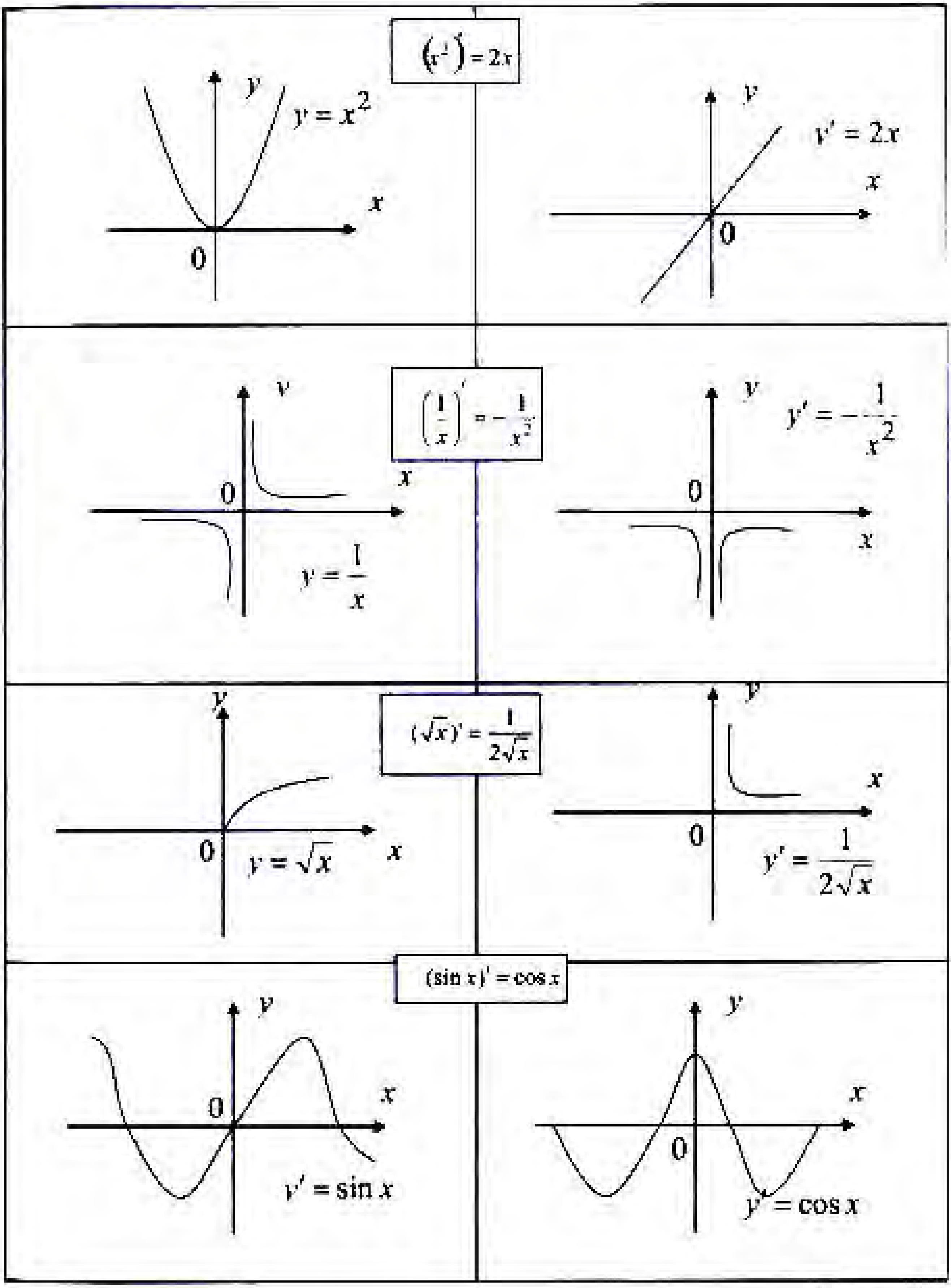
Графики функсияҳо ва мувофиқан графики ҳосилаҳои онҳоро, ки оид ба онҳо дар боло сухан рафт дар расм тасвир мекунем (расми 39):



Расми 39

Акнун татбиқи ҷадвалро дар ҳалли мисолҳо дида мебароем.

Мисолҳо. Ҳосилаи функсияҳо ёфта шаванд:

1) $y=(1+\cos x)\cdot\sin x,\quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ -ро ҳисоб кунед;

2) $y=\dfrac{x}{1+\sin^4 x}$;

3) $y=x^3\sin x+3x^2\cos x;\quad y'(0)$ -ро ёбед.

Ҳал.

1) $y=(1+\cos x)\sin x;\quad y'=((1+\cos x)\sin x)'=(1+\cos x)'\sin x+$

$$+(1+\cos x)(\sin x)'=-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x=(\cos^2 x-\sin^2 x)+$$

$$+\cos x=\cos 2x+\cos x.$$

Қимати ҳосиларо дар нуқтаи $x=\dfrac{\pi}{2}$ меёбем:

$$y'(\frac{\pi}{2})=\cos 2\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=-1;$$

2) $y=\dfrac{x}{1+\sin^4 x}$;

$$y'=\left(\frac{x}{1+\sin^4 x}\right)'=\frac{(x)'(1+\sin^4 x)-x\cdot(1+\sin^4 x)'}{(1+\sin^4 x)^2}=$$

$$=\frac{1+\sin^4 x-4x\sin^3 x(\sin x)'}{(1+\sin^4 x)^2}=\frac{1+\sin^4 x-4x\cos x\sin^3 x}{(1+\sin^4 x)^2}=$$

$$=\frac{1+\sin^4 x-2x\sin 2x\sin^2 x}{(1+\sin^4 x)^2}.$$

3) $y=x^3\sin x+3x^2\cos x;\quad y'=\left(x^3\sin x+3x^2\cos x\right)'=(x^3\sin x)'+$

$$+(3x^2\cos x)'=(x^3)'\sin x+x^3(\sin x)'+(3x^2)\cdot\cos x+3x^2(\cos x)'=$$

$$=3x^2\sin x+x^3\cos x+6x\cos x-3x^2\sin x=x^3\cos x+6x\cos x=$$

$$=x\cos x(x^2+6).$$

Акнун $y'(0)$-ро ҳисоб мекунем: $y'(0)=0\cos 0(0+6)=0$.

М а с ъ а л а. Нуқта аз рӯи қонуни $S=a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot t\right)$ ҳаракат мекунад.

1) Формулаи суръати харакати онро ёбед: 2) Маълум кунед, ки дар кадом лаҳзаи вақт суръат баробари сифр аст.

Ҳ а л. 1) Аз функсияи $S=a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot t\right)$ ҳосила мегирем:

$$v=S'=\left(a\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right)'=-a\sin\frac{\pi}{2}t\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)'=-\frac{a\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t.$$

2) Суръат баробари сифр мешавад, агар

$-\dfrac{a\pi}{2}2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot t\right)=0 \quad \left(-\dfrac{a\pi}{2}\neq 0\right)$ шавад.

Аз ин ҷо: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot t\right)=0,\ \dfrac{\pi}{2}\cdot t=\pi k,\ t=2k,\ k\in Z$.

?

1. Ба формулаҳои дар ҷадвал овардашуда эътибор диҳед ва онҳоро дар хотир нигоҳ доред.
2. Аз рӯи графики функсияҳои $y=x^2$ ва $y=\dfrac{1}{x}$ графики ҳосилаи онҳоро тасвир намоед.
3. Аз рӯи графики функсияҳои $y=\sqrt{x}$ ва $y=\sin x$ графики ҳосилаи онҳоро тасвир кунед.

Машқҳо

Ҳосилаи функсияҳоро ёбед ($86^\circ - 88^*$):

86°. а) $y=3x^3-4x^2+2x+1$; б) $y=x-3x^2$;

в) $y=x^2-3x+1$; г) $y=\dfrac{1}{2}x^2+\sqrt{x}$.

87. а) $y=(x-1)(x+2)$; б) $y=x^2(1-x^2)$;

в) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$; г) $y=\dfrac{4x-3}{x^2}$.

88*. а) $y=\dfrac{x^2-3}{x+1}$; б) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}$;

в) $y=(2x+7)^5+\sin 2x$; г) $y=\sin^2(3x+4)$.

89. Қимати ҳосилаи функсияҳои машқи 87-ро дар нуқтаи $x_0=2$ ёбед.

90. Муодилаи $f'(x)=0$ -ро ҳал намоед, агар:

а) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-x^2$; б) $f(x)=\sin 2x$;

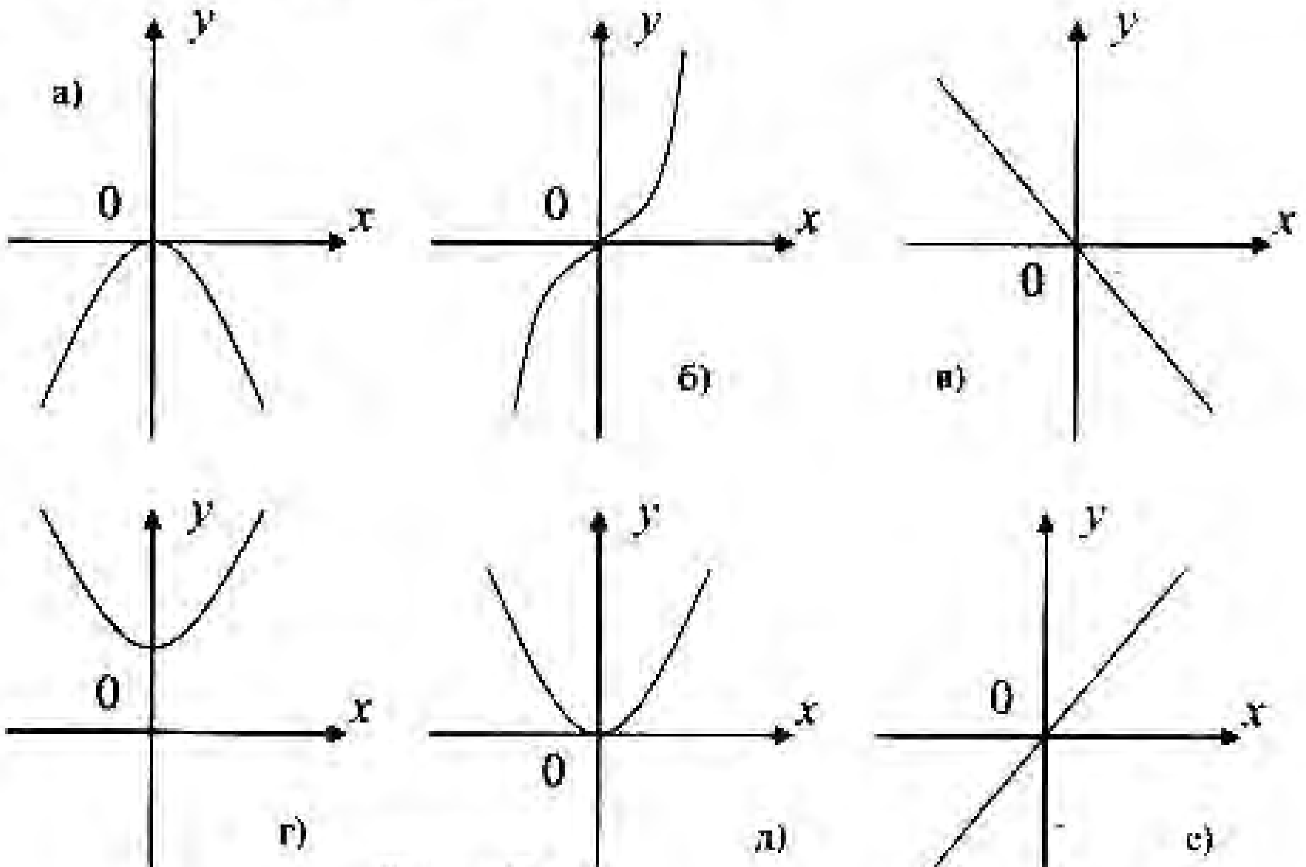
в) $f(x)=\cos(2x-1)$; г) $f(x)=x^3-x^2+1$ бошанд.

91. Нобарбарии $f'(x)<0$-ро ҳал намоед, агар:

а) $f(x)=x-x^2$; б) $f(x)=2x+x^2-7$;

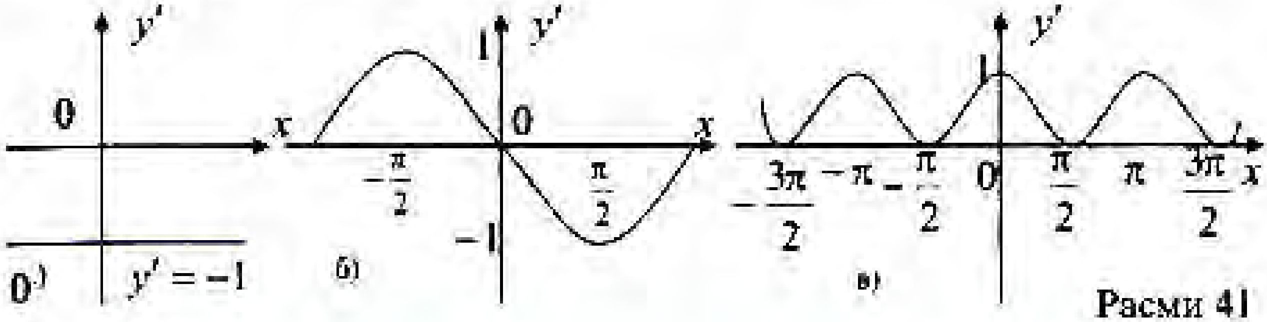
в) $f(x)=\dfrac{3}{5}x^5-3x$; г) $f(x)=3x^2+5x-6$ бошанд.

92. Дар расми 40 графики функсияҳо ва графики ҳосилаҳои онҳо тасвир ёфтаанд. Ёбед, ки кадом ҷуфт функсия ва ҳосилаи онро муайян мекунад



Расми 40

93. Аз рӯи графики ҳосилаҳо функсияҳоро муқаррар кунед (расми 41):



Расми 41

§ 12. Мафҳуми ҳосилаи тартиби олӣ

Фарз мекунем, ки функсияи $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ дода шудааст. Ҳосилаи онро меёбем: $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$. Одатан, инро **ҳосилаи тартиби як** меноманд. Ҳосилаи $f'(x)$ дар навбати худ функсияе ҳаст, ки ҳосила дорад. Онро бо $y'' = f''(x)$ («эф ду штрих аз икс» мехонем) ишорат карда, **ҳосилаи тартиби дуюми** функсияи $y = f(x)$ меномем:

$$(f'(x))' = f''(x) = 6x - 10$$

Аз ҳосилаи тартиби дуюм боз ҳосила мегирем; онро **ҳосилаи тартиби се** мегӯянд:

$$(f''(x))' = f'''(x) = 6$$

Ҳамин тавр, ҳосилаҳои тартиби чорум, панҷум ва ғ. ёфта мешаванд, ки ба сифр баробаранд. ҳосилаҳои тартиби ихтиёрии функсияи $y = f(x)$ монанди мисоли боло ёфта мешаванд. Чунончӣ: $y' = f'(x)$, $y'' = (y')' = (f'(x))' = f''(x)$,

$$y''' = (y'')' = (f''(x))' = f'''(x), \ldots, y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x)$$

Мисолҳо.

1. Ҳосилаи тартиби чоруми функсияи $y = cos\ x$-ро ёбед.

Ҳ а л. $y = \cos x$; $y' = (\cos x)' = -\sin x$; $y'' = (-\sin x)' = -\cos x$;

$$y''' = (-\cos x)' = \sin x; \ \ y^{IV} = (\sin x)' = \cos x$$

2. Ҳосилаи тартиби 2-юми функсияи $y = \frac{x}{x-2}$ -ро ёбед.

Ҳ а л. $y' = \frac{x' \cdot (x-2) - (x-2)' \cdot x}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$;

$$y'' = \left(-\frac{2}{(x-2)^2}\right)' = -\frac{2' \cdot (x-2)^2 - 2\left[(x-2)^2\right]'}{\left[(x-2)^2\right]^2} = \frac{4(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4}{(x-2)^3}.$$

Ҳосилаи тартиби дуюм аҳамияти муҳими амалӣ дорад.

Фарз мекунем, ки $S = f(t)$ қонуни ҳаракати ягон нуқтаи материалӣ бошад. Маълум аст, ки ҳосилаи тартиби якум $f'(t)$ суръати ҳаракати нуқтаро муайян мекунад:

$$v = s'(t) = f'(t)$$

Ба Ниютон пайравӣ карда, баъзан навишти $v = \dot{s}$ («эс болояш нуқта» мехонанд)-ро истифода мебаранд.

Суръати нуқта вобаста ба тағйирёбии вақт низ тағйир ёфта меистад. Агар дар фосилаи $[t; t+\Delta t]$ суръат ба Δv афзоиш ёбад, онгоҳ нисбати $a_{миёна} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ шитоби миёна ном дорад. Ҳангоми $\Delta t \to 0$, шитоби миёна ба ҳудуде майл мекунад, ки он шитоби нуқтаро дар лаҳзаи t ифода мекунад, яъне

$$\text{агар } \Delta t \to 0, \ \text{ онгоҳ } \ \frac{\Delta v}{\Delta t} \to a$$

Ба ҳамин тариқ, **суръати тағйирёбии суръат шитобро** ташкил медиҳад:

$$a = v' = s''(t) = f''(t)$$

Дар физика бештар ишораи $a = \dot{v} = \ddot{s}$ истифода бурда мешавад.

Омӯзиши шитоб дар механика аз он сабаб муҳим аст, ки он бо қонуни Ниютон ва дигар бузургиҳои механикӣ зич алоқаманд мебошад:

Қувва $F = ma = m\dot{v}$ (m -масса); импулс $p = mv = m\dot{s}$

2 Қонуни лапиши гармоникӣ бо формулаи

$$S = A\sin(\omega t + \alpha)$$

дода шудааст. Суръат, шитоб ва қуввае, ки дар ин ҳаракат ба нуқта таъсир мерасонанд, муайян кунед.

Ҳ а л. Функсияи $S = A\sin(\omega t + \alpha)$ -функсияи мураккаб аст.

$$v = S' = (A\sin(\omega t + \alpha))' = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

Шитоб бошад:

$$a = v' = s'' = (A\omega\cos(\omega t + \alpha))' = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = -A\omega^2 s.$$

Қувваеро, ки ба нуқта таъсир мекунад аз рӯи қонуни Нютон меёбем:

$$F = ma = m\dot{v} = -mA\omega^2 s.$$

?

1. Дар зери мафҳуми ҳосилаи тартиби олӣ чиро мефаҳмед?
2. Моҳияти ҳосилаи тартиби дуюмро шарҳ диҳед.
3. Ҳосилаи тартиби чорум ва панҷуми функсияи $y = f(x)$ чӣ тавр навишта мешаванд? ҳосилаи тартиби $n - ум$ чӣ?

Машқҳо

94. Чор ҳосилаи пайдарпаи функсияро ёбед:

$$y = x^5 + 9x^3 - 11x^2 + 2x - 3$$

95. Панҷ ҳосилаи пайдарпаи функсияи $y = cos\ x$ -ро ёбед.

Қиматҳои онҳоро ҳангоми ч = 0 ва $x\dfrac{\pi}{2}$ ҳисоб кунед.

