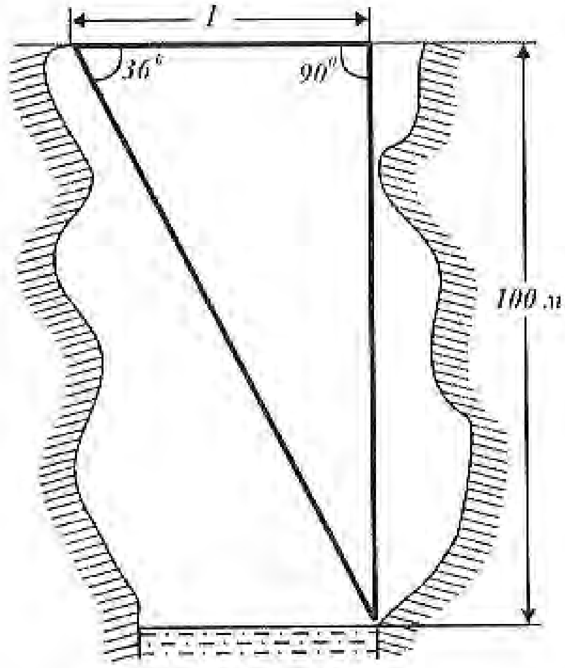
674*. Ҳамаи қиматҳои a, ки барояш муодилаи $\sin^8 x + \cos^8 x = a$ решаи ҳақиқӣ дорад ёбед ва муодиларо ҳал намоед.

675. Кунҷи α-и детали дар расми 109 аксёфтаро ёбед, агар $a = 4$ см бошад.

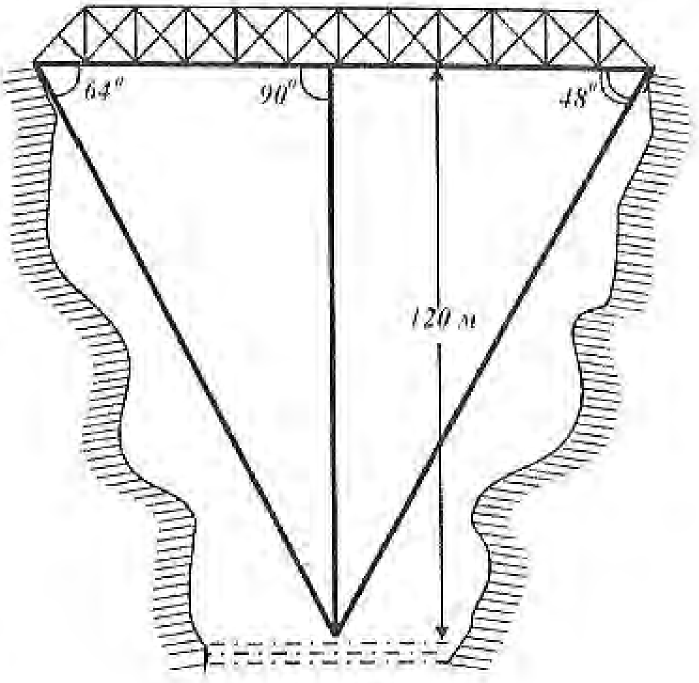


Расми 109

676. Бари l -и чуқуриро аз рӯи нишондодҳои расми 110 ёбед.



Расми 110



Расми 111

677. Дарозии кӯпрукро, ки дар расми 111 акс ёфтааст, аз рӯи додашудаҳо ёбед.

678. Лимити функсияро ёбед:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{3x+85}-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+9}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{2x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x}{4-x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3tgx+2\sin x}{2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$.

679. Барои функсияи $f(x)=x\cdot|x|$ $f'(0)$-ро ёбед.

680. Формулаҳоро барои ҳосилаҳои функсияи чаппаи тригонометрӣ исбот кунед:

а) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$; г) $(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

681. Ҳосилаи тартиби дуюмро аз функсияи $y=\dfrac{1}{x^2-2x+5}$ ёбед.

682*. Ҳамаи қиматҳои x-ро, ки барояшон расандаҳои ба графики функсияҳои $y=3\cos 5x$ ва $y=5\cos 3x+2$ дар нуқтаҳои абсиссаашон x гузаронидашуда параллеланд, ёбед.

683*. Аз нуқтаи $A\left(2; -\dfrac{12}{5}\right)$ ба параболаи $y=-\dfrac{3}{5}x^2$ расандае гузаронида шудааст, ки тири ОХ-ро дар нуқтаи В ва тири ОУ-ро дар нуқтаи С мебурад. Радиуси давраи дарункашидашудаи секунҷаи ВОС-ро ёбед (0 – ибтидои координата).

684*. Ба графики гиперболаи $y=-\dfrac{12}{x}$ расандаи l гузаронида шудааст, ки он аз болои нуқтаи (3; -4) мегузарад. Радиуси давраи марказаш дар тири ордината хобандаю ба хати рости l ва тири абсисса расандаро ёбед.

685. Барои кадом қиматҳои a графики функсияи $f(x)=\dfrac{ax-x^3}{4}$ тири абсиссаро дар таҳти кунҷи 45° мебурад?

686. Барои кадом қиматҳои a ва b хати рости $y=7x-2$ ба графики функсияи $y=ax^2+bx+1$ дар нуқтаи А (!; 5) расанда аст?

687. Исбот кунед, ки барои қимати дилхоҳи a графики функсияи $y=x^3-ax$ ба хати рости $y=-x$ перпендикуляр аст.

688. Ошкор созед, ки барои кадом қиматҳои p расанда ба графики функсияи $y=x^3-px$ дар нуқтаи абсиссааш $x_o=1$ аз нуқтаи М (2;3) мегузарад?

689. Ҳосилаи функсияи $y=\dfrac{c}{x^4}$ дар нуқтаи $x=1$ ба 1 баробар аст. Доимии С-ро ҳисоб карда ёбед.

690. Ҳамаи қиматҳои b-ро ёбед, ки барои ҳар кадомаш функсияи $f(x)=\sin 2x-8(b+2)\cos x-\left(4b^2+16b+6\right)\cdot x$ дар тамоми тири ададӣ камшаванда бозад.

691. Ҳамаи қиматҳои a-ро, ки барояшон функсияи $f(x)$ дар $R=(-\infty; +\infty)$ афзуншаванда аст, ёбед:

а) $f(x)=\dfrac{a^2-1}{3}\cdot x^3+(a-1)\cdot x^2+2x+5$;

б) $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+48ax+6x-5$

692. Исбот кунед, ки муодилаи кубии дилхоҳи $x^3+ax^2+bx+c=0$ аққалан як решаи ҳақиқӣ дорад.

693. Вобаста аз параметри a миқдори решаҳои муодилаи $x^3-3x=a$ -ро ёбед.

694. Фосилаҳои монотонӣ ва экстремуми функсияро ёбед:

а) $f(x) = -0{,}2x^5 + 0{,}5x^4 - x^3 - x^2 - 1$;

б) $f(x) = 0{,}8x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x$.

695. Мисоли функсияеро оред, ки ҳосилааш ба $3x^2 - x$ баробар аст.

696. Нуқтаҳои

а) минимуми функсияи $y = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x - 2x + 1$;

б) максимуми функсияи $y = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 10 - 2x$

-ро ёбед.

697. Қимати минималии функсияи $f(x) = 2x + \dfrac{18\pi^2}{x} + \cos x$

-ро дар фосилаи (0; 10) ёбед.

698. Қимати

а) хурдтарини функсияи $y = 1 + 4\sin x - 2x$ -ро дар $[0; \pi]$

б)калонтарини функсияи $y = -3 + 4\sin x + 2x$ -ро дар $[\pi; 2\pi]$

ёбед.

699. Чархи радиусаш R аз рӯи хати рост ҳаракат мекунад. Кунҷи φ-и гардиши чарх дар муддати t-и вақт аз рӯи формулаи $\varphi(t) = t + \dfrac{t^2}{2}$ муайян мешавад. Суръат ва шитоби ҳаракати чархро ёбед.

700. Исбот кунед, ки энергияи пурраи $E = \dfrac{mv^2}{2} + u(x)$-и нуқтаи материалии массааш m, ки мувофиқи қонуни дуюми Нютон аз рӯи хати рост ҳаракат мекунад, бетағйир мемонад ($u(x)$ - энергияи потенсиалӣ).

701. Бигузор $x_1(t)$ ва $x_2(t)$ ду ҳалли муодилаи $x''(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$ бошанд. Исбот кунед, ки функсияи $x_1(t) - x_2(t)$ ва $k \cdot x_1(t)$, ки дар ин ҷо k - адади дилхоҳ аст, низ ҳалли муодила мешаванд.

