БОБИ II

Муодилаҳои тригонометрӣ

§3. Арксинус, арккосинус, арктангенс ва арккотангенси адад
§4. Ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ ва системаи муодилаҳо
§5. Ҳалли нобаробариҳои тригонометрӣ

§3. Арксинус, арккосинус, арктангенс ва арккотангенси адад

Теоремаеро исбот мекунем, ки аз он ҳангоми ҳал кардани муодилаҳо истифода кардан муфид аст.

Теорема. *Агар f дар фосилаи I афзуншаванда (камшаванда) буда, адади a ягон қимати дилхоҳи f дар ин фосила бошад, он гоҳ муодилаи $f(x)=a$ дар фосилаи I решаи ягона дорад.*

Исбот. Функсияи афзуншавандаи f-ро дида мебароем. (дар ҳолати камшаванда будани функсия муҳокимаронии монанд гузаронида мешавад). Мувофиқи шарти теорема дар фосилаи I чунин адади b мавҷуд аст, ки $f(b)=a$ мебошад. Нишон медиҳем, ки b решаи ягонаи муодилаи $f(x)=a$ мебошад.

Фарз мекунем, ки дар фосилаи I боз адади $c \neq b$ мавҷуд аст, ки $f(c)=a$ мебошад. Дар он сурат ё $c<b$ ё, ки $c>b$ мебошад. Вале функсияи f дар фосилаи I меафзояд, бинобар ин мувофиқан ё $f(c)<f(b)$ ё ки $f(c)>f(b)$ мебошад. Ин ба баробарии $f(c)=f(b)=a$ мухолиф аст. Пас, фарзи кардаамон нодуруст мебошад ва дар фосилаи I ғайр аз адади b решаҳои дигари муодилаи $f(x)=a$ вуҷуд надоранд.

Мисоли 1. Муодилаи $x^3+2x=3$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Функсияи $f(x)=x^3+2x$ дар тамоми тири ададӣ меафзояд (ҳамчун суммаи ду функсияи афзуншаванда).

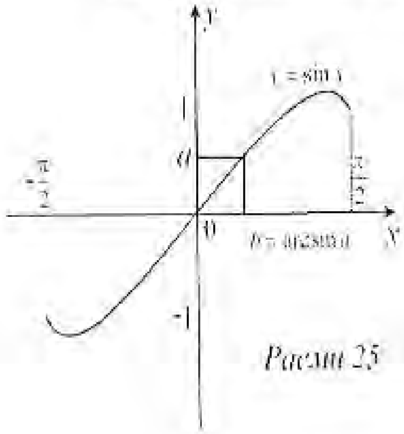
Бинобар ин муодилаи додашуда на зиёд аз як реша дорад. Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки ин реша $x=1$ мебошад.

16. Арксинус, арккосинус, арктангенс ва арккотангенси адад

16.1. Арксинус

Маълум аст, ки функсияи синус дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ меафзояд ва аз −1 то 1 ҳамаи қиматҳоро қабул мекунад. Бинобар ин, мувофиқи теоремаи дар боло исбот кардашуда барои адади a -и дилхоҳ, ки $|a| \leq 1$ аст, дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ решаи ягонаи b -и муодилаи $\sin x=a$ вуҷуд дорад. Ин адади b-ро арксинуси адади a меноманд ва бо $\arcsin a$ ишорат мекунанд.(расми 25)

Таъриф. $\arcsin x$ кунҷест, ки синуси он ба x баробар аст.



Расми 25

Функсияи $\arcsin x$ ба функсияи $\sin x$ чаппа мебошад (Ба монанди он, ки $\sqrt{x}$ ба функсияи x^2 чаппа аст).

Мисоли 2. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро меёбем.

Ҳал. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ аст, чунки $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ва $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Мисоли 3. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ -ро меёбем.

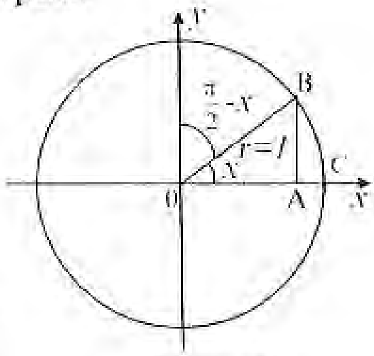
Ҳал. Ададе, ки синусаш ба $-\frac{1}{2}$ баробар аст (аз фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $-\frac{\pi}{6}$ мебошад. Бинобар ин $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$ аст.

Якчанд айниятҳое, ки ба арксинус мансубанд меорем:

1) $\sin(\arcsin a)=a$.

Ин айният аз таърифи арксинус бар меояд $\arcsin a$ ин чунин x мебошад, ки $\sin x=a$ аст.

2) $\arcsin(\sin x)=x$, агар $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ бошад.



Расми 26

Дар ҳақиқат агар $\sin x$ -ро ба a ишорат кунем, он гоҳ айнияти мо ба таърифи арксинус баробаркувва мешавад. Қайд мекунем, ки ифодаи $\arcsin(\sin x)$ барои қимати дилхоҳи x маъно дошта, ҳангоми $x\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ будан ба x баробар нест. Аз таърифи синус ошкор аст, ки $AB=\sin x$, он гоҳ камони CB, ки ба кунҷи марказии x такя мекунад, $\arcsin x$ аст, чунки дар инҷо *arc* аз калимаи *arcus*, яъне камон гирифта шудааст. Айнан ҳамин тавр $OA=\cos x$, $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ аст, бинобар ба ин кунҷи марказӣ камони BD такя мекунад $BD=\arccos x$ мебошад (расми 26) $\arccos(\cos x)=x$, $\arccos(\cos x)=x+2n\pi$, $\arcsin(\sin x)=x+2n\pi$ мебошад.

3) $\arcsin(-a)=-\arcsin a$.

Дар ҳақиқат, синусҳои тарафҳои рост ва чап ба ҳамдигар баробаранд:

$\sin(\arcsin(-a)) = a$ *ва* $\sin(-\arcsin a) = -\sin(\arcsin a) = -a$.

Дар айни замон қисми рости баробарии исботшаванда кунҷе мебошад, ки мутааллиқи порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аст. Бинобар он қисмҳои чап ва рост бо ҳам баробаранд.

?

1. $\arcsin a$ чист?
2. Нисбат ба арксинус кадом айниятҳоро медонед?
3. $\arcsin a$ барои кадом қиматҳои a муайян аст?
4. $\arcsin a$. чӣ гуна қиматҳоро қабул менамояд?
5. Оё $y = \arcsin x$ ва $\sin x = y$. баробарқувваанд?

160. Оё ифода маъно дорад?

$а)\ \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$; $б)\ \arcsin 1{,}5$; $в)\ \arcsin(3-\sqrt{20})$; $г)\ \arcsin\frac{2}{7}$.

161. Ҳисоб кунед:

$а)\ \arcsin 0$; $б)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $в)\ \arcsin 1$; $г)\ \arcsin -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $д)\ \arcsin\frac{1}{2}$;

$е)\ \sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; $ж)\ \sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13}\right)$; $з)\ \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

$и)\ \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$; $к)\ \arcsin(-1)$; $л)\ \arcsin 2$; $м)\ \arcsin\frac{\pi}{2}$.

162. Қимати ифодаро ёбед:

$а)\ \sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$; $б)\ \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$;

$в)\ \arcsin\left(\sin\frac{5}{4}\pi\right)$; $г)\ \arcsin(\sin x)$, агар $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ бошад.

Машқҳо барои такрор

163. Амалҳоро иҷро кунед:

$$1)\ \frac{22\cdot\frac{8}{33}}{15:\frac{5}{8}} : \frac{2\frac{1}{3}:3\frac{1}{2}}{3\frac{1}{8}\cdot 1\frac{3}{5}};\quad 2)\ \frac{1:1\frac{1}{15}}{3\frac{1}{8}:6\frac{2}{3}} : \frac{4\frac{7}{8}:13}{5:1\frac{7}{8}}.$$

164. x-ро ёбед:

$а)\ 7\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x = 22\frac{1}{2}$; $\qquad$ $б)\ \frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{3} = 8$

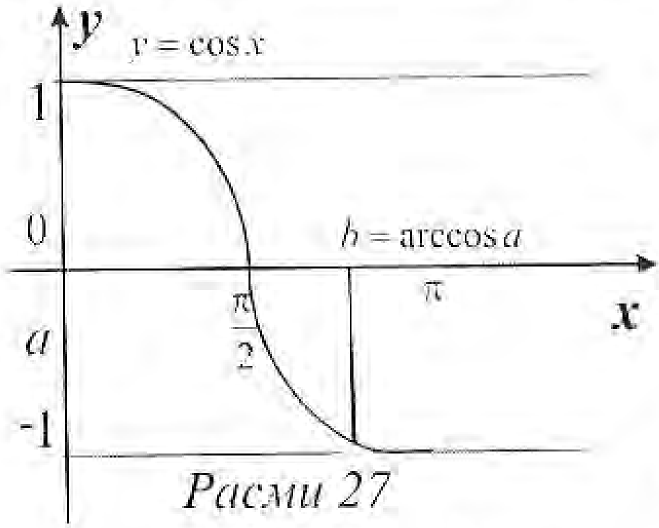
165. Дар мактаб 880 нафар таҳсил мекунанд. Аз онҳо 75% ба туризм машғуланд. Аз шумораи умумии ба туризм машғулбуда 55%-ро духтарон ташкил медиҳанд. Духтарон чанд нафаранд?

166. Ҳисоб кунед:

$а)\ \sin\dfrac{41}{6}\pi;$ $б)\cos\dfrac{82}{3}\pi;$ $в)\ tg\dfrac{5\pi}{8}$

16.2. Арккосинус

Функсияи косинус дар порчаи $[0;\pi]$ кам мешавад ва ҳамаи қиматҳои аз -1 то 1 бударо қабул мекунад. Бинобар ин барои адади дилхоҳи a ки ин чо $|a|\le 1$ аст, дар порчаи $[0;\pi]$ решаи ягонаи b-и муодилаи $\cos x = a$ вуҷуд дорад. Ҳамин адади b–ро арккосинуси адади a меноманд ва бо $\arccos a$ ишорат мекунанд. (расми 27).



Расми 27

Таъриф. $\arccos x$ кунҷест, ки косинуси он ба x баробар аст.

Функсияи $\arccos x$ ба функсияи $\cos x$ чаппа мебошад.

Мисоли 1. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ -ро меёбем.

Ҳал. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ мебошад,

чунки $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ва $\dfrac{\pi}{6}\in[0;\pi]$ аст.

Миосли 2. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ -ро меёбем.

Ҳал. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$ мебошад, чунки $\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\dfrac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$ аст.

Айниятҳоеро меорем, ки онҳо ба арккосинус мансубанд:

1) $\cos(\arccos a)=a$. Ин айният аз таърифи арккосинус бармеояд.

2) $\arccos(\cos x)=x$, агар $x\in[0;\pi]$ бошад.

Ишораи $\cos x = a$ -ро истифода бурда, таърифи арккосинусро ҳосил мекунем: $\arccos a = x$, агар $x\in[0;\pi]$ ва $\cos x = a$ бошад.

3) $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$.

Аз ҳар ду тарафи ин ифода косинус гирифта онро ҳисоб мекунем:
$\cos(\arccos(-a))=-a;\ \cos(\pi-\arccos a)=-\cos(\arccos a)=-a$.

Дар ҳолати умумӣ аз баробар будани косинуси ду адад, баробар будани ин ададҳо бармеояд. Вале агар ин ададҳо ба порчаи $[0;\pi]$ таалluқ дошта бошанд, он гоҳ ин ададҳо низ баробар мешаванд.

Қисми чапи баробарӣ $\arccos(-a)$ мутааллиқи порчаи $[0;\pi]$ мебошад. Агар нишон диҳем, ки қисми рости баробарӣ $\pi-\arccos a$ низ мутааллиқи порчаи $[0;\pi]$ мебошад, он гоҳ аз баробарии косинуси онҳо баробарии ададҳо бармеояд. Ҳамин тавр исбот кардан лозим аст, ки $\pi-\arccos a$ мутааллиқи $[0;\pi]$ мебошад. Дар ҳақиқат, $\arccos\in[0;\pi]$, $-\arccos a\in[-\pi;0]$, пас $\pi-\arccos a\in[0;\pi]$ мебошад. Айнияти 3) исбот шуд.

> **?**
> 1. Таърифи $\arccos a$-ро диҳед.
> 2. $\arcsin a$ барои кадом қиматҳои a муайян аст?
> 3. $\arccos a$ чӣ гуна қиматҳоро қабул мекунад?
> 4. Чӣ гуна айниятҳоро барои $\arccos a$ медонед?
> 5. Оё $y=\arccos x$ *ва* $\cos y=x$ баробаркуввааанд?

167. Ҳисоб кунед:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) $\arccos(-1)$; в) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arccos 1$;

д) $\arccos(-3)$ е) $\arccos 0$; ж) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; з) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; и) $\arccos\frac{1}{2}$.

168. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\cos\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)$; в) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$;

г) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$.

169. Оё ин ифодаҳо маъно доранд?

а) $\arccos\sqrt{5}$; б) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $\arccos\pi$;

170. Ҳисоб кунед:

а) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; б) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$; в) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$;

г) $\arccos\left(\cos\left(-40^0\right)\right)$; д) $\arccos(\cos 6\pi)$.

171. Айниятро исбот кунед:

а) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$; б) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$;

в) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$; г) $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Машқҳо барои такрор

172. Амалҳоро иҷро кунед:

а) $5{,}75 \cdot 2{,}08 \cdot (3{,}6 - 1{,}2 \cdot 3)$; б) $0{,}008 + 0{,}992 \cdot 5 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}4$.

173. Ададро ёбед, агар:

а) *8% - и ин ба 24 баробар бошад;* б) *45% - и он 225 баробар бошад.*

174. Ифодаро содда кунед:

а) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{tg\alpha - tg\beta}$; б) $\dfrac{ctg\alpha + ctg\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

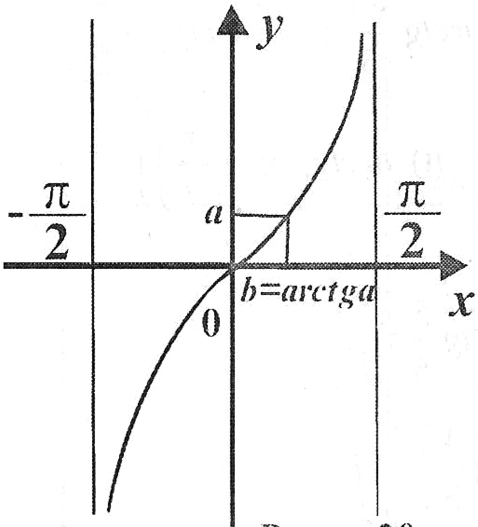
175. Аз 750 нафар хонандагони мактаб 80% дар маҳфилҳои гуногун иштирок доранд, аз онҳо 5% иштирокчиёни радиомаҳфил мебошанд. Иштирокчиёни маҳфил чанд нафаранд?

16.3 Арктангенс

Функсияи тангенс дар фосилаи $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ меафзояд ва тамоми қиматҳоро аз маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ қабул мекунад. Бинобар ин барои адади дилхоҳи a дар фосилаи $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ решаи ягонаи b – и муодилаи $tgx = a$ вуҷуд дорад. Адади b – ро арктангенси адади a меноманд ва бо $arctga$ ишорат мекунанд (расми 28).

Таъриф. $arctgx$ кунҷест, ки тангенси он ба x баробар аст.

Функсияи $arctgx$ ба функсияи tgx чаппа мебошад.



Расми 28

Мисоли 1. $arctg1$ - ро меёбем.

Ҳал. $arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$ аст, чунки $tg\dfrac{\pi}{4} = 1$ ва $\dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ мебошад.

Мисоли 2. $arctg\left(-\sqrt{3}\right)$ - ро меёбем.

Ҳал. $arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ аст, чунки $tg\left(-\dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}\right)$ ва $-\dfrac{\pi}{3} \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ мебошад.

Мисоли 3. $\sin\left(arctg\left(-\sqrt{3}\right) + \arcsin(-1) + \arccos 0\right)$ - ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. Фарз мекунем, ки $arctg\left(-\sqrt{3}\right) = \alpha$ аст, он гоҳ $tg\alpha = -\sqrt{3}$ ва $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Аз ин ҷо $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$.

Бигузор $\arcsin(-1)=\beta$ бошад, он гоҳ $\sin\beta=-1$ ва $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, бинобар ин $\beta=-\frac{\pi}{2}$;

Агар $arctg0=\gamma$ фарз кунем, он гоҳ $tg\gamma=0$ мешавад, $\gamma\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Аз ин ҷо $\gamma=0$.

Қиматҳои ёфташудаеро ҷамъбаст намуда ҳосил мекунем:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}-0\right)=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Айниятҳои зерин ҷой доранд:

1) $arctg(tgx)=x$ агар $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ бошад, масалан, $arctg\left(tg\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

2) $tg(arctgx)=x$ барои адади дилхоҳи ҳақиқии x масалан, $tg(arctg1)=1$.

?

1. Ифодаҳои $y=arctgx$ ва $tgy=x$ баробарқувваанд, ё не?
2. Таърифи арктангенсро баён кунед.
3. Кадом айниятҳоро барои арктангенс медонед?
4. Функсияи арктангенс афзуншаванда аст, ё камшаванда?

176. Ҳисоб кунед:

а) $arctg\sqrt{3}$; б) $arctg(-1)$; в) $arctg0$; г) $arctg\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $arctg\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

е) $arctg\frac{\pi}{2}$; ж) $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; з) $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$; и) $arctg\left(tg\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

177. Қимати ифодаро ёбед:

а) $tgarctg2$; б) $tg\left(arctg\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; в) $arctg\left(tg\frac{5}{6}\pi\right)$;

г) $arctg\left(tg\frac{\pi}{10}\right)$; д) $arctg(tg3)$; е) $tg\left(3arctg\frac{4}{3}\right)$.