Ҳосилаҳои тартиби дуюм функсияҳои зеринро муайян кунед ($96^\circ - 98$):

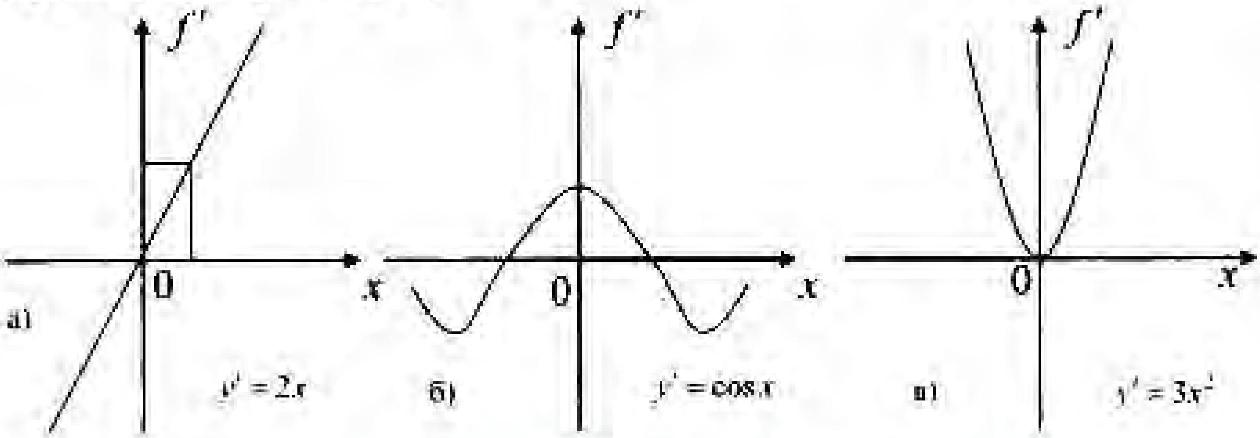
96°. а) $y = \sin^2 x$; б) $y = x + \dfrac{1}{x}$; в) $y = -3x^2 + x + 1$;

97. а) $y = x^2\sin x$; б) $y = x\cdot(x+1)^3$; в) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

98. а) $y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + 2x - 3$; б) $y = x\sin x + \cos x$;

99. Ҷисм бо суръати $y = 5t^2 - 2t + 2\left(м/с\right)$ ҳаракат мекунад. Суръати онро дар лаҳзае, ки шитоб баробари сифр аст, маълум кунед.

100. Дар расми 42 графики ҳосилаҳои тартиби якуми функсияҳо тасвир ёфтаанд, графики ҳосилаҳои тартиби дуюми онҳоро созед:



Расми 42

Аз таърихи пайдоиши ҳосила ва рамзҳои он

Маълумотномаҳои таърихӣ гувоҳи медиҳанд, ки баъзе масъалаҳои ба амали дифференсиалӣ марбутро олимони Юнони қадим ҳал карда метавонистанд. Масалан, Евклид бо тарзи геометрӣ исбот мекунад, ки «аз ҳамаи параллелограмҳои дарункашидашудаи секунҷаи дода шуда ҳамонаш дорои масоҳати калонтарин аст, ки агар асоси он ба нисфи асоси секунҷа баробар бошад». Ҳамин гуна масъалаҳоро Архимед низ ҳал кардааст. Ӯ тарзи гузаронидани расанда ба спиралро муайян кард, ки он дар дигар хатҳои каҷ (эллипс, гипербола, парабола) татбиқи худро ёфт. Мафҳуми асосии амали дифференсиронӣ-мафҳуми ҳосиларо дар асри XVII зарурияти ҳал кардани ду масъала: муайян кардани суръати ҳаракати ростхатта ва сохтани расанда ба хати каҷи ихтиёрӣ ба вуҷуд овард. Тазаккур бояд дод, ки дар ибтидои асри XVII моҳияти онро на ҳамаи донишмандон дарк карда буданд. Ҳатто физики барҷастаи англис Келвин хитоб мекунад:

«Гапи беҳуда, ки суръат - ҳосила аст».

Чаро дар ибтидо ба фикру андешаи Ниютон беаҳамиятӣ зоҳир карданд? Ӯро то ба охир нафаҳмиданд? Инкишофи илм ва пешравии ҳаёт дар натиҷаи ҷидду ҷаҳди аввалин фатҳкунандагони он имконпазир мегардад. Бо гузашти айём, вақте фаро мерасад, ки мақсади дури нахусткашфкунандагон ба ҳама фаҳмо ва дастрас мегардад. Ин андеша ба кашфи ҳосила низ тааллуқ дорад.

Ҳалли масъалаҳои механика Ниютонро ба мафҳуми ҳосила овард. Ӯ соли 1671 ба ин мафҳум **флюксия** (лотинӣ-ҷоришавӣ) ном гузошт ва онҳоро бо ҳарфҳои болояшон нуқтанок $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$ ишорат мекард.

Дар тӯли асрҳои XV-XVII математкҳо дар ҷустуҷӯи ёфтани методи умумии сохтани расанда дар нуктаҳои дилхоҳи хати каҷ буданд. Олимони кишварҳои гуногун, аз он ҷумла итолиёвӣ Торричелли Э. (1608-1647), фаронсавӣ Ж. Робервал (1602-1675), англис И Барроу (1630-1677) ва дигарон кӯшиш намудаанд, ки ин масъаларо бо тарзи кинематикӣ ҳал кунанд. Аввалин тарзи умумии сохтани расанда ба хатҳои каҷи алгебравиро олимони фаронсавӣ С. Декарт (1569-1650) дар китоби «Геометрия» (1637) ва баъдтар П. Ферма (1601-1665) баён кардаанд.

Ба натиҷаҳои Ферма ва дигар пешгузаштагон такя карда, олими олмонӣ Г. Лейбнитс (1646-1716) соли 1684 рисолаи «Методи нави максимумҳо ва минимумҳо»-ро дар ҳаҷми шаш саҳифа нашр кард. Дар он мафҳумҳои асосӣ, алгоритм (қоидаҳо)-и ҳосилагирии сумма, фарқ, ҳосили зарб, дараҷа, тақсим, реша, муайян кардани экстремумҳо ва ғайраҳо баён ёфта, аломатҳои dx, dy, d^2x ва дигарҳо ворид гаштаанд. Барои Лейбнитс мафҳуми асосӣ на ҳосила, балки дифференсиал буд. Дар миёнаи асри XVIII барои афзоиши тағйирёбандаҳо Эйлер ҳарфи юнонӣ Δ-ро истифода кард, ки то ҳанӯз онҳоро истифода мебарем, яъне $\Delta y=y_2-y_1$, $\Delta x=x_2-x_1$. Аломатҳои y', $f'(x)$-ро барои ҳосила олими фаронсавӣ Ж. Лагранж (1736-1813) дохил кардааст. Истилоҳи «ҳосила» аввалин маротиба дар китоби математики фаронсавӣ Луи Арбогаст (1759-1803)

«Ҳисоббарории ҳосилаҳо» (1800) дучор меояд.

Акнун ба суоли он ки, чаро дар ибтидо асосгузорони асосҳои анализ Нютону Лейбнитсро нафаҳмиданд, посӯх медиҳем. Душвории асосӣ аз он иборат буд, ки онҳо дар истифодаи рамзҳо ақидаи қатъӣ ва ягона надоштанд. Масалан Лейбнитс ҳудуди $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$-ро бо $\frac{dy}{dx}$ ифода карда, рамзи фаркро ба рамзи дифференсиал иваз намудааст. Ва ҳудуди ин нисбат ҳамчун як навъ адади нав, ки он аз сифр фарқ карда, аз дилхоҳ адади ҳақиқӣ хурд аст, дида баромада мешуд. Агар ба рамзи d-ҳамчун **нишондод** ба зарурияти гузариши ҳудуди ҳангоми $\Delta x\to 0$, бояд $\Delta y\to 0$ назар афканем, онгоҳ ин душвориҳо аз байн бардошта мешавад. Дар он сурат лозим аст, ки то ба ҳудуд гузаштан дар нисбати $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ сурат ва махраҷро ба Δx ихтисор кунем ё ин ки нисбатро тавре табдил диҳем, ки гузариши ҳудудӣ бе душворӣ ба амал ояд.

Аз замони Коши О. (1789-1857), ки аввалин бор таърифи ҳосиларо ҳамчун лимити нисбати афзоиши функсия Δy бар афзоиши аргумент Δx ҳангоми $\Delta x\to 0$ баён кард, мафҳуми ҳосила ба асоси ҳисоббарориҳои дифференсиалӣ табдил ёфт.

Худро санҷед !

Кадом функсияҳо намерасанд?

Ба ин функсияҳо бо диққат назар афканед. Онҳо аз рӯи муносибати муайян байни худ алоқамандаанд. Шумо ин муносибатро дар чӣ мебинед?

$5x^2-3x$	$10x-3$	10
$\sin^2 x$	$\sin 2x$	$2\cos 2x$
$x\cos x$	?	?

Кори амалии № 4

Мақсади кор: омӯхтани маънои механикӣ ва геометрии ҳосила.

Варианти 1.

Дар расми 43 графики вобастагии ҳаракат аз вақт нишон дода шудааст. Аз рӯи график ба саволҳои зерин ҷавоб диҳед:

1) координатаҳои ибтидоии ҳаракат ба чӣ баробар аст?

2) суръати миёнаи ҳаракат дар фосилаи $[1;1+\Delta t]$ чӣ қадар аст, агар **а)** $\Delta t = 1$; **б)** $\Delta t = 1,7$ ва **в)** $\Delta t = 4$ бошад.

3) дар кадом нуқта суръати ҳаракат ба сифр баробар аст?

4) ҳангоми $t = 2$ суръати лаҳзагӣ ба чӣ баробар аст?

5) суръати ҳаракат дар кадом лаҳзаи вақт калонтар аст?

6) графики тахминии суръатро кашед.

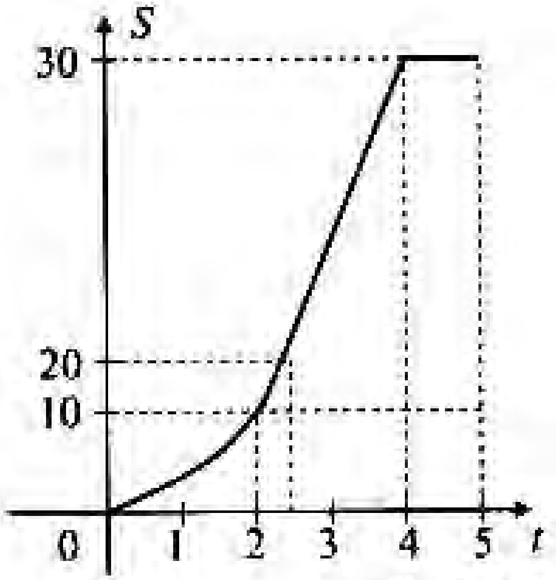
Варианти 2.

Дар дафтаратон графики функсияро, ки дар расми 44 тасвир ёфтааст, кашед.

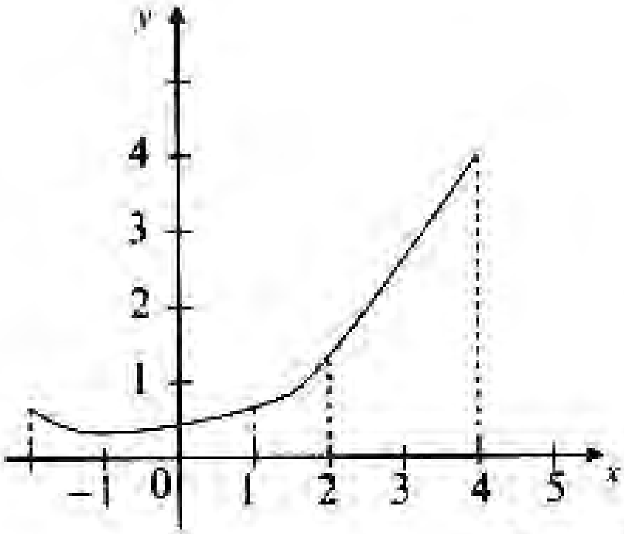
а) Нуқтаҳои – 1, 2 ва 4-ро қайд намуда ба онҳо расанда гузаронед ва коэффитсиентҳои кунҷии онҳоро тақрибӣ ҳисоб кунед;

б) Дар кадом нуқтаҳо расанда ба тири Ox параллел аст? Роҷеъ ба тағйирёбии суръати функсия дар ин нуқтаҳо чӣ гуфтан мумкин аст?

в) Дар кадом нуқта расанда нисбатан рост воқеъ аст? Оид ба тағйирёбии суръати функсия дар ин нуқта чӣ гуфта метавонед?



Расми 43



Расми 44

г) Нуқтаеро ёбед, ки дар он расанда ба тири Ox кунҷи 45°-ро ташкил медиҳад?
д) Дар кадом нуқтаҳо коэффитсиенти кунҷии расанда манфӣ аст?
е) Графики тахминии тағйирёбии коэффитсиенти кунҷии расандаро кашед.
Ox кунҷи 45°-ро ташкил медиҳад?
д) Дар кадом нуқтаҳо коэффитсиенти кунҷии расанда манфӣ аст?
е) Графики тахминии тағйирёбии коэффитсиенти кунҷии расандаро кашед.

Супориши мустақилона доир ба боби IV

Варианти 1°

1. Муодилаи расанда ба графики функсияи $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$ дар нуқтаи $x_0=3$ ёфта шавад.

2. Ҳудудҳои зеринро ёбед:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-3}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$.

3. Бефосилагии функсияи $y=x^2+x+3$-ро дар нуқтаи $x=1$ нишон диҳед.

4. Ҳосилаи тартиби 3-уми функсияи $y=\sin x^2 5x$-ро ёбед.

Варианти 2.

1. Муодилаи расанда ба графики функсияи $y(x)=\sqrt{2x+5}$ дар нуқтаи $x_0=2$ ёфта шавад.

2. Ҳудудҳои зеринро ёбед:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-1}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{2x-1}$.

3. Ба бефосилагӣ тадқиқ кунед:

а) $y=4x+5$; б) $y=\frac{|x|}{x}$; в) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$.

4. Ҳосилаи тартиби 4-уми функсияи $y=\cos^2 5x$-ро ёбед.

Варианти 3*.

1. Дар графики функсияи $y=(x^2+1)(x-1)$ нуқтаеро ёбед, ки дар он расанда ба хати рости $y = 2x+1$ параллел бошад.

2. Ҳудудҳои зеринро ёбед:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{x}$.

3. Нукта аз рӯи конуни $x(t) = 2t(t-5)$ ростхата ҳаракат мекунад. Баъди чанд вакт суръати нукта ба 2 м/с баробар мешавад.

4. Ҳосилаи тартиби дуюми функсияи $y=(x+1)^2\sin 2x$ -ро ёбед.

МАШҚҲОИ ИЛОВА ОИД БА БОБИ IV

Ба параграфи 1

101. Функсияҳои 1) $y=\sqrt{2x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$ дода шудааст.

Афзоиши Δy -ро ҳангоми $x=1$, $\Delta x=0,2$ ёбед.

102. Агар а) $y=5-3x$; б) $y=2\sqrt{x}$; в) $y=3x^2$; г) $y=2x-2^2$ бошад, афзоиши функсияро дар нуқтаи x_0 ба воситаи x_0 ва Δx ифода кунед.

Ба параграфи 2

103. Суръати миёнаи тағйирёбии функсияи $y=2x^2+5x$ -ро ҳангоми тағйирёбии x аз x_1=2 то x_1=3 ёбед.

104. Ҳаракати ростхатаи нуқта бо муодилаи $y=2x^2-8x-10$ (x - бо сонияҳо, y- бо метрҳо) дода шудааст. Суръати нуқтаро дар лаҳзаи вакти $x = 8c$ ёбед.

Ба параграфи 3

105. Коэффитсиенти кунҷии байни расанда ба графики функсияи $y=f(x)$ -ро дар нуқтаи абсиссааш x_0 ва тири Ox_0 ёбед.

а) $y=x^2+x+1$; $x_0=1$; б) $y=x+\dfrac{1}{x+1}$, $x_0=0$

106. Нуқтаҳоеро ёбед, ки дар онҳо расанда ба хатҳои каҷи $y=x^3-x-1$ ва $y=3x^2-4x+1$ параллеланд. Муодилаи расандаро ба ин хатҳои каҷ нависед.

Ба параграфи 4

107. Мувофиқи таъриф ҳосилаи функсияҳои зеринро ёбед:

1) $y = 3x - 4$; 2) $y = 5 - 3x$; 3) $y = x^2 - 3x$; 4) $y = x^3 - 2$.

108. Функсияи $y = x^2 - 5x$ дода шудааст. Ёбед:

1) $y'(3)$; 2) $y'(4)$; 3) $y'(-1)$.

Ба параграфи 5

109. Ҳудудҳои зеринро ёбед:

1) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \left(-x^3 + 9x^2 + x - 1\right)$; 2) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-4)(x+3)}{x^2 + 2x - 3}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{8 - 14x + 5x^2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{9 - x}{3 - \sqrt{x}}$;

5) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$; 6) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$; 7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$.

Ба параграфҳои 6 - 12

110. Ҳосилаи функсияҳои зеринро ёбед.

1) $y = \dfrac{3 + 4x}{2 - 5x}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2x + 1}$; 3) $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$;

4) $y = \left(x^3 - 2x^2 + 5\right)$; 5) $y = \left(x^3 - 1\right)^3$; 6) $y = \sqrt{x^3 - 2x}$;

7) $y = (2x + 1)^2$; 8) $y = \dfrac{1 + 2x}{\sqrt{1 - 2x}}$; 9) $y = \left(\dfrac{a + x}{a - x}\right)^{10}$.

111. Ҳосилаи функсияҳои тригонометриро ёбед:

1) $y = \sin^3 x$; 2) $y = \sin x^3$; 3) $y = \sqrt[3]{\sin x}$.

4) $y = \cos\sqrt{x}$; 5) $y = \sqrt[5]{\cos\sqrt{3x}}$; 6) $y = \cos^2 \sqrt[3]{x - 2}$.

112. Ҳосилаи тартиби дуюми машқи 111-ро ёбед.

БОБИ V. ТАТБИҚИ ҲОСИЛА

Мо дар боби IV ба мафҳуми ҳосила, қоидаҳои ҳисоб намудани он ва алоқамандии функсия ба хосиятҳои ҳосила шинос шудем. Ҳисоб кардани суръати ҳаракати ҷисм ва гузаронидани расанда ба хати каҷ – татбиқи мафҳуми ҳосила ба шумор меравад. Истифодаи он дар тадқиқи функсия бошад матлаби асосии омӯзиш қарор дорад.

Бо вуҷуди ин, соҳаи омӯзиши ҳосила хеле васеъ аст ва он дар ҳалли масъалаҳои гуногун, ки гузориши онҳо ба тадқиқи функсия ҳеҷ вобастагие надорад, истифода бурда мешавад.

Акнун татбиқи минбаъдаи ҳосиларо дар масъалаҳое, ки аз соҳаи гуногуни илму техника гирифта шудаанд, нишон дода, ба фосилаҳои монотонии функсияҳо, экстремумҳо, сохтани графики функсия бо ёрии ҳосила, алоқаи он бо мафҳуми дифференсиал, ки манбаи ҳисоби тақрибӣ аст, шинос мешавем.

§ 1. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсия

Барои тадқиқи тағйирёбии функсия лозим аст, ки фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии он аниқ карда шавад. Дар ин маврид ба чӣ бояд такя кард? Албатта ба **нишонаҳое, ки онҳо зоҳиршавии функсияро маълум мекунанд.**

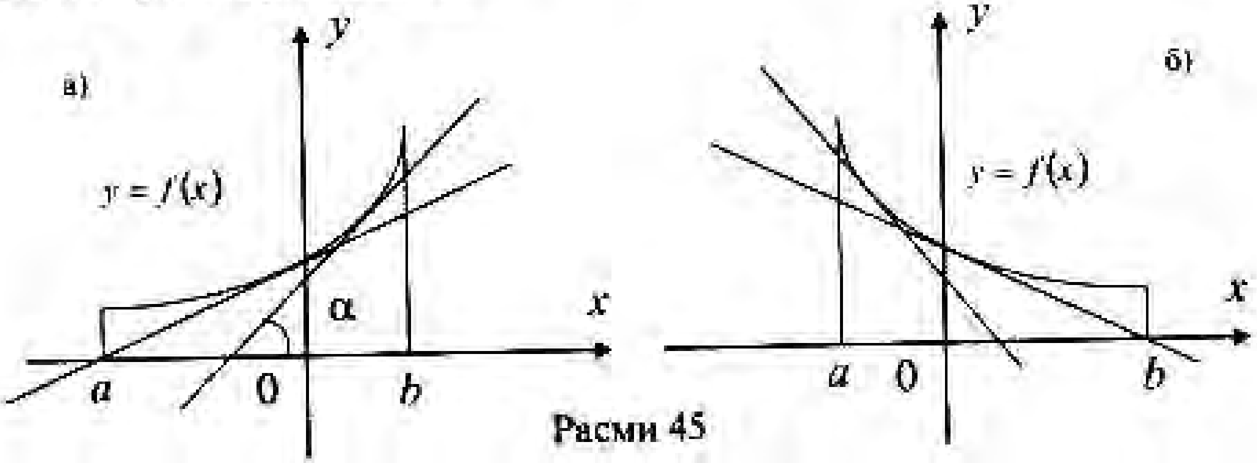
Дар § 6, боби IV исбот кардем, ки ҳосилаи адади доимӣ ба сифр баробар аст. Ин далелро ба сифати **нишонаи доимии** функсия (ҳамчун теорема) қабул мекунем.