501. а) $x \in (-\infty;\ 3) \cup (4;\ +\infty)$; б) $x \in [-1;\ 2] \cup [5;\ +\infty)$; в) $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (1;\ 6)$; г) $x \in \left[-2;\ \frac{1}{2}\right] \cup [7;\ +\infty)$; $x \in (-3;\ 1) \cup (2;\ 3)$; е) $x \in (-3;\ -2] \cup (-1;\ 2] \cup (3;\ +\infty)$; ж) $x \in (3;\ 4) \cup (5;\ 6)$; з) $x \in (-\infty;\ -5) \cup (-2;\ 2) \cup [5;\ +\infty)$. **502.** а) $x \in \left(-\infty;\ -\frac{4}{7}\right] \cup [1;\ +\infty)$; б) $x \in \left(1;\ \frac{3}{2}\right)$; в) $x \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right) \cup (2;\ +\infty)$; г) $x \in [1;\ 9]$; д) $x \in [-\sqrt{3};\ -1] \cup [1;\ \sqrt{3}]$; е) $x \in (-\infty;\ -\sqrt{2}] \cup [-1;\ 1] \cup [\sqrt{2};\ +\infty)$. **503.** а) $x \in (-\infty;\ -4] \cup (-1;\ 1]$; б) $x \in (-\infty; 2] \cup [-1;\ 0)$; в) $x \in (-\infty;\ -3] \cup [-2;\ 1] \cup [2;\ +\infty)$; г) $x \in (-\infty;\ -2] \cup [-1;\ 1] \cup [3;\ +\infty)$; д) $x \in \left(\frac{7}{2};\ 5\right)$; е) $x \in (-2;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$. **504.** а) $x \in (-5;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; б) $x \in [1;\ 4]$. **505.** а) $x \in (-\infty;\ 3)$; б) $x \in (-\infty; -3) \cup (4;\ +\infty)$. **506.** а), в), г), е), ж)-ҳа; б), д), з), и)-не. **507.** $2\sin\alpha$. **508.** а) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$. **509.** 0 ва 4. **510.** $S = -12$. **511.** $60\frac{км}{соат}$ ва $80\frac{км}{соат}$. **512.** а) $117x^{12} - 4$; б) $-3\sin x - 7\cos x$. **513.** $k = 2$. **514.** $k = \pm 2$ **515.** а) 2; 4; 0; б)1; 1; $\frac{1}{4}$. **516.** а) $y = 3x - 2$; б) $y = 6x - 13$; в) $y = 4x + 17$; г) $y = \frac{x}{4}$. **517.** а) $y = 12x - 15$; б) $y = -2x - 1$ ва $y = 2x - 9$; в) $y = \frac{x}{6} + \frac{3}{2}$; г) $y = 10 - 5x$. **518.** $y = 8x - 13$; $y = 5 - x$ -расандаҳо дар нуқтаи $x_0 = 2$; $y = -20x - 97$, $y = -13x - 110$ расандаҳо дар нуктаи $x = -3$. **519*.** $y = -4x + 3$, $y = 4x - 13$. **520.** $y = 6x - 6$. **521.** x=3. **522.** а) $x < 2$ ва $x > 3$; б) $x < -7$ ва $x > 2$. **523.** а) (6; 8), (-9; -7); б) (2; 4), $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **524.** 15 ва 9 ё –9 ва –15. **525.** а) $\frac{\sqrt{13}}{5}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **526.** а) 3; б) 4. **527.** 20. **528.** а) 2,003; 1,98; б)

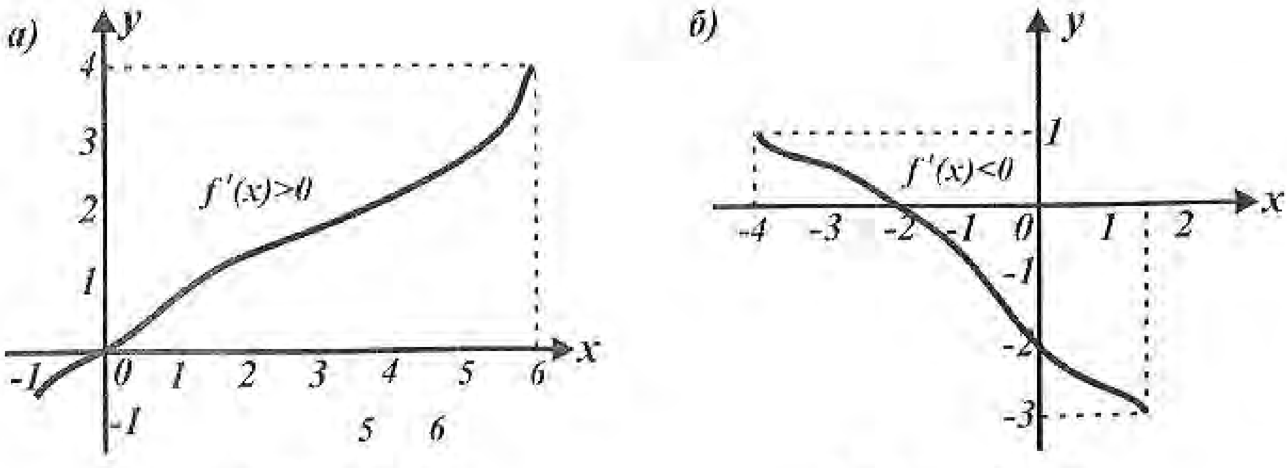
40,064; 9,08; в) 165,24; 0,88; г) 3,25; 31,84; д) 185,728; 183,424; е) 4,976; 11,036. **529.** а) 1,232; б) 0,784; в) 1,3; г) 0,712; д) 1,243; е) 0,76; ж) 0,872; з) 1,14; и) 1,624; к) –1,04. **530.** а) 2,001; б) 8,99983; в) 4,0000375; г) 3,00333; д) 2,9986667; е) 7,0000714. **532.** а) $b=-7$; б) $b=0$. **533.** 1400 қадам. **534.** –3; -6; 12; -24. **535.** 7. **536.** а) (7;6); б) (2; 3), $\left(-9;28\frac{2}{3}\right)$. **537.** $y=10-5x$.

538. $\omega(t)=14t-3;\ \omega(5)=67\frac{м}{сон}$. **539.** $\upsilon(t)=t^4-t^2+3,\ \upsilon(3)=75\frac{м}{сон};\ a(t)=4t^3-2t,\ a(3)=102\frac{м}{сон^2}$. **540.** $\upsilon(0)=3\frac{м}{сон}$; $\upsilon(3)=4,62\frac{м}{сон}$; $a(0)=0$; $a(3)=1,08\frac{м}{сон^2}$; $\upsilon_м=3,54\frac{м}{сон}$; $a_м=0,54\frac{м}{сон^2}$. **542.** а) $t_1=\frac{1}{3}, t_2=1$; б) $t\in\left(\frac{1}{3};1\right)$. **543.** $F=1260\frac{кг\cdot м}{сон^2}$.

544. $1,5\frac{рад}{сон}$. **545.** 202,5ч. **546.** а) $-\pi+2k\pi,\ k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

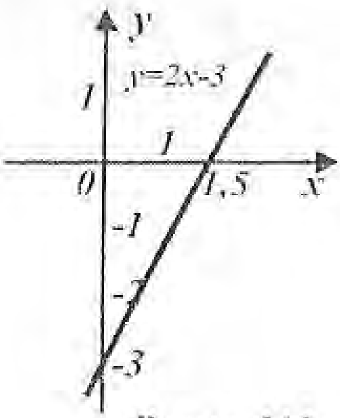
547. а) $2\sin\frac{\pi}{8}\sin\alpha$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin2\alpha$. **548.** а) $-1\le x\le3$; б) ҳал надорад. **549.** $x=1$. **550.** $S_{40}=1680$. **551.** а) $x=\frac{5}{6}$; б) $x=\pm\frac{1}{3}$. **552.** а) $\approx1,039$; б) 1,045; в) $\approx3,0075$; г) $\approx0,087$.

553.

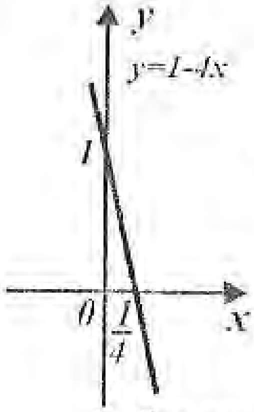


Расми 112 а) *Расми 112 б)*

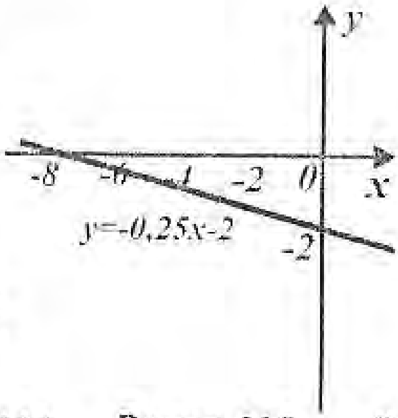
554. а), г) дар тамоми $R=(-\infty;+\infty)$ афзуншаванда аст (расмҳои 113, 116); б), в) дар тамоми R камшаванда аст (расмҳои 114, 115);



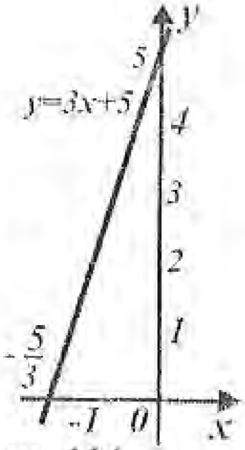
Расми 113



Расми 114

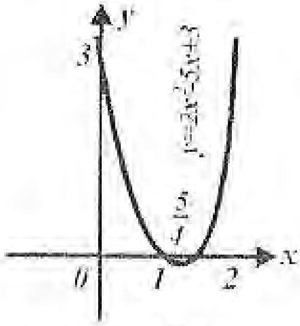


Расми 115

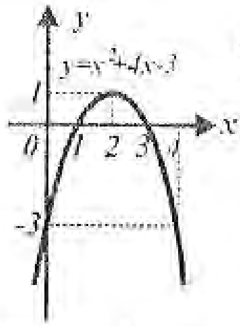


Расми 116

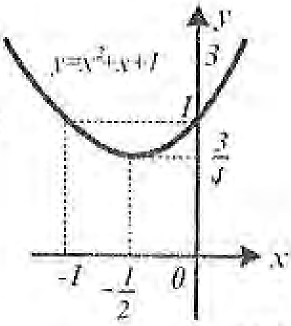
д) парабола дар $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right)\downarrow$ ва дар $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)\uparrow$ (расми 117); е) парабола дар $(-\infty; 2)\uparrow$ ва дар $(2; +\infty)\downarrow$ (расми 118); ж) парабола дар $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\downarrow$ ва дар $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)\uparrow$ (расми 119); з) парабола дар $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)\uparrow$ ва дар $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)\downarrow$ (расми 120);