178. Ҳисоб кунед:

а) $tg(arctg1+arctg(-1))$; б) $tg\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}}-arctg\sqrt{3}\right)$;

в) $tg\left(arctg0+arctg(-\sqrt{3})\right)$; г) $tg\left(arctg0+arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

179. Ҳисоб кунед:

а) $arctg(-\sqrt{3}) + \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1$; б) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2} + 3arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Машқҳо барои такрор

180. Ифодаро содда кунед:

а) $\cos\frac{\pi}{4}\cdot cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$; б) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$;

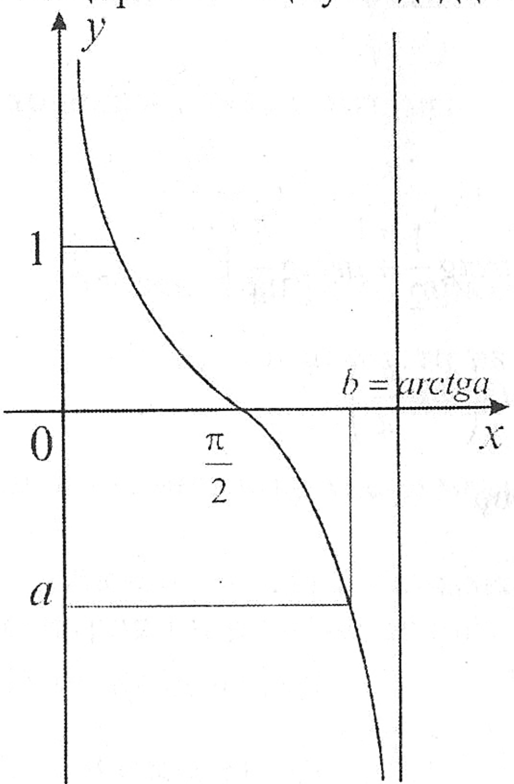
181. Ҳисоб кунед: а) $\arccos 1 + 2\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}$;

182. Нобаробариро ҳал кунед: а) $x(x+5) \le 2x^2 + 4$; б) $10 - (2x - 1) \ge 1 - 7x$.

183. Поезд мебоист масофаи байни шаҳрҳои A ва B-ро мувофиқи ҷадвал дар 4 соату 30 дақиқа тай мекард. Лекин поезд бо сабабҳои техникӣ аз шаҳри A 30дақиқа дертар ба роҳ баромад. Поезд барои он, ки ба шаҳри B ба вақташ омада расад, суръаташро 10км/соат зиёд кард. Масофаи байни шаҳрҳои A ва B-ро ёбед.

16.4. Арккотангенс

Функсияи котангенс дар фосила $(0;\pi)$ кам мешавад ва тамоми қиматҳоро аз маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ қабул мекунад. Бинобар ин барои адади дилхоҳи дар фосилаи $(0;\pi)$ решаи ягонаи b-и муодилаи $ctgx = a$ вуҷуд дорад. Ин адади b-ро арккотангенси адади a меноманд ва бо $arcctga$ ишорат мекунанд. (расми 28).



Расми 29

Таъриф. $arcctgx$ кунҷест, ки котангенси он ба x баробар аст. Функсияи $arcctgx$ ба функсияи $ctgx$ чаппа мебошанд.

Мисоли 1. $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$-ро меёбем.

Ҳал. $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ аст, чунки $ctg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ва $\frac{\pi}{3} \in (0;\pi)$ мебошад.

Мисоли 2. $arcctg(-\sqrt{3})$ -ро меёбем.

Ҳал. $arcctg(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$ аст, чунки $ctg\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ ва $\frac{5\pi}{6} \in (0;\pi)$ мебошад.

Мисоли 3. $tg\left(arctg(-1)+2arctg(-1)+arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$-ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. Фарз мекунем, ки $arctg(-1)=\alpha$, он гоҳ $tg\alpha=-1,\ \alpha=-\frac{\pi}{4}$. Бигузор $arctg(-1)=\beta$ он гоҳ $ctg\beta=-1,\ \beta=\frac{3\pi}{4}$. Бигузор $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\gamma$, он гоҳ $ctg\frac{1}{\sqrt{3}},\ \gamma=\frac{\pi}{3}$ мешавад.

Қиматҳои ҳосилшударо ба назар гирифта ҳосил мекунем:

$$ctg\left(-\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=-ctg15^o=-ctg\left(45^o-30^o\right)=-\frac{1+ctg45^o\cdot ctg30^o}{ctg45^o-ctg30^o}=-2-\sqrt{3}$$

?

1. Функсияи котангенс дар кадом фосила кам мешавад?
2. Таърифи арккотангенсро диҳед.
3. Маҷмӯи қиматҳои арккотангенсро нависед.
4. Функсияи арккотангенс афзуншаванда аст ё камшаванда?

184. Ҳисоб кунед:

а) $arcctg\sqrt{3}$; б) $arcctg0$; в) $arcctg1$; г) $arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$;

д) $arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; е) $arcctg(-1)$;.

185. Ҳисоб кунед:

а) $tg\left(arctg\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; б) $ctg\left(arctg\frac{5}{6}\right)$; в) $tg\left(arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{4}\right)$;

г) $arcctg\left(ctg\frac{\pi}{2}\right)$; д). $ctg\left(arcctg\sqrt{3}\right)$; е) $arcctg\left(ctg\frac{\pi}{4}\right)$.

Машқҳо барои такрор

186. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=18;\\ x^2-y^2+x-y=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2y^2+xy=72,\\ x+y=6.\end{cases}$

187. Айниятро исбот кунед:

а) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2cos\alpha\cdot\sin\beta$; б) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

188. Завод мебоист дар мӯҳлати муайян 800-то детал месохт. Завод мувофиқи график кор карда, 25%-и супоришро иҷро кард ва баъд ҳар рӯз аз норма 10 тогӣ зиёдтар детал сохта супоришро 2рӯз пештар иҷро кард. Завод супоришро дар чанд рӯз иҷро кард?

16.5 Алоқаи байни функсияҳои роста ва чаппаи тригонометрӣ

Ҳангоми омӯзиши функсияҳои чаппаи тригонометрӣ қайд карда шуда буд, ки синус бо арксинус, косинус бо арккосинус, тангенс бо арктангенс ва котангенс бо арккотангенс байни ҳам чаппа буда $\sin(\arcsin x)=x$, $\cos(arccox)=x$, $tg(arctgx)=x$, $ctg(arcctgx)=x$ мебошанд.

Ингуна алоқамандии функсияҳои роста ва чаппаи тригонометриро меорем:

1. $\sin(\arccos x)$ ёфта шавад.

Ошкор аст, ки $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, бинобар он $\sin x(\arccos x)=$ $=\pm\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\pm\sqrt{1-x^2}$, яъне $\sin(\arccos x)=\pm\sqrt{1-x^2}$.

2. $\sin(arctgx)=y$ ишора намуда ҳосил мекунем: $arctgx=\arcsin y$. Тангенси ҳарду тарафи ин формуларо меёбем:

$$tg(arctgx)=tg(\arcsin y)=\frac{\sin(\arcsin y)}{\cos(\arcsin y)}.$$

Айнан ба монанди боло муҳокима ронда ҳосил мекунем:

$$\cos(\arcsin y)=\sqrt{1-y^2},\ \sin(\arcsin y)=y,\ tg(arctgx)=1.$$

Аз ин ҷо $x=\dfrac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}$. Ҳар ду тарафи ин формуларо ба квадрат бардошта y-ро муайян менамоем:

$$x^2=\frac{y^2}{1-y^2},\ y^2=\frac{x^2}{1+x^2},\ y=\pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

Азбаски синус ва арктангенс дар чоряки якум барои қиматҳои $x>0$, $y>0$ доран аломатӣ якхелаанд, бинобар ин: $\sin(arctgx)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Айнан ҳамин тавр ҳосил мекунем $\sin(arcctgx)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Акнун ҷадвали алоқамандии функсияҳои роста ва чаппаи тригонометриро тартиб медиҳем:

1) $\sin x(\arcsin x)=x$;

2) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$;

3) $\sin(arctgx)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

4) $\sin(arcctgx)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

1) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$;

2) $\cos(\arccos x)=x$;

3) $\cos(arctgx)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

4 $\cos(arcctgx)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

§4. Ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ ва системаи онҳо

Муодилаи тригонометрӣ гуфта, баробарии ифодаҳои тригонометриро меноманд, ки номаълум (тағйирёбанда) фақат дар зери аломати функцияҳои тригонометрӣ омада бошад. Масалан $\cos x-1, \sqrt{3}tg3x+1=0, \cos 3x-\sin x=0$, $tg\left(\frac{\pi}{2}-11x\right)-tg\left(\frac{3}{2}\pi-5x\right)=0$, $\sin 3x+\sin 5x-\sin 4x=0$ ва ғайра намуди муодилаҳои тригонометрианд.

Муодилаҳои зерин муодилаҳои оддитарини тригонометрианд:

Аммо $\sin x=\frac{1}{2}x, \cos 2x=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}; tg2x=x$ муодилаҳои тригонометрӣ набуда, онҳоро муодилаҳои трассендентӣ меноманд.

$\sin x=a;\ \ \cos x=a;\ \ tgx=a;\ \ ctgx=a.$

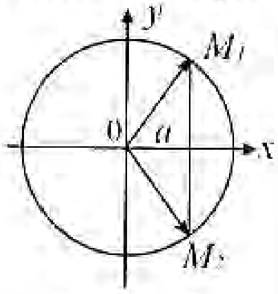
дар ин ҷо a- адади додашуда.

Ҳал кардани муодилаи оддитарини тригонометри ин ёфтани маҷмӯи ҳамаи кунҷҳо (камонҳо) мебошад, ки қимати додашудаи функсияҳои тригонометрӣ ба a баробаранд.

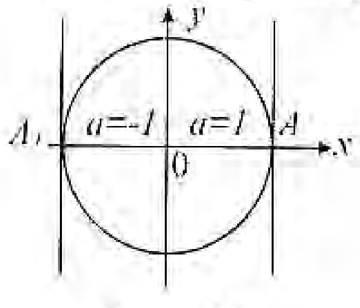
Пеш аз он, ки ба ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ шурӯъ намоем, сохтани кунҷ аз рӯи қимати функсияи тригонометрии онро дида мебароем.

Масъалаи 1. Адади a дода шудааст, кунҷи (камони) α сохта шавад, ки косинуси он ба a баробар аст.

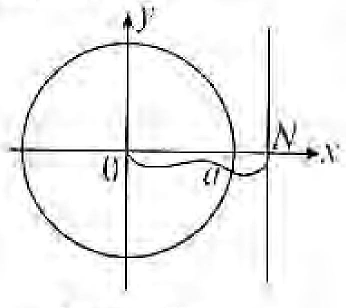
Ҳал. Дар тири Ox нуқтаи N бо абсиссаи $x=a$-ро сохта, аз болои вай хати рости ба тири Oy параллел бударо мегузаронем.



Расми 30



Расми 31



Расми 32

Мавридҳои зерин ба амал омада метавонанд(расмҳои 30-32).

Мавриди 1. Агар $|a|<1$ бошад, дар он вақт нуқтаи $N(a,o)$ дар дохили давраи воҳидӣ мехобад. Хати ба тири Oy параллел давраи воҳидиро дар ду нуқтаи гуногун бурида мегузарад, ки яке аз онҳо M_1 дар нимдавраи болоӣ, дигари он M_2-дор нимдавраи поёни мехобанд. Ҳар гуна кунҷи α, ки барои он OM_1, ё OM_2 тарафи охирин мебошад, (расми 30) косинуси ба a баробар дорад: $\cos x=a$

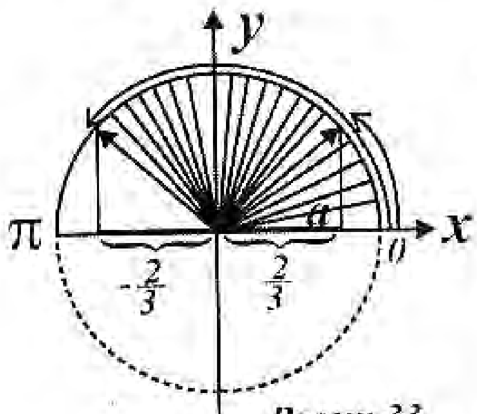
Мавриди 2. Агар $a=\pm 1$ бошад, дар ин маврид нуқтаи $N(a;0)$ ба охирҳои ба яке аз диаметри уфуқӣ (горизонталӣ), мувофиқ меояд ва хати рости ба тири ордината параллелӣ ба даваран воҳиди расанда шуда мегузарад.(расми 31). Барои тарафи охирини кунҷи матлуб танҳо як вазъият имконпазир аст: OA дар ҳолати $a=1$ ва OA_1 дар ҳолати $a=-1$. Ба ин мувофиқан $\alpha = 2k\pi$ (барои $a=1$) ва $\alpha = (2k+1)\pi$ (барои $a=-1$) дар ин ҷо k –адади бутуни дилхоҳ: $k = 0,\pm1,\pm2,...$ мебошанд.

Мавриди 3. Агар $|a|>1$ бошад он гоҳ нуқтаи $N(a;o)$ берун аз доираи воҳидӣ мехобад ва хати рости аз нуқтаи N-и ба тири ордината параллел гузаронида шуда, давраи воҳидиро намебурад, бинобар он чунин кунҷҳои косинусашон ба адади a баробар вуҷуд надоранд. Аз ҳамаи кунҷҳо (камонҳо), ки косинуси онҳо ба a баробар аст (дар ин ҷо $|a|\le 1$), кунҷи хурдтарини мусбат α_0 дар байни аз 0 то π (дар нимҳамвории болоӣ) ҷойгир шудааст (расми 32), ин кунҷ (камон) кунҷи (камони) асосӣ номида шуда, чунин ифода карда мешавад: $\alpha_0 = \arccos a$ (арккосинуси адади a).

Таъриф. Кунҷи (камони) асосӣ $\arccos a$ кунҷ (камон) аст, ки дар байни аз 0 то π ҷой гирифта аст:

$0 \le \arccos a \le \pi$ мебошад, ки косинуси он ба a баробар аст. Агар $|a|>1$ бошад он гоҳ ифодаи $\arccos a$ маъно надорад, зеро кунҷҳои косинусашон ба $a(|a|>1)$ вуҷуд надоранд.

Мисол. 1) $\arccos 1 = 0$; $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$; $\arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$;



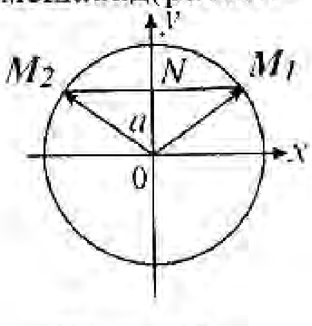
Расми 33

$\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}\pi$; $\arccos 5$ маъно надорад.

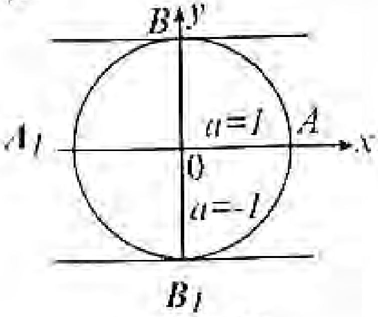
Дар расми 33 кунҷҳои $\arccos\dfrac{2}{3}$ ва $\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ нишон дода шудаанд.

Масъалаи II. Адади a дода шудааст. кунҷи α сохта шавад, ки синуси вай ба a баробар бошад.

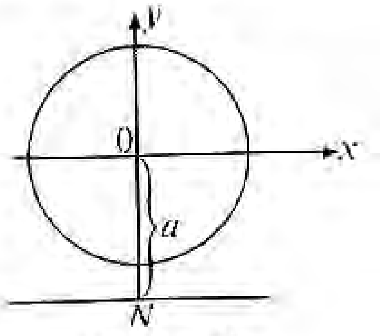
Ҳал. Масъала ба ҳалли масъалаи I монанд аст: нуқтаи $N(0;a)$ дар тири ордината сохта шуда, аз болои вай тири абсисса параллел гузаронида мешавад(расми34-36).



Расми 34



Расми 35



Расми 36

Мавриди 1. Агар $|a|<1$ бошад он гоҳ хати рости ба тири Ox параллел давраи воҳидиро дар ду нуқта бурида мегузарад, ки яке аз онҳо M_1, дар нимдавраи рост ва нуқтаи дигари M_2 дар нимдавраи чап мехобад. Радиус-веторҳои $\overrightarrow{OM_1}$ ва $\overrightarrow{OM_2}$ ду вазъияти гуногуни тарафи охирини кунҷи матлубро муайян мекунад.

Мавриди 2. Агар $a=\pm 1$ бошад он гоҳ барои тарафи охирини кунҷи α як вазъияти имконпазир аст: OB барои $a=1$ ва OB_1 барои $a=-1$. Ба ин мувофиқан $\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (барои $a=1$) ва $\alpha=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (барои $a=-1$), дар ин ҷо k-адади бутуни дилхоҳ мебошад.

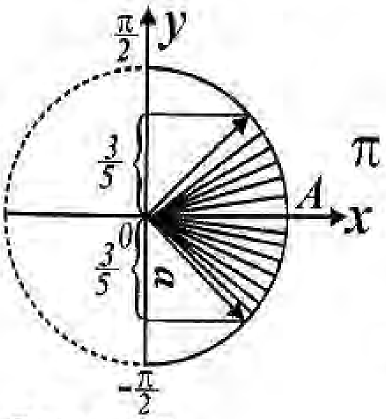
Мавриди 3. Агар $|a|>1$ бошад он гоҳ масъала ҳал надорад, чунки $(|a|>1)$ кунҷҳои синусашон ба адади a-и $|a|>1$ баробар вуҷуд надорад.

Аз ҳамаи кунҷҳо (камонҳо), ки синусашон ба a баробар аст ва дар ин ҷо $|a|<1$ кунҷи бузургии мутлақиаш хурдтарин кунҷи асосӣ ҳисоб карда мешавад; ин кунҷ дар байни аз $-\frac{\pi}{2}$ то $\frac{\pi}{2}$ (дар нимҳамвории рост) ҷойгир шудааст.

Таъриф. **<u>Кунҷи(камони) асосӣ</u>** $\arcsin a$ **<u>кунҷ(камон) аст, ки дар байни аз</u>** $-\frac{\pi}{2}$ то $\frac{\pi}{2}$ **<u>ҷойгир шудааст:</u>**

$-\frac{\pi}{2}\le \arcsin a\le \frac{\pi}{2}$ мебошад, ки синуси он ба a баробар аст. Агар $|a|>1$ бошад, он гоҳ ифодаи $\arcsin a$ маъно надорад.

<u>Мисол</u>. 1) $\arcsin 0=0$, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$. Дар расми 37 сохтани кунҷҳои $\arcsin=\frac{3}{5}$ ва $\arcsin=\left(-\frac{3}{5}\right)$ нишон дода шудааст.