(!) ***Теорема*** **(нишонаи доимии функсия). Агар дар ягон фосила функсия доимӣ бошад, онгоҳ дар ин фосила ҳосилаи он ба сифр баробар аст.**

Моҳияти механикии ин нишона дар чист? Ҳосила суръат аст. Азбаски суръати нуқта баробари сифр аст, пас нуқта ором мебошад. Агар ҳосила ҳама вақт баробари сифр бошад, он гоҳ нуқта муттасил ҳаракат надорад.

(!) ***Теорема*** **(нишонаи монотонии функсия). Фосилаҳои монотонии функсия бо ҳосилаҳои аломати доимии функсия мувофиқ аст.**

Исботи қатъии теоремаро наоварда, алоқамандии фосилаҳои монотонӣ ва аломати ҳосиларо бо тасвирҳои геометрӣ шарҳ медиҳем.



Расми 45

Ҳосила ба тангенси кунҷе, ки расанда ба графики функсия бо тири Ox ташкил медиҳад, баробар аст. Пас, агар $tg\alpha = f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ бошад, онгоҳ расанда ба графики функсия дар ҳамаи нуқтаҳои фосилаи $[a;b]$ кунҷи тез (кунд)-ро ташкил медиҳад. Ин чунин маъно дорад, ки графики функсия $f(x)$ дар ин фосила боло мебарояд, яъне функсия меафзояд (расми 45, а) ва хати кач поён мефарояд, яъне функсия кам мешавад (расми 45, б).

Маънои механикии ин нишона дар он зоҳир меёбад, ки агар функсияи $y=f(x)$ ягон қонуни ҳаракати нуқтаро ифода кунад ва он дар фосилаи $[a;b]$ афзояд, он гоҳ суръати нуқта ба равиши мусбати ҳаракат аз рӯи тири Oy мувофиқ меояд, яъне суръати нуқта-ҳосилаи функсия мусбат аст. **Тасдиқи баръакс** он низ ҷой дорад: ҳосила-суръати нуқта мусбат бошад, нуқта ба равиши мусбат ҳаракат мекунад.

Айнан ҳамин тавр ҳолати камшавии функсия маънидод карда мешавад (шарҳ диҳед!).

Агар ба фосилаҳои монотонӣ фосилаҳои доимии функсияро ворид намоем, он гоҳ мегӯянд, ки функсия қатъӣ монотонӣ нест.

Дар натиҷа, тасдиқи ду аломати болоро мухтасар ин тавр навишта метавонем:

агар дар фосилаи $[a;b]$, $y = f(x) \nearrow \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$

агар дар фосилаи $[a;b]$, $y = f(x) \searrow \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$

Тирча ↗ нишон медиҳад, ки y меафзояд;

Тирча ↘ нишон медиҳад, ки y кам мешавад.

Мисолҳо. Фосилаҳои монотонии функсияҳоро ёбед:

1) $f(x)=3x-6$; 2) $y=x^4$; 3) $y=3x^2-x^3$.

Ҳал. 1) f(ч) $= 3x - 6$. Соҳаи муайянии функсия -R.

Ҳосилаи функсияро меёбем: $f'(x)=3>0$. Ин чунин маъно дорад, ки функсия **дар тамоми соҳаи муайянӣ меафзояд.**

2) $y=x^4$; $y'=4x^3$. Нобаробарии $y'>0$, яъне $4x^3>0$-ро ҳал карда, фосилаи афзуншавиро меёбем: $x^3>0$ ё ки $x>0$. ҳалли нобаробарии $y'<0$, яъне $4x^3<0$ фосилаи камшавии функсияро муайян мекунад: $x^3<0$ ё ки $x<0$.

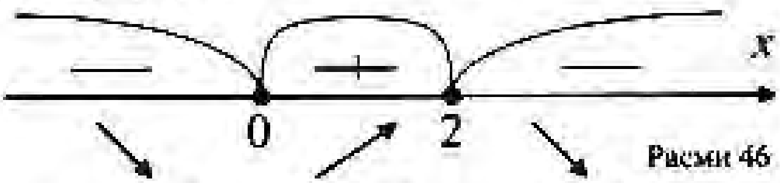
Ба фосилаҳои монотонии функсия нуқтаи $x=0$-ро ҳамроҳ карда метавонем, зеро он ба $D(f)$ дохил аст, яъне $x\geq 0$ фосилаи афзуншавӣ ва $x\leq 0$ фосилаи камшавии функсия низ ҳисоб мешаванд.

3) $y=3x^2-x^3$; $y'=6x-3x^2$.

Нобаробариҳои $6x-3x^2\geq 0$ ва $6x-3x^2\leq 0$-ро бо методи интервалҳо ҳал мекунем (расми 46).

$3x(2-x)\geq 0$ ва $3x(2-x)\leq 0$

Сифрҳои $f'(x)$: $x=0$ ва $x=2$.



Расми 46

Аз расм намоён аст, ки фосилаи афзуншавии функсия $0\leq x\leq 2$ ва фосилаҳои камшавии функсия $x\leq 0$ ва $x\geq 2$ мебошанд.

1. Ба ибораҳои асосӣ ва рамзҳое, ки дар матн дучор меоянд, эътибор диҳед: фосилаҳои афзуншавӣ, фосилаҳои камшавӣ, ↗, ↘.

2. Нишонаи доимии функсияро шарҳ диҳед. Моҳияти механикии ин аломат дар чист?

?

3. Нишонаи монотонии функсияро баён кунед.

4. Шарти афзуншавӣ (камшави)-и функсияи $y=f(x)$ -ро дар фосилаи $[a;b]$ баён кунед.

Машқҳо

Фосилаҳои монотонии функсияро ёбед ($1^\circ - 4^*$):

1°. а) $y=\dfrac{x^2}{2}-3x$; б) $y=x^2-4x$;

в) $y=x^2+6x-4$; г) $y=3x-x^3$;

д) $y=1-x+x^2$; е) $y=x(5-x)$;

ё) $y=\dfrac{1}{x}$; ж) $y=\dfrac{x}{1-4x}$.

2. а) $y=x^3-3x^2-9x$; б) $y=x^3+3x+1$;

в) $y=x^4+4x-6$; г) $y=\dfrac{3x-1}{1-4x}$;

д) $y=x^3+5x-6$; е) $y=x^3-3x^2+7$;

ё) $y=x^{-2}$; ж) $y=x+\sqrt{x}$.

3. а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x+2$; б) $y=x\sqrt{3-x}$;

в) $y=\dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; г) $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

4*. а) $y=(x-2)(x+1)(x-3)$; б) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$;

в) $y=x^4(x-12)^2$; г) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$.

§ 2. Экстремумҳои функсия

Барои ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $y=f(x)$ мо пеш аз ҳама бояд ҳосилаи он – $f'(x)$-ро муайян карда тавонем ва баъд ҳамон қиматҳои x-ро маълум намоем, ки дар онҳо $f'(x)=0$ бошад.

Теорема (шарти зарурии экстремумҳои функсия). Дар нуқтаҳои экстремум ҳосилаи функсия ба сифр баробар аст.

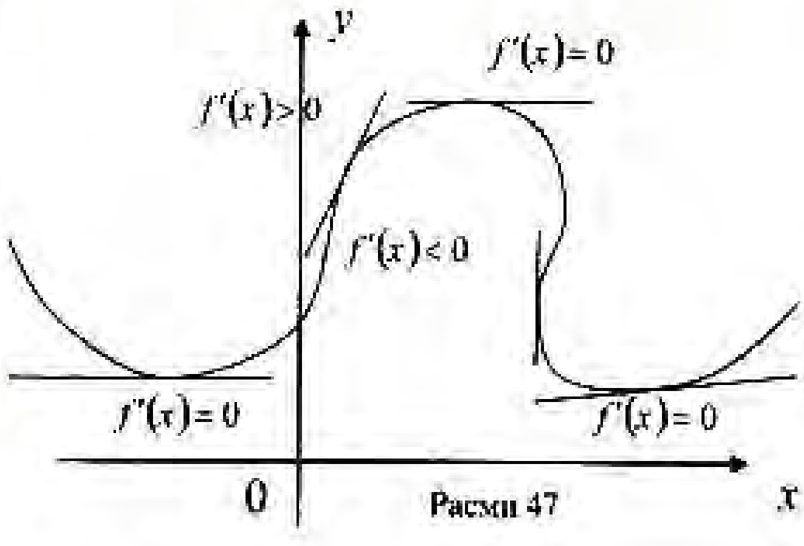
И с б о т. Фарз мекунем, ки функсияи бефосилаи $y=f(x)$ дар нуқтаи $x=x_0$ дорои экстремум буда, ҳосилаи он $f'(x_0)$ вуҷуд дорад. Дар атрофи x_0 -нуқтаҳои ҳамсояи наздиктарин $x_0-\Delta x$ ва $x_0+\Delta x$ ҷойгиранд.

Бигузор функсияи f дорои максимум бошад. Аз тарафи чапи он функсияи y меафзояд, яъне дар фосилаи $[x_0-\Delta x; x_0]$, $f'(x)>0$. Аз тарафи рости нуқтаи x_0 функсия кам мешавад, яъне дар фосилаи $[x_0; x_0+\Delta x]$, $f'(x)<0$.

Дар охир $f'(x)$ аз қиматҳои мусбат ба манфӣ гузашта наметавонад, то ин ки аз болои қимати 0 нагузарад. Аз ин рӯ, дар нуқтаи $x=x_0$ ҳосила бояд баробари сифр бошад, яъне $f'(x_0)=0$.

Айнан ҳамин тавр, мавриди минимум доштани функсия нишон дода мешавад.

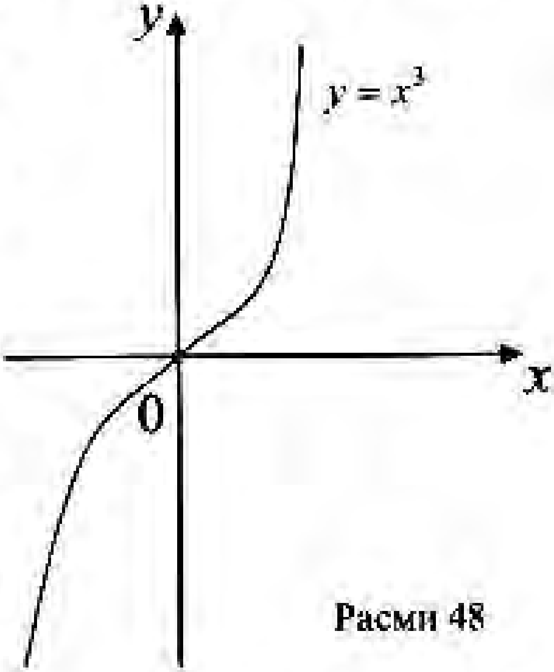
Графики ин чунин маъно дорад, ки расанда ба хати кач бо тири абсцисса параллел аст; кунҷи $\varphi=0^\circ$ ва $y'=tg\varphi=0$ (расми 47).



Расми 47

Теорема исбот шуд.

Чунин тарзи ёфтани максимум ва минимуми функсияро аввалин маротиба олими математики фаронсавӣ **Пер Ферма** (1601-1665) муайян карда буд. Бинобар ин, **онро теоремаи Ферма меноманд.**



Расми 48

Савол ба миён меояд: Оё тасдиқи баръакси теоремаи Ферма ҷой дорад, яъне агар $f'(x)=0$ бошад, функсия экстремум дошта метавонад? Тасдиқи баръаксӣ ҷой надорад. Чунончӣ, агар $f(x)=x^3$ бошад, онгоҳ $f'(0)=0$ мешавад. Вале нуқтаи $x=0$ нуқтаи экстремум ҳисоб намешавад, зеро функсияи $y=x^3$ дар ҳамаи соҳаи муайянӣ афзуншаванда аст (расми 48).

Таъриф. Нуқтаҳое, ки дар онҳо ҳосилаи функсия ба сифр баробар аст ё вуҷуд надорад, нуқтаҳои критикӣ (таҳликӣ) ном доранд.

Аз ин таъриф бармеояд, ки агар ҳосилаи функсия вуҷуд дошта, он ба сифр баробар нашавад, онгоҳ функсия экстремум надорад.

Мисол. Нишон медиҳем, ки функсияи $y=x^2$ дар фосилаи $[-1;1]$ дорои экстремум ва дар фосилаи $[1;2]$ экстремум надорад.

Ҳал. Ҳосилаи $y=x^2$ баробарӣ $y'=2x$ аст. Дар ибтидои координат $f'(0)=0$ мешавад. Пас, дар фосилаи $[-1;1]$, ки нуқтаи 0 ба ин фосила шомил аст, фукнсия экстремум (айни ҳол минимум) дорад. Гарчанде дар фосилаи $[1;2]$ ҳосилаи функсия вуҷуд дошта бошад ҳам, вале дар ягон нуқтаи ин фосила он ба сифр баробар намешавад. Пас, дар ин фосила функсия экстремум надорад **(нақшаро кашед!).**

Ин холат водор месозад, ки шарти кифоягии мавчудияти экстремум чустучӯ карда шавад.

Теорема (шарти кифоягии экстремумхои функсия). Агар x_0 - нуктаи критикии функсияи $y = f(x)$ буда, хангноми гузаштан аз ин нукта хосилаи он $f'(x)$:

1) аломаташро аз «+» ба «-» иваз кунад, функсия дорои максимум;

2) аломаташро аз «-» ба «+» иваз кунад, функсия дорои минимум;

3) аломаташро иваз накунад, функсия экстремум надорад.

И с б о т. Фарз мекунем, ки хосила аломаташро аз «+» ба «-» иваз кунад. Ин чунин маъно дорд, ки чаптари нуктаи $x = x_0$ функсия меафзояд, вале аз тарафи рости он функсия кам мешавад, яъне функсия аз афзуншавӣ ба камшавӣ мегузарад; дар ин нукта функсия экстремум дорад (расми 47).

Тасдики кисмхои дигари теорема айнан хамин тавр нишон дода мешавад (баён кунед!). Теорема исбот шуд.

Ин холатхоро ба назар гирифта, доир ба тадкики тағйирёбии функсия чадвали зеринро тартиб медихем (чадвали 10).

Чадвали 10

Холатхо	Аломати $f'(x)$ дар фосилаи		Функсия $y = f(x)$ дар нуктаи $x = x_0$
	$[x_0 - \Delta x; x_0]$	$[x_0; x_0 + \Delta x]$	
1	+	-	максимум дорад
2	-	+	минимум дорад
3	+	+	меафзояд, экстремум надорад
4	-	-	кам мешавад, экстремум надорад

М и с о л. Экстремуми функсияхоро ёбед:

1) $y = 3x - x^3$; **2)** $y = x^3$.

Х а л. 1) $y = 3x - x^3$; $D(f) = R$; 1. Хосилаи функсияро меёбем:

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

2. Шарти зарурии экстремумро месанҷем, яъне нуктаҳои критикиро меёбем:

$$3-3x^2=0,\ 3\left(1-x^2\right)=0,\ 3(1-x)(1+x)=0;\quad x_1=-1 \text{ ва } x_2=1$$

Дуто нуктаи критикӣ доштааст. Ин нуктаҳо $D(f)$-ро ба се фосилаи монотонӣ ҷудо мекунад: $(-\infty;-1]$, $[-1;1)$ ва $[1;+\infty)$.

3. Аломати ҳосиларо дар хар яке аз ин фосилаҳо маълум мекунем. Ба ин мақсад ба аргументи ҳосила ягон адади фосиларо мегузорем. Аз фосилаи якум (- 2), аз дуюм – нуқаи 0 ва сеюм нуқтаи 4-ро гирифта меёбем:

$y'(-2)=3-3\cdot(-2)^2=-9<0,$ (кам мешавад),

$y'(0)=3-3\cdot 0^2=3>0,$ (меафзояд),

$y'(4)=3-3\cdot 4^2=-45<0,$ (кам мешавад).

4. Шарти кифоягии экстремумҳои функсияро дида мебароем. Аз тарафи чапи нуқтаи – 1 ҳосила манфӣ, вале аз тарафи рости он дар фосилаи $[-1;1]$ мусбат аст; яъне функсия дар ин нуқта аз камшавӣ ба афзудан мегузарад. Пас, нуқтаи $x=-1$ - нуқтаи минимум аст. Фаҳмост, ки нуқтаи $x=1$ - нуқтаи максимум мебошад.

5. Қиматҳои минимум ва максимуми функсияро дар нуқтаҳои экстремалӣ ҳисоб мекунем:

$$y_{\min}(-1)=3\cdot(-1)-(-1)^3=-3+1=-2,$$

$$y_{\max}(1)=3\cdot 1-1^3=3-1=2.$$

2) $y=x^3;\quad D(f)=R.$

1. Ҳосилаи функсия: $y'=3x^2$.

2. Нуқтаҳои критикӣ: $3x^2=0,\ x=0.$

3. Фосилаҳои монотонӣ: $(-\infty;0]$ ва $[0;+\infty)$.

4. Ивазшавии аломати ҳосила дар ин фосилаҳо:

дар фосилаи якум $y(-1)=3\cdot(-1)^2=3>0;$ (меафзояд);

дар фосилаи дуюм $x(1)=3\cdot1^2=3>0$; (меафзояд).

Ҳосила аломаташро дигар накард, пас функсия экстремум надорад. Дар ҳарду фосила функсия меафзояд (нигар ба расми 48).

Экстремумҳои функсияро бо ёрии ҳосилаи тартиби ду низ муайян менамоянд. Далели зерин ҷой дорад.

Теорема. (шарти кифоягии мавҷудияти экстремум). **Бигизор дар нуқтаи x_0, $f'(x_0)=0$ ва $f''(x_0)\neq0$ бошад. Функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0:**

а) **минимум дорад, агар $f''(x_0)>0$,**

б) **максимум дорад, агар $f''(x_0)<0$ бошад.**

Исбот. **а)** Барои муайянӣ, бигузор $f''(x_0)>0$ бошад, онгоҳ функсияи $f'(x)$ дар нуқтаи x_0 афзуншаванда ($f''(x)$ - ҳосилаи тартиби якуми функсияи $f'(x)$) аст, яъне дар атрофи $x_0-\delta<x_0<x_0+\delta$ нобаробарии $f'(x_0-\delta)<f'(x_0)<f'(x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ иҷрошаванда мебошад. Аммо $f'(x_0)=0$, бинобар ин

$$f'(x_0-\delta)<0<f'(x_0+\delta).$$

Ҳосилаи $f'(x)$ ҳангоми гузаштан аз нуқтаи x_0 аломаташро аз «-» ба «+» иваз кард, яъне $f(x)$ дар нуқтаи $x=x_0$ дорои минимум аст. Ҳолати б) –ро мустақилона нишон диҳед.

Мисоли 1. Функсияи $y=x^3-10{,}5x^2+30x+15$ -ро ба экстремум тадқиқ кунед.

Ҳал. Ҳосилаи функсияро меёбем:

$$y'=\left(x^3-10{,}5x^2+30+15\right)'=3x^2-21x+30$$

Нуқтаҳои критикиро ҷустуҷӯ менамоем:

$$3x^2-21x+30=0,\quad x_1=2;\quad x_2=5.$$

Ҳосилаи тартиби дуюмро меёбем:

$y'' = \left(3x^2 - 21x + 30\right)' = 6x - 21$. Ба ҷои x дар $y'' = 6x - 21$ пай дар пай қиматҳои 2 ва 5-ро мегузорем:

$$y'' = (2) = 6 \cdot 2 - 21 = -9;$$

$$y''(5) = 6 \cdot 5 - 21 = 9.$$

Функсия дар нуқтаи $x = 2$ максимум ва дар нуқтаи $x = 5$ дорои минимум аст.