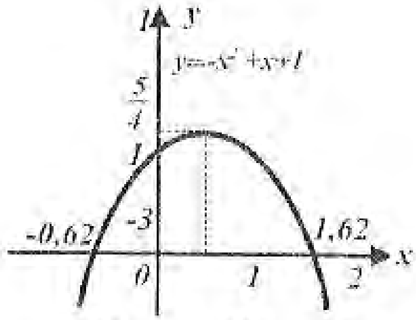
Расми 117



Расми 118

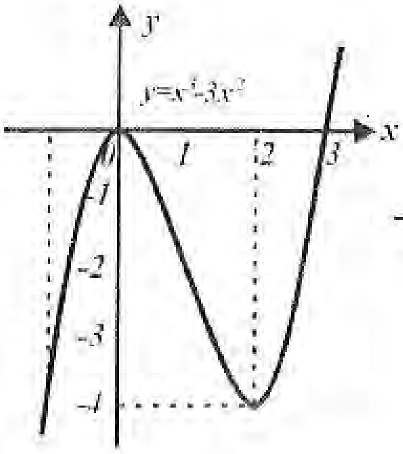


Расми 119

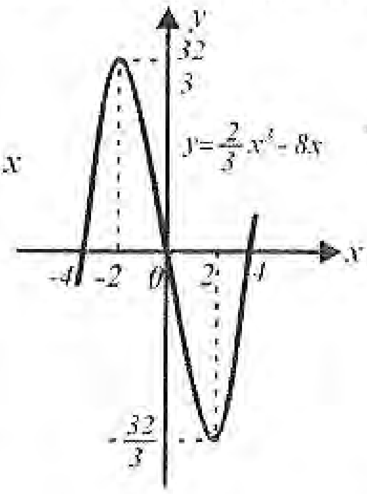


Расми 120

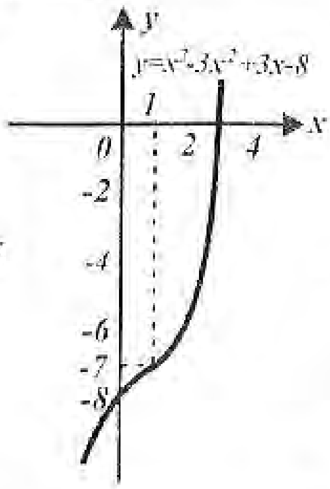
и) дар $(-\infty; 0)\cup(2; +\infty)\uparrow$ ва дар $(0; 2)\downarrow$ (расми 121); к) парабола дар $(-\infty; -2)\cup(2; +\infty)\uparrow$ ва дар $(-2; 2)\downarrow$ (расми 122); л) ва м) дар тамоми $(-\infty; +\infty)$ афзуншаванда аст (расмҳои 123, 124);



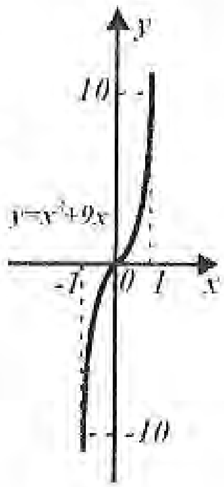
Расми 121



Расми 122

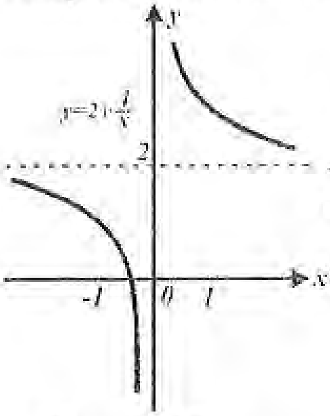


Расми 123

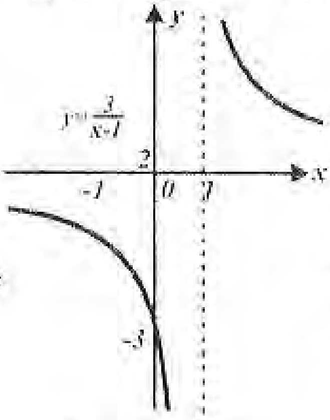


Расми 124

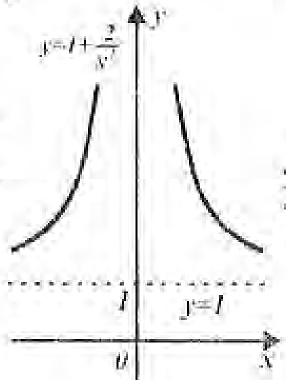
н) гипербола дар $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\downarrow$ (расми 125); о) гипербола дар $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)\downarrow$ (расми 126); п) гипербола дар $(-\infty;0)\uparrow$ ва дар $(0;+\infty)\downarrow$ (расми 127); р) гипербола дар тамоми R ба гайр аз 0 камшаванда аст (расми 128).



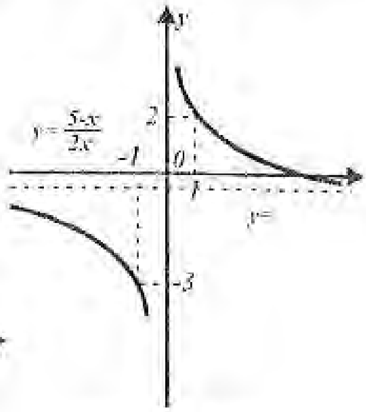
Расми 125



Расми 126

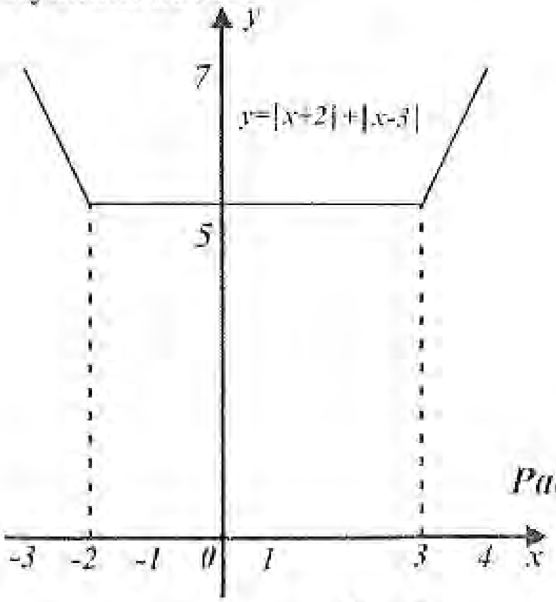


Расми 127

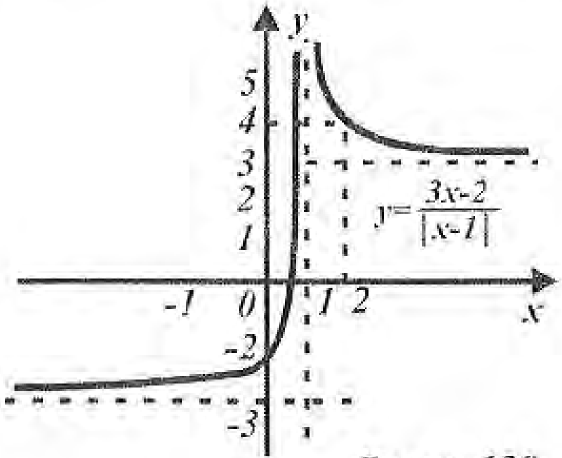


Расми 128

557. Нишондод. Дар қиматҳои $a>1$ функсия дар тамоми R афзуншаванда мешавад, чунки $|\cos x|\le 1$ буда фарқи $a-1$ фақат ҳангоми $a>1$ будан мусбат мемонад. **558.** $a<-\dfrac{3}{2}$. **559. Нишондод.** а). Мувофиқи хосияти модул функсияро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:



Расми 129



Расми 130

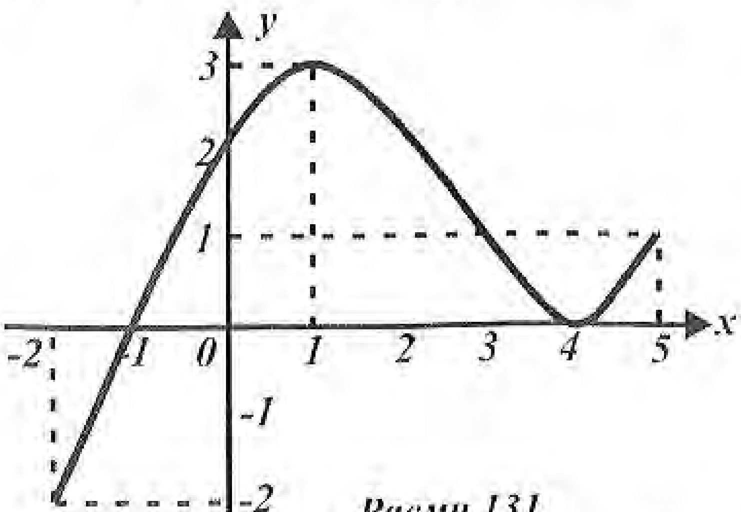
$$y=|x+2|+|x-3|=\begin{cases}1-2x, & \text{агар } x<-2;\\ 5, & \text{агар } -2\le x\le 3;\\ 2x-1, & \text{агар } x>3.\end{cases}$$

График дар расми 129 акс ёфтааст; б) Барои ҳамаи $x<1$ функсия намуди $y=-3+\dfrac{1}{1-x}$ ва барои $x>1$ $y=3+\dfrac{1}{x-1}$ -ро мегирад. Хати кач гипербола буда дар расми 130 акс ёфтааст. **560.** а) 6; б) 0,3625. **561.** а)