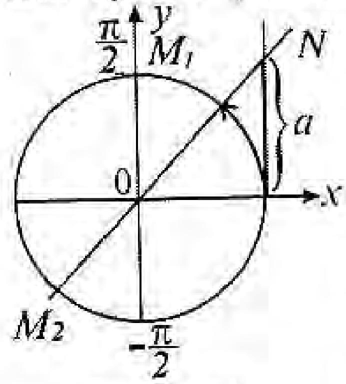


Расми 37

Масъалаи III. Адади a дода шудааст, кунҷи (камони) α сохта шавад, ки тангенси он ба a баробар бошад.

Ҳал. Дар тири тангенсҳо нуқтаи $N(1,a)$ бо ординатаи ба a баробарро мекашем(расми 38). Бо хати рост нуқтаи N-ро бо ибтидои координата пайваст мекунем, ки он давраи воҳидиро аз рӯи ду нуқтаи муқобили якдигар хобидаи M_1

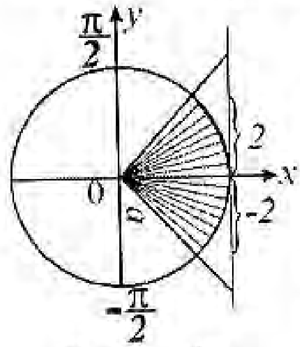
ва M_2 бурида мегузарад. Радиус векторҳои онҳо бошад ду вазъияти гуногуни тарафҳои охирини кунҷи матлубро муайян мекунанд. Аз ҳамаи кунҷҳо (камонҳо), ки тангенс доранд, ҳамон кунҷ-кунҷи асосӣ ҳисоб карда мешавад, ки агар бузургии мутлақиаш хурдтарин бошад; ин кунҷ дар байни $-\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{\pi}{2}$ ҷойгир шудааст.



Расми 38

Таъриф. Кунҷи (камони) асосӣ $arctga$ кунҷи (камони) дар байни $-\frac{\pi}{2}$ то $\frac{\pi}{2}$ ҷойгир шуда мебошад, ки дар ин ҷо $-\frac{\pi}{2} < arctga < \frac{\pi}{2}$ буда, тангенси он ба a баробар аст.

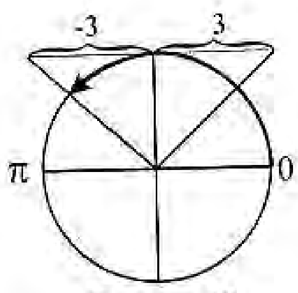
Мисол. 1) $arctg0 = 0$; 2) $arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$; $arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$; $arctg1 = \frac{\pi}{4}$; $arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Дар расми 39 сохтани кунҷҳои $arctg2$ ва $arctg-2$ нишон дода шудааст.



Расми 39

Масъалаи IV. Адади a дода шудааст кунҷи(камони) α сохта шавад, ки котангенси он ба a баробар бошад.

Ҳал. Ҳалли ин масъала ба ҳалли масъалаи III монанд аст; аз координата ва нуқтаи дар тири тангенсҳо хобидаи $N(a,1)$ хати рост мегузаронем ва нуқтаи буриши онро дар давраи воҳиди меёбем. Аз ҳамаи кунҷҳо(камонҳо), ки котангенс доранд, ҳамон кунҷ кунҷи асосии хурдтарини мусбат ҳисоб карда мешавад, ки дар байни 0 ва π ҷой гирифтааст.



Расми 40

Таъриф. Кунҷи (камони) асосӣ $arcctga$ ҳамон кунҷ (камон) аст, ки дар байни 0 ва π ҷойгир шудааст: $0 < arcctga < \pi$ мебошад, ки тангенси он ба a баробар аст.

Мисол. $arcctg0 = \frac{\pi}{2}$; $arcctg1 = \frac{\pi}{4}$; $arcctg(-\sqrt{3}) = \frac{5}{6}\pi$.

Дар расми 40 сохтани кунҷҳои $arcctg3$ ва $arcctg(-3)$ нишон дода шудааст.

Аз он мисолҳое, ки дар боло оварда шудаанд, **маълум мегардад, ки функсияҳои** $\cos\alpha$ ва $\sin\alpha$ **чунин қиматҳои ҳақиқии a-ро гирифта метавонанд, ки бузургии мутлақии он аз 1 зиёд набошад, яъне:** $|\cos\alpha| \le 1$; $|\sin\alpha| \le 1$ **ё ки** $-1 \le \cos\alpha \le 1$; $-1 \le \sin\alpha \le 1$. **Функсияҳои** $tg\alpha$ **ва** $ctg\alpha$ **қиматҳои дилхоҳи ҳақиқиро гирифта метавонанд.**

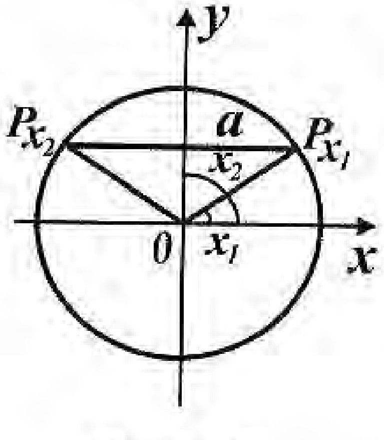
17. Муодилаи $\sin x = a$

Муодилаи $\sin x = a$ ҳангоми $|a| > 1$ будан ҳал надорад, чунки барои қимати дилхоҳи x $|\sin x| \le 1$ аст. Ҳангоми $|a| \le 1$ будан муодила дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ танҳо як ҳалли $x_1 = \arcsin a$ -ро дорад. Дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функсияи синус кам мешавад ва ҳамаи қиматҳои аз -1 то 1 –ро қабул мекунад. Мувофиқи теорема дар бораи решаи муодила, муодилаи $\sin x = a$ дар ин порча низ як реша дорад. Аз расми 36 аён аст, ки ин реша адади x_2 буда ба $\pi - \arcsin a$ баробар аст. Дар ҳақиқат $\sin x_2 = \sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a$. Илова бар ин аз $-\frac{\pi}{2} \le x_1 \le \frac{\pi}{2}$ ҳосил мекунем; $\pi - \frac{\pi}{2} \le \pi - x_1 \le \pi + \frac{\pi}{2}$, яъне x_2 ба порчаи $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ мутааллиқ аст. Инак, муодилаи $\sin x = a$ дар порчаи $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ду ҳал дорад: $x_1 = \arcsin a$ ва $x_2 = \pi - \arcsin a$. Ба 2π баробар будани даври синусро ба назар гирифта, барои навиштани тамоми ҳалҳои муодила формулаҳои зеринро ҳосил мекунем:

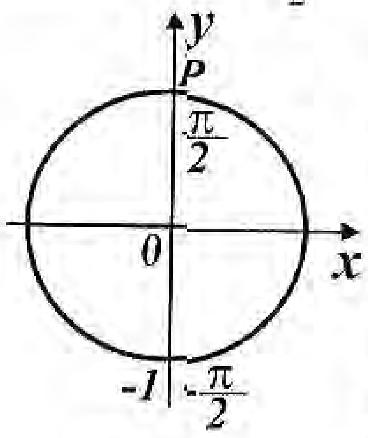
$$x = \arcsin a + 2\pi n,$$
$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \ n \in Z.$$

Ҳалҳои муодиларо ба ҷои ду муодилаи ҳосилшуда бо як формула навиштан қулай аст:

$$x = (-1)^n \arcsin a, \ n \in Z \text{ ва } -\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}.$$



Расми 41



Расми 42

Ҳалҳои муодилаи $\sin x = a$-ро дар давраи воҳидӣ нишон додан қулай. Мувофиқи таъриф $\sin x$ ординатаи нуқтаи P_x –и давраи воҳидӣ мебошад. Агар $|a| < 1$ бошад, чунин нуқтаҳо дутоанд (расми 41); ҳангоми $a = \pm 1$ як нуқта мавҷуд аст (расми 42).

Агар $a=1$ бошад, ададҳои $\arcsin a$ ва $\pi - \arcsin a$ боҳамдигар баробаранд; бинобар ин ҳалли муодилаи $\sin x = 1$ -ро ба намуди $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$ навиштан қабул шудааст.

Ҳангоми $a = -1$ ва $a=0$ будан навишти зерини ҳалҳо қабул шудааст:

$\sin x = -1$, пас $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, ки $n \in Z$ мебошад.

$\sin x = 0$, пас $x = \pi n$, ки $n \in Z$ мебошад.

Мисоли 1. Муодилаи $\sin\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\frac{2}{3}x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z,\ \frac{2}{3}x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Мисоли 2. Муодилаи $\sin\frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\frac{2\pi}{x} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\ x = \frac{8}{4n + (-1)^n},\ n \in Z$.

Мисоли 3. Муодилаи $\sin\frac{3\pi}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. Азбаски $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ мебошад, ҳосил мекунем:

$$\frac{3\pi}{\sqrt{x}} = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + n\pi,\ n \in Z,\ \frac{3\pi}{\sqrt{x}} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + n\pi,\ n \in Z,$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}} = (-1)^{n+1}\frac{1}{2} + n,\ n \in Z,\ \sqrt{x} = \frac{9}{3n + (-1)^{n+1}};\ n \in Z.$$

$x = \frac{81}{\left(3n + (-1)^{n+1}\right)^2},\ n \in Z$; ҳангоми $n=0,\ x_o=81$ аст.

?

1. Чаро муодилаи $\sin x = a$ ҳангоми $|a| > 1$ будан ҳал надорад?
2. Муодилаи $\sin x = a$ дар кадом фосилаҳо расо як ҳал дорад?
3. Ҳалли умумии муодилаи $\sin x = a$ -ро нависед.
4. Барои кадом қиматҳои x дар порчаи $[0;2\pi]$ функсияи $\sin x$: а) афзуншаванда; б) камшаванда; в) қиматҳои мусбат қабул мекунад?

190. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\sin\frac{3}{4}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\frac{2\pi}{x}=-\frac{1}{2}$; в) $\sin\frac{4\pi}{x^2}=1$; г) $\sin\frac{3\pi}{\sqrt{x}}=-1$; д) $\sin\sqrt{\frac{n}{x}}=0$;

е) $\sin(3-2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $\sin 2x=\frac{\pi}{4}$; з) $\sin x=\frac{\pi}{3}$; и) $\sin x=\sqrt{0,01}$;

191. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\sin 4x=-1$; б) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; г) $\sin 4x=1$;

д) $2\sin x=\sqrt{2}$; е) $2\sin 2x=-1$; ж) $\sin x\left(2\sin x-\sqrt{2}\right)=0$.

Машқҳо барои такрор

192. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}3x+y+4=0,\\ x^2-y^2=2,\end{cases}$ б) $\begin{cases}y+3x=2,\\ x^2-xy=3{,}36.\end{cases}$

193. Агар сурати касри одди ба квадрат бардошта шавад ва махраҷаш як воҳид кам карда шавад, касри ба адади 2 баробар ҳосил мешавад. Агар сурати каср 1 воҳид кам ва махраҷаш 1 воҳид зиёд карда шавад, касри ба $\frac{1}{4}$ баробар ҳосил мешавад. Ин касрро ёбед.

194. Ифодаи $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$-ро аввал содда кунед, баъд ҳангоми $\sin\alpha=-\frac{1}{8}$ будан қиматашро ёбед.

18. Муодилаи $\cos x=a$

Аён аст, ки агар $|a|>1$ бошад, муодилаи $\cos x=a$ ҳал надорад, чунки барои x-и дилхоҳ $|\cos x|\le 1$ мебошад.

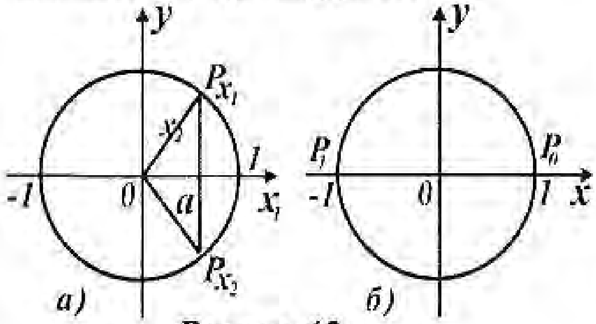
Бигузор $|a|\le 1$ бошад. Ҳамаи қиматҳои x-ро бояд ёфт, ки барояшон $\cos x=a$ шавад. Дар порчаи $[0;\pi]$ расо як ҳалли муодилаи $\cos x=a$ вуҷуд дорад, ки он адади $\arccos a$ мебошад.

Косинус функсияи ҷуфт мебошад пас дар порчаи $[-\pi;0]$ низ муодила як ҳал дорад-ин адад $-\arccos a$. Инак, муодилаи $\cos x=a$ дар порчаи $[-\pi;\pi]$, ки дарозиаш ба ду 2π баробар аст, ду ҳал дорад: $x=\pm\arccos a$.

Ба сабаби даврӣ будани функсияи косинус ҳамаи ҳалҳои он аз ин ҳалҳо ба бузургии $2\pi n,(n\in z)$ фарқ мекунад, яъне формулаи ёфтани решаҳои муодилаи $\cos x=a$ чунин аст:

$$\boxed{x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z.}$$

Ҳалли муодилаи мазкурро дар давраи воҳидӣ нишон додан мумкин аст. Мувофиқи таъриф $\cos x$-и абсиссаи нуқтаи P_x –и давраи воҳидӣ мебошад. Агар $|a| < 1$ бошад, чунин нуқтаҳо дутоанд (расми 43); вале агар $a = 1$ ё $a = -1$ бошад, як нуқта мавҷуд аст (расми 43, б) ва ҳангоми $a = 1$ будан $\arccos a$ ва $-\arccos a$ баробар мешаванд(онҳо ба нол баробаранд), бинобар ин ҳалҳои муодилаи $\cos x = 1$-ро намуди $x = 2\pi n, \quad n \in Z$, навиштан қабул шудааст.



Расми 43

Барои $a = -1$ ва $a = 0$ низ шакли махсуси навишти ҳалҳои муодилаи $\cos x = a$ қабул шудааст: $\cos x = -1$, он гоҳ $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$. $\cos x = 0$ он гоҳ

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. ё

$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Мисоли 1. Муодилаи $\cos\frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\frac{5}{6}x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\pi n,\ n \in Z;\ \frac{5}{6}x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$$x = \pm\frac{\pi}{5} + \frac{12}{5}\pi n,\ n \in Z.$$

Мисоли 2. Муодилаи $\cos(3x-2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\cos(3x-2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $3x - 2 = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$;

$$3x - 2 = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in Z;\quad x = \frac{2}{3} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} + n\pi,\ n \in Z.$$

Мисоли 3. Муодилаи $\cos\pi\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\pi\sqrt{x} = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2n\pi,\ n \in Z$, $\pi\sqrt{x} = \pm\frac{5}{6}\pi + 2n\pi,\ n \in Z$;

1) $\sqrt{x} = \frac{5}{6} + 2n,\ n \in N_0$ дар ин ҷо $N_0 = 0,1,2,...\ x = \left(\frac{5}{6} + 2n\pi\right)^2$;

2) $\sqrt{x} = -\frac{5}{6} + 2n,\ n \in N$, $\quad x = \left(-\frac{5}{6} + 2k\pi\right)^2,\ k \in N.$

Мисоли 4. Муодилаи $\cos(2x-1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\cos(2x-1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $2x-1=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2n\pi,\ \ n\in Z$;

$$2x-1=\pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2n\pi,\ \ n\in Z;\ 2x=1\pm\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2n\pi,\ \ n\in Z;$$

$$2x=1\pm\frac{3}{4}\pi+2n\pi,\ \ n\in Z;\ \ x=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{8}\pi+n\pi,\ n\in Z;\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$$

?

1. Барои чӣ ҳангоми $|a|>1$ будан муодилаи $\cos x=a$ ҳал надорад?
2. Ҳалли муодилаи тригонометрӣ чӣ маъно дорад?
3. Барои кадом қиматҳои a муодилаи $\cos x=a$ ҳал дорад?
4. Даврӣ функсияи косинусро нависед.

195. Муодилаоро ҳал кунед:

а) $\cos 2x=-\frac{1}{2}$; б) $\cos\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}$; в) $\cos\frac{2\pi}{x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos\frac{2\pi}{x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\cos\frac{2\pi}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ е) $\cos\frac{\sqrt{\pi}}{x}=0$;

ж) $\cos(2-3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\cos x=\frac{\pi}{4}$; и) $\cos\frac{2\pi x}{3}=0$.

196. Муодилаоро ҳал кунед:

а) $\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x=\frac{1}{2}$; в) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x=-1$;

д) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; е) $\sqrt{2}\cos x-1=0$; ж) $2\cos x+\sqrt{2}=0$; з) $3\cos x-1=0$; и) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Машқҳо барои такрор

197. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $0{,}01x^2\le 1$; б) $4x\le -x^2$; в) $\frac{1}{3}x^2>\frac{1}{9}$.

198. Муодилаоро ҳал кунед:

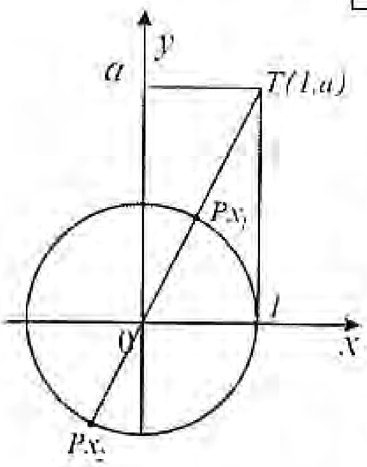
а) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin 2x=0$.

199. Киштӣ бо равиши ҷараёни дарё нисбат ба муқобили ҷараён бо суръати $1\frac{1}{2}$ маротиба тезтар ҳаракат мекунад. Суръати ҷоришавии дарё 2,9 км дар як соат аст. Суръати киштиро дар оби ором муайян намоед.

19. Муодилаи $tgx=a$

Барои қимати дилхоҳи a дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ расо як адади x мавҷуд аст, ки барояш $tgx=a$ аст; ин адад $arctga$ мебошад. Аз ҳамин сабаб, муодилаи $tgx=a$ дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ки дарозиаш ба π баробар аст, расо як реша дорад. Функсия тангенс дорои даври π мебошад. Пас, решаҳои дигари муодилаи $tgx=a$ аз решаи ёфташуда ба бузургии πn $(n\in Z)$ фарқ мекунад, яъне

$$\boxed{x=arctga+\pi n\ ,\ n\in Z\ .}$$



Расми 44

Ҳалли муодилаи $tgx=a$-ро бо ёрии хати тангенсҳо нишон додан қулай аст (расми 44). Барои адади ихтиёрии a дар хати тангенсҳо танҳо як нуқтаи дорои ординатаи a (нуқтаи $T(1;a)$) мавҷуд аст. Хати рости OT давраи воҳидиро дар ду нуқта мебурад; дар ин сурат дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ нуқтаи P-и нимҳамвории рост мувофиқ меояд, ки барояш $x_1=arctga$ аст. Бояд қайд намуд, ки $arctg(-a)=-arctga$ мебошад.