М и с о л и 2. Функсияи $y = x^4$ - ро ба экстремум тадқиқ кунед.

Ҳ а л. $y' = \left(x^4\right)' = 4x^3, \quad 4x^3 = 0, \ x = 0;$

$$y'' = \left(4x^3\right)' = 12x^2.$$

Қимати $x = 0$ -ро гузорем $y''(0) = 0$ ҳосил мешавад. Бо ёрии ҳосилаи тартиби ду экстремумро ёфта натавонистем. Аз шарти кифоягии мавҷудияти экстремум бо ёрии ҳосилаи тартиби якум меёбем.

$$y'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4 < 0,$$

$$y'(1) = 4 \cdot 1^3 = 4 > 0.$$

Тағйирёбии аломати ҳосилаи тартиби якум дар атрофи $(-1;1)$ нишон медиҳад, ки ҳангоми x=0 функсия минимум дорад.

?

1. Ба ибораҳои асосии манбавии зерин, ки дар матн дучор меоянд, эътибор диҳед: **нуқтаҳои критикӣ, экстремумҳои функсия, қиматҳои экстремалӣ.**
2. Шарти зарурӣ ва кифоягии экстремумро баён кунед. Фарқияти баёни онҳо дар чист?
3. Агар функсия бефосила бошад оё вай ҳамеша ҳосила дошта метавонад? Асоснок намоед. Мисоле оред, ки дар нуқтаи $x = 0$; $f'(0)$ вуҷуд надорад.
4. Алгоритми ёфтани экстремумҳои функсияро баён кунед.
5. Чӣ гуна нуқтаҳоро нуқтаҳои критикӣ мегӯянд.
6. Фарқи байни нуқтаҳои экстремуми функсия ва экстремуми функсия дар чист?

Машқҳо

Экстремумҳои функсияҳои зеринро ёбед (5° – 8^*):

5°. а) $y = x^2 + 2x - 1$; б) $y = 3 + 8x - x^2$;

в) $y = 2x^2 - 3x$; г) $y = x^3 + 4x$;

д) $y = 5x - x^2 - 4$; е) $y = x^2 + x + 1$.

6. а) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12$; б) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$;

в) $y = 5 + 36x + 3x^2 + 4x^3$ г) $y = 3x^5 - 5x^3$;

д) $y = \frac{1}{x} + x$; е) $y = x + x\sqrt{x}$.

7. а) $y = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$; б) $y = x\sqrt{2-x}$;

в) $y = \frac{4x}{1+x^2}$; г) $y = \sin x - \cos x$;

д) $y = 9x^5 + 3x^3$; е) $y = \frac{2x}{1-x^2}$.

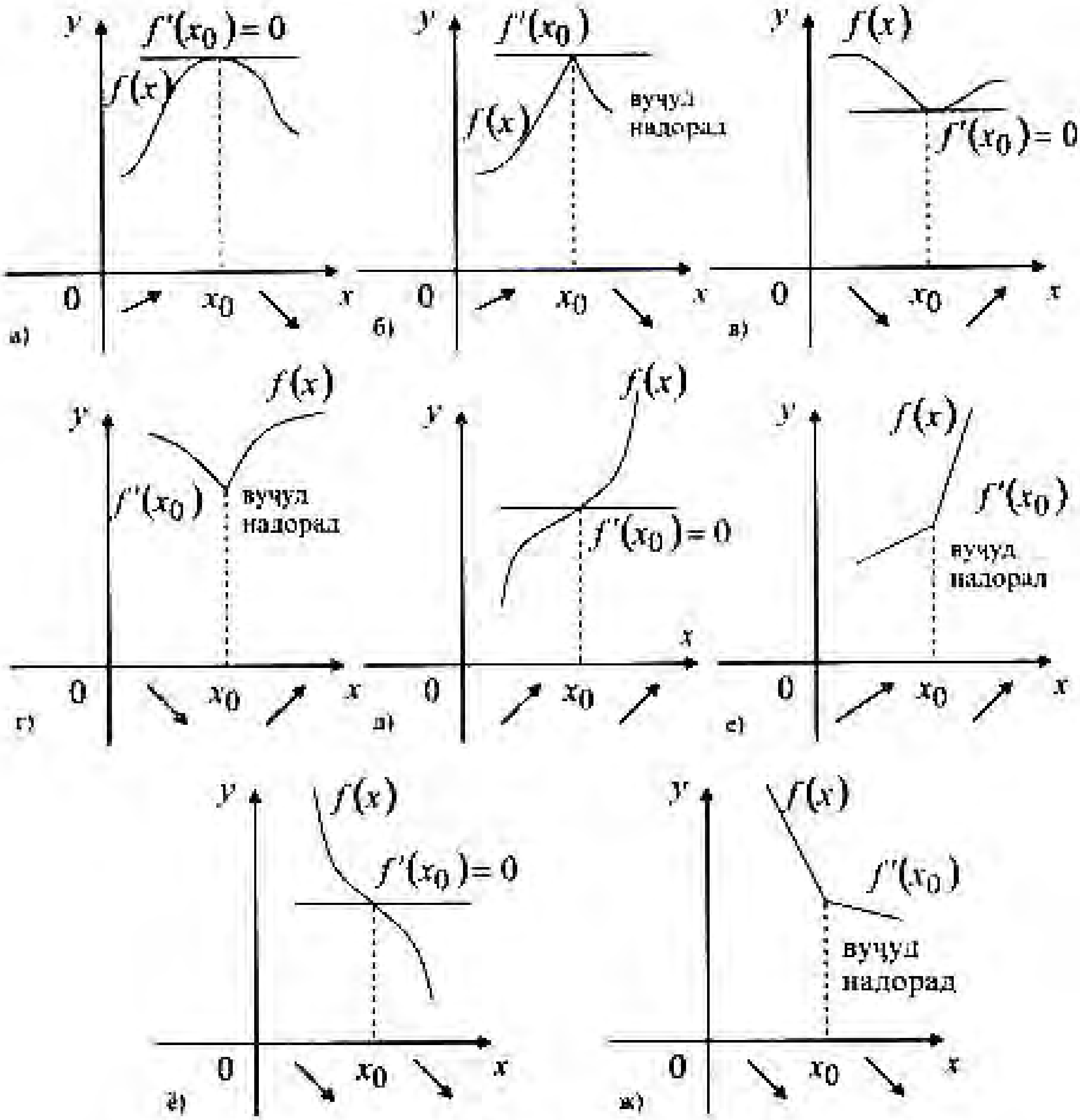
8*. а) $y = x + |x|$; б) $y = (x-1) + |x-1|$.

9. Дар расми 49 (а, б, в, г, д, е, ё, ж) чор ҳолати нуқтаи критикии функсия $x = x_0$ тасвир ёфтааст. Муайян кунед, ки шарти кифоягии экстремуми функсия чӣ тавр иҷро шудааст: а) функсия дар кадом ҳолат дорои максимум ва дар кадом ҳолат дорои минимум аст ва б) дар кадом маврид экстремум вуҷуд надорад.

10*. Маълум аст, ки қимати сеаъзогии квадратӣ $y = ax^2 + bx + c$ дар нуқтаи 8 ба 0 ва қимати хурдтарини он дар нуқтаи 6 ба – 12 баробар мешавад. Нуқтаи экстремуми функсияро ёбед ва муайян кунед, ки он максимум аст ё минимум.

Экстремуми функсияро ёбед (11° – 13^*):

11°. а) $y = x(a - x)$; б) $y = x(a - 2x)$.



Расми 49

12. а) $y = x^2(a^2 - x^2)$; б) $y = \frac{a}{x} + x$.

13*. а) $y = x + \frac{1}{x-a}$; б) $y = x^3(a - x)$.

14. а) Ҳосилаи сеаъзогии квадратии $y = ax^2 + bx + c$ дар нуқтаҳои 0 ва 1 мувофиқан ба – 2 ва 0, вале қимати функсия дар нуқтаи 0 ва – 3 баробар мебошанд. Нуқтаи экстремум ва қимати экстремуми функсияро ёбед.

б) Аз рӯи ҳамин шартҳо функсияи кубии $y = ax^3 + bx + c$-ро тадқиқ кунед. Чандто экстремум дорад?

§ 3. Нуқтаҳои махсус

Ҳангоми исботи теоремаҳои дар боло зикр гардида доир ба хосиятҳои функсия ва алоқамандии онҳо ба ҳосилаҳои функсияҳо мо ҳаминро ба назар гирифтем, ки дар ҳамаи соҳаи муайянӣ функсия дифференсиронидашаванда аст.

Функсияҳое вуҷуд доранд, ки онҳо дорои нуқтаҳои ғайриоддианд. Ва тадқиқи функсия дар атрофи ин нуқтаҳо муносибати хоссаро талаб мекунад.

Ин масъаларо бо ёрии ҳосила ҳал мекунем.

Мисолҳо. Экстремумҳои функсия ёфта шавад!

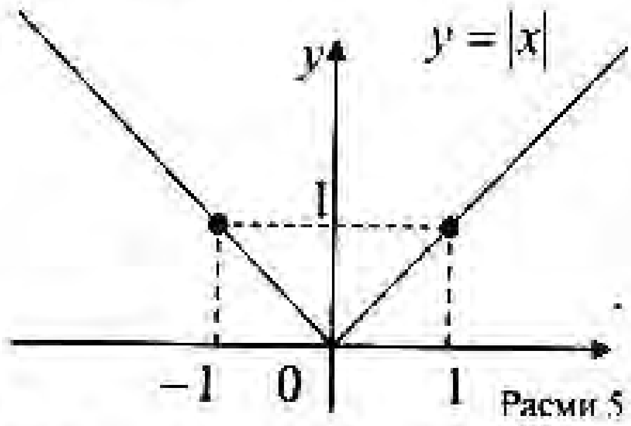
1. $y = |x|$

Ҳал. Функсия др нуқтаи $x = 0$ бефосила аст, вале ҳосила надорад. Ингуна нуқтаро – **нуқтаи махсус** номидаанд. Ин ном ба он далолат мекунад, ки тағйирёбии функсия дар ин нуқта якранг нест; он дар вазъияти «хатарнок» қарор дорад. Дар ҳақиқат:

ҳангоми $x > 0$, $y = x$ ва $y' = +1$,

ҳангоми $x < 0$, $y = -x$ ва $y' = -1$.

Графики функсия дар нуқтаи $x = 0$ ин ҳолатро мегирад (расми 50). Ва дар ин нуқта ба хати додашуда расандаи муайян мавҷуд нест. Бо вуҷуди он, ба ин функсия шарти зарурии экстремумро татбиқ карда метавонем. Нуқтаи $x = 0$ - нуқтаи минимум аст.



Расми 5

Хулоса: **агар функсия дар ягон нуқта ҳосила дошта бошад, вай дар ин нуқта бефосила аст, вале аз бефосилагии функсия дар ягон нуқта ҳанӯз натиҷа баровардан мумкин нест, ки вай дар ин нуқта ҳатман дорои ҳосила мебошад.**

2. $y = \frac{1}{x}$; $D(f)$ - тамоми хати рост, ғайр аз $x = 0$; $y' = -\frac{1}{x^2}$.

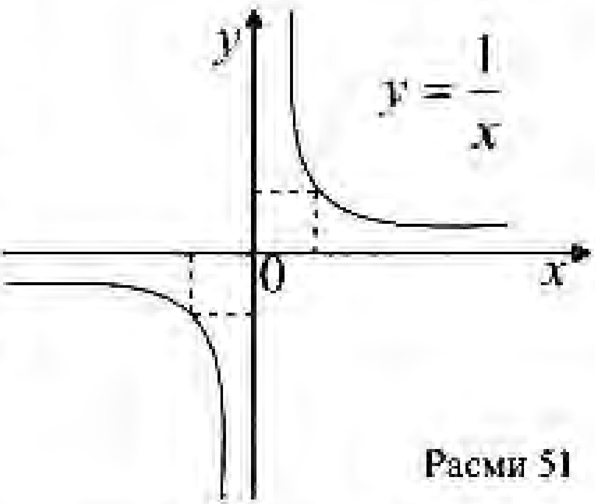
Дар нуқтаи $x = 0$ ҳосила $f'(0)$ вуҷуд надорад, яъне дар ин нуқта функсия **каниш** дорад. Мавҷудияти **нуқтаи махсус** $x=0$ тадқиқи функсияро душвор мегардонад. Ин нуқта $D(f)$ - ро ба ду фосила $(-\infty;0)$ ва $(0;+\infty)$ ҷудо мекунад ва дар ҳар кадоми ин фосилаҳо аломати функсияро санҷида метавонем:

дар фосилаи $(-\infty;0)$, $y'(-1)=-\dfrac{1}{(-1)^2}=-1<0$ (кам мешавад).

дар фосилаи $(0;+\infty)$, $y'(1)=-\dfrac{1}{1^2}=-1<0$ (кам мешавад).

Пас, функсия экстремум надорад. Графики функсия дар расми 51 тасвир ёфтааст.

Аз ин мисолҳо маълум мешавад, ки дар тадқиқи функсия асосан ду навъи нуқтаҳо - нуқтаҳои статсионарӣ (барои муайян кардани фосилаҳои монотонӣ ва экстремумҳои функсия) ва нуқтаҳои махсус мавқеъи асосиро мебозидаанд.



Расми 51

Он гоҳ алгоритми ёфтани экстремумҳои функсия ба таври зайл ифода меёбад:

1. Ҳосилаи функсияро меёбем.
2. Нуқтаҳои критикии функсия $y=f(x)$-ро маълум намуда, фосилаҳои монотониро муайян мекунем; агар функсия нуқтаҳои каниш дошта бошад, онҳоро ҷудо мекунем.
3. Аломати ҳосиларо дар ҳар яке аз ин фосилаҳо маълум мекунем.
4. Аз рӯи аломати ҳосила ивазшавии аломати ҳосиларо муайян мекунем.
5. Дар ҳар як нуқтаи критикӣ, ки аз нуқтаҳои каниши функсия фарқ доранд, экстремумҳоро ҳисоб мекунем.

Мисол. Фосилаҳои монотонӣ ва экстремумҳои функсияро ёбед: 1) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x$; 2) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Ҳал. 1) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x$. Ин функсия бисёраъзогӣ аст. Соҳаи муайянии он ҳамаи тири ададӣ мебошад.

1) Ҳосиларо меёбем: $y' = 6x^2 - 18x - 24$;

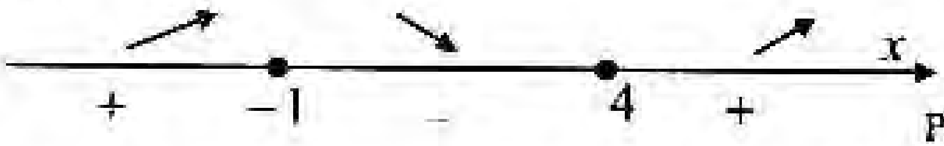
2) Муодилаи $y = 0$ -ро ҳал мекунем: $6x^2 - 18x - 24 = 0$, $x_1 = -1$ ва $x_2 = 4$.

Нуқтаҳои каниш надорад.

Ба хотир мегирем!

Алгоритми ёфтани нуқтаҳои критикии ҳаргуна бисёраъзогӣ аз ду банд иборат аст.

3) Дар тири ададӣ нуқтаҳои критикиро мегузорем. Бо методи интервалҳо аломати y'-ро дар ин фосилаҳо муайян мекунем (расми 52):



Расми 52

4) Фосилаҳои монотонии функсия: $(-\infty; -1]$, $[-1; 4]$ ва $[4; +\infty)$.

5) Дар нуқтаи $x = -1$ функсия максимум ва дар нуқтаи $x = 4$ - минимум дорад; онҳоро ҳисоб мекунем:

$$y_{\max}(-1) = 13; \qquad y_{\min}(4) = -112.$$

Ҷавоб. Функсия дар фосилаҳои $(-\infty; -1]$ ва $[4; +\infty)$ афзуда, дар фосилаи $[-1;4]$ кам мешавад; Экстремумҳои функсия:

$$y_{\max}(-1) = 13; \text{ ва } y_{\min}(4) = -112.$$

2) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

Ҳ а л. Функсия аз нисбати ду бисёраъзогӣ иборат аст.

Ҳосилаи он: $y' = \dfrac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

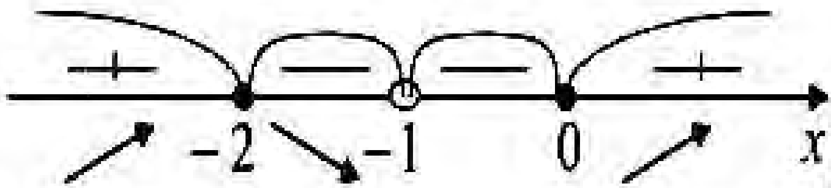
Нуқтаҳои критикӣ: $\dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0, \quad x^2 + 2x = 0,$

$$x(x+2) = 0, \quad x_1 = -2, \quad x = 0.$$

Нуқтаи каниши функсия: $x + 1 = 0$, $x = -1$.

Дар нуқта ин функсия ва ҳосилаи он номуайян аст.

Инак, функсия се нуқтаи критикӣ доштааст: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$. Дар тири ададӣ ин нуқтаҳоро гузошта, нуқтаи каниш (- 1)-ро ҷудо мекунем. Ва бо методи интервалҳо аломати ҳосиларо дар ин фосилаҳо муайян мекунем (расми 53):



Расми 53

Фосилаҳои монотонии функсия: $(-\infty; -2]$, $[-2; -1)$, $(-1; 0]$ ва $[0; +\infty)$.

Нуқтаҳои экстремуми функсия: $x = -2$ ва $x = 0$.

Қиматҳои экстремиалӣ: $y_{\max}(-2) = \dfrac{(-2)^2}{-2+1} = -4$; $y_{\min}(0) = 0$.

Ҷ а в о б р о бо тарзи рамзӣ ин тавр менависем:

$y \nearrow$	$(-\infty; -2]$ ва $[0; +\infty)$;
$y \searrow$	$[-2; -1)$ ва $(-1; 0]$;
$y_{\max} = -4$	ҳангоми $x = -2$;
$y_{\min} = 0$	ҳангоми $x = 0$.

§ 4. Тартиби умумии тадқиқи функсия ва сохтани графики он бо ёрии ҳосила

Фарз мекунем, ки сохтани графики функсияи $y = x^5 - 5x^3 + 2{,}8x + 1$ лозим бошад. Мо одат кардаем, ки якчанд қиматҳои функсияи y-ро барои қиматҳои қулайи $x = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$ ҳисоб кунем:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	3,4	2,2	1	-0,2	-1,4	...

Созиши ин нуқтаҳо дар системаи координат графики функсияро пурра тавсиф дода наметавонад. Зеро маълум нест, ки функсия дар фосилаҳое, ки онҳоро ин нуқтаҳо муайян мекунад, худро чӣ тавр зоҳир мекунад. Шояд онҳо то андозае тағйирёбии функсияро муайян кунанд?

Вале, ин матлабро мо танҳо бо ёрии ҳосила ҳал карда метавонем. Аз ин рӯ, барои сохтани графики функсия пешаки онро тадқиқ кардан лозим аст. Боз ба ҳамон тартиби пештараи тадқиқи функсия бармегардем.

Акнун, тартиби умумии тадқиқи функсияро ба тариқи зайл ба ҷо меорем:

1. Соҳаи муайянии функсияро аниқ мекунем. Барои бисёраъзоги $D(f)$ - ҳамаи хати рост, вале барои функсияҳои ратсионалӣ ҳамаи R ғайр аз нуқтаҳое, ки махраҷ ба сифр баробар мешавад, ҳисоб меёбад. Агар $D(f)$ - фосилаҳои тири ададӣ бошад, аз охирҳои онҳо гузаронидани хатҳои вертикалӣ ба мақсад мувофиқ аст. Агар баъзе нуқтаҳо ба $D(f)$ шомил набошанд онҳоро дар тири абсисса қайд карда, аз болои онҳо хатҳои вертикалӣ гузаронидан лозим аст.