$-x^5-2x^4+x^3+x^2-2x-35$; б) $-5a^2-6ab$. **562.** а) $\frac{6-5x}{x^2-4}$; б) $\frac{3y-x^2}{x(y^2-x^2)}$. **563.** Азбаски координатаи қулла (4; -5) аст, пас он дар чоряки чорум ҷойгир аст. **564.** $b_1=q=\frac{1}{2}$. **565.** 20м ва 25м. **566.** а) $2x+\frac{5}{x^2}$; б) $3x^2-\cos x+x\sin x$. **567.** $x_1=-5, x_2=-1{,}5, x_3=1, x_4=6$ -абсиссаҳои нуқтаҳои max; $x_5=-3{,}5, x_6=-0{,}5, x_7=4$ -абсиссаҳои min. **568.** $x_1=-4, x_2=-3, x_3=-2{,}5, x_4=-1{,}8, x_5=-0{,}4, x_6=2, x_7=2{,}5$ **569.** а) $x=\pm3$; б) $x=13$; в) $-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$. **570.** а) 0; б) 2; $\frac{5}{4}$; в) 2; г) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; д) 1; е) нуқтаи критикӣ надорад. **571.** а) $y_{\min}=y\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{43}{4}$; б) $y_{\min}=y\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{253}{12}$; в) $y_{\max}=y(4)=16$; г) $y_{\min}=y(5)=2$, $y_{\max}=y(-5)=-2$; д) $y_{\min}=y(6)=6$, $y_{\max}=y(-6)=-6$; е) $y_{\max}=y(-3)=10$; ж) $y_{\min}=y(1)=-\frac{1}{12}$; з) дар тамоми R афзуншаванда аст; нуқтаи ба экстремум шубҳанок надорад; и) $y_{\min}=y(0)=1$. **572.** а) дар $(-\infty; 2)\downarrow$ ва дар $(2; +\infty)\uparrow$; $y_{\min}=y(2)=-8$; б) дар фосилаҳои $(-\infty; -3)$ ва $(3; +\infty)\uparrow$; дар $(-3; 3)\downarrow$; $y_{\max}=y(-3)=55$; $y_{\min}=y(3)=-53$; в) функсия дар нуқтаҳои соҳаи муайяниаш афзуншаванда буда, дорои нуқтаҳои ба экстремум шубҳанок нест; г) функсия дар нуқтаҳои соҳаи муайяниаш камшаванда буда, дорои нуқтаҳои ба экстремум шубҳанок нест;т д) функсия дар тамоми $(-\infty; +\infty)\uparrow$ буда, экстремум надорад. **573.** а) x=-1-абсиссаи нуқтаи максимум: $y(-1)=0{,}25$; $x=0, x=4$ -абсиссаи нуқтаҳои минимум: $y_{\min}=y(0)=0$; $y_{\min}=y(4)=10\frac{2}{3}$; б) $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$ - абсиссаи нуқтаи максимум $y\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$ -абсиссаи нуқтаҳои минимум: $y\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

574. а), в), г)-не, чунки онҳо дар нуқтаҳои соҳаи муайяниашон фақат афзуншавандаанд; б) азбаски $y'=-11<0$ аст (функсия дар тамоми R камшаванда), пас дорои экстремум нест. **575.**

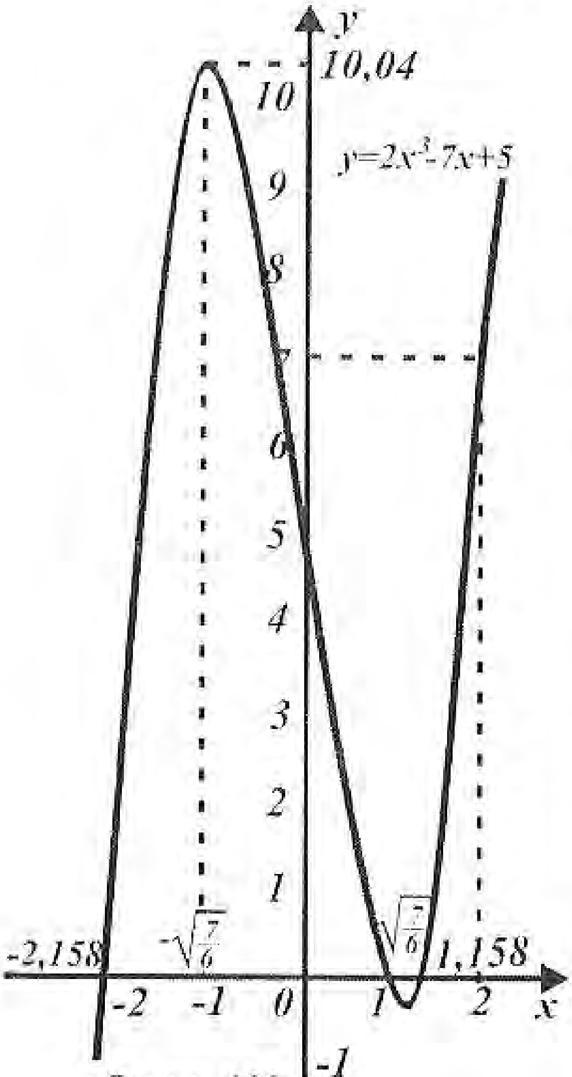
$y_{\min}=y(1)=0,\ y_{\max}=y\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{108}{3125}$; б) $y_{\min}=y\left(\frac{4}{15}\right)=-\frac{252869}{253125}$; в) фақат дар $D(f)\downarrow$ дорои экстремум нест; г) $y_{\min}=y(0)=0$. **576.** $16\frac{м}{сон}$; $100м$. **577.** б) $14\frac{6}{7}$. **578.** а) $\frac{a+5}{a+3}$; б) $\frac{2b-1}{b-2}$; в) $\frac{2c+1}{c+5}$. **580.** $x_1=-2,\ x_2=6,\ x_{3,4}=3\pm\sqrt{21}$. **581.** 7; 8; 9; 10. **582.** а) $12\sin 2x$; б) $-27\cos 3x$. **584.** $x=-\frac{1}{8}$. **585.** а) ҳа; б) ҳа. **586.** а) се реша дорад; б) се реша дорад; в) ду реша дорад; г) як реша дорад. **587.** а) се реша дорад, ки мувофиқан дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ ва $(1;+\infty)$ ҷойгиранд; б) реша надорад; в) як реша тааллуқи $(1;+\infty)$ дорад; г) $x_1\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $x_2\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, $x_3\in\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **588.** а) $(2;+\infty)$; б) $(-\infty;1)$; в) $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$; г) $(-1;+\infty)$. **589.** а) (4; 8), (8; 4); б) (7; 2), (7; -2). **590.** б) барои х-ҳои нобаробариҳои $x\le 2$ ва $x\ge 3$-ро қаноаткунанда; в) дар $0\le x\le 2$ ва $x\ge 3$. **591.** а) не; б) ҳа; в) не. **592.** $(-\infty;-6)$, $(-6;+\infty)$. **593.** а) 10; б) $\frac{5}{2}$; в) $\frac{8}{3}$; г) $-\frac{12}{7}$. **594.** дар тамоми $(-\infty;+\infty)\uparrow$; б) дар $(-\infty;0)\downarrow$; дар $(0;+\infty)\uparrow$. **595.** а) (1; 7). **596.** а) $D(f)=[-12;9]$, $D(f)=[-4;5]$; б) $x_1=-11,\ x_2=-7,\ x_3=-4,\ x_4=0,\ x_5=2,\ x_6=8$; в) фосилаҳои афзуншавӣ: (-12; -9), (-5; -2), (1; 5); фосилаҳои камшавӣ: (-9; -5), (-2; 1), (5; 9); г) $y_{\max}=f(-9)=2$; $y_{\min}=f(-5)=-4$, $y_{\max}=f(-2)=4$, $y_{\min}=f(1)=-1$, $y_{\max}=f(5)=5$. **597.** График дар расми 131 акс ёфтааст. **598.** а) дар $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\downarrow$, дар $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)\uparrow$, $x=\frac{1}{3}$-нуқтаи минимум; б) дар $(-\infty;0{,}3)\downarrow$,



Расми 131

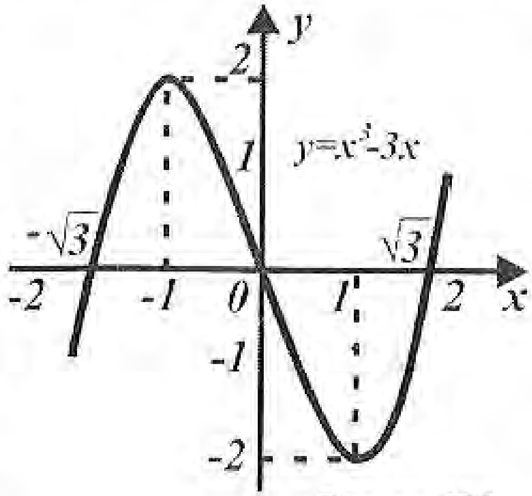
дар $(0{,}3;+\infty)\uparrow$; $x=0{,}3$-нуқтаи минимум; в) дар $(-\infty;1)\downarrow$, дар $(1;+\infty)\uparrow$; $x=1$-нуқтаи минимум; г) дар $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\uparrow$, дар $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\downarrow$, $x=\frac{2}{3}$-нуқтаи максимум; д) дар $(-\infty;2)\uparrow$, дар $(2+\infty)\downarrow$,