Мисоли 1. Муодилаи $tg2x=\sqrt{3}$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. $2x=arctg\sqrt{3}+\pi n$, $2x=\frac{\pi}{3}+n\pi$, $2x=(3n+1)\frac{\pi}{3}$. $x=(3n+1)\frac{\pi}{6}$, $n\in Z$.

Мисоли 2. Муодилаи $tg\frac{2}{3x}=-1$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\frac{2}{3x}=arctg(-1)+\pi n$, $\frac{2}{3x}=-arctg1+\pi n$, $\frac{2}{3x}=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{2}{3x}=(4n-1)\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{x}=(4n-1)\frac{3\pi}{8}$, $x=\frac{8}{(4n-1)3\pi}$, $n\in Z$.

?

1. Муодилаи tgx=a дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ чандто ҳал дошта метавонад?
2. Даври функсияи тангенс ба чӣ баробар аст?
3. Ҳалли умумии муодилаи $tgx=a$-ро нависед.

200. Муодиларо ҳал кунед:

а) $tg\frac{x}{2}=\sqrt{3}$; б) $tg3x=-\sqrt{3}$; в) $tg\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{x}}{3}$; г) $tg\frac{\pi}{x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

д) $tg\frac{\pi}{\sqrt{x}}=1$; е) $tg\sqrt{\frac{\pi}{x}}=-1$; ж) $tg(1-x)=-2$; з) $tg(2-3x)=0$; и) $tgx=0$.

201. Муодиларо ҳал кунед:

а) $tgx-1=0$; б) $tg2x+1=0$; в) $2tg3x=2$; г) $-2tg3x=2$;

д) $tg\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; е) $tg\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; ж) $tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$; з) $tg2x=0$.

Машқҳо барои такрор

202. Нобаробарии $2x^2-5x-3>0$ - ро ҳал кунед:

203. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\sin x=-1$; б) $2\sin x+\sqrt{2}=0$; в) $\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$.

204. Фарқи квадратии ду адад ба 100 баробар аст. Агар аз сечанди адади якум дучанди адади дуюм тарҳ карда шавад, адади 30 ҳосил мешавад. Ин ададҳоро ёбед.

20. Муодилаи $ctgx=a$

Дар вақти қимати дилхоҳ гирифтани a дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ки дарозиаш ба π, яъне ба даври котангенс баробар аст, ягона камони ба $arctga$ баробар мавҷуд аст, ки вай котангенси додашударо дорад.

Барои охирҳои камонҳои матлуб ду вазъияти ба ҳам муқобил имконпазир аст. Ҳамаи камонҳои матлубро бо роҳи ба камони $arctga$ илова намудани адади бутуни дилхоҳи нимгардишҳо (даврҳои котангенс) ҳосил кардан мумкин аст. Бинобар ин маҷмӯи ҳамаи камонҳои матлуб бо формулаи зерин ифода карда мешавад:

$$\boxed{\begin{gathered} x=arcctga+n\pi,\ n\in Z. \\ 0<arctga<\pi. \end{gathered}}$$

Қайд кардан лозим аст, ки $arcctg(-a)=\pi-arcctga$ аст.

Мисоли 1. Муодилаи $ctg\frac{3}{2}x=5$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\frac{3}{2}x=arcctg5+n\pi$, $x=\frac{2}{3}arcctg5+\frac{2}{3}n\pi$, $n\in Z$.

Мисоли 2. Муодилаи $ctg3x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $3x = arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+n\pi,\ n\in Z,\ 3x=\pi - arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}+n\pi,\ n\in Z$;

$3x=\pi-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z,\ 3x=\frac{2}{3}+n\pi,\ n\in Z,\ 3x=(3n+2)\frac{\pi}{3},\ n\in Z,\ x=(3n+2)\frac{\pi}{9},\ n\in Z$.

Мисоли 3. Муодилаи $ctgx=-1$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $x=arcctg(-1)+n\pi=3\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$.

?

1. Даври функсияи котангенс ба чӣ баробар аст?
2. Ҳалли умумии муодилаи **ctg*x*=*a***-ро нависед.

205. Муодиларо ҳал кунед:

а) $ctg3x=\sqrt{3}$; б) $ctg\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$; в) $ctg\frac{2\pi}{3x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $ctg\frac{\pi}{x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

д) $ctg(x-\pi)=-1$; е) $ctg\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)=-1$; ж) $ctg2x=-0$;

з) $ctg(3-4x)=0$; и) $ctgx=tg\frac{\pi}{3}$.

206. Муодиларо ҳал кунед:

а) $ctg\frac{x}{2}=1$; б) $ctg\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-1$; в) $ctg3x=-1$.

Ҳолатҳои хусусии муодилаҳои тригонометрии соддатаринро дар намуди ҷадвал меорем:

N	Муодила	Маҷмӯи ҳалҳо
1	$\sin x=a$	$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z$.
	$\sin x=-1$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\qquad n\in Z$.
	$\sin x=0$	$x=\pi n,\qquad n\in Z$.
	$\sin x=1$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\qquad n\in Z$.
2	$\cos x=a$	$x=\pm\arccos a+2\pi n,\qquad n\in Z$.
	$\cos x=-1$	$x=\pi(2n+1),\qquad n\in Z$
	$\cos x=0$	$x=\frac{\pi}{2}+(2n+1),\qquad n\in Z$
	$\cos x=1$	$x=2\pi n,\qquad n\in Z$

3	$tgx = a$	$x = arctga + \pi n, \quad n \in Z$
	$tgx = -1$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$
	$tgx = 0$	$x = \pi n, \quad n \in Z$
	$tgx = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$
4	$ctgx = a$	$x = arcctga + \pi n, \quad n \in Z$
	$ctgx = -1$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$
	$ctgx = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
	$ctgx = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$

Муодилаҳои тригонометрии нисбатан мураккабро дида мебароем.

21. Муодилаҳои тригонометрии аргументашон якхела

Ин намуди муодилаҳои тригонометрӣ, мансуби муодилаҳое мебошанд, ки онҳо як функсияи тригонометрии ҳамон як аргументро дар бар мегиранд. Ба ибораи дигар номаълуми x фақат дар таҳти як функсияи тригонометрӣ дода мешавад.

Мисоли 1. Муодилаи $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. Баъди дохил намудани тағйирёбандаи нави $\sin x = u$ $(|u| \leq 1)$ муодила намуди зеринро мегирад:

$$2u^2 - 3u + 1 = 0, \quad u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}; \quad u_1 = 1; \ u_2 = \frac{1}{2}.$$

Аз ин ҷо $\sin x_1 = u_1$ ва $\sin x_2 = u_2$,

а) $\sin x_1 = 1$, б) $\sin x_1 = 1$

$$x_1 = (-1)^n \arcsin 1 + 2\pi n, \qquad x_2 = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,$$

$$x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z. \quad x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Мисоли 2. Муодилаи $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\cos x = u(|u| \leq 1)$ гузошта, ҳосил мекунем:

$$u^2 + 2u - 3 = 0, \quad u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = -3.$$

Аз ин ҷо $\cos x_1 = 1$ ё $\cos x_2 = -3$.

Дар муодилаи $\cos x = -3$, $|-3| = -(-3) = 3 > 1$ аст, бинобар ин муодили $\cos x = -3$ ҳал надорад ($\varnothing$) ва мо муодилаи $\cos x = 1$ - ро ҳал мекунем:

$$x = \pm\arccos 1 + 2\pi n, \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Мисоли 3. Муодилаи $tg^2x - 4tgx + 3 = 0$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $tgx = u$, аз ин ҷо $u^2 - 4u + 3 = 0$,

$$u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1,\ u_1 = 1;\ u_2 = 3.$$

1) $tgx_1 = 1$, аз ин ҷо $x_1 = arctg1 + \pi n$ ё $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$

2) $tgx_2 = 3$, аз ин ҷо $x_2 = arctg3 + \pi n, \quad n \in Z.$

Мисоли 4. Муодилаи $3ctg^2x - 5ctgx - 2 = 0$ - ро ҳал мекунем.

Ҳал. $ctgx = u$, он гоҳ $3u^2 - 5u - 2 = 0$,

$$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6};\quad u_1 = -\frac{1}{3};\quad u_2 = 2.$$

1) $ctgx_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_1 = \pi - arcctg\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

2) $ctgx_2 = 2, \quad x = arcctg2 + \pi n,\ n \in Z$

> **?**
> 1. Решаи бегона чӣ гуна реша аст?
> 2. Тарзҳои ба муодилаи квадратӣ овардани муодилаи тригонометриро бо як ё ду мисол нишон диҳед.

207. Муодиларо ҳал кунед:

а) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$; б) $\sin^2 x - \sin x = 0$; в) $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$;

г) $tg^2x + 2tgx - 3 = 0$; д) $tg^4x - tg^2x - 12 = 0$; е) $4\sin^2 x + \cos x - 3\frac{1}{2} = 0$.

208. Муодиларо ҳал кунед:

а) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$; б) $\sin^2 x - \cos^2 x + 2\sin x + 1 = 0$;

Машқҳо барои такрор

209. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 2xy - y = 7; \\ x - 5y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2y = 18; \\ 3x = 2y; \end{cases}$

210. Қимати ифодаҳоро ёбед:

а) $5\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos 0 - 3\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi$; б) $\sin(-\pi) - \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 2\sin\pi - tg\pi$.

211. Пайдарпайии (a_n) бо формулаи $a_n = 4n - 1$ дода шудааст. Аъзои чандуми пайдарпайӣ ба: а) 91; б) 399 баробар мешавад?

22. Усули ба як функция овардан

Агар муодила функсиҳои гуногуни тригонометрии аргументи номаълумро дар бар гирад, он гоҳ ҳамаи ин функсиҳоро бо як функсия ифода карда, амали гузоришро ичро намуда, муодилаеро, ки танҳо як функсияи тригонометрии аргументи номаълумро дар бар мегирад, тартиб додан лозим аст.

Дар вақти истифода бурдани формулаҳое, ки ба воситаи як функсия, функсияи дигари тригонометриро ифода менамоянд, ба муодила дохил шудани радикал мумкин аст ва дар вақти аз радикал озод кардани муодила решаи бегона ба вучуд омада метавонад. Бинобар он тавсия мекунем, ки (агар имконпазир бошад) функсияҳои тригонометрӣ тавре ба ҳам иваз карда шаванд, ки ба муодила радикал дохил нашавад.

Мисоли 1. Муодилаи $3\cos x = 2\sin^2 x$ -ро ҳал мекунем:

Ҳал. $\sin^2 x$ -ро бо $1-\cos^2 x$ иваз намуда, муодилаи квадратиро нисбат ба $\cos x$ ҳосил мекунем:

$3\cos x - 2\left(1-\cos^2 x\right)$, ё $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$.

Акнун ҳалли муодилаи ҳосилшударо меёбем:

$$\cos x = u\,,\ 2u^2 + 3u - 2 = 0\,,\ x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} = -\frac{-3\pm 5}{4};\ u_1 = -2;\ u_2 = \frac{1}{2}.$$

Он гоҳ, $\cos x_1 = -2, \cos x_2 = \frac{1}{2}$. Азбаски муодилаи якум ҳал надорад, бинобар ин муодилаи дуюмро ҳал мекунем:

$$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z\,.$$

Мисоли 2. Муодилаи $2\cos 2x + 3\sin x = 0$ -ро ҳал мекунем:

Ҳал. $\cos 2x$ -ро бо $1-\sin^2 x$ иваз намуда, ҳосил мекунем:

$$2\left(1-\sin^2 x\right) + 3\sin x = 0,\ \ 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0\,,\ 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0\,,$$

$$\sin x = u,\ 2u^2 - 3u - 2 = 0\,,\ u_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{3\pm 5}{4};\ u_1 = -\frac{1}{2};\ u_2 = 2\,.$$

Азбаски муодилаи $\sin x = 2$ ҳал надорад, бинобар ин аз муодилаи $\sin x = -\frac{1}{2}$ меёбем: $\sin x = -\frac{1}{2}$,

$$x_1 = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ \ x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n\,,\ \ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z\,.$$

Мисоли 3. Муодилаи $(tgx - ctgx)^2 = 1 + ctg^2 x$ -ро ҳал мекунем:

Ҳал. Аз формулаи $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ истифода бурда, ифодаи тарафи чапи муодиларо содда мекунем:

$tg^2x - 2tgx \cdot ctgx + ctg^2x = 1 + ctg^2x$ $\quad (tgx \cdot ctgx = 1)$, $tg^2x = 2+1$, $tg^2x = 3$, $tgx = \pm\sqrt{3}$.

1) $tgx = -\sqrt{3}$, $x = arctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n,\ x_1 = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

2) $tgx = \sqrt{3}$, $x = arctg\sqrt{3} + \pi n,\ x_2 = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Ҷавоб: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Мисоли 4. Муодилаи $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin x$ -ро ҳал меукнем:

Ҳал. Тарафи чапи муодиларо аз рӯи формулаи зарби мухтасари $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a+b)$ ба зарбкунандаҳо ҷудо намуда ва дар асоси айнияти $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ ҳосил мекунем:

$\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\cdot\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \sin x,$ $\qquad \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0,$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0,$ $\quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0,$ $\quad \sin x = u,$ $\quad 2u^2 + u - 1 = 0$,

$u_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = -\dfrac{-1 \pm 3}{4};\ u_1 = -1;\ u_2 = \dfrac{1}{2}.$

1) $\sin x_1 = -1,$, $x_1 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

2) $\sin x_2 = \dfrac{1}{2},$, $x_2 = (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{2} + \pi n,\ x_2 = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in Z$.

Мисоли 5. Муодилаи $2ctg3x + tg3x + 3 = 0$ -ро ҳал мекунем:

Ҳал. Бо назардошти $3x \neq \pi n,\ x \neq \dfrac{\pi n}{3}$ ва $3x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ x \neq \dfrac{\pi n}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $ctg3x$ -ро бо $\dfrac{1}{tg3x}$ иваз намуда, ҳосил мекунем:

$$2\cdot\frac{1}{tg3x} + tg3x + 3 = 0,\ tg^2 3x + 3tg3x + 2 = 0.$$

Тағйирёбандаи нави $tg3x = u$ -ро дохил намуда, ҳосил мекунем:

$u^2 + 3u + 2 = 0$, $u_{1,2} = -\dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{9}{4} - 2} = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{1}{2};\ u_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = -2;\ u_2 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = -1.$

1) $3x_1 = -arctg\,2 + \pi n$, $x_1 = -\frac{1}{3} arctg 2 + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

2) $tg 3x_2 = -1$, $3x_2 = arctg(-1) + \pi n$, $3x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Мисоли 6. Муодилаи $cos^4 x + 3\cos x - 3 = 0$ –ро ҳал мекунем.

Ҳал. $2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0$, $2 - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0$,

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \quad \cos x = u \ (|u| \le 1), \ 2u^2 - 3u + 1,$$

$$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2\cdot 1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}; \quad u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = 1.$$

1) $\cos x_1 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$, $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2) $\cos x_2 = 1$, $x_2 = 2\pi n$, $n \in Z$.

?

1. **Решаи** муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ -ро нависед.
2. Формулаи $a^2 - b^2$ –ро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед.
3. Чаро дар табдилдиҳӣ кушиш мекунем, ки ба муодила радикал дохил нашавад?

212. Муодиларо ҳал кунед:

а) $2\sin^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; б) $ctg^2 x \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2x$;

в) $2\cos^2 x - 4\sin^2 x = 1$; г) $(2\cos 2x - \sin^2 x) = 1$;

д) $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$; ж) $4\sin^2 x = 1 + 2\sin x \cdot \cos x$.

Машқҳо барои такрор

213. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $6x - 10x^2 < 0$; б) $7x^2 \le -2x$.

214. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{2x-2}{x+3} - \frac{x+3}{3-x} = 5$; б) $\frac{32}{x^3 - 2x^2 - x + 2} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x+1}$.

215. Прогрессияи геометрии (a_n) дода шудааст, ки дар он $a_9 = 81$ ва $q = \sqrt{3}$ аст. Суммаи сенздаҳ аъзои аввалаашро ёбед.

23. Усули ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан дар ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ

Агар тарафи чапи муодиларо, пас аз ба тарафи дигар гузаронидани ҳамаи ҷамъшавандаҳо, ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан мумкин бошад, он гоҳ муодила намуди ҳосили зарби ба нул баробарро мегирад. Пас аз он ба навбат ҳар яке аз зарбкунандаҳоро ба нул баробар намуда (ҳосили зарб танҳо ҳамон вақт ба нул баробар аст, ки агар лоақал яке аз ҳамзарбшавандаҳо ба нул баробар бошад), ҳар яке аз муодилаҳои ҳосилшударо ҳал карда, баъд ҳамаи решаҳои ёфташударо ба як маҷмӯи ҳалҳои муодила якҷоя кардан лозим аст.

Мисоли 1. Муодилаи $cos^2 x - \cos x = 0$ -ро ҳал мекунем:

Ҳал. $cosx \cdot (\cos x - 1) = 0$, ё $\cos x = 0$ ва ё $\cos x - 1 = 0$.

а) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$ б) $\cos x - 1 = 0$, $x = 2\pi n,\ n \in Z$.

Мисоли 2. Муодилаи $\sin 2x - \sin^2 2x = 0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\sin 2x(1 - \sin^2 2x) = 0$, аз ин ҷо $\sin 2x = 0$,

$$2x = \pi n \text{ ва } x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

Ҳамзарбшавандаи дуюм $(1 - \sin 2x)$ барои ягон қимати x баробари нул намешавад, чунки $|\sin 2x| \le 1$ ва $1 - \sin 2x \le 1 \ne 0$ аст.

Мисоли 3. Муодилаи $2\cos x \cdot ctg3x = ctg3x$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $2\cos x \cdot ctg3x - ctg3x = 0$, $ctg3x(2\cos x - 1) = 0$.