2. Муодилаи $y = f(x) = 0$-ро ҳал карда, решаҳои функсияро маълум мекунем. Нуқтаҳои буриши тирҳои координатиро бо графики функсия меёбем. Онҳоро дар тири ададӣ қайд мекунем.

3. Ҷуфт ё тоқ будани функсияро маълум мекунем.

4. Даврӣ будани функсияро муайян мекунем.

5. Фосилаҳои монотонӣ ва нуқтаҳои экстремумро мувофиқи алгоритми баёнгардида муқаррар мекунем.

6. Қиматҳои функсияро дар нуқтаҳои экстремум ва дигар нуқтаҳои критикӣ ҳисоб намуда, онҳоро дар ҳамворӣ мегузорем.

Нуқтаҳои сарҳадӣ. Агар $D(f)$ аз як ё якчанд фосилаҳо иборат бошад, тағйирёбии функсияро дар наздикии сарҳади ин фосилаҳо тадқиқ мекунем. Дар ин маврид ҳолатҳои зерин ба вуқӯъ меоянд:

а) Дар нуқтаи $x = a$ функсия ба беохирӣ мубаддал мешавад (аксаран ҳангоми ёфтани решаҳои махраҷи функсияи ратсионалӣ рӯх медиҳад). Аз болои он хати вертикалӣ мегузаронем. Аломати функсияро аз тарафи чап ва рости нуқтаи $x = a$ муайян мекунем, то ин ки ба боло ва ё ба поён рафтани графики функсия дар атрофи ин нукта муқаррар карда шавад.

б) Нуқтаи сарҳадӣ $x = a$ ба $D(f)$ дохил аст. Қимати функсияро дар ҳамин нукта ҳисоб карда, онро қайд мекунем.

в) Ба соҳаи муайянии функсия ҳамаи тири ададӣ ё ин ки фосилаҳои намуди $(-\infty;a]$ ва $[a;+\infty)$ ворид аст. Дар ин маврид вазъияти функсияро ба беохирӣ, яъне ҳангоми $x \to -\infty$ ё ин ки $x \to +\infty$ бояд **тасаввур** карда тавонем.

Мувофиқи ин маълумотҳо графики ҳаргуна функсияро сохта тавонем.

Мисоли 1. Бармегардем ба функсияи $y = x^5 - 5x^3 + 2{,}8x + 1$. Графики онро месозем.

Ҳал. Алгоритми тадқиқ ва навишти мухтасари он.

1. Соҳаи муайянии функсия: $D(f) = (-\infty; +\infty)$-зеро ин бисёраъзогӣ аст.

2. Сифрҳои функсия: $x^5 - 5x^3 + 2{,}8x + 1 = 0$ ё ки $x^5 + 2{,}8x + 1 = 5x^3$. Санҷидан душвор нест, ки $x_1 \approx 1$ ва $x_2 \approx 2{,}1$ решаҳои муодила мебошанд. Онҳоро дар тири абсцисса қайд мекунем.

3. Функсия на ҷуфт ва на тоқ аст:

$$f(-x) = (-x)^5 - 5(-x)^3 + 2{,}8(-x) + 1 = -(x^5 - 5x^3 + 2{,}8x - 1) \neq \pm f(x)$$

4. Даврӣ будани функсия. Функсия даврӣ нест.

5. Ҳосилаи функсия: $y' = 5x^4 - 15x^2 + 2{,}8$

6. Нуқтаҳои критикӣ:

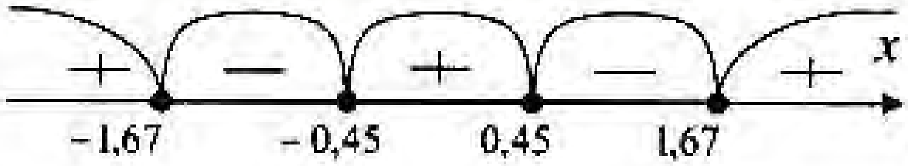
а) муайян мекунем, ки дар кадом нуқтаҳо ҳосила вуҷуд надорад;

$f'(x)$ дар ҳамаи $D(f)$ вуҷуд дорад;

б) муодилаи $f'(x) = 0$-ро ҳал мекунем:

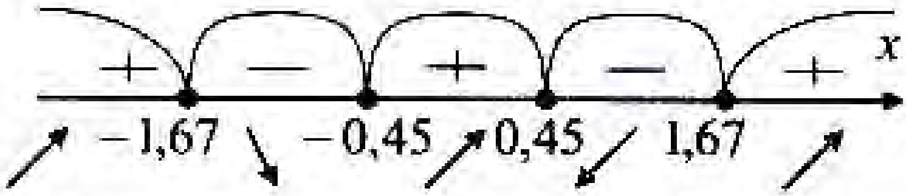
$5x^4 - 15x^2 + 2{,}8 = 0$ гузориши $x^2 = y$ ҳалли муодилаи биквадратиро медиҳад: $x_1 \approx -1{,}67$; $x_2 \approx -0{,}45$, $x_3 \approx 0{,}45$ ва $x_4 \approx 1{,}67$.

7. Нуқтаҳои критикиро дар тири ададӣ қайд карда, аломати ҳосиларо дар ҳар яке аз ин фосилаҳо муайян мекунем (расми 54):



Расми 54

8. Фосилаҳои монотонии функсия (расми 55):



Расми 55

9. Нуқтаҳои экстремум ва қиматҳои экстремалии функсия (ҳисоббарорӣ бо ёрии микрокалкулятор):

ҳангоми
$x \approx -1{,}67$, $y_{\max} \approx (-1{,}67)^5 - 5(-1{,}67)^3 + 2{,}8(-1{,}67) + 1 \approx 6{,}6$;

ҳангоми
$x \approx -0{,}45$, $y_{\min} \approx (-0{,}45)^5 - 5(-0{,}45)^3 + 2{,}8(-0{,}45) + 1 \approx 0{,}2$;

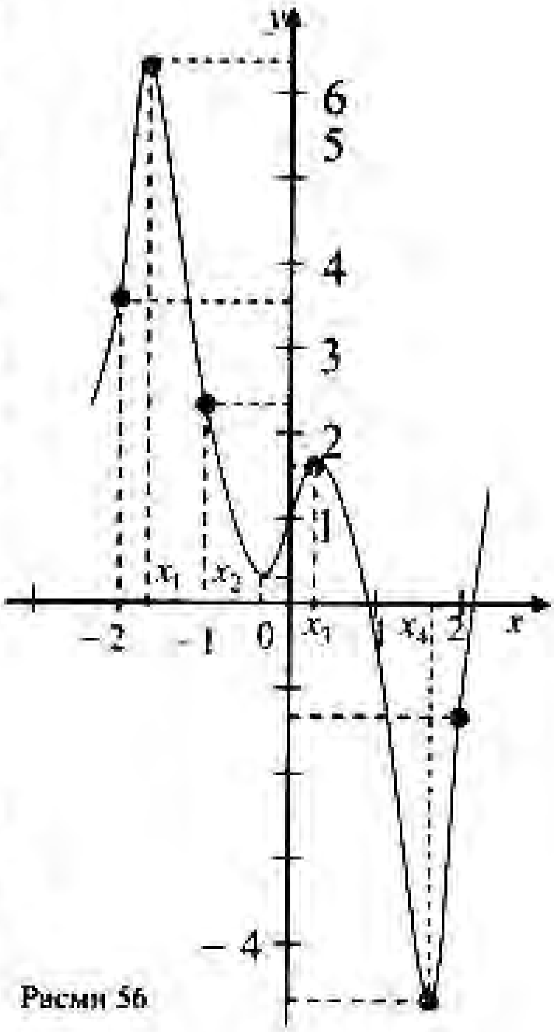
ҳангоми $x \approx 0{,}45$, $y_{\max} \approx (0{,}45)^5 - 5(0{,}45)^3 + 2{,}8(0{,}45) + 1 \approx 1{,}8$;

ҳангоми $x \approx 1{,}67$, $y_{\max} \approx (1{,}67)^5 - 5(1{,}67)^3 + 2{,}8(1{,}67) + \approx -4{,}6$.

10. Вазъияти функсия дар беохирӣ: а) агар $x \to -\infty$, он гоҳ $y \to -\infty$, б) агар $x \to +\infty$, он гоҳ $y \to +\infty$. Ғайр аз ин ба эътибор мегирем, ки графики функсия аз нуқтаи (0; 1) мегузарад.

Графики функсияро месозем (расми 56).

Агар панҷ нуқтаи дар боло қайд гардида: (–2;3,4), (–1;2,2), (0;1), (1;–0,2) ва (2;–1,4) -ро дар график ҷой диҳем (қайд кунед!), мебинем, ки онҳо дар як хати рост мехобанд ва дар ин нуқтаҳо рафтори функсия тағйир меёбад



Расми 56

Мисоли 2. Графики функсияи $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ сохта шавад.

Ҳал. Соҳаи муайянӣ - R, ғайр аз $x\neq\pm1$, яъне ин нуқтаҳо соҳаи муайяниро ба се фосила ҷудо менамояд:

$$D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$$

Дар системаи координат аз болои нуқтаҳои $x=-1$ ва $x=1$ хатҳои вертикалӣ мегузаронем.

Сифрҳои функсия: $y=0$, $\dfrac{x}{x^2-1}=0$, $x=0$.

Нуқтаи $(0;0)$ ба графики функсия тааллуқ дорад. Як-ду нуқтаи ба он наздикро гирифта, қимати функсияро ёфтан ба мақсад мувофиқ аст, чунончӣ: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{2}{3}$; $f(2)=\dfrac{2}{4-1}=\dfrac{2}{3}$.

Функсия тоқ аст: $f(-x)=-\dfrac{(-x)}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}=-f(x)$.

Бинобар ин, график нисбат ба ибтидои координат симметрӣ мебошад ва функсияро дар фосилаи $[0;+\infty)$ тадқиқ кардан кифоя аст.

Нуктаҳои критикӣ надорад:

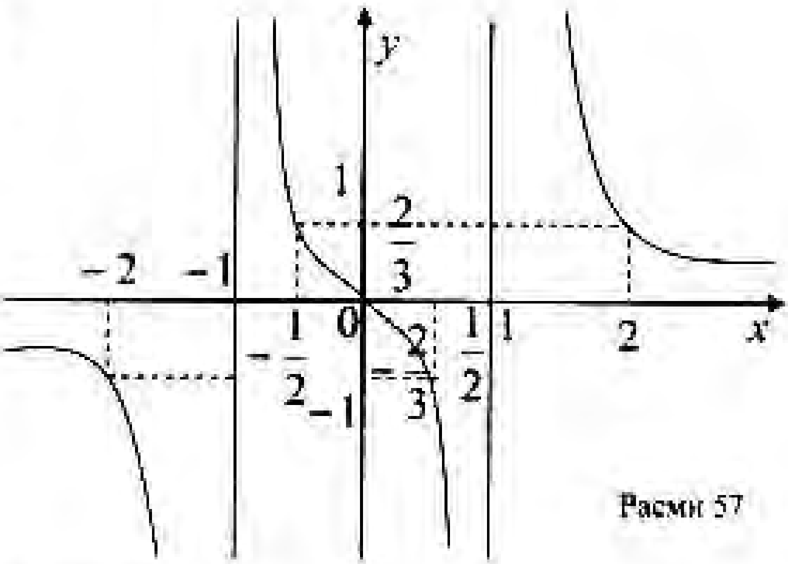
$$y' = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{x^2-1-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}, \qquad x^2+1=0$$

-реша надорад.

Пас, функсия дорои экстремум нест, зеро $f'(x)<0$ барои ҳамаи қиматҳои $x \in D(x)$. Яъне функсия дар ҳамаи фосилаҳои $D(f):(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ ва $(1;+\infty)$ кам мешавад.

Ҳолати функсия дар беохирӣ: агар $x \to -\infty$ ва $x \to +\infty$, он гоҳ $y \to 0$; ғайр аз ин, агар $x \to -1$ ва $x \to 1$, $y \to \pm\infty$.

Дар асоси ин маълумотҳо **графики функсияро** месозем (расми 57).



Расми 57

Мисоли 3. Графики функсияи $y = \sin x + \cos x$ сохта шавад.

Ҳал.

$D(f) = R = (-\infty;+\infty)$.

Функсия на ҷуфт ва на тоқ аст:

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \neq \pm f(x).$$

Графики он нисбати тири ордината ва ибтидои координат симметрӣ нест.

Даври функсия: $T = 2\pi$.

Функсияро дар фосилаи $[0;2\pi]$ тадқиқ мекунем.

Сифрҳои функсия: $\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\ x=\frac{3\pi}{4}+\pi k.$$

Дар фосилаи $[0;2\pi]$ муодила ду реша дорад: $x=\frac{3\pi}{4}$ ва $x=\frac{7\pi}{4}$. Онҳоро дар тири Ox қайд мекунем.

Ҳосилаи функсия: $y'=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

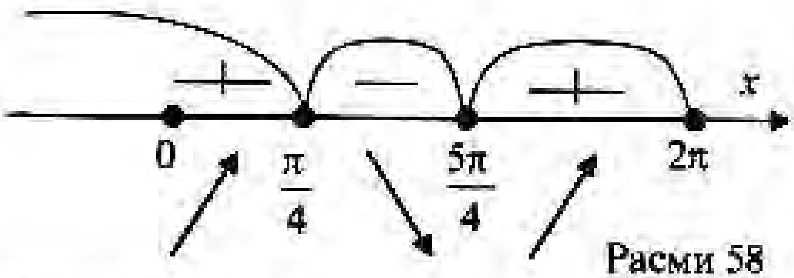
Нуқтаҳои критикӣ: $-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$$x-\frac{\pi}{4}=\pi k,\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k\quad (k\in Z)$$

Азбаски мо танҳо фосилаи $[0;2\pi]$-ро дар назар дорем, пас дар ин фосила фақат $x_1=\frac{\pi}{4}$ ва $x_2=\frac{5\pi}{4}$ решаҳои муодила мебошанд.

Аломати ҳосиларо дар ҳар якеи аз фосилаҳои $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ ва $\left[\frac{5\pi}{4};2\pi\right]$ муайян мекунем (расми 58):

Функсия дар фосилаи $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ ва $\left[\frac{5\pi}{4};2\pi\right]$ афзуда, дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ кам мешавад.



Расми 58

__**Қиматҳои экстремалӣ:**__

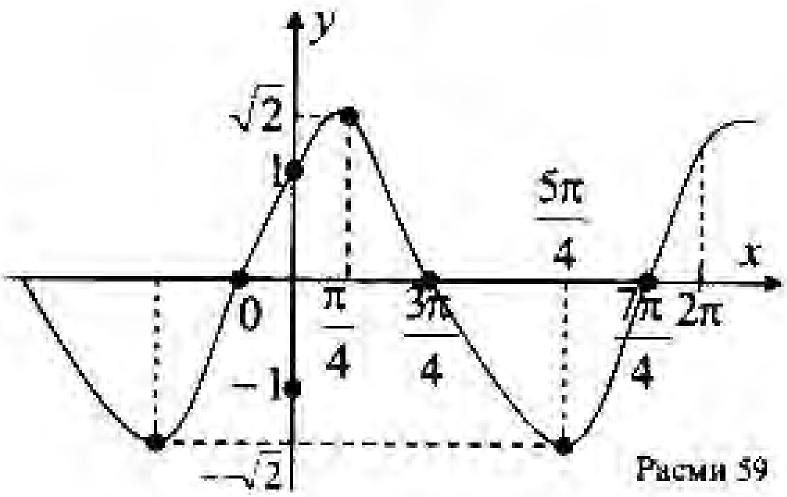
$$y_{\max}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},\ \text{ҳангоми }x=\frac{\pi}{4},$$

$$y_{\min}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2},\ \text{ҳангоми }x=\frac{5\pi}{4}.$$

Ба назар мегирем, ки:

$f(0)=\sqrt{2}\cos\frac{4}{\pi}=1,$

яъне $(0;1)$ - нуқтаи буриши графики функсия бо тири ордината мебошад.



Расми 59

Графики функсияро дар фосилаи $[0;2\pi]$ сохта, онро дар маҷмӯи R бо ёрии параллелкӯчонӣ аз рӯи тири абсисса ба дарозии $2\pi k$ $(k \in Z)$ давом медиҳем (расми 59).

?

1. Тартиби умумии тадқиқи функсияро аз синфи 9 ба хотир оред.
2. Тартиби умумии тадқиқи функсияро бо ёрии ҳосила баён намоед.
3. Фарқи онҳо дар чист?

Машқҳо

Функсияҳоро тадқиқ карда, графики онҳоро созед (15° – 17^{*}):

15°. а) $y=x^2+2$; б) $y=2x^2+x$; в) $y=1-x^2$;

г) $y=x^3-3x$; д) $y=2x-7x^2$; е) $y=x^2+\frac{1}{x}$;

ё) $y=x-\frac{1}{x}$; ж) $y=x^2+2x+1$; з) $y=x^2-2x$;

и) $y=\frac{3}{2}x^2-1$; к) $y=\sqrt{2x}$; л) $y=\frac{1}{1-x^2}$.

16. а) $y=2x^2+5x+3$; б) $y=x^3-3x+2$; в) $y=3-5x-2x^2$;

г) $y=x^3-6x+5$; д) $y=x^4-2x^2+3$; е) $y=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}$;

ё) $y = \frac{x+2}{x-3}$; ж) $y = x\sqrt{2-x}$;

з) $y = x - \sin x$ дар фосилаи $[0;\pi]$;

и) $y = \cos x + \sin x$ дар фосилаи $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

17*. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$; б) $y = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$;

в) $y = x^2\sqrt{1+x}$; г) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; д) $y = x^4 - 2x^3 - 3$;

е) $y = 3x^4 + 2x^2 - 5$; ё) $y = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$; ж) $y = \frac{x}{1-x^2}$;

з) $y = \sin x - \cos x$ дар фосилаи $[0;2\pi]$;

и) $y = \cos 2x + x$ дар фосилаи $[0;\pi]$.

§ 5. Дифференсиали функсия

Мафҳуми дифференсиал ба мафҳуми ҳосила шабеҳӣ дорад ва он яке аз мафҳумҳои муҳимтарини анализи математикӣ ба шумор меравад.

(!) ***Таъриф.* Ҳосили зарби ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ ба афзоиши аргумент дифференсиали функсия ном дорад.**

Агар $y = f(x)$ - функсияи дода шуда, Δx - афзоиши аргумент бошад, дифференсиали онро бо dy (ё ин ки $df(x)$) ишорат карда менависем:

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x)\Delta x} \qquad (1)$$

Мехонанд: «Дэ аз игрек баробар аст ба дэ аз эф аз икс». Ниютон ифодаи $f'(x)\Delta x$-ро **момент** ном ниҳода буд.

Қайд мекунем, ки ҳосилаи функсия танҳо аз x вобастагӣ дорад; дифференсиал бошад боз аз Δx ҳам вобаста аст, яъне дифференсиали функсия – функсияи ду тағйирёбандаи новобастаи x ва Δx ҳисоб мешавад.

Бинобар ин,

Ҳеҷ гоҳ ҳосилаю дифференсиалро бо ҳам якҷоя кардан лозим нест!

Маълум аст, ки агар функсия $y = x$ бошад, онгоҳ ҳосилаи он ба адади доимӣ (воҳид) баробар аст. Ва дар ин маврид дифференсиали функсия ба Δx баробар мешавад, яъне $dx = \Delta x$. Формулаи (1) бошад намуди зеринро мегирад:

$$dy = df(x) = f'(x)dx \tag{2}$$

Аз ин ҷо навишти паҳнгаштаи ҳосила дар намуди нисбати дифференсиалҳо бармеояд:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{3}$$

Мехонем: «Эф штрих аз икс баробар аст ба дэ игрек аз рӯи дэ икс».

Аз ин рӯ, барои ишораи ҳосила дар баробари аломатҳои y' ва $f'(x)$ боз рамзҳои $\dfrac{dy}{dx}$ ва $\dfrac{df(x)}{dx}$-ро истифода мебаранд.