$x=2$-нуқтаи максимум; е) дар $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)\downarrow$, дар $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)\uparrow$, $x=\frac{5}{2}$-нуқтаи минимум; ж) дар $(-\infty;-2)\uparrow$, дар $(-2;+\infty)\downarrow$, $x=-2$-нуқтаи максимум; з) дар $\left(-\infty;\frac{7}{6}\right)\downarrow$, дар $\left(\frac{7}{6};+\infty\right)\uparrow$, $x=\frac{7}{6}$-нуқтаи минимум; и) дар $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\uparrow$, дар $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\downarrow$, $x=-\frac{1}{2}$-нуқтаи максимум; к) дар $(-\infty;-2)\uparrow$, дар $(-2;+\infty)\downarrow$, $x=-2$-нуқтаи максимум; л) дар $(-\infty;-4)\downarrow$, дар $(-4;+\infty)\uparrow$, $x=-4$-нуқтаи минимум. **599.** а) (1; 0), $\left(-1\pm\sqrt{11};0\right)$-нуқтаҳои буриш бо тири OX; (0; 5)-нуқтаи буриш бо тири ОУ; функсия дар фосилаҳои $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{7}{6}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{7}{6}};+\infty\right)$ афзуда, дар $\left(-\sqrt{\frac{7}{6}};\sqrt{\frac{7}{6}}\right)$ кам мешавад; $x=-\sqrt{\frac{7}{6}}$ нуқтаи максимум ва $x=-\sqrt{\frac{7}{6}}$ нуқтаи минимум; графикаш дар расми 132 тасвир ёфтааст; б) (0; 0), $\left(\pm\sqrt{3};0\right)$-



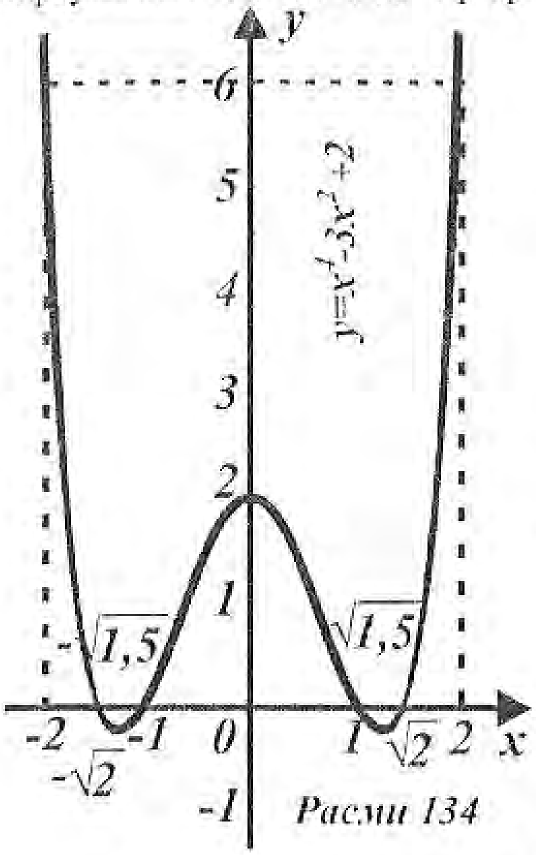
Расми 132

нуқтаҳои буриш бо тири ОХ; дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$, ва $(1;+\infty)\uparrow$, дар $(-1;1)\downarrow$; $x=-1$ нуқтаи максимум ва $x=1$ нуқтаи минимум; графикаш дар расми 133 тасвир ёфтааст; в) (1; 0), $(-2;0)$- нуқтаҳои буриш бо тири OX; дар фосилаҳои $(-\infty;-1)$, ва $(1;+\infty)\uparrow$ ва дар $(-1;1)\downarrow$; $x=-1$ нуқтаи максимум ва $x=1$ нуқтаи минимуми функсия аст; г) График



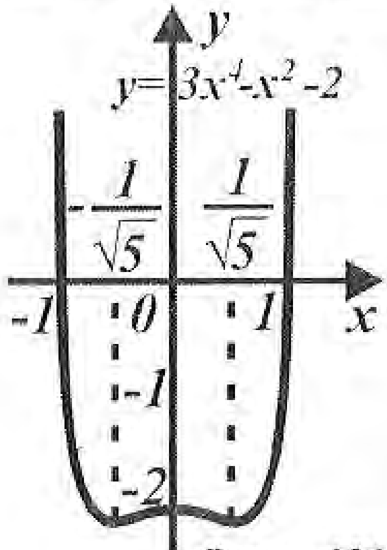
Расми 133

аз ибтидои координата гузашта дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ афзуншаванда аст; д) График аз ибтидои координата мегузарад; дар



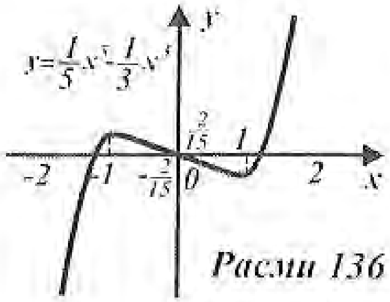
Расми 134

$\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ ва $(0;+\infty)\uparrow$, дар $\left(-\frac{2}{3};0\right)\downarrow$ мешавад; $x=-\frac{2}{3}$-нуқтаи максимум ва $x=0$ нуқтаи минумум аст; е) $\left(\pm\sqrt{2};\ 0\right),\left(\pm 1;0\right)$ - нуқтаҳои бурриш бо тири OX ва $(0;2)$нуқтаҳои бурриш бо тири OY; дар $\left(-\infty;-\sqrt{1,5}\right)$ ва $\left(0;\sqrt{1,5}\right)\downarrow$; дар фосилаҳои $\left(-\sqrt{1,5};0\right)$ ва $\left(\sqrt{1,5};+\infty\right)\uparrow$; $x=\pm\sqrt{1,5}$ нуқтаи минимум ва $x=0$ нуқтаи максимум аст. График дар расми 134 тасвир карда шудааст; ж) $(\pm 1;\ 0)$- нуқтаҳои бурриш бо тири OX; (0; -2)- нуқтаҳои бурриш бо тири OY; дар фосилаҳои $\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, ва $\left(0;\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ функсия кам ва дар фосилаҳои $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};0\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};+\infty\right)$ меафзояд; нуқтаҳои $x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ нуқтаи минимум ва $x=0$ нуқтаи максимум аст. График дар расми 135 тасвир карда



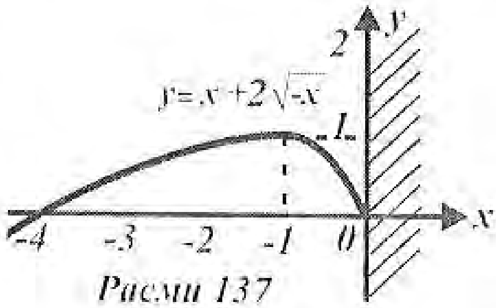
Расми 136

шудааст; з) $(\pm 1;\ 0)$- нуқтаҳои бурриш бо тири OX; график аз ибтидои координата мегузарад; дар фосилаҳои $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ва $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ кам ва дар $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ меафзояд; $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ нуқтаи минимум ва $x=0$ нуқтаи максимум мебошад; и) $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}};\ 0\right)$- нуқтаҳои бурриш бо тири OX график аз ибтидои координата мегузарад; $(-\infty;-1)$, ва $(1;+\infty)$ - фосилаҳои афзуншавӣ, $(-1;0)$ ва $(0;1)$ - фосилаҳои камшавии функсия аст; $x=-1$ нуқтаи максимум ва $x=1$ нуқтаи минимум аст. График дар расми 136 тасвир

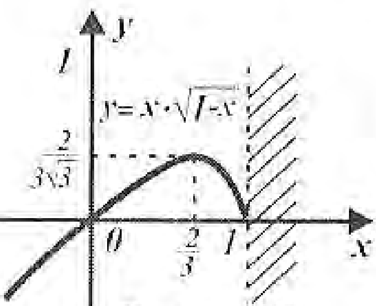


Расми 136

карда шудааст; к) $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}};\ 0\right)$ - нуқтаҳои буриш бо тири OX; График аз ибтидои координата мегузарад; дар $(-\infty;-1)$ ва $(1;+\infty)\uparrow$; дар $(-1;0)$ ва $(0;1)\downarrow$; $x=-1$ нуқтаи максимум ва $x=1$ нуқтаи минимум аст; л) График аз ибтидои координата гузашта тири OX-ро дар нуқтаи (5; 0) мебурад; дар $(-\infty;0)$, ва $(4;+\infty)\uparrow$; дар $(0;4)\downarrow$; $x=0$ нуқтаи максимум ва $x=4$ нуқтаи минимум аст. м) График тири OX-ро дар нуқтаҳои $(\pm 2;0)$ мебурад; дар тамоми нӯқтаҳои соҳаи муайянӣ афзуншаванда аст; $x=0$ нуқтаи каниши функсия мебошад; н) График тири OX, OY ва хати рости x=4-ро намебурад; дар фосилаҳои $(-\infty;0)$ ва $(8;+\infty)$ кам шуда, дар (0; 8) меафзояд; x=8- нуқтаи максимуми функсия мебошад; о). График аз нуқтаи (0; 0) ибтидо ёфта дар нимҳамвории $x\le 0$ ҷой мегирад. Бо тири OX дар нуқтаи $(-4;0)$ бурида мешавад; дар $(-\infty;-1)\uparrow$, дар $(-1;0)\downarrow$; дар нуқтаи $x=-1$ дорои максимум мешавад (расми 137); п). График аз ибтидои координата гузашта дар нимҳамвории аз хати рости $x=1$ чап ҷой гирифтааст; дар фосилаи $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$ афзуншаванда