а) $ctg3x = 0$, $3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z;$

б) $2\cos x - 1 = 0$, $2\cos x = 1$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Мисоли 4. Муодилаи $\cos 2x = \sin\left(6x - \frac{\pi}{2}\right)$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз хосияти тоқ будани функсияи синус ва формулаҳои мувофиқоварӣ истифода бурда $\sin\left(6x - \frac{\pi}{2}\right)$ -ро бо $(-\cos 6x)$ иваз намуда ҳосил мекунем (мувофиқи формулаи мувофиқоварӣ).

$$\cos 2x = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)\right] = \cos 2x = -\cos 6x,\ \cos 2x + \cos 6x = 0.$$

Акнун аз формулаи ба ҳосили зарб табдил додани суммаи ду косинусҳо истифода бурда, тарафи чапи муодиларо ба намуди ҳосили зарб ифода мекунем.

$$2cos\frac{2x+6x}{2}\cdot\cos\frac{2x-6x}{2}=0,\quad 2cos4x\cdot\cos(-2x)=0,\quad \cos4x\cdot\cos2x=0$$

$$2cos4x=0,\quad 4x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.\quad \cos2x=0,$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$$

?

1. Усули ба зарбкунандаҳо ҷудо намуда ҳал кардани муодилаи тригонометриро баён намоед.
2. Ҳосили зарби ду адад дар кадом ҳолат ба нул баробар мешавад?

216. Муодиларо ҳал кунед:

а) $2\sin2x\cdot\cos4x+\cos4x=0$; б) $2\sin^2x\cdot\cos x=0$;

в) $\sin x\cdot tg\frac{x}{2}=0$; г) $\sin3x+\sin x=0$;

д) $\cos2x\cdot\cos x=\sin2x\cdot\sin x$; е) $\cos2x\cdot\cos3x=\cos5x$;

ж) $\sin x\cdot\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos4x\cdot\cos8x=\frac{1}{16}\sin2x$; з) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin5x$.

Машқҳо барои такрор

217. Муодиларо ҳал кунед:

а) $1+\cos x=ctg\frac{x}{2}$; б) $2(x-6)\cos x=x-6$.

218. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $3x+x^2\le0$; б) $y^2<10y+24$.

219. Велосипедсавор аз деҳа ба шаҳр, ки масофаи байнашон 72км аст, равон шуд. Баъди 15дақиқа велосипедсавори дигар аз шаҳр ба пешвози ӯ баромад. Суръати велосипедсавори дуюм аз суръати велосипедсавори якум 2км/соат зиёд аст. Велосипедсаворон дар миёнаи роҳ бо якдигар дучор шуданд. Суръати ҳаракати ҳар як велосипедсаворро ёбед.

24. Муодилаи тригонометрии якҷинса

Муодилаҳои тригонометрии нисбат ба $\sin x$ ва $\cos x$ якҷинса намуди зеринро дорад:

$$a\cos^2x+b\cos x\cdot\sin x+c\sin^2x=0.\qquad(1)$$

Аз муодилаи (1)бар меояд, ки аъзои озоди муодилаҳои якҷинса баробари нул аст ва дар акси ҳол муодила якҷинса башумор намеравад.

Ин намуди муодилахо муодилахон тригонометрии якчинса нисбат ба $\sin x$ ва $\cos x$ номида мешаванд (Тамоми чамъшавандахои муодила дарачахои якхела доранд). Дарачаи якчинсагии онхо ба 2 баробар аст.

Чунон мешуморем, ки коэффисиентхои a,b,c аз нул фарқ мекунанд $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$. Кунчхое, ки синус ё косинусашон ба нул баробар аст, решахои муодилаи (1) шуда наметавонанд, яъне $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Инро шарх медихем. Барои ин аз баръаксаш фарз мекунем, яъне фарз мекунем, ки $\cos x = 0$ аст. Он гох ду аъзои аввалини тарафи чапи муодилаи (1) ба нул табдил меёбад ва муодила намуди $c\sin^2 x = 0$ -ро мегирад, ки ин хангоми $c \neq 0$ будан имконнопазир аст, чунки хангоми $\cos x = 0$ будан, $\sin x = \pm\sqrt{1-cos^2 x} = \pm 1$ мешавад. Ин зиддият фарзи $\cos x = 0$ -ро инкор мекунад ва дар хақиқат $\cos x \neq 0$ аст.

Айнан хамин тавр муҳокимаронихоро барои $\sin x$ гузаронида боварӣ хосил мекунем, ки $\sin x \neq 0$ аст. Дар ин холат хамаи аъзохои муодиларо ба $\cos^2 x$ ё $\sin^2 x$ тақсим намудан мумкин аст. Дар натича муодилаи квадратиро нисбат ба тангенс ё котангенс хосил мекунем:

$$ctg^2 x + btgx + a = 0,$$

агар $b^2 - 4a \cdot c \geq 0$ бошад, он гох муодилаи хосилшуда решахои ҳақиқӣ дорад.

<u>Мисоли 1.</u> Муодилаи $\sin x - \cos x = 0$ -ро хал мекунем.

<u>Хал.</u> Азбаски $\cos x \neq 0$ аст, хамаи аъзохои муодилаи додашударо ба $\cos x \neq$ тақсим намуда хосил мекунем:

$$\frac{\sin x}{cosx} = \frac{\cos x}{\cos x}, \ tgx = 1 \text{ аз ин чо } x = arctg1 + \pi k, \ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z.$$

<u>Мисоли 2.</u> Муодилаи $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ -ро хал мекунем.

<u>Хал.</u> Хамаи ахзохои муодиларо ба $\cos^2 x$ тақсим намуда хосил мекунем:

$$3\frac{\sin^2 x}{cos^2 x} - 7\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0, \quad 3tg^2 x - 7tgx + 2 = 0,$$

$$tgx = u, \ 3u^2 - 7u + 2 = 0, \ u_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm 5}{6}; \ u_1 = \frac{1}{3}; u_2 = 2;$$

$$tgx_1 = \frac{1}{3}, \ x_1 = arctg\frac{1}{3} + \pi n, \ n \in Z. \ \ tgx_2 = 2, \ x_2 = arctg2 + \pi n, \ n \in Z.$$

<u>Мисоли 3.</u> Муодилаи $\sin 3x + \cos 3x = 0$ -ро хал мекунем.

Ҳал. $\cos 3x \neq 0$, бинобар ин ҳамаи аъзоҳои муодиларо ба $\cos 3x$ тақсим намуда ҳосил мекунем:

$tg3x+1=0,\ 3x = arctg(-1)+\pi n, 3x = -\dfrac{\pi}{4}+\pi n,$ аз ин ҷо $x = -\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z$.

Мисоли 4. Муодилаи $tg^3x + tg^2x - 3tgx - 3 = 0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Тарафи чапи муодиларо ба зарбкунандаҳо ҷудо намуда, ҳосил мекунем:

$$tg^2x(tgx+1) - 3(tgx+1) = 0,\ (tgx+1)(tg^2x-3) = 0.$$

а) $tgx+1=0, tgx=-1$ аз ин ҷо $x_1 = -\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z,$

б) $tg^2x - 3 = 0,\ \ tg^2x = 3,$ аз ин ҷо $tgx_1 = \pm\sqrt{3}, tgx_2 = \dfrac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z,$

$tgx_2 = -N3,$ аз ин ҷо $x_2 = -\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z$.

> ?
> 1. Чӣ гуна муодиларо муодилаи якҷинса меноманд?
> 2. Дараҷаи якҷинсагии муодила чӣ гуна муайян карда мешавад?
> 3. Яке аз тарзҳои ба муодилаи якҷинса овардани муодиларо дар мисоли мушаххас нишон диҳед.

220. Муодиларо ҳал кунед:

а) $3\sin^2 x = \cos^2 x;$ б) $4\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 1;$

в) $4\sin x + 2\cos^2 x - 3\sin 2x;$ г) $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0;$

д) $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = 2;$ е) $\sin 2x - ctgx = 0;$

ж) $1-\cos 6x = tg3x;$ з) $\sin\dfrac{x}{2} - cos\dfrac{x}{2} = cosx;$ и) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \sin\dfrac{x}{2}$.

Машқҳо барои такрор

221. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $2x+7>0;$ б) $\dfrac{3}{2-x} \le 0;$ в) $\dfrac{1}{3-2x} < 0$.

222. Қимати ифодаҳоро ёбед:

а) $\sin\alpha - \cos\alpha - 3\cos 3\alpha$, ҳангоми $\alpha = 30^o$ будан;

б) $\sin 2\alpha + tg\alpha - 2tg\alpha$, ҳангоми $\alpha = 45^o$ будан;

223. Ду бригадаи роҳсозон кӯчаеро мумфарш мекунанд. Як бригада ин кӯчаро назар ба бригадаи дуюм 4 соат тезтар мумфарш карда метавонад. Онҳо ҳамроҳ кор карда, дар 24 соат 5-то ҳамингуна кӯчаро мумфарш карданд. Агар ҳар як бригада танҳо кор кунад, ин кӯчаро дар чанд соат мумфарш мекунанд?

25. Дар бораи гузориши универсалӣ

Методи гузориши универсалӣ дар ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ аз он иборат аст: Ба муодила тавре як адади номаълуми (тағйирёбандаи) ёрирасон дохил карда мешавад, ки пас аз иваз кардани номаълумҳо нисбат ба адади номаълуми ёрирасон муодилаи ратсионалӣ ҳосил шавад.

Ҳангоми ҳалли чунин намуди муодилаҳои тригонометрӣ ва барои пайдо нашудани решаҳои бегона аз гузориши универсалии тригонометрии $tg\frac{x}{2}=t$ истифода бурдан ба мақсад мувофиқ аст.

Мисоли 1. Муодилаи $\sin x+\cos x=1$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Азбаски $\sin x=\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ ва $\cos x=\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ аст, бинобар ин муодилаи додашуда намуди зеринро мегирад:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=1$$

Акнун гузориши универсалиро дохил намуда, ҳосил мекунем:

$tg\frac{x}{2}=t$. Он гоҳ $\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=1$, $\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-1=0$,

$2t+1-t^2-1-t^2=0$, $\left(1+t^2\neq 0\right)$, $2t^2-2t=0$, $2t(t-1)=0$, аз ин ҷо $t_1=0$, $t_2=1$.

Ҳамин тариқ,

$tg\frac{x_1}{2}=0$, $\frac{x_1}{2}=arctg0+\pi n, \frac{x_1}{2}=\pi n$, $n\in Z$.

$tg\frac{x_2}{2}=1$, $\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, ва $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$

Мисоли 2. Муодилаи $3\sin x+4\cos x=4$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. $\sin x$ ва $\cos x$-ро бо тангенси нисфи кунҷ $\left(tg\frac{x}{2}\right)$ ифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{6tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{4\left(1-tg^2\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\frac{x}{2}}-4=0,\quad tg\frac{x}{2}=t,\text{ он гох, }\frac{6t}{1+t^2}+\frac{4\left(1-t^2\right)}{1+t^2}-4=0,$$

$6t+4-4t^2-4-4t^2=0\ \left(1+t^2\neq 0\right),\quad 8t^2-6t=0,\qquad 2t(4t-3)=0,$ аз ин чо $t_1=0,\ t_2=\frac{3}{4}$ мебошад. Ҳамин тариқ, $tg\frac{x_1}{2}=0,$

$x_1=2\pi n, n\in Z.\ tg\frac{x_2}{2}=\frac{3}{4},\ x_2=2arctg\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in Z$ мешавад.

Мисоли 3. Муодилаи $4\sin x+3\cos x=-3$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $$\frac{8tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{3\left(1-tg^2\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\frac{x}{2}}+3=0,$$

$$tg\frac{x}{2}=t,\quad \frac{8t}{1+t^2}+\frac{3\left(1-t^2\right)}{1+t^2}+3=0,\quad 8t+3-3t^2+3+3t^2=0$$

$$8t+6=0,\qquad t=-\frac{3}{4}.$$

Ҳамин тариқ,

$$tg\frac{x}{2}=-\frac{3}{4},\quad \frac{x}{2}=arctg\frac{3}{4}+\pi n,\qquad x=2arctg\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in Z$$ мешавад.

Мисоли 4. Муодилаи $3\sin x+\cos x=1$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. $$\frac{6tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-1=0,\qquad tg\frac{x}{2}=t,\quad \frac{6t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-1=0,$$

$6t+1-t^2-1-t^2=0,\ 2t^2-6t=0,\quad 2t(t-3)=0,\quad t_1=0,$ ва $t_2=3$.

Ҳамин тариқ,

$tg\frac{x_1}{2}=0,\ x_1=2\pi n,\ n\in z.\ tg\frac{x_2}{2}=3,\ x_2=2arctg3+\pi n,\ n\in Z.$ мешавад.

?

1. Усули гузориши универсалиро кӯтоҳ баён кунед.
2. Чӣ гуна решаро барои муодила решаи бегона меноманд?
3. Формулаҳои $\sin x$ ва $\cos x$ -ро ба воситаи $tg\frac{x}{2}$ ифода намоед.

224. Муодиларо ҳал кунед:

а) $4\sin x + 5\cos x = 6$; б) $\sqrt{3}\sin x - 2\cos x = 1$;

в) $2(\cos x + \sin x) = \sqrt{2}$; г) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{2}$;

д) $\sin x - \sqrt{5}\cos x = \sqrt{5}$; е) $\sin 2x + \cos 2x = 1$.

Машқҳо барои такрор

225. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 3x - 18 > 0, \\ 4x - 12 > 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 4 \le 0, \\ 4 - 3x > 0, \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x + 2 \ge 5x + 3, \\ 2 - 3x < 7 - 2x. \end{cases}$

226. Дар байни ададҳои 1 ва 16 се то чунин ададҳоеро нависед, ки он пайдарпайии прогрессияи геометриро ифода намояд.

227. Суммаи n аъзои аввали прогрессияи геометрии

$\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{8}...$ -ро нависед.

228. Дар прогресияи геометрӣ $b_1 = 1$; $b_3 + b_5 = 90$ мебошад.

Прогресияро нависед.

229. Суммаи прогресияи геометриро ёбед: $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + ...$

26. Ҳалли системаи муодилаҳои тригонометрӣ

Системаи муодилаҳоеро меомӯзем, ки онҳо фақат аз муодилаҳои тригономерӣ ва ё аз муодилаҳои тригономерӣ ва алгебравӣ иборатанд.

Системаҳои зерин мисоли муодилаҳои тригономерӣ шуда метавонанд:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 0; \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0{,}25; \\ \sin y \cdot \cos x = 0{,}75; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}. \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Мисоли 1. Системаи муодилаҳои $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}; \\ \sin x = 2\sin y; \end{cases}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз муодилаи якум меёбем: $y = x - \frac{5\pi}{3}$ он гоҳ

$$2\sin y = 2\sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cdot \cos\frac{5\pi}{3} - \cos x \cdot \sin x\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) =$$

$= \sin x + \sqrt{3}\cos x$ мешавад. Муодилаи дуюми системаи додашуда намуди зеринро мегирад: $\sin x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$, аз ин ҷо $\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, ки дар ин ҷо $n \in Z$ аст. Пас,

$$y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{7\pi}{6},\ n \in Z \text{ мешавад.}$$

Мисоли 2. Система муодилаҳои

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}; \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Муодилаи дуюми системаро табдил медиҳем:

$2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}$. Он гоҳ $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{4}$, $\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}}$;

$$4\sin\frac{\pi}{12} = 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2},$$

$\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ -ро ҳосил мекунем. Аз $\cos\frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ муодилаи $x + y = \pm 2\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + 4\pi n,\ n \in Z$ -ро пайдо карда ба системаи зерин омада мерасем:

$$\begin{cases} x + y = \pm 2\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + 4\pi n,\ n \in Z, \\ x - y = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Ин муодилаҳоро бо ҳам ҷамъ ва тарҳ намуда ҳосил мекунем:

$$x = \pm ac\cos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + 2\pi n + \frac{\pi}{12},\quad y = \pm\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + 2\pi n - \frac{\pi}{12},\ n \in Z.$$

Мисоли 3. Системаи муодилаҳои $\begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi, \\ tgx + tgy = 2\sqrt{3}, \end{cases}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз $tgx + tgy = 2\sqrt{3}$ ҳосил мекунем: $\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y} = 2\sqrt{3}$. Ин муодиларо бо муодилаи якуми система табдил медихем: $\dfrac{\sin\frac{2}{3}\pi}{\cos x\cdot\cos y}=2\sqrt{3}$;

$\cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{4}$, $\quad\cos(x+y)+\cos(x-y)=\dfrac{1}{2}$; $\quad\cos\dfrac{2}{3}\pi+\cos(x-y)=\dfrac{1}{2}$;
$\cos(x-y)=1$, $x-y=2\pi n$, $n\in Z$.

Ҳамин тариқ ба системаи зерин соҳиб мешавем:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2}{3}\pi, \\ x-y=2\pi n,\ n\in Z. \end{cases}$$

Ин муодилаҳоро ҷамъ ва тарҳ намуда $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ y=\dfrac{\pi}{3}-\pi n,\ n\in z$ -ро ҳосил мекунем.

Мисоли 4. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Муодилаи дуюмро табдил медиҳем:

$\cos(x+y)+\cos(x-y)=1$; $\cos(x+y)+\cos\dfrac{\pi}{3}=1$; $\cos(x+y)=\dfrac{1}{2}$;

$x+y=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$ $\quad\begin{cases} x+y=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z. \\ x-y=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

$x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n+\dfrac{\pi}{6},\quad y=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n-\dfrac{\pi}{6},\ n\in Z.$

Мисоли 5. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x=2\sin y \end{cases}$$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз муодилаи якум меёбем: $y=x-\dfrac{5\pi}{3}$, он гоҳ

$$2\sin y=2\sin\left(x-\dfrac{5\pi}{3}\right)=2\left(\sin x\cdot\cos\dfrac{5\pi}{3}-\cos x\cdot\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=$$

$$= 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos x \text{ мешавад.}$$

Муодилаи дуюми системаро дигар шакл мекунем: $\sin x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$,

аз ин ҷо $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ки дар ин ҷо $n \in Z$ аст. Баъд меёбем:

$$y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{5\pi}{6},\ n \in Z.\ \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n - \frac{7\pi}{6}\right).$$

Мисоли 6. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \end{cases}$$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз муодилаи якум $\cos y = -\sin x$-ро ҳосил мекунем, он гоҳ муодилаи дуюм намуди зеринро мегирад:

$$\sin^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{2};\ 2\sin^2 x = \frac{1}{2};\ 1 - \cos^2 x = \frac{1}{2};\ \cos 2x = \frac{1}{2};$$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi,\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$. Қимати ҳосилшударо дар муодилаи дуюм мегузорем: $\sin^2\left(\pm\frac{\pi}{6} + \pi n\right) + \cos^2 y = \frac{1}{2}$.