Мисолҳо:

1) $y = x^3$, $dy = d(x^3) = (x^3)'dx = 3x^2dx$;

2) $y = \sin x$, $dy = d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x dx$.

Дифференсиали функсия **маънои оддии геометрӣ** дорад. Ба ин мақсад, афзоиши функсия Δy ва дифференсиали он dy-ро муқоиса мекунем. Аз расми 60 бармеояд, ки ҳар чӣ қадар Δx хурд бошад, ҳамон қадар Δy ба dy наздик мешавад (айни ҳол Δy аз калон аст).

Дарвоқеъ, фарқи $(\Delta y - dy)$ -ро ин тавр табдил дода метавонем:

$$\Delta y - dy = \Delta y - f(x)\cdot\Delta x = \Delta x\cdot\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) \tag{4}$$

Мувофиқи таърифи ҳосила агар $\Delta x \to 0$, онгоҳ фарқи $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ ҳам ба сифр майл мекунад. Ҳангоми онро ба Δx зарб кардан ифодае ҳосил мешавад, ки он ба сифр ҳарчӣ тезтар наздик мешавад. Бинобар ин, аз баробарии (4) формулаи тақрибии зеринро ҳосил мекунем:

$$\boxed{\Delta y \approx dy} \tag{5}$$

Аз ин рӯ, мегӯянд, ки:

дифференсиал – қисми асосии афзоиши функсия аст.

Афзоиши функсия Δy метавонад аз dy хурд ва ё ба он баробар бошад. Ба ихтиёри шумо месупорем, ки расм кашида ҷой доштани баробарии (5)-ро нишон диҳед.

Мисол. Афзоиш ва дифференсиали функсияи $y = x^2$-ро ҳангоми $x = 1$ ва $\Delta x = 0{,}01$ ҳисоб карда, онҳоро муқоиса кунед.

Ҳал. $\Delta y = (1+\Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + \Delta x^2 = 0{,}0201,$

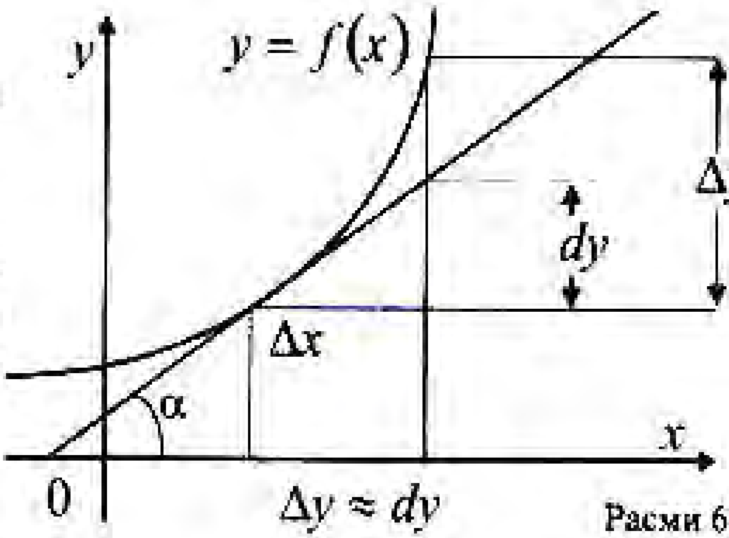
$dy = f'(x)\Delta x = 2x\Delta x = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}02.$

Фарқи $\Delta y - dy = 0{,}0201 - 0{,}02 = 0{,}0001$ аст.

Хатоии нисбӣ

$\dfrac{0{,}0001}{0{,}02} = 0{,}5\%$-ро ташкил медиҳад.

Аз расми 60 маълум аст, ки dy ба dx (ё ин ки dx) мутаносиби рост аст. Ин тасдиқ аз формулаи $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ҳам бармеояд.



Расми 60

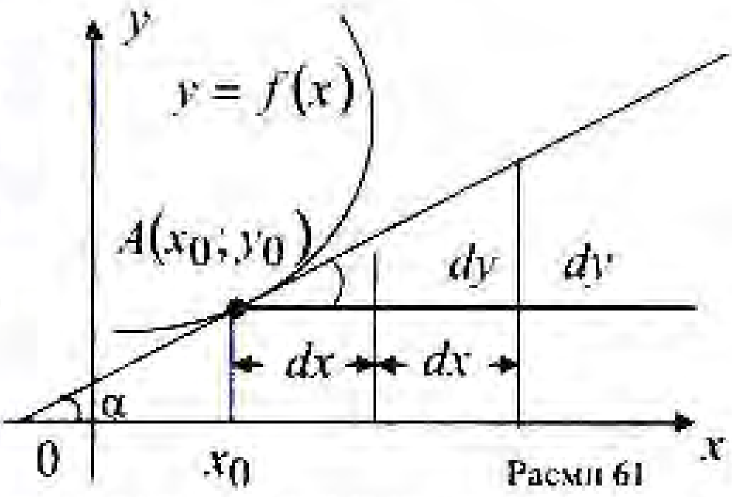
Агар x қимати муайян $x = x_0$ қабул кунад, ҳосила $f'(x_0)$-бузургии доимист. $f'(x_0) = k$ ишорат карда ҳосил мекунем: $\dfrac{dy}{dx} = k$,

$$\boxed{dy = kdx} \tag{6}$$

Пас,

дифференсиали функсия – функсияи хаттии афзоиши аргумент мебошад.

Муносибати (6)-ро геометрӣ шарҳ медиҳем. Нуқтаи $A(x_0; y_0)$-ро дар графики $y = f(x)$ қайд мекунем (расми 61).



Расми 61

Аз расм аён аст, ки ҳангоми тағйирёбии dx силсилаи секунҷаҳои росткунҷае ҳосил мешаванд, ки нисбати катетҳои онҳо ҳамеша ба тангенси кунҷи моилии расанда ба тири абсцисса, яъне ба ҳосила баробар аст:

$$\frac{dy}{dx} = k = tg\alpha\ .$$

?

1. Дифференсиал чист? Он аз ҳосила чӣ фарқ дорад?
2. Таърифҳои гуногуни дифференсиалро баён кунед.
3. Маънои геометрии дифференсиалро шарҳ диҳед.
4. Кадом баробарии тақрибӣ дифференсиал ва афзоиши функсияро алоқаманд мекунад?

Машқҳо

Дифференсиали функсияҳои зеринро ҳисоб кунед ($18^\circ - 20^*$):

18°. а) $y = x^2 + 1$; б) $y = \frac{1}{3}x^6 - 5x^2 + 0,2$;

в) $y = \frac{1}{3}\cos 3x$; г) $c(r) = 2\pi r$.

19. а) $y = \frac{2x-1}{2x+1}$; б) $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$;

в) $y = x\cos x$; г) $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

20*. а) $y = x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$; в) $y = (1 - \cos 2x)^2$.

Муодилаи расандаро ба графики функсияҳо, ки дар нуқтаҳои зерин гузаронида шудаанд, муайян кунед (21°–23^{*}):

21°. а) $y = 2x^2$, абсиссааш $x_0 = 1$;

б) $y = x^2 + 1$, абсиссааш $x_0 = 2$;

22. а) $y = x^2 - 2x$, абсиссааш $x_0 = 3$;

б) $y = -x^2 + x$, абсиссааш $x_0 = -2$;

23*.. а) $y = x^2 - 3x + 2$ абсиссааш $x_0 = 3$;

б) $y = \cos x$ абсиссааш $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

§ 6. Ҳисоби тақрибии қимати функсияҳо

Формулаҳои тақрибӣ

Яке аз воситаҳои муҳимтарини тадбиқи ҳосила - ҳисоби тақрибии қимати функсия ҳисоб меёбад. Ба ин мақсад аз баробарии $\Delta y \approx dy = y'\Delta x$ истифода мебарем.

Фарз мекунем, ки функсияи $y = f(x)$ дода шудааст ва қимати он дар нуқтаи x_0 ба $f(x_0)$ баробар аст. Агар Δx-афзоиши аргумент бошад, онгоҳ:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Аз тарафи дигар $\quad dy = f'(x_0)\Delta x$.

Тақрибӣ ҳисоб намудани қимати функсия маънои онро дорад, ки Δy ба dy иваз карда шавад.

Ҳангоми иваз намудани ифода ба қимати тақрибии он аломати баробарии тақрибӣ $\approx$ истифода бурда мешавад.

Пас,
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

Ва ё

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x} \qquad (1)$$

Азбаски $\Delta x = x - x_0$ аст, формулаи (1) намуди зайлро мегирад:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

Формулаи охиринро боз ин тавр навиштан мумкин аст:

$$y \approx y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

ё
$$y \approx y_0 + dy \tag{4}$$

Маънои геометрии иваз намудани Δy ба dy аз он иборат аст, ки дар наздикии нуқтаи x мо ба ҷои функсияи $y = f(x)$ функсияи хаттиро дида мебароем, яъне фосилаи хурди графикро ба расанда иваз менамоем.

Дидан душвор нест, ки ҳангоми кифоя хурд будани Δx формулаи (1) ва ё (3) муодилаи расандаро (нигар ба §3 боби 4) медиҳад:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Мисолҳо.

1. Барои функсияи дараҷагии $y = x^n$ формула меёбем. Нуқтаи x_0 -ро қайд карда, аз рӯи (1) ҳосил мекунем:

$$(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0^n + nx_0^{n-1} \cdot \Delta x \tag{5}$$

Агар $x_0 = 1$ бошад, $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x$ (6)

мешавад.

Чунончӣ; а) $(1{,}1)^3 = (1 + 0{,}1)^3 \approx 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 0{,}1 \approx 1{,}3$;

б) $(0{,}994)^3 = (1 - 0{,}006)^3 \approx 1^3 - 3 \cdot 0{,}006 \approx 0{,}982$;

в) $(9{,}96)^4 = (10 - 0{,}04)^4 \approx 10^4 - 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}04 \approx 9840$.

2. Муносибати (1)-ро истифода бурда, барои баровардани решаи тақрибӣ аз функсияи $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ формула пайдо мекунем:

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} = (x_0 + \Delta x)^{\frac{1}{n}} \approx x_0^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \cdot x_0^{\frac{1}{n}-1} \cdot \Delta x \tag{7}$$

Агар $x_0 = 1$ бошад,

$$\sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n} \cdot \Delta x \tag{8}$$

мешавад.

Мисол. а) $\sqrt[3]{8{,}002} = \sqrt[3]{8 + 0{,}002} = (8 + 0{,}002)^{\frac{1}{3}} \approx$

$$\approx 8^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 0{,}002 \approx 2{,}002 \pm 0{,}001;$$

б) $\sqrt{0{,}992}=(1-0{,}008)^{\frac{1}{2}}\approx 1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}008\approx 0{,}996.$

3. Бигузор Δx дар муқоиса ба x_0 кифоя хурд бошад. Формулаи (8)-ро татбиқ намуда барои (7) формулаи боз ҳам пурқувваттареро ҳосил мекунем:

$$\sqrt[n]{x_0^n+\Delta x}=\sqrt[n]{x_0^n\left(1+\frac{\Delta x}{x_0^n}\right)}=x_0\sqrt[n]{x+\frac{\Delta x}{x_0^n}}\approx x_0\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta x}{x_0^n}\right)\approx x_0+\frac{\Delta x}{nx_0^{n-1}}.$$

Яъне,
$$\sqrt[n]{x_0^n+\Delta x}\approx x_0+\frac{\Delta x}{nx_0^{n-1}} \qquad (9)$$

ҳангоми $n=2$:
$$\sqrt{x_0^2+\Delta x}\approx x_0+\frac{\Delta x}{2x_0} \qquad (10)$$

$n=3$:
$$\sqrt[3]{x_0^3+\Delta x}\approx x_0+\frac{\Delta x}{3x_0^2} \qquad (11)$$

ва ғайра.

Қайд мекунем, ки **методи аз тахти решаи ихтиёрӣ тақрибӣ** баровардани адад бори аввал дар Осиёи Миёна кашф карда шуда буд. Формулаҳои (9) – (10)-ро 400 сол пеш аз кашфи дифференсиал математикони тоҷик **Ғиёсиддин Ҷамшед ал-Кошонӣ** (вафоташ 1430), **Алӣ Қушчии Самарқандӣ** (1402-1474) ва дигарон истифода мебурданд. Вале методе, ки онҳо бо ёрии он ин формулаҳоро кашф намуданд, то ҳанӯз ошкор нашудааст.

Мисолҳо. Ҳисоб кунед: **а)** $\sqrt{65}$

Тарзи 1. $\sqrt{65}=\sqrt{8^2+1}\approx 8+\frac{1}{2\cdot 8}=8\frac{1}{16}\approx 8{,}0625.$

Дар ҷадвалҳои чоррақамаи В. М. Брадис $\sqrt{65}\approx 8{,}062$ аст. Саҳви мутлақи натиҷаи ҳисоббарорӣ баробари 0,05 мебошад. Пас, ҳисоббарориро кифоя саҳеҳ ичро намудаем.

Тарзи 2. Функсияи $f(x)=\sqrt{x}$ -ро дида мебароем. Ҳосилаи он $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ аст; $x_0 = 64$ ва $\Delta x = 1$ гузошта, аз рӯи формулаи (1)

меёбем: $y = f(x) = f(64+1) \approx f(64) + f'(64)(65-64) \approx$

$$\approx 8 + 0{,}0625 \cdot 1 \approx 8{,}0625, \text{ зеро } f(64) = \sqrt{64} = 8,$$

$$f'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2 \cdot 8} = 0{,}0625.$$

б) $\sqrt[4]{81{,}04} = \sqrt[4]{3^4 + 0{,}04} \approx 3 + \frac{0{,}04}{4 \cdot 3^9} \approx 3{,}004.$

в) $\sin 31^\circ$; мегузорем: $31^\circ = 30^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$;

$$x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \Delta x = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017$$

Он гох, $\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \approx$

$$\approx 0{,}500 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}017 \approx 0{,}500 + 0{,}015 \approx 0{,}515.$$

?

1. Чӣ тавр бо ёрии дифференсиал формулаҳои тақрибӣ ҳосил мешаванд?
2. Маънои геометрии иваз намудани афзоиши функсия ва дифференсиали онро шарҳ диҳед.
3. Дар кадом ҳолат аз формулаи тақрибӣ муодилаи расандаро ҳосил кардан мумкин аст?
4. Формулаҳои тақрибии $(1+\Delta x)^n$, $\sqrt[n]{x_0^n + \Delta x}$, $\sqrt[3]{1+\Delta x}$ -ро нависед.

Машқҳо

Бо ёрии дифференсиал тақрибӣ ҳисоб кунед (24° – 26):

24°. а) $(0{,}994)^3$; б) $\sqrt{0{,}997}$; в) $(1{,}0086)^2$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}006}}$;

д) $\sqrt{101}$; е) $\sqrt{99}$; ё) $\sqrt[3]{1,07}$; ж) $(6,04)^3$.

25. а) $(3,002)^5$; б) $\sqrt[4]{15,8}$; в) $\sqrt{3,15\cdot 3,96}$; г) $\sqrt[3]{81,012}$.

26. а) $\sqrt[4]{\dfrac{1,004}{1,007}}$; б) $\dfrac{5}{\sqrt{15,63}}$; в) $\sqrt[4]{10248}$; г) $\sqrt[3]{999}$.

27*. (Ғ. Кошонӣ). а) Оё дуруст аст, ки:

$$\text{а) } \sqrt[5]{44240899506197} \approx 536\frac{21}{414237740281};$$

б) Нишон диҳед, ки: $\sqrt[5]{2\dfrac{2}{31}} = 2\sqrt[5]{\dfrac{2}{31}}$.

Қимати тақрибии функсияи $y=f(x)$-ро дар нуқтаи x_0 ҳисоб кунед ($28^\circ - 30^*$):

28°. а) $y=1+5x^3$, $x_0=1,003$; б) $y=\sqrt{x}$, $x_0=9,001$;

в) $y=x^2+x$, $x_0=2,01$.

29. а) $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1,001$;

б) $y=x^3-x^2+2x$, $x_0=3,03$; в) $y=x^3-6x+2$, $x_0=1,002$.

30*. а) $y=x^7-3x^3+4x^2-2$, $x_0=1,002$;

б) $y=x\sqrt{x^2+5}$, $x_0=2,001$; в) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, $x_0=4,1$.

31. Аз рӯи формулаи тақрибии дифференсиал ҳисоб кунед:

а) $\sin 29^\circ$; б) $tg 44^\circ$; в) $\cos 59^\circ$.

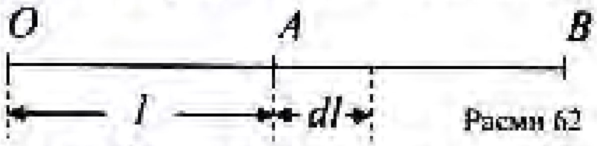
§ 7. Истифодаи дифференсиал дар физика ва техника

Мафҳуми дифференсиал ҳамчун функсияи хаттии афзоиши аргумент барои ҳисоб намудани бузургиҳои зиёди физикӣ ва техникӣ истифода бурда мешавад.

1. <u>Зичии хаттии меҳвар</u>

Фарз мекунем, ки меҳваре ҳаст. Агар он якҷинса бошад, масса ба дарозии меҳвар баробар тақсим мешавад, яъне

$\rho = \frac{m}{l}$. Ҳангоми ғайриякҷинса будани меҳвар дар бораи зичии он умуман сухан рондан мумкин нест, зеро дар қисмҳои гуногуни меҳвар зичӣ ҳархел аст. Фарз мекунем, ки зичиро дар нуқтаи A муайян кардан лозим бошад (расми 62).



Расми 62

Дар он сурат функсияҳои $m = m(l)$ -массаи қитъаи меҳвар аз нуқтаи O то нуқтаи A (ба дарозии l мувофиқ меояд) ва $p = p(l)$-ро дида баромадан мумкин аст. Агар дар порчаи хурди дарозии меҳвар $[l;l+\Delta l]$ зичиро доимӣ ва баробари $p(l)$ шуморем, онгоҳ ҳосили зарби $\rho(l)\cdot dl$ -дифференсиали масса dm -ро медиҳад.

Ҳамин тариқ, **ҳосилаи масса аз рӯи дарозӣ – зичии хаттии меҳвари ғайриякҷинса аст:** $\rho = m'(l)$.

2. **__Гармӣ__**. Бо T' - температура ва бо Q - миқдори гармие, ки барои гарм кардани 1 кг моддаи ҷисми додашуда аз $0''$ то T' (аз рӯи Селсия) зарур аст, ишорат мекунем. Маълум аст, ки Q аз T вобастагӣ дорад, яъне $Q = Q(t)$ ва он ($Q = mc(T_2 - T_1)$) аз таҷриба муайян карда мешавад. Агар гармиғунҷоиши хоси модда C аз температура вобастагӣ намедошт, он гоҳ ҳосили зарби $C\cdot dT$ тағйирёбии Q-ро муайян мекард. Дар фосилаи аз T то $T + \Delta T$ гарм кардани ҷисм гармигунҷоиши хосро доимӣ шуморида, дифференсиали гармиро ҳосил мекунем: $dQ = c(T)dT$.

Пас, ҳосилаи гармӣ аз температура гармиғунҷоиши ҷисми массааш ба воҳид баробарро медиҳад: $C = Q(T)$.

3. **__Қувваи ҷараёни электрикӣ__**. Фарз мекунем, ки q-миқдори заряде (бо кулонҳо) бошад, ки дар вақти t аз буриши кундалангии ноқил мегузарад. Ҳангоми қувваи ҷараён I доимӣ будан дар фосилаҳои баробари вақт dt аз ноқил миқдори баробарӣ электрик мегузарад, ки он ба Idt баробар аст.

Агар қувваи ҷараён тағйирёбанда бошад, дар фосилаи хурди вақт $[t;t+\Delta t]$ он аз рӯи қонуни $I = I(t)$ тағйир меёбад. Ва дар ин порча ҳосили зарби $I(t)dt$ қисми асосии афзоиши миқдори зарядро ташкил медиҳад: $dt = I(t)dt$. Аз ин ҷо мебарояд, ки **ҳосилаи заряд аз рӯи вақт – қувваи ҷараён аст:** $I = q'(t)$.