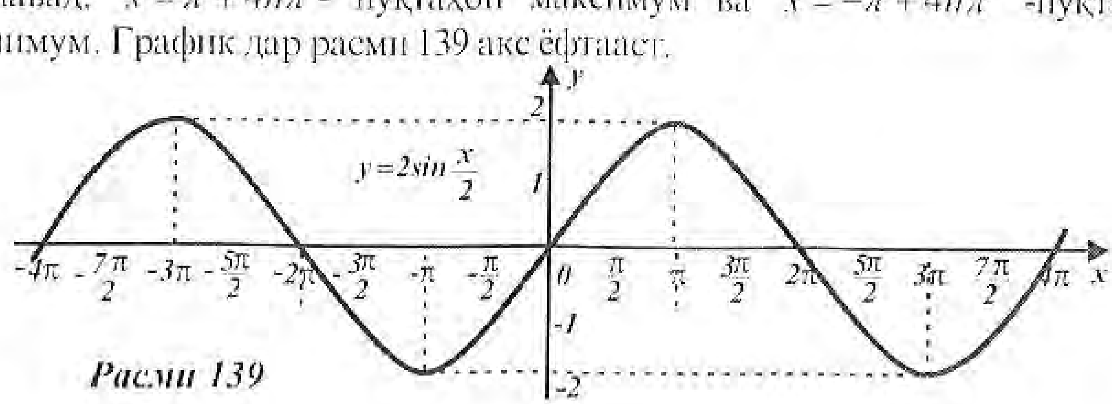


Расми 137

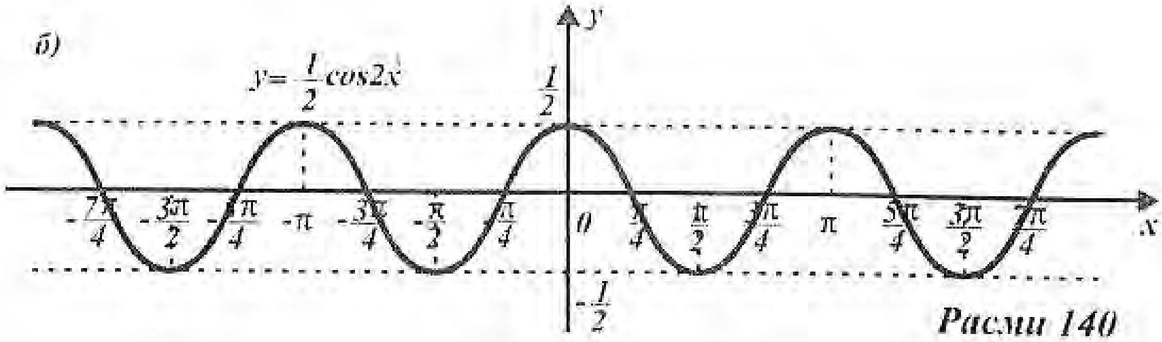


Расми 138

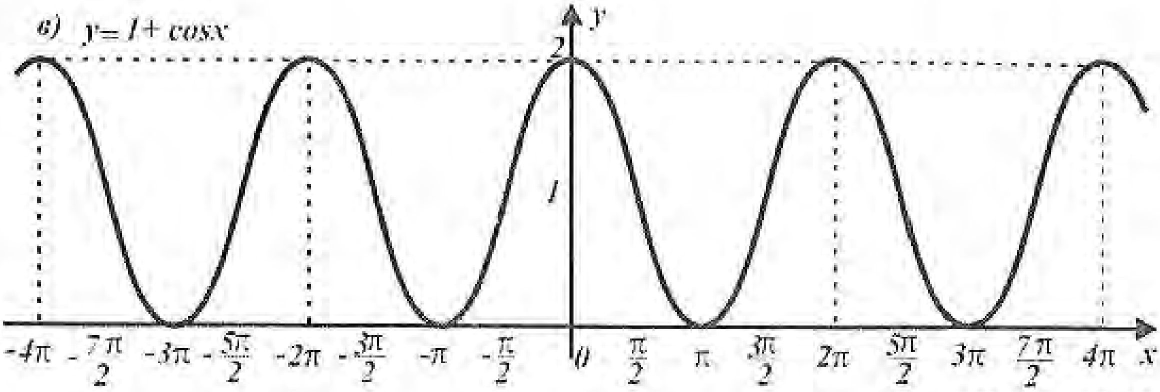
ва дар фосилаи $\left(\frac{2}{3};1\right)$ камшаванда аст. $x=\frac{2}{3}$ - нуқтаи максимуми функсия аст. График дар расми 138 акс ёфтааст. **600.** а) $(2n\pi;\ 0)$, $n=0\pm1;\pm2;...$ нуқтаҳои буриши график бо тири OX; дар фосилаҳои $-\pi+4n\pi<x<\pi+4n\pi,\ n\in Z$ функсия афзуда, дар $\pi+4n\pi<x<3\pi+4n\pi,\ n\in Z$ кам мешавад; $x=\pi+4n\pi$ - нуқтаҳои максимум ва $x=-\pi+4n\pi$ -нуқтаҳои минимум. График дар расми 139 акс ёфтааст.



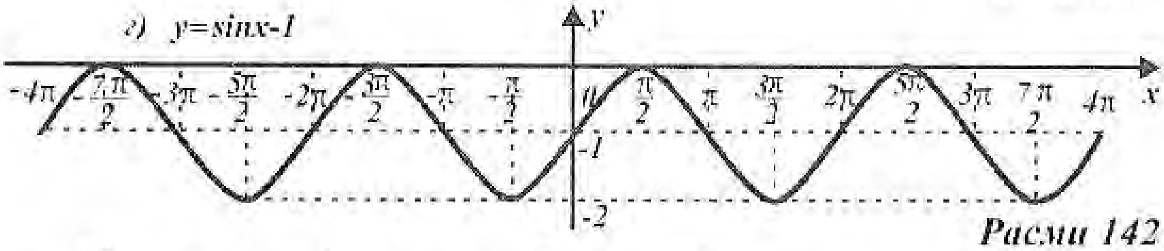
Расми 139



Расми 140



Расми 141



Расми 142

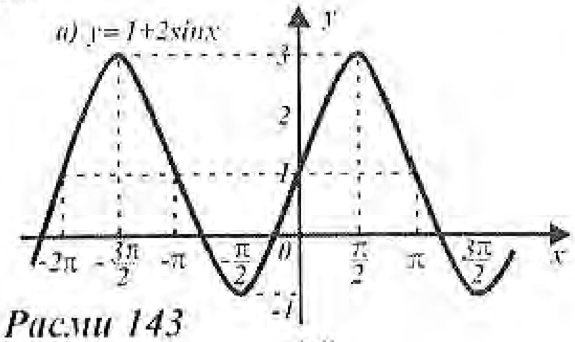
601. а) $\frac{17}{2}$; б) 15; в) $\frac{1}{8}$. **602.** $2{,}4\frac{км}{соат}$ ё $3\frac{км}{соат}$. **603.** а) $x_1=5, x_2=-14$; б) $x_1=-5, x_2=4\frac{1}{3}$. **606.** $y=3x-1$. **607.** а) $y_{min}=y(-1)=-2$, $y_{max}=y(0)=0$, $y_{калонт.}=y(-2)=3$, $y_{хурдт.}=y(3)=-3$; б) $y_{max}=y(-2)=2$, $y_{min}=y(1)=-2$, $y_{калонт.}=y(3)=3$, $y_{хурдт.}=y(-4)=-1$. **608.** $y_{хурдт.}=1{,}3125$; $y_{калонт.}=2$; б) $y_{хурдт.}=-256$, $y_{калонт.}=0$; в) $y_{калонт.}=12$, $y_{хурдт.}=0$; г) $y_{хурдт.}=-\frac{1}{2}$, $y_{калонт.}=0$. **609.** а) $y_{хурдт.}=y(2)=8$; б) $y_{калонт.}=y(-1)=-2$. **610.** 8 ва 8; **611.** 1. **612.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **613.** $-\frac{1}{2}$. **614.** 1сон; $1\frac{м}{сон}$; **615.** 40м ва 40м (яъне майдончаи назди ҳавлигӣ дар сурати шакли квадрат доштанаш ба масоҳати калонтарин доро аст). **616.** $\frac{18}{\pi+4}$; **Нишондод:** расмро кашида аз рӯи он барои масоҳат функсияи

$S(x)=9x-\frac{\pi+4}{8}x^2$-ро тартиб дода онро аз рӯи дастури пешниҳодшуда доир ба ёфтани қимати калонатрин таткиқ кардан зарур аст. **617.** $\sqrt{2}R$ ва $\sqrt{2}R$; $S_{калонт.}=2R^2$. **618.** а) $-2\frac{2}{3}$; б) 1,5; в) $x_1=0,\ x_2=5$; г) $\frac{1}{3}$. **619.** $\frac{3}{5}$. **620.** ха.