Муодиларо дар ҳолати $n=0$ будан дида мебароем:

$$\sin^2\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2 y = \frac{1}{2},\ \sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2 y = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} + \cos^2 y = \frac{1}{2},$$

$$y_1 = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n;\ y_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

?

1. Ҳалли системаи ду муодилаи хаттии дуномаълума гуфта чиро меноманд?
2. Ҳалли системаи муодилаҳои хаттиро бо методҳои гузориш ва ҷамъи алгебравӣ дар мисоли системаҳои тригонометрӣ шарҳ диҳед.

230. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед.

а) $\begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi; \\ \frac{\sin x}{\cos x} = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}; \\ \frac{\sin x}{\cos x} = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}; \\ \frac{tgx}{tgy} = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=\frac{5\pi}{6}; \\ \frac{ctgx}{ctgy}=-\frac{1}{3}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}; \\ \frac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{3}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{12}; \\ \frac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{2}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x+y=\frac{7\pi}{12}; \\ \frac{\sin x}{\cos y}=\frac{\sqrt{6}}{2}; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x-y=\frac{13\pi}{12}; \\ \frac{\sin x}{\cos y}=-\frac{\sqrt{6}}{3}; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x+y=\pi; \\ \cos x-\cos y=1; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2}; \\ \cos^2 x+\sin^2 y=2; \end{cases}$ л) $\begin{cases} x+y=\pi; \\ \sin x+\cos y=1; \end{cases}$ м) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}; \\ \sin^2 x-\sin^2 y=1; \end{cases}$

Машқҳо барои такрор

231. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $x^2-6x<0$; б) $8x+x^2\geq 0$; в) $x^2<4$; г) $x^2>6$;

232. Муодиларо ҳал кунед:

а) $2\cos^2 x+\cos 2x=3$; б) $\sin^2 2x+\sin^2 x=\frac{3}{2}$.

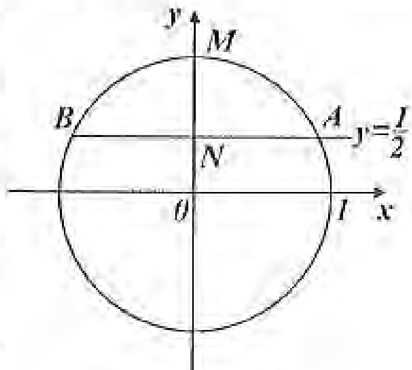
233. Агар ба ҳар як мошин 3,5т маҳсулот бор карда шавад, 4т маҳсулот боқӣ мемонад; агар ба ҳар як мошин 4,5т маҳсулот бор карда шавад, барои ба ҳамаи мошинҳо бор кардани маҳсулот 4т маҳсулот камӣ мекунад. Чандто мошин буд?

27. Ҳалли нобаробариҳои оддии тригонометрӣ

27.1 Ҳалли нобаробариҳои намуди $\sin x>a$, $\sin x<a$, ва $\cos x>a$, $\cos x<a$.

Ҳалли муодилаҳое, ки функсияҳои тригонометриро дар бар мегиранд, одатан ба ҳалли муодилаҳои намуди $\sin x\leq a$; $\cos x>a$; $tgx\geq a$ ва ғайра оварда мешаванд.

Тарзҳои ҳалли нобаробариро бо мисолҳо дида мебароем.



Расми 45

Мисоли 1. Нобаробарии $\sin x>\frac{1}{2}$-ро ҳал мекунем. Системаи координатаҳои OXY-ро гирифта давраи радиусаш R=1-ро чунон мегузаронем, ки марказаш дар ибтидои координатаҳо бошад (расми 45). Хати рости $y = \frac{1}{2}$ –ро мегузаронем.

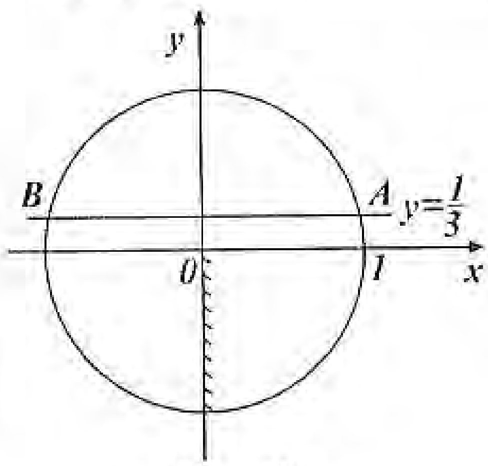
Ҳамаи қиматҳои y дар порчаи MN аз $\frac{1}{2}$ калонанд. Нуқтаи A дар нимҳамвории рост воқеъ мебошад, координатааш ба $\frac{1}{2}$ баробар аст. $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Тасаввур мекунем, ки камон аз нуқтаи A ба сӯи B муқобили ҳаракати ақрабаки соат фаҳмида мешавад.

Он гоҳ $x_2 > x_1$ буда, бо осонӣ фаҳмидан мумкин аст, ки $x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$ мебошад.

Ҳамин тариқ, ҳалли нобаробарии додашуда $\frac{\pi}{6} < x > \frac{5\pi}{6}$ будааст.

Даврӣ будани функсияи $\sin x$-ро ба инобат гирифта, маҷмӯи ҳалҳои нобаробарии додашударо ҳосил мекунем:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x > \frac{5}{6}\pi + 2\pi n,\ n \in Z\ .$$



Расми 46

Мисоли 2. Нобаробарии $\sin 2x \le \frac{1}{3}$ -ро ҳал мекунем.

<u>Ҳал.</u> $A\left(\arcsin\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $B\left(-\pi - \arcsin\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ (расми 46).

$$-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2n\pi \le 2x \le \arcsin\frac{1}{3} + 2n\pi,$$

$$-\arcsin\frac{1}{3} + (2n-1)\pi \le 2x \le \arcsin\frac{1}{3} + 2n\pi,$$

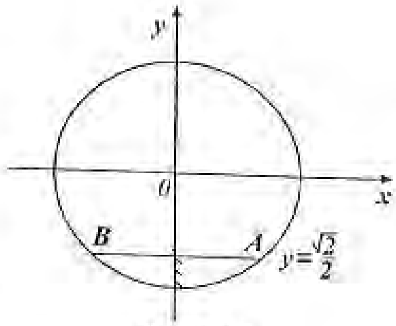
$$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + (2n-1)\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi,\ \ n \in Z\ .$$

<u>Мисоли 3.</u> нобаробарии $\sin\frac{2}{3}x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро ҳал мекунем.

<u>Ҳал.</u> $A\left(\frac{\pi}{4};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{3}{4}\pi;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (расми 47).

$$-\frac{3}{4}\pi+2\pi n\le\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad -\frac{9}{8}\pi+3\pi n\le x\le-\frac{3}{8}\pi+3\pi n,$$

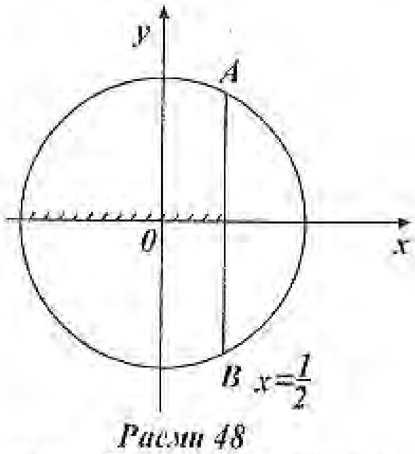
$$(8n-1)\frac{3}{8}\pi\le x\le(8n-1)\frac{3}{8}\pi,\ n\in Z.$$



Расми 47

Мисоли 4. нобаробарии $\cos x<\frac{1}{2}$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Маҷмӯи нуқтаҳои давраи воҳидӣ, ки абсиссаҳояшон аз $\frac{1}{2}$ хурдтаранд, чаптари хати рости $x<\frac{1}{2}$ воқеъ мебошанд. Пас, маҷмӯи тамоми чунин нуқтаҳо аз камоне иборат аст, ки дар (расми 48) тасвир шудааст (охирҳои A ва B ба ин маҷмӯъ мансуб нестанд). x_1 ва x_2 –ро меёбем. Нуқтаи A дар нимдавраи болоӣ воқеъ буда, абсиссааш ба $\frac{1}{2}$ баробар аст; пас, $x_1=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ мебошад. Ҳангоми гузариш аз нуқтаи A ба B нуқтаи дар камони гардиш муқобили ҳаракати ақрабаки соат ба ҷо оварда мешавад; он гоҳ $x_2>x_1$ ва $x_2=2\pi-\arccos\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{3}$ мебошад.



Расми 48

Ҳангоми ҷой доштани шарти $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$ нуқта ба қисми болоии тасвиршудаи камон таалуқ дорад (бо истиснои охирҳояш). Ҳалҳои нобаробарӣ, ки ба фосилаи $[0;2\pi]$-и дарозиаш 2π тааллуқ дорад, чунинанд: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$. Ба сабаби даврӣ будани косинус ҳалҳои дигар бо тарзи ба пайдошудаҳо ҷамъ кардани ададҳои намуди $2\pi n,\ n\in Z$ ҳосил карда мешаванд, яъне $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<x\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

?

1. Нобаробариҳои оддитарини тригонометриро бо кадом тарзҳо ҳал кардан мумкин аст?
2. Адади a бояд кадом шартро қаноат кунонад, то ин ки нобаробариҳои 1. $\sin x<a$; 2. $\sin x\ge a$; 3. $\cos x<a$; 4. $\cos x\ge a$; ҳал дошта бошанд?

234. Нобаробариро ҳал кунед: (200-204)

а) $\sin x \geq -\frac{1}{2},\ x \in [0;\pi]$;   б) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x \in [-\pi;0]$

в) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x \in [0;\pi]$;   г) $\sin x < -\frac{1}{2},\ x \in [-\pi;0]$

д) $\cos x > +\frac{\sqrt{2}}{2},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;   е) $\cos x < -\frac{1}{2},\ x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

ж) $\cos x > \frac{1}{2},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;   з) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

и) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$,   к) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

л) $\sin x \geq \frac{1}{2}$;   м) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

235. а) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$;   б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;   в) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ г) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $2\cos x - 1 \geq 0$;   е) $2\sin x + \sqrt{2} \geq 0$.   ж) $\sin x \geq -\frac{1}{2};\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{6}\right)$;

з) $\sin x + \cos 2x > 1$.   и) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$;   к) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 1$.

Машқҳо барои такрор

236. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = 6$;   б) $y = \frac{1}{x^2(1-x)}$;   в) $y = \sqrt{-x}$;

237. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\sin 4x = -1$;   б) $\sin 4x = 1$;   в) $\sin x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0$.

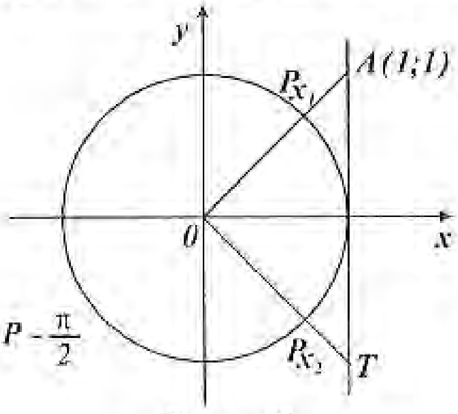
238. Масоҳати боғ 0,24га мебошад. Боғ шакли секунҷаи росткунҷаро дорад ва як катеташ аз дигараш 20м дарозтар аст. Дарозии ҳудуди боғро ёбед.

27.2. Ҳалли нобаробариҳои намуди $tgx > a,\ tgx < a$ ва $ctgx > a,\ ctgx < a$

Тарзҳои ҳалли нобаробариҳои $tgx > a,\ tgx < a$ ва $ctgx > a,\ ctgx < a$ -ро дар мисолҳо дида мебароем.

Мисоли 1. Нобаробарии $tgx \leq 1$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Даври тангенс ба π баробар аст. Бинобар ин аввал ҳамаи ҳалҳои ин нобаробариро меёбем, ки мутаалиқи фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ мебошад. Баъд аз даврӣ будани тангенс истифода мебарем. Барои ҷудо кардани тамоми нуқтаҳои Px-и нимдаври рост, ки қиматҳои x-и онҳо нобаробарии мазкурро қонеъ менамоянд, хати тангенсҳоро дида мебароем. Агар x ҳалли нобаробарӣ бошад, ординатаи нуқтаи T, ки ба tgx баробар аст, бояд аз 1 хурдтар ё баробари он бошад. Маҷмӯи чунин нуқтаҳои T порчаи AT мебошад (расми 49).

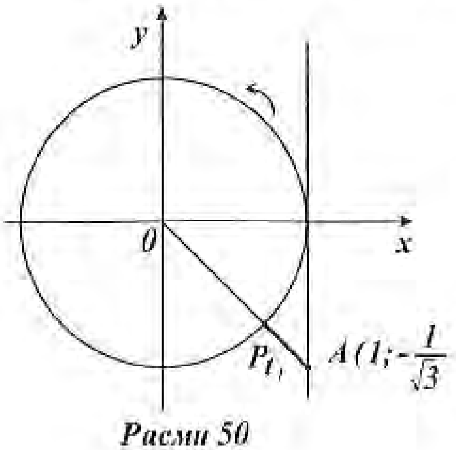


Расми 49

Маҷмӯи нуқтаҳои Px, ки ба нуқтаҳои ин нур мувофиқанд, камони дар расм тасвиршуда мебошанд (диққат кунед: ба маҷмӯи муоинашаванда нуқтаи Px_1 тааллуқ дорад, вале $p+\frac{\pi}{2}$ тааллуқ надорад). Шартеро меёбем, ки дар он нуқтаи Px дар камони дар расм тасвиршуда тааллуқ дорад. $X_1 \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ва $tgx_1 = 1$ аст, пас $x_1 = arctg_1 = \frac{\pi}{4}$. Ҳамин тавр, x бояд шарти $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$-ро қонеъ намояд. Тамоми ҳалҳои нобаробарии мазкур, ки ба фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ тааллуқ доранд, ба назардошти даврӣ будани тангенс чунинанд: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

<u>**Мисоли 2.**</u> Нобаробарии $3tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) < \sqrt{3}$-ро ҳал мекунем.

<u>**Ҳал.**</u> Нобаробарии мазкурро табдил дода, ҳосил мекунем:



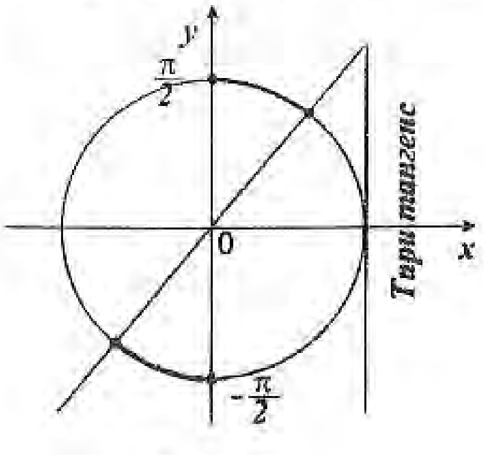
Расми 50

$$tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad -tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

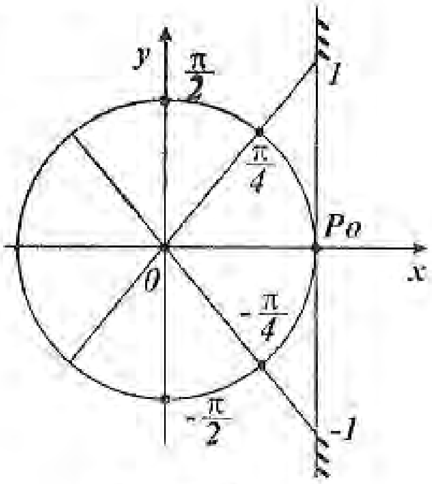
$tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{30}\right)$-ро бо t ишорат мекунем; он гоҳ $tg > -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ҳосил мешавад. Дар расми 50 камони мувофиқи t тасвир карда шудааст. Азбаски $t_1 = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$ аст, ҳосил мекунем:

$-\frac{\pi}{6} + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. Ба тағйирёбандаи x мегузорем:

$-\frac{\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.



Расми 51



Расми 52

Мисоли 3. Нобаробарии $tgx > 2$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Ҳал дар расми 51 тасвир шудааст.

$-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Мисоли 4. Нобаробарии $|tgx| > 1$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз шарти мисол маълум аст: $\begin{cases} tgx > 1, \\ tgx < -1, \end{cases}$ **(расми 52).**

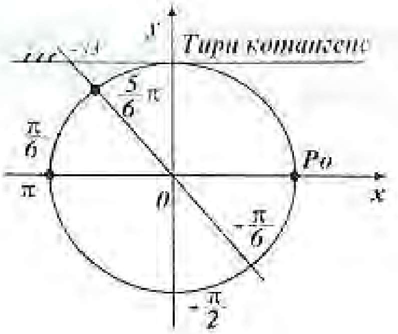
$\frac{4}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ ва $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Мисоли 5. Нобаробарии $ctgx \le -3$-**ро ҳал** мекунем.

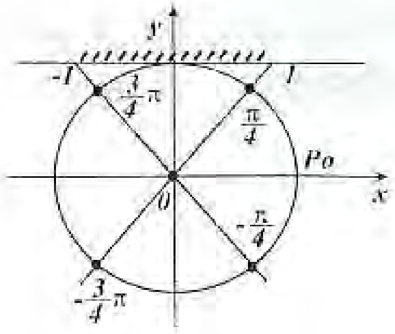
Ҳал. Кунче, ки котангенсаш ба $-\sqrt{3}$ баробар аст $\frac{5}{6}\pi$ ё $-\frac{\pi}{6}$ мебошад(расми 53). Азбаски даври котангенс ба π баробар аст, бинобар ин ҳалли нобаробарӣ намуди зеринро мегирад: $-\frac{\pi}{6} + n\pi < x < n\pi,\ n \in Z$.

Мисоли 6. Нобарории $|ctgx| < 1$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Аз шарти додашуда маълум аст, ки $-1 < ctgx < 1$ (расми 54) ҳалли нобаробари $\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{3}{4}\pi + n\pi,\ n \in Z$; мебошад.



Расми 53



Расми 54

?
1. Барои кадом қиматҳои α тангенс вуҷуд надорад?
2. Дар кадом чоракҳо тангенс: а) мусбат; б) манфӣ мебошад?
3. Нобаробариҳои $tgx > a$, $tgx < a$ ва $ctgx > a$, $ctgx < a$-ро бо кадом тарз ҳал кардан мумкин аст?

239. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$; б) $tg2x\leq 1$; в) $tgx\geq 0$;

г) $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\geq\sqrt{3}$; д) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geq-\sqrt{3}$; е) $tg3x<1$.

240. Маҷмӯи қиматҳои t –ро ёбед, ки нобаробариро қонеъ кунанд ва ба фосилаи дар зер овардашуда мутааллиқ бошанд.

а) $tgt>-\sqrt{3}$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; б) $tgt>\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $tgt>\frac{\sqrt{3}}{3}$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; г) $tgt<-1$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

241. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $tgx\leq\sqrt{3}$; б) $tgx>-\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $tgx\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $tgx<-1$;

д) $ctgx\geq\sqrt{3}$; е) $\sqrt{3}ctgx\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)>1$;. ж) $ctg3x\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Машқҳо барои такрор

242. Кунҷҳои 30°; 45°; 60°; 90°; 180°; 270°; 360°;-ро бо ченакҳои радикалӣ ифода кунед.

243. Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\frac{27a^3-b^3}{27a^3+9a^2b+3ab^2}$; б) $\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$.

244. а) Суммаи ду адад ба 20 ва ҳосили зарбашон 96 барбар аст. Ин ададҳоро ёбед. б) Муодилаи $6\arcsin\left(x^2-6x+8.5\right)=\pi$ -ро ҳал кунед.

Машқҳои иловагӣ ба боби II

245. Муодиларо ҳал кунед:

а) $2\sin^2 x+5\cos x+1=0$; б) $2\cos^2 3x+\sin 2x+1=0$;

в) $\cos 4x+6=7\cos 2x$; г) $7\sin x=3\cos(2-3)$;

д) $7\sin x=3\cos 2x$; е) $5(1+\cos x)=3\cos^4 x-\sin^4 x$; .

ж) $tg^4 x+tg^2 x+ctg^4 x-ctg^2 x=106$; з) $ctgx-\sqrt{3}tgx+1=\sqrt{3}$.

246. Муодилаи якҷинсаро ҳал кунед:

а) $\dfrac{\cos x}{1+\cos 2x}=0$; б) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos 2x}=0$; в) $\cos x\cdot tg3x=0$;

г) $\sin 4x\cdot\cos x\cdot tg2x=0$; д) $(1+\cos x)\cdot tg\dfrac{x}{2}$; е) $\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x=0$; .

ж) $\sin 3x=\cos 2x$; з) $\cos 5x=\sin 15x$.

247. Муодиларо ба зарбкунандаҳо ҷудо намуда ҳал кунед:

а) $\cos 2x=\cos^3 x-\sin^3 x$; б) $2\sin x-\cos x=1-\sin 2x$;

в) $8\cos^4 x-\cos 4x=1$; г) $2\sin x-\cos x=1-\sin 2x$;

д) $\cos x-\cos 2x$; е) $1+\sin x+\cos x+tgx=0$; .

ж) $tgx-\sin x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$; з) $1-\cos(\pi-2x)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0$.

248. Муодиларо бо ёрии формулаҳои ҷамъ ва ба сумма табдил додани ҳосили зарб ҳал кунед:

а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\dfrac{1}{2}\cos 3x=\cos 7x$; б) $\cos 3x\cdot\cos 2x-\sin x\cdot\sin 6x=\cos 7x$;

в) $\sin x+\cos x\cdot ctg\dfrac{x}{2}=-\sqrt{3}$; г) $\sin 5x-\sin x\cdot\cos 4x=0$;

д) $2\sin x\sin 3x+\left(3\sqrt{2}-1\right)\cos 2x=3$; е) $\cos x+3\sin x=1+2\cos\dfrac{3}{2}x\cdot\cos\dfrac{x}{2}$; .

ж) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x$; з) $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)\sin(\pi-7x)=\sin 3x\sin 5x$.

249. Муодиларо бо тарзи паст намудани дараҷа ҳал кунед:

а) $4\sin^2 x+tg^2 x=6$; б) $\sin 2x\sin x+\cos^2 x=\sin 5x\cdot\sin 4x+\cos^2 4x$;

в) $\cos^2\frac{x}{5}+\cos^2\frac{2x}{5}=\cos^2\frac{3x}{6}$; г) $\sin^2\frac{3}{5}x+\sin^2\frac{9x}{5}=\frac{1}{2}+\sin^2\frac{6x}{5}$;

д) $2\cos^2 x-\cos^2 3x=1$; е) $\sin 3x+\sin 5x=2\left(\cos^2 2x-\sin^2 3x\right)$.

ж) $\sin 14\left(\pi-\frac{x}{2}\right)+\sin 9(\pi-x)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$.

250. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\sin x+\cos x=2{,}5+5\sin x\cdot\cos x$; б) $\sin x-\cos x+5\sin x\cdot\cos x=1$.

в) $\sin^3 x+\cos^3 x=1$; г) $\sin^3 x-\cos^3 x=1$.

д) $2\sin 9x-\sin\frac{7}{2}x=\cos\frac{3}{2}$; е) $2-2\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=N3\cdot tg\frac{5\pi-x}{2}$.

ж) $1-\sin 2x+\sin x+\cos x=0$; з) $1+\sin 2t=\cos t-\sin t$.

251. Системаи муодиларо ҳал кунед:

а) $\begin{cases}\sin x-\cos y=\frac{1}{2};\\ x-y=\frac{\pi}{6};\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2};\\ \sin x+\sin y=\sqrt{2};\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4};\\ tgx\cdot tgy=\frac{1}{6};\end{cases}$ г) $\begin{cases}x+y=\frac{5}{6}\pi;\\ \sin x\cdot\cos y=\frac{3}{4};\end{cases}$

д) $\begin{cases}x+y=\frac{5\pi}{12};\\ \frac{\sin x}{\cos y}=\frac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}$ е) $\begin{cases}x+y=\frac{5\pi}{12};\\ \frac{ctgx}{ctgy}=\sqrt{3};\end{cases}$

ж) $\begin{cases}\sin x\cos y=0{,}36;\\ \sin x\cos y=0{,}36;\end{cases}$ з) $\begin{cases}3ctgx=tg^3y;\\ \cos x=\sin 2y;\end{cases}$

252. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\sin 5x>16\sin^5 x$; б) $tg^3x+tg^2x<1+tgx$;

в) $2\sin^2 3x+\sin^2 6x<2$; г) $tg^2x+ctg^2x>2$;

д) $tg\frac{\pi x}{4(x+1)}>1$; е) $tgx>\frac{tg2x-2}{tg2x+2}$; ж) $\cos x>\sin^2 x-\cos^2 x$;

з) $2\sin^2 x>\sin^2 x+\frac{1}{4}$; и) $\sin x<\cos x$; к) $\sin 3x<\sin x$.

Маълумотхои таърихӣ

Ишораҳои ҳозиразамони $\arcsin x$ ва $\arccos x$ соли 1772 дар асарҳои математик аз Вена Шерфер ва олими машҳури франсавӣ Ж.Д.Лагранж пайдо шудаанд. Чанде пештар ин мафҳумҳоро бо рамзҳои дигар Д. Бернулли кор фармудааст. Вале ин рамзҳо танҳо дар интиҳои асри XVIII мақбули ҳама шудаанд. Иловаи «арк» аз калимаи лотинӣ *arc* (камон) мебарояд, ки бо маънои мафҳум мувофиқ аст; $\arcsin x$ масалан, ин кунҷест (камоне низ гуфтан мумкин), ки синуси он ба x баробар аст.

Муддати зиёд тригонометрия чун қисми геометрия тараққӣ меёфт, яъне фактҳое, ки ҳоло дар истилоҳи функсияҳои тригонометрӣ баён мекунем, бо ёрии мафҳумот ва ҷумлаҳои геометрӣ баён ва исбот карда шудаанд. Шояд ба тараққиёти тригонометрӣ ҳал кардани масъалаҳои астраномия, ки аҳамияти калони амалӣ доштанд,омил шуда бошанд. Масалан, барои ҳал кардани масъалаҳои муайян намудани ҷои киштӣ, пешгӯи намудани гирифтани офтоб ва моҳ ва ғайра. Ситорашиносон ба муайян кардани муносибатҳои байни тарафҳо ва кунҷҳои секунҷаҳои сферӣ, ки аз доираҳои калони сфера иборат буданд, мароқи калон зоҳир мекарданд. Инчунин бояд қайд кард, ки математикҳои дунёи қадим масъалаҳои геометрияи сфериро ҳал карда метавонистанд, ки онҳо назар ба масъалаҳои оид ба секунҷаҳои ҳамвор мураккабтар мебошанд.

Матемактики бузурги асри XVIII Л. Эйлер (1707-1783), ки аҳли Швейсария буду солҳои дароз дар Россия кор кардааст ва аъзои академияи илмҳои Петербург буд, тригонометрияро ба намуди ҳозирзамон овардааст. Маҳз Эйлер аввалин шуда таърифи функсияҳои кунҷи дилхоҳро муоина намуда, формулаи мувофиқовариро дохил кард.

Эйлер қимати функсияҳои тригонометриро дар доира ҳисоб мекард, ки радиуси он чун воҳид қабул шуда буд. Эйлер масъалаи аломати функсияҳои тригономериро дар чорякҳои гуногун қатъӣ ҳал кард, як қатор теоремаҳои тригономериро оддӣ гардонид ва роҳҳои исботи умумии онҳоро нишон дод, аз аргументи комплексӣ, алоқаи байни функсияҳои тригонометрӣ ва функсияҳои нишондиҳандагиро кашф кард.

Сохти аналитикӣ ба геометрия вобаста набудаанд. Назарияи функсияҳои тригономерӣ, ки онро Эйлер сар карда буд, дар асарҳои олими бузурги рус Н.И. Лобачевский (1793-1856) ба анҷом расонда шудааст.

Абурайҳони Берунӣ (973-1048) ҳангоми ҳалли муодилаҳои кубӣ аввалин шуда методи санҷишро истифода намуд.

Ғиёсиддин ал-Кошӣ бошад дар рисолаи оид ба хорда ва синус методи итерасиониро кашф кард.

Барои муайян намудани $\sin 1^o$ аз рӯи $\sin 3^o$ ӯ муодилаи зеринро тартиб дод: $\sin 3^o = 3\sin 1^o - 4\sin^3 1^o$ Аз ин ҷо $x^3 + a = p \cdot x \cdot \sin 1^o = x$; $a = \frac{1}{4}\sin 3^o$; $p = \frac{3}{4} \cdot \frac{\left(a + x^3\right)}{p}\left(a - p_0 + R\right) = a + y$. Азбаски $x < 1$ аст, пас $x^3 < x$, он гоҳ $x = \frac{\left(a + x^3\right)}{p}\left(a - p_o + R\right) = a + y$. Ва ин қиматро ба муодилаи додашуда гузошта меёбем: $y = b + u$ ҳамин тавр: $x = a + y = a + b + 4$.

Ал-Кошӣ бо ин роҳ синуси як градусро то 17 аломати даҳӣ ҳисоб намудааст. Ин методро баъдтар дар асри XIX математики англис У.Ч. Ҳорнер дуюмбора кашф кард.

Риёзидон ва мунаҷҷими намоёни тоҷик Муҳаммад Ҳомид ал-Хидир ал-Хуҷадӣ соли 1000 дар Хуҷанд таваллуд шуда, дар расадхонаи Рай (Эрон) кор кардааст. Ӯ теоремаи Фермаро барои $n = 3$ исбот кардааст. Исботи теоремаи синусҳо низ ба ӯ тааллуқ дорад. Дар астрономия секстантаро ихтироъ кард, ки он дар расадхонаи Улуғбек асбоби асосӣ ҳисоб мешуд.

161. а) ҳа; б) не; в)не; г) ҳа;**161.** а)0; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{1}{2}$; ж)1; з)$\frac{\pi}{3}$; и) $\frac{\pi}{4}$; к) $\frac{3\pi}{2}$; л) вуҷуд надорад; м) маъно надорад. **162.** а)$\frac{1}{4}$; б) $\frac{\pi}{7}$; в)$-\frac{\pi}{4}$; г) x. **163.** а) $1\frac{2}{3}$; б) $14\frac{2}{9}$. **164.** а)6; б) 36; **165.** 363нафар. **166.** а) $\frac{1}{2}$; б)$-\frac{1}{2}$; в) $-\left(\sqrt{2}+1\right)$ **167.** а) $3\frac{\pi}{4}$; б) π; в) $\frac{\pi}{4}$; г) 0; д) вуҷуд надорад; м) маъно надорад; е) $\frac{\pi}{2}$; ж) $2\frac{\pi}{3}$; з)$5\frac{\pi}{6}$; и) $\frac{\pi}{3}$. **168.** а) $\frac{1}{5}$; б) $3\frac{\pi}{5}$; в) $-\frac{\pi}{5}$; г) $6\frac{\pi}{5}$. **169.** а)не; б) ҳа;в) не; **170.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{4\pi}{5}$; в) $\frac{7\pi}{18}$; г) 40^o; д) 0; **172.** а)0; б) 4,1744. **173.** а)300; б) 500; **175.** 30нафар. **176.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) 0; г) $\frac{\pi}{6}$; д) вуҷуд надорад; е) вуҷуд надорад; ж) $-\frac{\pi}{6}$; з)$\frac{\pi}{3}$; и) $-\frac{\pi}{4}$. **179.** а)2; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{10}$; д) 3; е)$-\frac{44}{117}$. **178.** а)0; б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **179.** а)$-\frac{3\pi}{2}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$. **180.** а) $\cos\frac{5\pi}{2}$; б) $\sin\frac{\pi}{12}$. **181.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}$. **182.** а) $(-\infty;1]$ ва $[4;+\infty)$; б) $(-\infty;+\infty)$. **183.** а)360км; **184.** а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{4}$; е) $3\frac{\pi}{4}$. **185.** в) $\frac{6}{7}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\sqrt{3}$; е) $\frac{\pi}{4}$. **186.** а) $(-4;-3),(-4;2),(3;-3),(3;2)$; ; б) $\left(3-3\sqrt{2};3+3\sqrt{2}\right),\left(3+3\sqrt{2};3-3\sqrt{2}\right),(2;4),(4;2)$.
190. а) $x=(-1)^n\frac{4}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi n,\ n\in Z$; б) $x=\frac{12}{(-1)^{n+1}+6n},\ n\in Z$; в) $x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4n+1}},\ n\in N_o$; г) $x=\frac{36}{(4n-1)^2},\ n\in N$; д) $x=\frac{1}{k^2 n},\ k\in N$; е) $x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2},\ k\in z$. ж) $x=(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2},\ n\in Z$; ; з) $x=\varnothing$; и) $x=(-1)^n\arcsin\sqrt{0{,}01}+k\pi,\ k\in Z$. **191.** а) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; ; б)

$(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi,\ k\in Z;$ в) $(-1)^{k}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$ г) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$ д) $(-1)^{k}\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$ е) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z;$ ж) $x=(-1)^{n}\frac{1}{2}\arcsin\frac{\pi}{4}+$ $+n\frac{\pi}{2},\ n\in Z;$ **192.** а) $(-1{,}5;0{,}5)$; б) $(1{,}2;-1{,}6)$; в) $(-0{,}7;4{,}2)$; **193.** $\frac{2}{3}$ ё $\frac{6}{19}$.

194. $(-1{,}6)$. **195.** а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k;$ б) $x=\pm\frac{\pi}{2}+3n\pi,\ n\in Z;$ в) $x=\frac{12}{12n\pm1},$ $n\in Z;$ г) $x=\pm2\sqrt{\frac{3}{12n\pm5}},\ n\in Z;$ д) $x=\frac{64}{(8k\pm1)^2},\ k\in N;$ е) $x=\frac{4}{n\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2},$ $k\in N_o;$ ж) $x=\pm\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\pi n+\frac{2}{3},\ n\in Z;$ з) $x=\pm\arccos\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z;$ и) $x=\frac{3}{4}(2n+1),\ n\in Z;$ **196.** в) $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z;$ **197.** а) $[-10;10]$; б) $[-4;0]$; в) $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\infty\right)$. **198.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;$ б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n;$ в) $\frac{n}{2}\pi.$ **199.** а) 14,5км/соат. **200.** а) $x=\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\ k\in Z;$ б) $x=\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z;$ в) $x=\frac{6}{6n+1},\ n\in Z;$ г) $x=\pm\sqrt{\frac{6}{6n-1}},\ n\in N;$ д) $x=\frac{16}{(4n+1)^2},\ n\in N_o;$ е) $x=\frac{16}{\pi(4n-1)},\ n\in Z;$ ж) $x=arctg2+\pi n,\ n\in Z;$ з) $x=n\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3};$ и) $x=arctg\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z.$ **201.** а) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in z;$ б) $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$ в) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z;$ г) $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z;$ д) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$ е) $x=\pi k,\ k\in Z;$ ж) $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z;$ з) $x=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$ **202.** а) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(3;-\infty)$. **203.** а) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$ б)

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; в) $x=(-1)^k\frac{2\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z$. **204.** а) 26 ва 24. **205.** а) $x=(6n+1)\frac{\pi}{18},\ n\in Z$; б) $x=(6n+5)\frac{\pi}{3}$; в) $x=\frac{2}{3n+1},\ n\in Z$; г) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2+3n}},\ n\in N_o$; д) $x=\frac{\pi}{4}(4n+3),\ n\in Z$; е) $x=(2n+11)\frac{\pi}{12},\ n\in Z$; ж) $x=-\frac{1}{2}arctg3+\pi n,\ n\in Z$; з) $x=(2n+1)\frac{\pi}{8}+\frac{3}{4},\ n\in Z$; и) $x=\frac{\pi}{6}(6n+1),\ n\in z$. **206.** б) $x=\frac{1}{12}\pi+\pi k,\ k\in z$. **207.** а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; б) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, ва $x=2\pi n\ n\in Z$; в) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; г) $\frac{\pi}{4}+\pi n$ ва $-arctg3+\pi n,\ n\in Z$; д) $\pm arctg2+\pi n,\ n\in Z$; е) $x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)+2\pi n,\ n\in Z$; ж) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **208.** а) $x=(2n+1)\frac{\pi}{4},\ n\in Z$; б) $x=\pi n,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. **209.** а) $(-3;-1)$; $(5{,}5;0{,}7)$; б) $(-6;-9)$, $(3;4{,}5)$. **210.** а) 11; б) 0. **211.** а) 23; б) 100. **212.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{1}{2}arctg2+\pi n$ ва $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; в) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$; г) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; д) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; ж) $\frac{\pi}{4}+\pi n$ ва $-arctg\frac{1}{3}+\pi n\ n\in Z$. **213.** а) $(-\infty;0)\cup(0{,}6;-\infty)$. б) $\left[-\frac{2}{7};0\right]$. **214.** а) -6 ва 5; б) $x=\pm(-1)^n\arccos\frac{\pi}{4}+2\pi\pi k,\ k\in Z$; в) $x=\pm(-1)^n\arccos\frac{\pi}{4}+2\pi\pi k,\ k\in Z$; г) $2\pm\sqrt{35}$. **215.** $1093+364\sqrt{3}$. **216.** а) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2},\ n\in Z$; б) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; в) $x=2\pi n,\ n\in Z$; г) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; д) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; е) $x=\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; ж)