Ин муносибат алоқамандии се бузургӣ-заряд, вақт ва қувваи ҷараёнро ифода мекунад.

4. <u>Суръати реаксияи химиявӣ</u>. Маълум аст, ки миқдори моддаи m ба реаксияи химиявӣ воридшаванда вобаста ба вақт t тағйир меёбад, яъне $m = m(t)$. Суръати он низ аз рӯи қонуни $v = v(t)$ ифода меёбад. Дар фосилаи хурди вақт $[t;t+\Delta t]$ ҳосили зарби $v(t)dt$ дифференсиали миқдори моддаро медиҳад:

$$dm = v(t)dt$$

Пас, **ҳосилаи массаи модда аз рӯи вақт – суръати реаксияи химиявӣ** аст: $v = m'(t)$

Ҳамин тавр мисолҳои зиёде аз техника овардан мумкин аст, ки барои ҳалли онҳо дифференсиали функсия зарур мешавад. Масалан, муайян кардани коэффитсиенти ҳатти васеъшавии ҷисм, суръати кунҷии ҷисми чархзананда, кори иҷрогардида дар фосилаи вақт ва г. ҳамингуна масъалаҳое мебошанд, ки ҳаллашон дифференсиали функсияи мувофиқро талаб мекунанд.

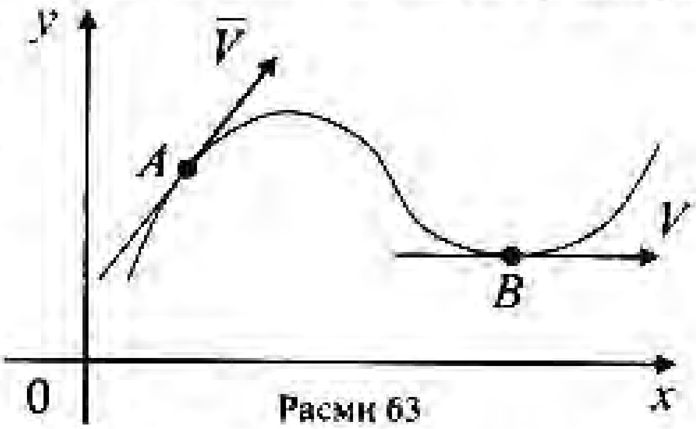
Дар ҳамаи мисолҳои муоина гардида яке аз бузургиҳо ба сифати коэффитсиенти мутаносиби байни дифференсиали ду бузургии дигар ворид гаштааст, яъне ҳар дафъа алоқамандии бузургиҳо бо муносибати $dy = kdx$ ифода меёбад.

5. <u>Суръати ҳаракати каҷхатта</u>. Мо татбиқи ҳосиларо барои муайян кардани ҳолат, ҷойивазкунӣ, суръат ва шитоби ҷисме, ки ростхатта ҳаракат мекунад, дида баромадем. Ба шумо аз курси физика (қисми кинематика) маълум аст, ки **суръати** нуқтаи ҳаракаткунандаи дилхоҳ **бузургии векторӣ** аст. Он бо ёрии вектор ҳамчун ҷойивазкунии нуқта дар фосилаи вақти дода шуда муайян карда мешавад. Дар қисми динамика нишон дода мешавад, ки дар ҳаракати каҷхатта вектори суръат аз рӯи расанда равона аст. Мувофиқи ҳамин нишондод амал мекунем.

Фарз мекунем, ки нуқтаи A аз рӯи траектория (лотинӣ – ҷойивазкунӣ)-и каҷхатта ҳаракат мекунад. Координатаҳои нуқтаҳои A-ро дар лаҳзаи вақт t бо

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (1)$$

ифода мекунем. Ин координатаҳо аз вақт t вобаста буда, худ функсияҳои вақтанд. Агар функсияҳои $x(t)$ ва $y(t)$ бефосила бошанд, он гоҳ ҳангоми тағйирёбии муттасили вақт ҳаракати нуқтаи $A(x;y)$ дар ҳамворӣ **хати каҷро** мекашад (расми 63).



Расми 63

Аз ин рӯ, муодилаҳои (1)-ро **тарзи параметрии дода шудани хати каҷ ва ё муодилаҳои ҳаракат** меноманд.

Суръати лаҳзагии нуқтаи ҳаракаткунандаи A-ро дар лаҳзаи t дида мебароем. Вектори суръати лаҳзагӣ $\vec{v}$ ба траекторияи ҳаракати нуқта расанда буда, координатаҳои он низ аз вақт t вобастагӣ доранд. Нишон медиҳем, ки координатаҳои вектори суръати $\vec{v}$-и нуқтаи A ба $x'(t)$ ва $y'(t)$ баробаранд; дар ин ҷо x' ва y' функсияҳое мебошанд, ки аз x ва y дар нуқтаи A ҳосил шудаанд.

Дар муддати вақти Δt нуқтаи $A(x(t);y(t))$ ба нуқтаи $B(x(t+\Delta t);y(t+\Delta t))$ ҷой иваз мекунад. Координатаҳои вектори $\overrightarrow{AB}$-ро бо ёрии координатаҳои ибтидои вектор нуқтаи A ва интиҳои он нуқтаи B ифода мекунем. Аз курси геометрия (синфи IX) маълум аст, ки вектори $\overrightarrow{AB}$ ба фарқи векторҳои $\overrightarrow{OB}$ ва $\overrightarrow{OA}$ баробар аст (нақшаро кашед!). Бинобар ин, координатаҳои он ба фарқи координатаҳои мувофиқи ин векторҳо баробар мебошад:

$$\overrightarrow{AB}(x(t+\Delta t)-x(t);\ y(t+\Delta t - y(t)))$$

Маълум аст, ки нисбати ҷойивазкунӣ ба вақт суръати миёна ном дорад (§1, боби 4).

Пас, барои вектори суръати миёна навишта метавонем:

$$\vec{V}_{миёна} = \frac{\overline{AB}}{\Delta t}$$

Координатаҳои он бошад намуди зеринро мегирад:

$$\vec{V}_{миёна}\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t};\ \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right)$$

Ҳангоми Δt ҳар чӣ кадар хурд шудан $\bar{V}$ миёна ба вектори суръати лаҳзагӣ наздик мешавад.

Аз рӯи таърифи хосила, агар $\Delta t \to 0$, он гоҳ

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \to x'(t), \quad \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \to y'(t).$$

Ба ҳамин тариқ, координатаҳои вектори суръати лаҳзагӣ дар вақти t ба $x'(t)$ ва $y'(t)$ баробар будааст:

$$\vec{V}(x'(t); y'(t)) \qquad (2)$$

Дар харакати даврзананда нуқта аз рӯи давраи радиусаш r бо суръати кунҷии доимии $\omega = \frac{\alpha}{t}$ дар атрофи тир чарх мезанад. Дар ин маврид суръати хаттиро суръати лаҳзагӣ ҳам меноманд (нақша кашед!).

Ҳангоми харакати доиравии ғайримунтазам суръати кунҷӣ ω тағйир ёфта меистад. Агар дар фосилаи $[t; t+\Delta t]$ нуқта ба кунҷи $\Delta\alpha = \alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$ гардиш кунад, онгоҳ:

$$\omega_{миёна} = \frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t}$$

мешавад.

Мувофиқи таърифи ҳосила, дар ҳолати $\Delta t \to 0$ суръати кунҷии лаҳзагиро ҳосил мекунем:

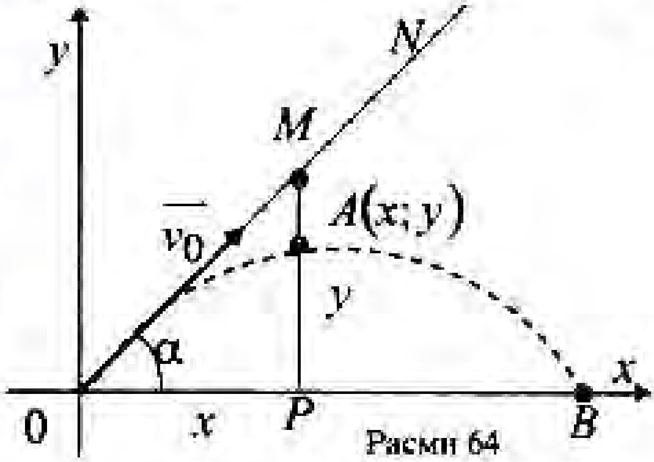
$$\frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t} \to \alpha'(t)$$

Мисол. Тири тӯп дар зери кунҷи α бо суръати $\bar{v}_0$ ба ҳамвории горизонталӣ парронда шуд. Агар муқовимати ҳаво ба назар гирифта нашавад, он аз рӯи парабола ҳаракат мекунад. Вектори суръат $\overline{V}$ ба парабола расанда аст.

а) Координатаҳои ҳаракати тири тӯпро муайян кунед;

б) Координатаҳои вектори суръат ба чӣ баробар аст?

в) Ҳангоми $V_0 = 30,5 м/с$ ва $a = 30°$ буда, координатаҳои суръат, шитоб ва суръатро дар охири сонияи якум маълум кунед.



Расми 64

Ҳ а л. Дар системаи координатаи декартӣ траекторияи парвози тирро мекашем (расми 64).

Ҳолати тирро координатаҳои x ва y-и нуқтаи A (нуқтаи маркази вазнинӣ) муайян мекунад. Агар ба тири тӯп қувваи вазнинӣ таъсир намекард, он аз рӯи хати рости ON ҳаракат карда, дар t сония роҳи $OM = v_0t$ -ро тай менамуд. Вале дар зери таъсири қувваи вазнинӣ тир дар ин муддат ба масофаи $MA = \frac{gt^2}{2}$ паст фуромада дар нуқтаи A ҷойгир мешавад.

Аз секунҷаи росткунҷаи OMP меёбем:

$$x = OP = OM\cos\alpha = v_0t\cos\alpha,$$

$$y = PA = PM - AM = OM\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = v_0t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Ҳамин тавр, координатаҳои тир дар нуқтаи A, ки аз вақт вобастагӣ доранд, маълум шуданд:

$$x(t) = v_0t\cos\alpha,$$

$$y(t) = v_0t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \qquad (3)$$

дар ин ҷо v_0 -суръати ибтидоии ҳаракат, α -бузургии кунҷе, ки онро вектори суръат бо ҳамҷоягии тири тӯпи ба ҳаво парронда шуда ташкил медиҳад $(0 < \alpha \le 90^\circ)$, $g = 10 м/c^2$ - шитоби озодафтии ҷисм мебошад. Бо ёрии ин функсияҳо (муодилаҳои ҳаракат) дар муддати дилхоҳи вақт дурии парвоз x ва баландии парвоз y-ро ёфта метавонем.

Координатаҳои вектори суръат $\vec{v}$-ро аз рӯи формулаҳои (3) меёбем:

$$x'(t) = (v_0 t \cos\alpha)' = v_0 \cos\alpha \tag{4}$$

$$y'(t) = \left(v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)' = v_0 \sin\alpha - gt\,,$$

Пас, $\vec{V}(v_0 \cos\alpha;\; v_0 \sin\alpha - gt)$.

Дар формулаҳои (4) $t = 1c$, $v_0 = 30{,}5 м/c$, $\alpha = 30^\circ$ ва $g = 10 м/c^2$ гузошта координатаҳои вектори суръатро ҳисоб мекунем:

$$x' = 30{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30{,}5 \cdot 0{,}866 = 26{,}4 м/c$$

$$y' = 30{,}5 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot 1 = 5{,}25 м/c\,.$$

Аз рӯи ин координатаҳо суръат v-ро маълум мекунем:

$$v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2 t^2} = \sqrt{30{,}5^2 - 2 \cdot 30{,}5 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 10^2} =$$

$$= \sqrt{727{,}75} \approx 26{,}98 м/c$$

(ҳисоббарорӣ бо ёрии МК иҷро карда мешавад).

Муайян кардани координатаҳои шитоб бошад душворие надорад: $\ddot{x}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = -g = -10 м/c^2$.

?

1. Мисолҳои алоқамандии байни бузургиҳо ва дифференсиали онҳоро оред.
2. Ҳосилаи заряд аз рӯи вақт чиро мефаҳмонад?
3. Муодилаи траекторияи ҳаракати нуқтаро аз рӯи хати каҷ тартиб диҳед.

4. Алоқамандии каоординатаҳои вектори суръати лаҳзагӣ ва вектори суръати миёнаро ошкор намоед.
5. Координатаҳои вектори суръати ҳаракати каҷхатта чӣ тавр муайян карда мешаванд?

Машқҳо

32. а) Суръати ҷисмро, ки аз рӯи қонуни $S(t)=3t+5$ ҳаракат мекунад, ёбед.

б) Ҷисм бо суръати $S=t^3-3$ ҳаракат мекунад. Суръати онро дар лаҳзаи $t=2c$ муайян кунед.

33. Ҷисм бо суръати $v=5t^2-2t+2$ ҳаракат мекунад. Суръати он дар лаҳзае, ки шитоб ба сифр баробар аст, чӣ қадар аст?

34. а) Кунҷи гардиши чарх дар атрофи тир бо формулаи $\varphi(t)=t^2+3t-5$ дода шудааст. Суръати кунҷиро дар лаҳзаи $t=5c$ ёбед?

б) Агар кунҷи гардиш бо қонуни $\varphi(t)=2t^2-\frac{1}{2}t$ ифода ёбад, он дар лаҳзаи $t=10c$ ба чӣ баробар аст?

35. Ҷисми аз рӯи қонуни $S=\frac{2}{3}t^3-2t+3$ ростхатта ҳаракт мекунад. Суръат ва шитобро дар охири сонияи чорум ёбед.

36. а) Ду ҷисм дар як вақт аз рӯи хати рост ба ҳаракат даромаданд: яке аз рӯи қонуни $10t^2$ ва дигаре аз рӯи $\frac{4}{3}t^3$. Кадоме аз онҳо дар лаҳзаи $t=5c$ ва $t=10c$ суръати баландтарро дорад?

б) Ду ҷисм аз рӯи қонунҳои $x_1(t)=4t^2-3t+1$ ва $x_2(t)=t^2+7t-2$ (x_1, x_2-бо метрҳо, t-бо сонияҳо) ҳаракат мекунанд. Суръати онҳоро дар лаҳзае, ки координатаҳояшон бо ҳам баробаранд, ёфта шавад.

37. Ҷисм аз рӯи қонуни $S=30t-t^2$ ростхатта ҳаракат мекунад. Суръати лаҳзавиро дар лаҳзаи $t=3c$ ва $t=10c$ ёбед.

38. Ҳаракати ҷисм аз рӯи қонуни $S=\sqrt{t}$ сусташаванда аст. Чаро?

39. Ҷисм бо суръати космикии 1-ум $v=\sqrt{\dfrac{gr^2}{r+h}}$ ҳаракат мекунад (r =6367*км* -радиуси Замин). Агар $h=0$ бошад суръат чӣ қадар аст? Шитоб – чӣ?

40. Нуқта аз рӯи қонуни $A=A\sin 10t$ ҳаракати ростхаттаи лапанда ичро мекунад. Суръат ва шитоби ҳаракатро дар лаҳзаи $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$ муайян кунед. Нишон диҳед, ки шитоб ба S мутаносиб аст.

41. Ҷисм аз рӯи қонуни $S=3t^2+t-1$ ростхатта ҳаракат мекунад. Суръат ва шитобро дар лаҳзҳои $t=0$, $t=1$ ва $t=2$ ёбед. Графики суръати лаҳзагиро вобаста аз вақт созед.

42. Дар меҳвари ғайриякҷинсаи AB массаи порчаи AM ба квадрати масофа аз нуқтаи M то нуқтаи A мутаносибан меафзояд. Маълум аст, ки дарозии порчаи AM ба 2 см ва массаи он ба 8 кг баробар мебошад. Зичии меҳварро дар нуқтаи C маълум кунед, агар он аз нуқтаи A дар масофаи 5 см воқеъ бошад.

43. Нуқта аз рӯи қонуни $S=2t(t-5)$ ростхатта ҳаракат мекунад. Баъди чанд вақт суръати нуқта баробари 2 м/с мешавад?

44. Нуқта аз рӯи қонуни $x(t)=2t^2-14t+45$ ростхатта ҳаракат мекунад. Суръати нуқтаро дар лаҳзае, ки координатаи он ба 25 м баробар аст, ёбед. Ба аломати суръат эътибор диҳед.

Координатаҳои қонуни ҳаракат бо тариқи зайл дода шудаанд ($45^\circ-47^*$):

45°. а) $\vec{r}(3t-2;-4t)$; б) $\vec{r}(2t^2-3;3t^2)$.

46. а) $\vec{r}\left(t^2;\dfrac{4}{t^2}\right)$; б) $\vec{r}(2t-4t^2;t-t^2)$.

47*. а) $\vec{r}(8t^2-7;16t^2+4)$; б) $\vec{r}(2t;t^2+3)$.

Координатаҳои суръат ва суръати ҳаракатро ёбед.

Муодилаҳои ҳаракатро дар системаи координатаи декартӣ нависед. Траекторияи ҳаракати нуқтаҳоро кашед.

48. Қувваи ҷараён бо формулаи $I = 0{,}2t^2$ дода шудааст. Суръати ҷараёнро дар охири сонияи 10-ум ҳисоб кунед.

49. Миқдори заряде, ки дар вақти t аз ноқил мегузарад бо формулаҳои:

а) $Q = 2t^2 + 5t + 1\ (k)$ б) $Q = 2t^2 + 3t + 1\ (k)$

муайян карда мешавад. Қувваи ҷараёнро дар лаҳзаи $t = 5c$ ва $t = 10c$ ҳисоб кунед.

50. Ҳангоми гарм кардани ҷисм температураи он T° вобаста ба вақт аз рӯи қонуни $T(t) = 0{,}4t^2$ тағйир меёбад. Суръати тағйирёбии температураи ҷисмро дар лаҳзаи $t = 0$ ҳисоб кунед.

51. Ҳаҷми газ V дар температураи t° аз рӯи формулаи $V = 1 + 0{,}0075t$ муайян карда мешавад. Суръати вобастагии онро ёбед.

52. а) Дарозии меҳвари оҳанин дар порчаи $0^\circ \le t^\circ \le 75^\circ$ (Селсия) аз рӯи формулаи $l = l_0\left(1 + 117 \cdot 10^{-7}t + 4{,}7 \cdot t^{-9} \cdot t^2\right)$ тағйир меёбад. Коэффитсиенти хатти васеъшавиро дар лаҳзаи $t = 5^\circ$ ёбед.

б) Дарозии ҷисми сахт дар температураи t° аз рӯи дарозии аввалаи он l_0 ва коэффитсиенти хатти васеъшавӣ α муайян карда мешавад. Таърифи коэффитсиенти хатти васеъшавии ҷисмро баён кунед.

53. Ҷудошавии радиоактивии модда, ки бо роҳи таҷриба муайян карда мешавад бо муодилаи $R = f(t)$ ифода меёбад. Суръати ҷудошавии радиоактивиро таъриф диҳед ва онро дар лаҳзаи t маълум кунед.

§ 8. Ҳалли масъалаҳо доир ба ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарин

Ба инсон кайҳо боз хосиятҳои аҷоиби табиат маълум аст. Масалан, кӣ амалиёти замбури асалро мушоҳида накардааст?

Замбур чакраи асалро аз шукуфаи гул гирифта то ба қутии асал рост парвоз мекунад, ба умеди он, ки қувва ва вақти хешро **сарфа** карда дар давоми рӯз **бештар** рафтуо кунад ва ҳар чӣ **зиёдтар** асал ҷамъ оварад.

Дар замини хушк растанӣ вертикалӣ ба поён реша медавонад, то ки ба нуқтаи **баландтарини** сатҳи намнок рафта расад.

Офтобпараст рӯи худро ба офтоб мегардонад, то ин ки бештар энергияи офтобро гирад.