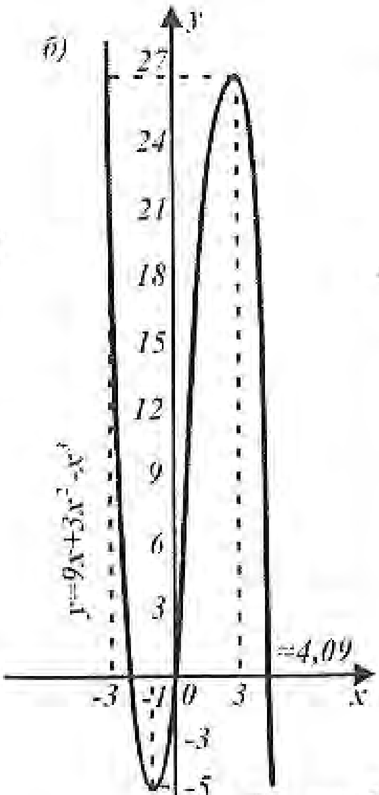
621. $48\frac{\text{км}}{\text{соат}}$. **622.** $x_{1,2}=3\pm2\sqrt{2},\ x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}$. **623.** 1. **625.** а) $x\in(-\infty;\ 2]\cup[4;\ 6]$; б) $x\in(0;\ 0{,}3)$; в) $x\in(2;\ 5]$; г) $x\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$; д) $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; е) $x\in(0{,}1;\ 0{,}4)$; ж) $x\in(-0{,}6;\ 0)$; з) $x\in\left[\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right]$.
626. а) $x\in(-\infty;-5)\cup(-3;\ 1)\cup(5;+\infty)$; б) $x\in(-1;1)\cup(3;13)$; в) $x\in(-\infty;-5)\cup[-4;-1]\cup[10;\ +\infty)$; г) $x\in(-\infty;\ -11]\cup(-2;1)$; д) $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$. **627.** а) $x\in(-\infty;+\infty)$; б) $x\in(-\infty;+\infty)$; в) $x\in\left(-\frac{2}{3};11\right)$; г) $x\in[-7;\ 4{,}5]$; д) $x\in\left(-\infty;-\frac{8}{3}\right)\cup(1;\ +\infty)$. **628.** а) $x\in(-\infty;-9)\cup(0;\ 2)\cup(9;\ +\infty)$; б) $x\in(-3;-1)\cup(-1;\ 1]$; в) $x\in(1;3)\cup(5;\ +\infty)$; г) $x\in(1;4)\cup(4;6)$. **629.** а) $x\in(-1;1]$; б) $x\in(-\infty;1)\cup(2;\ +\infty)$; в) $x=3,\ 5<x<+\infty$; г) $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(1;\ +\infty)$. **630.** а) $a=3,\ a\in(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$; б) $a\in(0;2)$; в) $a\in(0;2)$; г) $a\in(-5;0)\cup(0;4)$. **631.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 3. **632.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$. **633.** а) $y=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\frac{3}{2}-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\pi}{6}$; б) $y=-x+\frac{2+\pi}{4}$; в) $x+y=3$; г) $y=4x-3$; д) $y=\frac{x}{2}$; е) $y=40x-112$. **635.** 4вох². **636.** а) $f(2{,}001)\approx13{,}024$, $f(0{,}998)\approx-1{,}012$, $f(-2{,}003)\approx-19{,}072$; б) $f(1{,}002)\approx1{,}001$, $f(4{,}001)\approx2{,}00025$, $f(8{,}997)\approx2{,}9995$. **637.** а) $\approx0{,}17$; б) $\approx10{,}001$; в) $\approx1{,}04455$; г) $\approx0{,}643$. **638.** $\upsilon(2)=3\frac{м}{сон}$, $a(2)=4\frac{м}{сон^2}$. **639.** $9\pi\frac{см}{сон}$. **640.** $242\frac{кг\cdot м}{сон}$. **641.** $\upsilon\left(\frac{\pi}{4\omega}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega,\ a\left(\frac{\pi}{4\omega}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2$. **642.** а) дар тамоми

нуқтаҳои соҳаи муайянӣ, яъне дар $(-\infty; -2)\cup(-2; 2)\cup(2; +\infty)$ афзуншаванда аст; б) дар $(-\infty; 0)\cup(0; 81)$ кам шуда дар $(81; +\infty)$ меафзояд; в) дар $(-\infty; -2)\cup(2; +\infty)$ афзуда, дар $(-2; 0)\cup(0; 2)$ кам мешавад; г) дар фосилаҳои $(-\infty; 0)$ ва $(1; +\infty)$ афзуда дар фосилаи (0; 1) кам мешавад; д) дар $(-\infty;0)$ афзуда, дар $(0; +\infty)$ кам мешавад; е) дар $(-\infty; +\infty)$ меафзояд; ж) дар $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n\right)$ афзуншаванда ва дар $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n, \frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n\right)$ камшаванда аст $(n\in Z)$; з) барои ҳамаи x-ҳои $x>1$ афзуншаванда ва барои $x<0$ ва $0<x<1$ камшаванда аст; и) дар $-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$ меафзояд. **644.** а) $x_{1,2}=\pm1$, ; $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$, $x_5=0$ б) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$, $x_3=0$. **645.** а) $x_{1,2}=\pm4$; б) $x_1=2, x_2=3$. **646.** а) $y_{max}=y(-5)=\frac{313}{3}$, $y_{min}=y(5)=-\frac{187}{3}$; б) $y_{min}=y(1)=-3$; в) $y_{min}=y(3)=27$; г) $y_{max}=y(2)=4$; д) $y_{min}=y\left(\frac{1}{10}\right)=-\frac{1}{8}$; е) $y_{max}=y(-3)=-2$, $y_{min}=y(3)=2$. **648.** а) $y_{min}=y(1)=18$; б) $y_{max}=y(-1)=14$; б) $y_{min}=y\left(\frac{1}{7}\right)=12\frac{6}{7}$. **649.** б) муодила ду решаи ҳақиқӣ дорад.

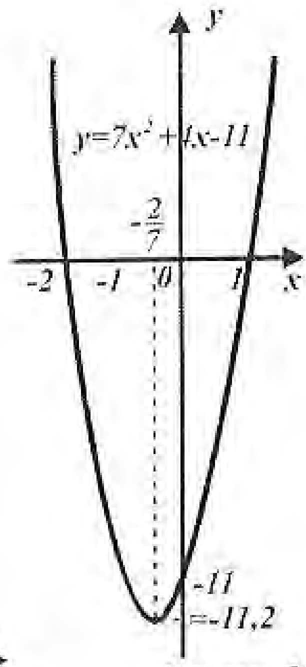
650.



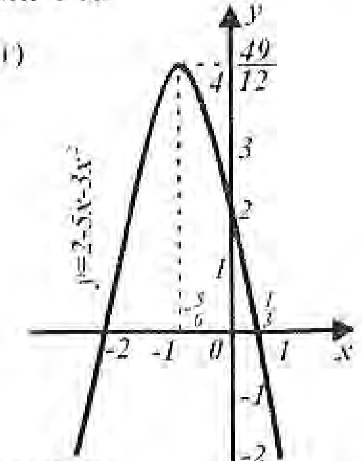
Расми 143



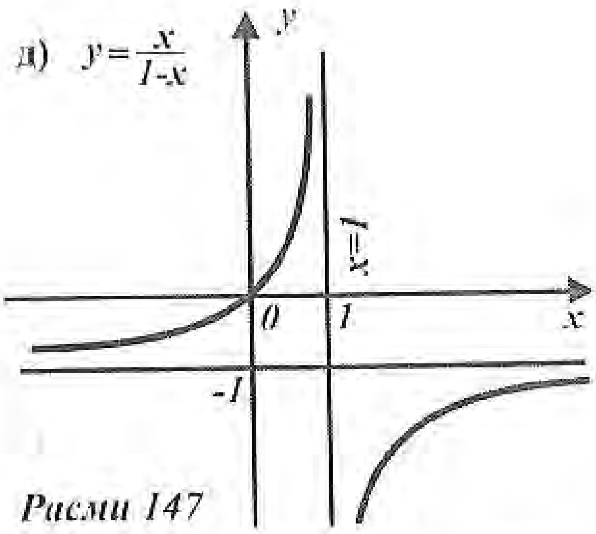
Расми 144



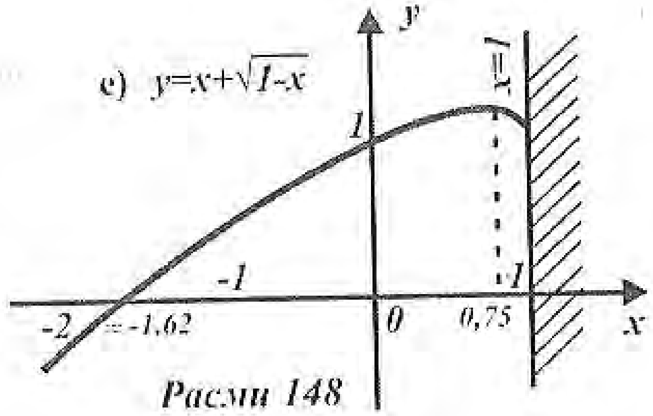
Расми 145



Расми 146



Расми 147



Расми 148

651. а) $y_{хурот.} = y(2) = -32$, $y_{калонт.} = y(0) = y(3) = 0$; б) $y_{хурот.} = y(3) = -18$, $y_{калонт.} = y(1) = y(-2) = 2$; в) $y_{хурот.} = y(-2) = -8$, $y_{калонт.} = y(1) = 10$; г) $y_{хурот.} = y(2) = -32$, $y_{калонт.} = y(0) = y(3) = 0$. **652.** $4м \times 4м \times 2м$. **653.** Ҳангоми $x = 2м$ будан масоҳати се хонаи дигари бино калонтарин мешавад. **654.** а) $\frac{4}{21}$. **656.** а) $\pm\sin 2\alpha$; е) 1. **658.** а)1;б)-1. **659.** г) $\cos\alpha$. **668.** а) $1-\frac{3}{4}\left(m^2-1\right)^2$; б) $\frac{1}{2}m\left(m^2+1\right)$. **669.** а) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{16}$;

671*. Нишондод.: аз формулаи $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ истифода баред. **673.** 2.

674*. $\frac{1}{8} \le a \le 1$, $x = \pm\arccos\left(4\sqrt{2(1+a)} - 7\right) + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$. **676.** $100tg54^o \approx 137.4см$. **677.** $120\left(tg26^o + tg42^o\right) \approx 166.6м$. **678.** а) $\frac{5}{3}$; б) -2; в) 3; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{5}{2}$; е) $\frac{1}{6}$. **679.** 0. **681.** $\frac{-2x^2+8x-14}{\left(x^2-2x+5\right)^3}$. **682*.** $x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in z$.