$x=\frac{\pi n}{7}$, $x=(2n+1)\frac{\pi}{18}$, $n\in Z$; з) $x=(8n+1)\frac{\pi}{16}$, $x=(8n+3)\frac{\pi}{24}$, $n\in Z$. **217.** а) $x=(2n+1)\pi$, $x=(4n+1)\frac{\pi}{2}$; б) $x=6$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **218.** а) $[-3;0]$; б) $(-2;12)$. **219.** а) 16км/с, 18км/с. **220.** а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; б) $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; $x_2=-arctg\frac{4}{3}+\pi n$, $k\in Z$; в) $x_1=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; $x_2=arctg\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in Z$; г) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; д) $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; $x_2=arctg3+\pi n$, $n\in Z$; е) $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $x=(2n+1)\frac{\pi}{4}$, $n\in Z$; $x=\frac{\pi n}{3}$, $x=(4n+1)\frac{\pi}{12}$, $n\in Z$; з) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, x=\pm\frac{3\pi}{2}+(8n+1)\frac{\pi}{2}$, $n\in Z; x=2\pi n, x=4\pi n, n\in Z$. **221.** а) $\left(-\frac{7}{2};-\infty\right)$; б) $(2;\infty)$; в) $\left(\frac{3}{2};\infty\right)$. **222.** а) 0 б) 0. **223.** а) 8соат;12соат. **224.** а) $x=2arctg\frac{4+\sqrt{5}}{11}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{7}}{7}+\pi n+arctg\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $n\in Z$; в) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\pi n$, $n\in Z$; г) $x=(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{6}$, $n\in Z$; д) $x=(2n+1)\pi$, $x=arctg\sqrt{5}+2\pi n$, $n\in Z$; е) $x=\pi n$, $x=(4n+1)\frac{\pi}{4}$, $n\in Z$. **225.** а) $(6;+\infty)$; б) $(-\infty;-2]$; в) $(-5;-1)$. **226.** 1,2,4,8,16… **227.** а) $\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$. **228.** а) $q=\pm3$;1,4,7,10,13......1,–2,–5,–8,–11,.... **229.** $3\sqrt{6}$. **230.** а) $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ y=\frac{\pi}{6}-\pi k, k\in Z.\end{cases}$

231 а) (0;6); б) $(-\infty;-8]\cup[0;\infty)$; в) (-2;2); г) $(-\infty;-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};\infty)$. **232.** а) $x=\pi k$, $k\in Z$; б) $x=(2n+1)\frac{\pi}{4}$; $x=(3k\pm1)\frac{\pi}{3}k$, $k\in Z$. **233.** 8-то мошин. **234.** в) $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$; ж) $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$; з) м) $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$. **235.** в)

$\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z;$ з) $\frac{5}{6}\pi+2\pi n<x<\pi+2\pi n,\ n\in Z$. нишондод. $\sin x>1-\cos 2x; \sin x>2\sin 2x, 2\sin^2 x-\sin x<0, \sin(2\sin x-1)<0$. и) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{3}{2}\pi+2\pi k$ нишондод. $\frac{\pi}{3}+2\pi k<\frac{\pi}{6}+x<\frac{5}{3}\pi+2\pi k,$ $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k;$ к)ҳал надорад чунки косинус аз 1 калон шуда наметавонад. <u>**236.**</u> а) ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ; б) ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ бе ғайр аз 0 ва 1; в) $x\le 0;$ <u>**237.**</u> а) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$ б) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$ в) πk ва $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. <u>**239.**</u> а) $\left[\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right], n\in Z;$ нишондод. $\frac{\pi}{4}+\pi n\le x\le x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n;$ б) $\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{4}<x\le$ $\le\frac{\pi}{8}\frac{\pi k}{2}, k\in Z;$ в) $\pi k\le x\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;$ г) $\pi k-\frac{5\pi}{6}<x\le\pi k, k\in Z;$ д) $\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k, k\in Z;$ е) $\frac{\pi k}{3}-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z$. <u>**242.**</u> а) $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3}{2}\pi;2\pi$. <u>**243.**</u> а) $\frac{3a-b}{3a};$ б) $\frac{x}{x-2}$. <u>**244.**</u> а) 8 ва 12; б) $x=2бx=4$. нишондод. $\arcsin\left(x^2-6x+8{,}5\right)=\frac{\pi}{6}, x^2-6x+8{,}5=0{,}6,$ $x^2-6x+8=0, x_1=2, x_2=4.$

БОБИ III.
Дарача ва функсияи дарачгӣ. Муодилаҳои иратсионалӣ

§6. Дарачаи нишондиҳандааш ратсионалӣ §7. Дарача ва муодилаҳои иратсионалӣ

§6. Дарачаи нишондиҳандааш ратсионалӣ.
28. Таъриф ва хосиятҳои дарача.
28.1. Таъриф ва хосиятҳои дарарчаи нишондиҳандааш натуралӣ.

Таъриф. Ҳосили зарби якчанд зарбшавандаҳои байни худ баробар дарача номида мешаванд: $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-маротиба}} = a^n$

Масалан. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$. Дар ифодаи a адади a асос n нишондиҳандаи дарача ном дорад. Дарачаи якуми адади a худи адади a мебошад. Ин дарачаро чунин менависанд: a^1 ва аз баски ин ифода ба a баробар аст, пас, нишондиҳандаро партофта фақат a менависанд.

Дарачаи нишондиҳандааш натуралӣ ба якчанд хосиятҳои муҳим молик аст, ки онҳоро меомӯзем.

1^0. Дарачаи чуфти адади мусбат ё ки манфӣ адади мусбат буда, дарачаи тоқи адади манфӣ адади манфӣ аст:

$(\pm a)^{2n} = a^{2n} (a > 0)$, $(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1} (a > 0)$. дар ин чо $2n$ навишти умумии адади чуфт буда, $2n+1$ навишти умумии адади тоқ мебошад.

Мисол: $(-3)^4 = 81; (-2)^5 = -32$.

Эзох. Чунин ду ифодаро аз ҳамдигар фарқ кардан лозим аст: $(-a)^n$ ва $-a^n$; дар ифодаи дуюм бошад, ба худи дарача тааллуқ дорад.

2^0. Дар вақти зарб кардани дарачаҳои асосашон якхела нишондиҳандаҳои дарачаҳо чамъ карда мешавад: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Масалан, $2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32$; $(-3) \cdot (-3)^3 = (-3)^4 = 81$;

$3^8 : 3^{10} = 3^{8-10} = 3^{-2}$; $(x+y)^8 : (x+y)^5 = (x+y)^3$.

Мо ҳосили зарб ва тақсими ду дарачаро нишон додем, хосияти овардашуда барои миқдори дилхоҳи дарачаҳои асосҳояшон якхела ҳам дуруст аст, яъне масалан $a^m \cdot a^n \cdot a^k \cdot a^l = a^{m+n+k+l}$.

3^0. Дар вақти ба дарача бардоштани ҳосили зарб ҳар як зарбшавандаро ба ин дарача бардошта, баъд натиҷаҳоро ба ҳамдигар зарб кардан лозим аст: $(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$.

Эзох. Баъзан баробарии охиринро дар баръаксаш ичро кардан қулай аст. Масалан, агар бузургии $M = 8^3 \cdot 25^3 \cdot 2^3$-ро ҳисоб кардан лозим бошад, онро ба тарзи $M = (8 \cdot 25 \cdot 2)^3 = 400^3 = (4 \cdot 100)^3 = 64000\,000$ навишта ҳисоб кардан осон аст, назар ба оне, ки ҳар яке аз ададҳои 8,25 ва 2-ро ба куб бардошта, баъд натиҷаи онҳоро бо ҳам зарб кунем.

4^0. Барои ба дараҷа бардоштани каср сурат ва махраҷро алоҳида-алоҳида ба ин дараҷа бардошта, баъд натиҷаи якумро ба дуюм тақсим кардан лозим аст: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Ҳамин тариқ, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$;

$\left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{5^3}{4^3} = -\frac{125}{64}$; $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3 = \frac{8a^3}{27b^3}$ мешавад.

5^0. Барои ба дараҷа бардоштани дараҷа нишондиҳандаҳои дараҷаҳоро ба ҳам зарб мекунем: $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$.

Масалан, $\left(2^3\right)^2 = 2^6 = 64$; $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$;

$$\left(-\frac{1}{2}a^4b^2\right)^3 = -\frac{1}{8}a^{12}b^6; \quad \left(-\frac{3xy^2}{2z^3}\right)^4 = \frac{\left(-3xy^2\right)^4}{\left(2z^3\right)^4} = \frac{81x^4y^3}{16z^{12}}.$$

Татбиқи хосиятҳои номбаршударо месанҷем.

Квадрати бисёраъзогӣ ба суммаи квадратҳои ҳамаи аъзоҳои он, плюс ҳосили зарби дучандаи ҳар як аъзо бар ҳамаи аъзоҳои пасоянд, баробар аст;

Масалан, $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+$
$+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$.

Мисолҳо:

1) $\left(3x^2+2y^2+xy\right)^2 = \left(3x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2+(xy)^2+2\cdot 3x^2\cdot 2y^2+$
$+2\cdot 3x^2xy+2\cdot 2y^2\cdot xy = 9y^4+4y^4+x^2y^2+12x^2y^2+6x^3y+4xy^3 =$
$= 9x^4+4y^4 13x^2y^2+6x^3y+4xy^3$.

2) $(a-2b+3c-4d)^2 = a^2+4b^2+9c^2+16d^2+2a(-2b)+2a\cdot 3c+$
$+2a(-4d)+2\cdot(-2b)\cdot 3c+2(-2b)(-4d)+2\cdot 3c(-4d) =$
$a^2+4b^2+9c^2+16d^2-4ab+6ac-8ad-12bc+16bd-24cd$.

?
1. Таърифи дараҷаро диҳед.
2. Хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандааш натуралиро номбар кунед.
3. Дараҷаи якаъзогии 1) $2x^2xy^3$; 2) $-2x^3y^4$; 3) $0{,}8x^2y^2c^3$ ба чанд баробаранд?

253. Масоҳати квадрате, ки масоҳаташ ба 5см; 10см; 100м баробар аст ҳисоб кунед.

254. Формулаҳои $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ ва $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$-ро татбиқ намуда, қимати ифодаҳои зеринро ҳисоб кунед: $31^2; 51^2; 42^2; 47^2-23^2; 84^2-46^2$.

255. Амалҳоро иҷро кунед:

1) $3x^{n-1}\cdot 2x^{n+1}$; 2) $\left(2x^{n-1}\right)^{n+1}$;

3) $\left(a^{2x-1}-2a^{x+2}+3a^{x+9}\right):0{,}1a^{x-2}$; 4) $\dfrac{35\cdot\left(27^8+2\cdot 9^4\right)}{\left(81^4-12\cdot 3^{15}\right)\cdot 15}$

Машқҳо барои такрор

256. Агар n –адади бутун бошад, ифодаҳои алгебравии $2n$; $2n+1$ чӣ гуна ададҳоро ифода мекунанд?

257. Айниятҳои зеринро исбот кунед:

1) $\dfrac{(m+n)^2}{2}+\dfrac{(m-n)^2}{2}=m^2+n^2$; 2) $\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2+\left(\dfrac{m-n}{2}\right)^2=mn$;

3) $\left(\dfrac{a^2-6}{a^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{2a}{a^2+1}\right)^2=1$.

258. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

1) m^4+m^3+m+1; 2) n^4+n^3-n-1; 3) $(x+y)^3-(x-y)^3$; 4) $(x+y)^4-(x-y)^4$. 5) a^2-a-12; 6) $m^2+3m-10$; 7) $2x^2+10x+12$.

28.2. Дараҷаи нишондааш нул ва адади бутуни манфӣ

Таърифи 1. Ҳар як адади ҳақиқии a –и нишондиҳандааш нул ба воҳид баробар мебошад:

Аз таъриф маълум мешавад: $7^o=1; \left(2-\sqrt{3}\right)^o=1; (-0{,}4)^o=1$.

Ифодаи 0^o маъно надорад.

Таърифи 2. Дараҷаи адади ҳақиқии a –и нишондиҳандааш адади бутуни манфӣ касреро ифода мекунад, ки сураташ ба 1 баробар буда, махраҷаш дараҷаест, ки асосаш чун аввала буда, аломати нишондиҳандааш баръакс мебошад: $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\ (a\neq 0)$.

Мисол: $10^{-2}=0{,}001; \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{9}{4}=2{,}25$;

Баръакс, ҳар гуна касри дурусти сураташ ба 1 баробарро ба намуди дараҷаи нишондиҳандааш манфӣ навиштан мумкин аст:

$$\frac{1}{3}=3^{-1};\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3}.$$

Зарби дараҷаҳо $(a \neq 0)$

1) $a^o \cdot a^{-n} = 1 \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}; a^o a^{-n} = a^{o+(-n)} = a^{-n}.$

2) $a^{-n} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)}; a^{-n} \cdot a^{-m} =$

$= a^{-n+(-m)} = a^{-n-m} = a^{-(n+m)}.$

3) $a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$

Чӣ тавре, ки аз мисолҳои овардашуда маълум мегардад, дар ҳама мавридҳо ҳангоми зарби дараҷаҳои асосашон якхела нишондиҳандаи дараҷаҳо ҷамъ карда мешаванд.

Тақсими дараҷаҳо

1) $a^o : a^o = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ a^o : a^n = a^{o-n} = a^{-n};$

2) $a^o : a^{-n} = 1 : \frac{1}{a^n} = a^n; a^o : a^{-n} = a^{o-(-n)} = a^{o+n} = a^n;$

3) $a^{-n} : a^{-m} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{a^m} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; a^{-n} : a^{-m} = a^{-n-(-m)} = a^{-n+m} = a^{m-n}$

Аз ин мисолҳо маълум мешавад, ки дар вақти тақсими дараҷаҳои асосҳояшон якхела нишондиҳандаҳои онҳо тарҳ карда мешаванд.

Ба дараҷа бардоштани дараҷа.

1) $\left(a^o\right)^n = 1^n = 1; \left(a^o\right)^n = a^{o \cdot n} = a^o = 1;$

2) $\left(a^{-n}\right)^m = \left(\frac{1}{a^n}\right)^m = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-nm}, \left(a^{-n}\right)^m = a^{-nm};$

3) $\left(a^{-n}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(a^{-n}\right)^m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1^m}{a^{nm}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} = a^{nm};\ \left(a^{-n}\right)^{-m} = a^{(-n)(-m)} = a^{nm}.$

?

1. Таърифи нишондааш нулро диҳед.
2. Таърифи дараҷаи адади бутуни манфиро диҳед.
3. Қоидаи зарби дараҷаҳо, тақсими дараҷаҳо ва ба дараҷа бардоштани дараҷаро номбар кунед.

259. а) Ифодаҳоро ҳисоб кунед: 1) 3^{-2}; 2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $5^{-2}\cdot 4^{8}$;

5) $\left(3^{2}\right)^{-4}$; 6) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^{3}$; 7) $\left[a-(1-a)^{-1}\right]\dfrac{(a-2)+a^{o}}{\frac{1}{a^{-2}}-a+1}$;

8) $\left(x^{-2}+a^{-3}\right)\left(x^{2}-a^{-3}\right)$; 9) $\dfrac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^{3}\left(a^{2}-2ab+b^{2}\right)^{-2}$.

б) Ифодаҳоро содда намоед: 1) $4a^{-3}b^{2}c^{-1}\cdot 0{,}25ab^{-5}c^{-2}$;

2) $\dfrac{6a^{5}x^{-7}z^{-8}}{4^{-1}a^{-8}x^{-4}z}$; 3) $\left(-3\cdot 2^{-1}am^{-n}x\right)^{-2}$; 4) $\left(4a^{-2}-b^{-4}\right):\left(2b^{2}-a\right)$;

5) $\left(x^{-2}+1\right)^{-2}$; 6) $\left(8\cdot 0{,}25^{2-x}+6\cdot 2^{2x}-0{,}5^{-2x+1}\right):2^{2x-3}$.

Машқҳо барои такрор

260. а) Амалҳоро иҷро кунед:

1) $3\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$; 2) $7\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\left(7\frac{1}{5}-4\frac{2}{3}\right)$; 3) $\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$.

б) Ҳисоб кунед: 1) $\sqrt{(5-a)^{2}}$ агар $a\leq 5$ бошад;

2) $\sqrt{(5-a)^{2}}$ агар $a>5$ бошад; 3) $\sqrt{8(5-a)^{2}}$ агар $a\geq 5$ бошад.

в) Муодиларо ҳал кунед: $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{x^{2}}\right)^{-3}=\left[\left(x\sqrt{x}\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}$.

28.3. Решаи дараҷаи n-ум ва хосиятҳои он

Аз курси арифметика маълум аст, ки амали ҷамъ ва тарҳ амалҳои байни ҳамдигар баръакс мебошанд, яъне:

$(a+b)-b=a$ ё ки тартиби иҷрои амалҳоро тағийр диҳем $(a-b)+b=a$ мешавад.

Монанди ҳамин амали зарб ва тақсим низ амалҳои байни якдигар чаппа номида мешавад, зеро $(a\cdot b):b=a$ $(b\neq 0)$, $(a:b)\cdot b=a$ мебошад.

Амали чаппаи бадараҷабардорӣ азрешабарорӣ номида мешавад. Бо ёрии ин амал аз рӯи дараҷа ва нишондиҳандаи додашуда асоси дараҷаро меёбанд, масалан, агар:

1) $a^{3}=27$ бошад, он гоҳ $a=\sqrt[3]{27}=3$;

2) $b^{5}=-32$ бошад, он гоҳ $b=\sqrt[5]{-32}=-2$; мешавад. Амали аз решабарорӣ бо амали $\sqrt{}$ (аломати реша ё радикал) ишора карда