684*. 3 ё 12. **685.** $a = 4$. **688.** $p = \frac{1}{2}$. **689.** $c = -\frac{1}{4}$. **690.** $b > \sqrt{3} - 1$, $b < -3 - \sqrt{3}$. **693.** Муодила ҳангоми $|a| > 2$ будан як реша, ҳангоми $|a| = 2$ будан ду реша ва ҳангоми $|a| < 2$ будан се реша мешавад. **695.** Чунин функсияҳо хеле зиёданд. Масалан: $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$; $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$;... **697.** $f(3\pi) = 12\pi - 1$. **699.** $R + Rt : R$.

МУНДАРИЧА

Пиров Раҳмон, Усмонов Нурулло

АЛГЕБРА ВА ИБТИДОИ АНАЛИЗ

Китоби дарсӣ барои синфи 10

Тарроҳ ва дизайн: *Ҳафизов Ҳафиз*

Ба матбаа 01.07.2005 сол супорида шуд. Ба чопаш 05.07.2005 сол имзо шуд. Андозаи 60x90 1/16. Коғази офсет. Ҳуруфи адабӣ. Чопи офсет. Ҷузъи чопии шартӣ 18. Ҷузъи нашриву ҳисобӣ 18. Адади нашр 50.000 нусха. Супориши № 480.

Ҷамъияти Дорои Масъулияташ Маҳдуди «СОБИРИЁН»
734025, ш.Душанбе, хиёбони Рӯдакӣ, 37.

Ҷамъияти саҳҳомии «Матбуот»-и Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон
734025, ш.Душанбе, хиёбони Рӯдакӣ, 37.

ТАСҲЕҲ

Саҳ	Сатр	Чоп шудааст	Хонда шавад
1	2	3	4
5.	13	$\sin\frac{8}{17}$	$\sin\alpha=\frac{8}{17}$
7.	2	$=\sin\alpha(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)...$	$=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)...$
11.	28	$\cos\alpha\cdot\sin\alpha$ -ро	$\sin^2\alpha$ -ро
21.	2	$\sin\alpha+\sin\beta$	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
24	5	$-4tg^2\frac{\alpha}{2}+4tg\frac{\alpha}{2}+\alpha$	$-4tg^2\frac{\alpha}{2}+4tg\frac{\alpha}{2}+2$
37		Расми 9 	Расми 9 
46	4,5	$ctg>0 ... ctg<0$	$ctg\alpha>0 ... ctg\alpha<0$
64	1	$tg\left(arctg(-1)+2arctg(-1)+arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$	$tg\left(arctg(-1)+2arcctg(-1)+arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
65	20	$\sin(arcctgx)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sin(arctgx)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
71	3	$x=\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z$
	9	$x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$	$x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}n\pi,\ n\in Z$
77	Ҷадвал	$\cos x=0 \quad x=\frac{\pi}{2}+(2n+1)$	$\cos x=0 \quad x=\frac{\pi}{2}\cdot(2n+1),\ n\in Z$
78	21	б) $\sin x_1=1$	б) $\sin x_2=1$
80	22	$2\cos 2x+3\sin x=0$	$2\cos^2 x+3\sin x=0$
82	3	$\cos^4 x+...$	$2\sin^2 x+...$
83	2	... муодилахнхои	... муодилахои
	14, 15	$...\sin 2x-\sin^2 2x=0...$ $...\sin 2x(1-\sin^2 2x)=0...$	$...11\sin 2x-\sin^2 2x=0...\ \ ...\sin 2x(11-\sin 2x)=0...$
	27	$\cos 2x=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-6x\right)\right]=\cos 2x=-\cos 6x...$	$\cos 2x=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-6x\right)\right],\quad \cos 2x=-\cos 6x...$
85	25	... ахзохои ... $...\cos x...$	... аъзохои ... $...\cos^2 x\neq 0...$
86	10	$\cos x=-3...$	$\cos x=-\sqrt{3}...$
87	23	$...\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z...$	$...\frac{x_2}{2}=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z...$
88	4	$...x_2=2arctg\frac{3}{4}+n\pi,n\in Z...$	$...x_2=2arctg\frac{3}{4}+2n\pi,n\in Z...$
	8	$t=\frac{3}{4},\frac{x}{2}=arctg\frac{3}{4}+n\pi$	$t=-\frac{3}{4},\frac{x}{2}=-arctg\frac{3}{4}+n\pi$
	10, 15	$x=2arctg\frac{3}{4}+n\pi ...x_2=2arctg3+n\pi,n\in Z$	$x=-2arctg\frac{3}{4}+2n\pi...x_2=2arctg3+2n\pi,n\in Z$
89	19	... мисоли муодилахои...	... мисоли системаи муодилахои ...
92	4	$...=\pi n-\frac{5\pi}{6},\ n\in Z...$	$...=\pi n-\frac{7\pi}{6},\ n\in Z...$
	9	$1-\cos^2 x=\frac{1}{2};...$	$1-\cos 2x=\frac{1}{2};...$

94	8,11	$\ldots\frac{\pi}{6} < x > \frac{5\pi}{6}\ldots\ \ldots\frac{\pi}{6}+2k\pi < x > \frac{5\pi}{6}+2n\pi,\ldots$	$\ldots\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\ldots\ \ldots\frac{\pi}{6}+2n\pi < x < \frac{5\pi}{6}+2n\pi,\ldots$
95	2	$(8n-1)\frac{3}{8}\pi \le x \le (8n-1)\frac{3}{8}\pi,\ n\in Z$	$(8n-3)\frac{3\pi}{8} \le x \le (8n-1)\frac{3\pi}{8},\ n\in Z$
97	17, 18	$\ldots-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\ldots\ \ldots\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\ldots$	$\ldots-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\ldots\ \ldots\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\ldots$
98		Мисоли 3 $\ldots tgx>2.\ldots-\frac{\pi}{3}+n\pi<x<\frac{\pi}{3}+n\pi$	Мисоли 3 $\ldots tgx>\sqrt{3}.\ldots-\frac{\pi}{3}+n\pi<x<\frac{\pi}{2}+n\pi$
		Мисоли 4 $\ldots-\frac{4}{2}+n\pi<x<\frac{\pi}{2}+n\pi$ ва $\ldots-\frac{\pi}{2}+n\pi<x<-\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z$	Мисоли 4 $\ldots\frac{\pi}{4}+n\pi<x<\frac{\pi}{2}+n\pi$ ва $\ldots-\frac{\pi}{2}+n\pi<x<-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$
		Мисоли 5 $\ldots ctgx\le-3\ldots$	Мисоли 5 $\ldots ctgx\le-\sqrt{3}\ldots$
109	1	… иратсионалӣ…	… ирратсионалӣ…
	10, 22	$\ldots a\ldots$ … дуюм бошад ба …	$\ldots a^n\ldots$ … дуюм бошад n ба …
110	12	$\ldots=\frac{81x^4y^3}{16x^2}.$	$\ldots=\frac{81x^4y^8}{16x^{12}}.$
111		№253 … масохаташ	№253 … тарафаш
114	13	…ҷуфт аз адади ду қимати…	…ҷуфт ду адади қимати…
	18	$\sqrt[4]{64}=4$, чунки $4^3=6$ …	$\sqrt[3]{64}=4$, чунки $4^3=64$,…
116	1,12	б) Муодилахорро … $\ldots n\sqrt[n]{a^n}\ldots$	б) Муодилахоро …, $\ldots n\ \sqrt[n]{a^n}\ldots$
117	19	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
124	19	$=2\sqrt{\frac{84}{16}}+\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=$	$=2\sqrt{\frac{81}{16}}+\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=$
125	5,12	$x_2=-728\ \ldots2\sqrt[3]{-728+1}-\sqrt[6]{-728+1}=2\sqrt[3]{-727}-\sqrt[6]{-727}\ne6$	$x_2=728;\ 2\sqrt[3]{729}-\sqrt[6]{729}=\ldots\ne6$
	30	…фақат решаи якум муодилаи…	$\ldots x_1=0$ ва $x_2=-\frac{1}{3}$ муодилаи…
	32	Ҷавоб: $x_1=x_2=-\frac{1}{3}$	Ҷавоб: $x_1=0,\quad x_2=-\frac{1}{3}$
126	26	5) Системаро… ҳалҳои охирнок…	5) Системаро…ҳалҳои шумораашон охирнок…
129	14, 35	$8x^2\cdot7x^{-1}56x^2$ $\ldots\sqrt{2}\ldots$	$8x^3\cdot7x^{-1}=56x^2$ $\ldots\sqrt[3]{}\ldots$
	36, 37	$\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q\ldots}$ $\ldots\sqrt{c+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q\cdot q+\frac{1}{27}p^3}}$	$\sqrt[3]{c+\frac{1}{2}q\ldots}$ $\ldots\sqrt[3]{c+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q\cdot q+\frac{1}{27}p\cdot p\cdot p}}$
130	№ 290	$\ldots\left(N32+N0{,}5-2N\frac{1}{3}\right)-\ldots$	$\ldots\left(\sqrt{32}+\sqrt{0{,}5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\ldots$
144	Ду сатри охирин	$\ldots=2\sin\frac{a+\Delta x-a}{2}\cdot\cos\frac{a+\Delta x+a}{2}=$ $=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)$	$\ldots=-2\sin\frac{a+\Delta x-a}{2}\cdot\sin\frac{a+\Delta x+a}{2}=$ $=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)$
171	1,3	$\ldots\frac{(2x+1)^3}{(x^2+x+1)}\ldots$	$\ldots\frac{(2x+1)^3}{(x^2+x+1)^2}\ldots$