Олими Юнони қадим Герони Александрӣ (асри I –и мелод) ва 1700 сол баъдтар олими фаронсавӣ П. Ферма ва Р. Декарт дар физика ҳодисаҳои зеринро муқаррар карданд:

Нури равшанӣ дар муҳити ғайриякҷинса ҳамингуна траекторияеро интихоб мекунанд, ки барои бартараф намудани монеаи тамоми роҳ вақти **камтарин** сарф шавад. Табиат сарфакор аст!

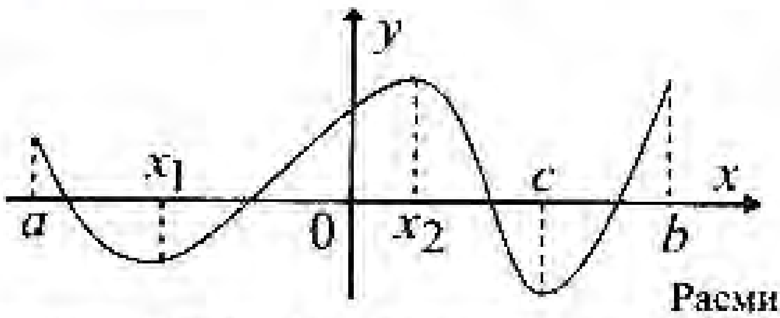
Дар биология аз замони Дарвин (солҳои 1858) ба акидае омаданд, ки **бо роҳи интихоби табиӣ беҳтарин** зоти ҳайвонҳо ва растаниҳо ба вуҷуд меоянд.

Инсон чун ҷузъи табиат доимо дар кӯшиши он аст, ки масъалаҳои ҳаёт ба миён гузоштаро беҳтару хубтар ҳал кунад. Чора меҷӯяд, ки захираҳои меҳнатиро (баҳри баланд бардоштани сатҳи зиндагии худ) **сарфакорона** истифода барад. Бо **сарфи ками вакт** даромади зиёд ба даст орад, бо харҷи **кам** маҳсулнокии баландро соҳиб шавад ва ғ.

Албатта, ҳамаи ин масъалаҳоро ба забони математикӣ ифода кардан мумкин нест. Вале тадқиқи қисми онҳо, ки ба **ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсия вобастаанд,** бо методҳои таҳлили математикӣ имконпазир аст. Инро нишон медиҳем.

Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ дода шуда, дар ҳамаи нуқтаҳои ин фосила дорои ҳосила аст. Барои ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсия **нуқтаҳои критикиро**, ки дохили ин фосила аст маълум намуда, **қимати функсияро дар ин нуқтаҳо, аввал ва охири порча** ҳисоб мекунем. Баъд аз ададҳои ҳосилшуда калонтарин ва хурдтарини онҳоро маълум мекунем.

Дар расми 65 графики функсияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ тасвир ёфтааст. Дар нуқтаи C функсия ба қимати хурдтарин ва дар охири порча – нуқтаи b бошад ба қимати калонтарин соҳиб мешавад.



Расми 65

Мисолҳо.

1. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияро дар фосилаи $[1;3)$ ёбед: $y = 4x - x^2 + 6$

Ҳал. Ҳосилаи функсияро меёбем: $y' = 4 - 2x$.

Решаҳои он: $4 - 2x = 0$; $x = 2$,

яъне, функсияи y якто нуқтаи критикӣ дорад. Ва он ба фосилаи $[1;3)$ дохил аст. Қиматҳои y-ро танҳо дар нуқтаҳои 1 ва 2 ҳисоб мекунем, зеро 3 ба фосила дохил нест:

Дар фосилаи $[1;3)$:

Ҷавоб: $y_{\max} = 10$; функсия қимати хурдтарин надорад.

2. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $y = \sin^2 x + 4\sin x + 2$-ро дар порчаи $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ ёбед.

Ҳал. Масъаларо айни ҳол бе ёрии ҳосила ҳал кардан осонтар аст. Онро ба тарзи оддӣ-**табдилдиҳӣ** ва **истифодаи хосияти маҳдудияти** функсияи $y = \sin x$ ҳал мекунем.

Азбаски $y = \sin^2 x + 4\sin x + 2 = (\sin x + 2)^2 - 2$ ва $|\sin x| \le 1$ аст, қиматҳои функсияро дар охирҳои порчаи $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ҳисоб мекунем:

Ҷ а в о б:

$$y_{\max} = \left(\sin\frac{\pi}{2} + 2\right)^2 - 2 = 7, \quad y_{\min} = \left(\sin\frac{3\pi}{2} + 2\right)^2 - 2 = -1.$$

Методҳое, ки Шумо дар ҳалли масъалаҳо истифода мебаред бояд ба хусусияти ҳар яке аз он мувофиқ бошад. Дар қатори методҳои умумӣ истифодаи тарзҳои хусусии ҳалро, ки онҳо тезтар ва ба осонӣ ба мақсад мерасонанд, аз ёд набаоред.

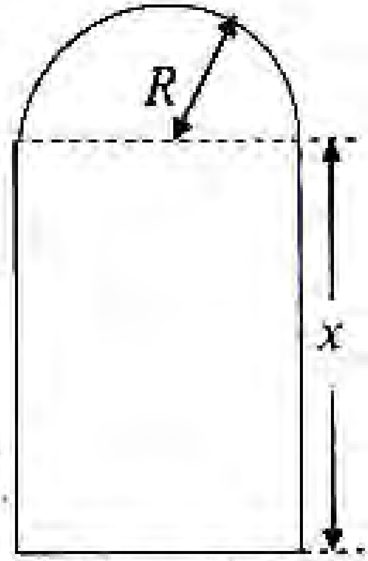
Бисёр масъалаҳои амалӣ ба ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия дар порчаи дода шуда мутааллиқанд. Ингуна масъалаҳоро - масъалаҳои **экстремалӣ** (лотинӣ - беҳтарин) меноманд.

М и с о л ҳ о.

Масъалаи 1. Туннел (англисӣ – иншооти зеризаминӣ) шакли росткунҷаро дорад, ки бо нимдоира тамом мешавад. Радиуси нимдоира чи гуна бошад, ки дар қимати маълуми периметр P масоҳати буриш калонтарин бошад?

Ҳ а л. Методи моделиронии математикиро истифода мебарем.

Қадами 1. Расми масъаларо мекашем (расми 66).



Расми 66

Бо R - радиуси нимдоира ва бо x - баландии росткунҷаро ишорат мекунем.

Қадами 2. Формулаи периметрро менависем:

$P = 2x + 2R + \pi R$

Қадами 3. x ва R-ро тағйирёбанда мешуморем:

$2x = P - 2R - \pi R$

Қадами 4. Масоҳати буриши туннелро ҳамчун функсияи радиуси нимдоира ифода мекунем:

$$S = \frac{\pi R^2}{2} + 2Rx = \frac{\pi R^2}{2} + R(P - 2R - \pi R) = PR - 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}$$

Қадами 5. ҳосила мегирем:

$$S'(R) = \left(PR - 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2} \right)' = P - 4R - \pi R$$

Қадами 6. Нуқтаҳои критикиро меёбем:

$$S'(R) = 0, \quad P - 4R - \pi R = 0, \quad R = \frac{P}{4+\pi}.$$

Агар аломати ҳосиларо дар фосилаи $\left(P; \frac{P}{4+\pi} \right]$ муайян кунем дидан душвор нест, ки дар қимати $R = \frac{P}{4+\pi}$ функсия $S(R)$ ба қимати калонтарин соҳиб мешавад:

$$S_{\max} = P \cdot \frac{P}{4+\pi} - \left(\frac{P}{4+\pi} \right)^2 \cdot \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{P^2}{2(4+\pi)}.$$

Ҷ а в о б: $R = \frac{P}{4+\pi}$

Амалиёти баёнгардида **хусусияти алгоритмӣ** дорад. Ва кулли масъалаҳои ба экстремум вобаста ҳамин тавр ҳал карда мешаванд.

Қайд: Баъзан дар масъалаҳо ба ҷои ибораи «масоҳати буриши калонтарин» ибораи «қобилияти гузарониш (ё роҳдиҳи)-и туннел»-ро истифода мебаранд, ки ҳамон як маъно дорад.

Масъалаи 2. Обхӯраи чарогоҳи говҳоро одатан аз се тахтаи якхелаи васеъгиашон $a_м$, ки дар зери кунҷи α мустаҳкам карда шудаанд, тайёр мекунанд. Бузургии кунҷи α бояд чигуна бошад, то ки обхӯраи ғунҷоишаш калонтарин ҳосил шавад?

Ҳ а л. **Тарзи 1.** Ғунҷоиши калонтарин ҳангоми буриши кундалангии калонтарин ҳосил мешавад. Пас, буриши кундалангии обхӯра трапетсияи баробарпаҳлӯ аст (расми 67).

Аз расми 67 маълум аст, ки:

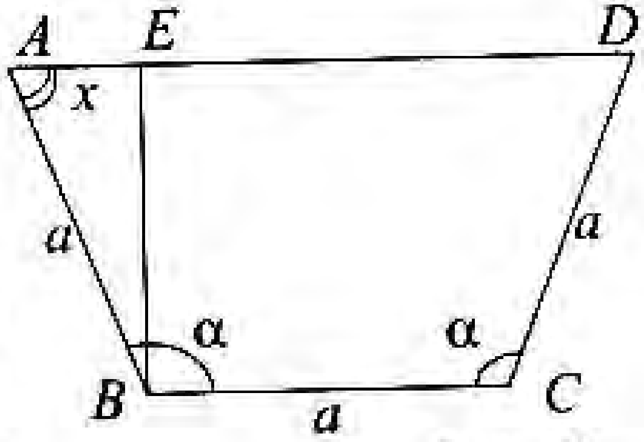
$\angle BAD = x,$

$AD = 2AE + BC = a + 2a\cos x,$

$BE = a\sin x,$

$AB = BC = CD = a.$

Агар бузургии кунҷи x маълум карда шавад, он гоҳ кунҷи α -ро ёфтан мумкин аст.



Расми 67

Масоҳати трапетсия:

$$S(x) = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{a + a + 2a\cos x}{2} \cdot a\sin x = a^2(1 + \cos x)\sin x, \left(0 < x \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Нуқтаҳои критикиро меёбем:

$$\frac{ds}{dx} = \left(a^2(1 + \cos x)\sin x\right)' = a^2(\cos x + \cos 2x) =$$

(мувофиқи формулаи косинуси суммаи ду кунҷ)

$$= 2a^2\cos\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2};$$

$$\frac{ds}{dx} = 0, \quad 2a^2\cos\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = 0, \quad \cos\frac{3x}{2} = 0, \quad \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{3};$$

$$\cos\frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Ба ҳамин тариқ, ҳангоми $x = \frac{\pi}{3}$ будан S дорои қимати калонтарин мешавад:

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Дар ин маврид, $2x+2\alpha=360^\circ$, $\alpha=120^\circ$

Ҷ а в о б: $\alpha=120^\circ$.

Т а р з и 2. Обхӯра призмаест, ки асосаш $ABCD$ - трапетсияи баробарпаҳлӯ аст. Дарозии тахта (баландии призма)-ро бо l ишора мекунем:

$$V=Sh=la^2(1+\cos x)\cdot\sin x$$

Нуктаҳои критикӣ бошанд:

$$V'(x)=la^2\left(\cos x(1+\cos x)-\sin^2 x\right)=$$

$$=la^2\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)=2la^2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)(\cos x+1)$$

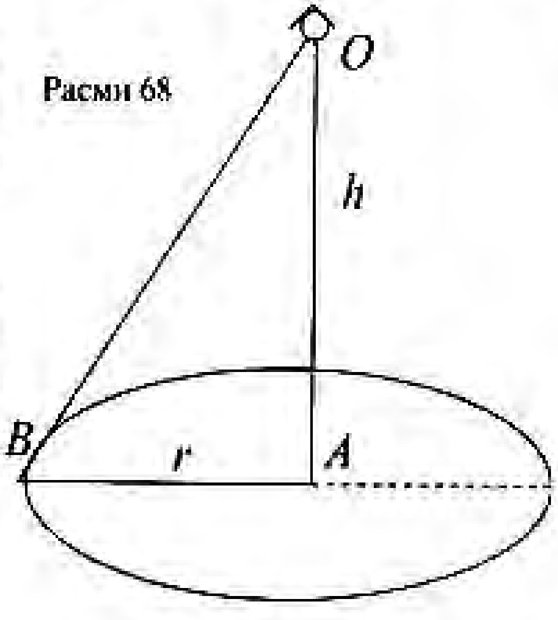
$$V'(x)=0,\ \cos x=\frac{1}{2},\ x=\frac{\pi}{3},\ \cos x=-1,\ x=\pi\notin\left(0;\frac{\pi}{3}\right],$$

яъне, дар фосилаи $\left(0;\frac{\pi}{3}\right]$ ҳосила танҳо дар нуқтаи $x=\frac{\pi}{3}$ баробари сифр аст. Ва дар ин нуқта функсия V ба қимати калонтарин молик мешавад:

$$V_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2l.$$

Қимати x-ро донисҭа α-ро меёбем: $\alpha=\frac{2}{3}\pi$.

Масъалаи 3. Саҳни зали мактаб доиравӣ буда, радиусаш ба r баробар аст. Онро бо як лампаи дар марказ овезон равшан кардан лозим меояд. Лампа дар кадом баландӣ бояд овезон бошад, то ки дар сарҳади зал равшаннокии баландтар ҳосил шавад (расми 68).



Расми 68

Ҳ а л. Аз физика маълум аст, ки равшаннокии ягон сатҳ ба квадрати масофа аз манбаъ то сатҳ мутаносиби чаппа буда, ба косинуси кунҷи афтиш мутаносиби роста аст:

$$E=\frac{I}{r^2}\cdot\cos\alpha$$

дар ин ҷо I-сели рушноӣ, r-масофа аз манбаъ то сатҳ.

Равшаннокиро дар нуқтаи B меёбем. Аз расм дида мешавад, ки:

$$OB=\sqrt{r^2+h^2},\quad \cos\alpha=\frac{AO}{OB}=\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

Онгоҳ, $E=\frac{I}{OB^2}\cdot\cos\alpha=\frac{I}{\left(r^2+h^2\right)}\cdot\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}=\frac{Ih}{\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Азбаски I доимӣ аст, пас равшаннокӣ E танҳо аз h-масофа аз лампа то маркази зал вобастагӣ дорад.

Нуқтаҳои критикиро маълум мекунем:

$$\frac{dE}{dh}=\left(\frac{Ih}{\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)'=\frac{I\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}-3Ih^2\left(r^2+h^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(r^2+h^2\right)^3}.$$

$$\frac{dE}{dh}=0;\ \sqrt{\left(r^2+h^2\right)^3}-3h^2\sqrt{r^2+h^2}=0;\ r^2-2h^2=0;\ h=\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Ҷ а в о б: Равшаннокӣ ҳамон вақт ба қимати максималӣ соҳиб мешавад, ки агар $h=\frac{r}{\sqrt{2}}$ бошад.

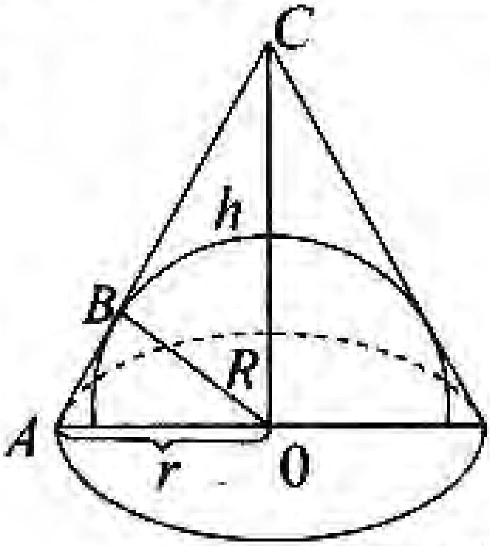
Масъалаи 4. Баландии конуси ҳаҷмаш хурдтаринеро ёбед, ки ба нимкураи радиусаш R берункашида, маркази асосии конус дар маркази кура воқеъ бошад.

Ҳ а л. Бо r ва h мувофиқан радиус ва баландии конусро ишорат мекунем (расми 69).

Ҳаҷми конус: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

Дар формула ду номаълум r ва h дохил аст. Онҳоро ба воситаи радиуси нимкура ифода мекунем. Аз расм дида мешавад, ки:

$$\Delta AOC\sim\Delta OBC$$



Расми 69

Бинобар ин, $\frac{OA}{AC}=\frac{OB}{OC}$ (аломати якуми монандии секунҷҳо):

$$\frac{r}{AC}=\frac{R}{h}$$

Аз секунҷаи росткунҷаи AOC меёбем: $AC=\sqrt{h^2+r^2}$.

Онгоҳ, $\frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}}=\frac{R}{h}$ ва $r^2=\frac{R^2h^2}{h^2-R^2}$

Дар натиҷа, $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{h^3}{h^2-R^2}$.

Нуқтаҳои критикиро меёбем:

$$V'(h)=0; \qquad \left(\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{h^3}{h^2-R^2}\right)'=0;$$

$$\frac{\pi R^2h^2\left(h^2-3R^2\right)}{3\left(h^2-R^2\right)^2}=0; \qquad h=R\sqrt{3}.$$

ҳамин тавр, агар $h=R\sqrt{3}$ бошад,

$$V_{\min}=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{3R^3}{3R^2-R^2}\cdot R\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$$

мешавад.

Ҷ а в о б. $V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$

?

1. Алгоритми ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсияро дар порча баён кунед.
2. Хусусияти алгоритми доштани ҳалли масъалаҳо ба экстремумро шарҳ диҳед. Зарурияти ин гуна масъалаҳоро дар чӣ мебинед?

Машкхо

Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро дар порчаи дода шуда ёбед ($54^{\circ} - 57^{*}$):

54°. а) $y = x^2 - 2,\ [0;2]$; б) $y = x^2 - 4x + 3,\ [1;2]$;

в) $y = \frac{1}{3}x^3 - x,\ [-1;2]$; г) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2,\ [-1;1]$.

55. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x,\ [-2;4]$; б) $y = 4x^2 + \frac{1}{x},\ (0;1]$;

в) $y = x\sqrt{3 - x},\ [1;3]$; г) $y = -x^4 + 4x^3 + 7,\ [-1;3]$.

56. а) $y = \sqrt{100 - x^2},\ [-6;8]$; б) $y = \sin 2x - x,\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

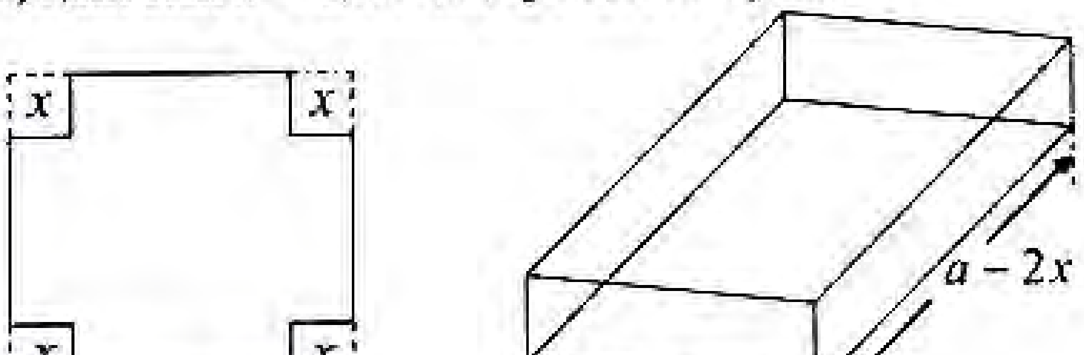
в) $y = x^3 - x + 1,\ [0;3]$; г) $y = -3x^4 + 6x^2 - 1,\ [-2;2]$.

57*. а) $y = x - |x|,\ [-1;1]$; б) $y = -x^2 + 3|x + 1| + 2,\ [-2;2]$.

58. Аз гӯшаҳои тунукаи квадратшакли тарафаш a квадратҳои якхеларо бурида кат намуданд ва қуттии кушодаи ҳаҷмаш калонтаринро ҳосил карданд (расми 70, а-б)

а) Тарафи квадрати буридашударо ёбед.

б) ҳангоми $a = 1{,}5\text{м}$ ҳаҷмро ҳисоб кунед.



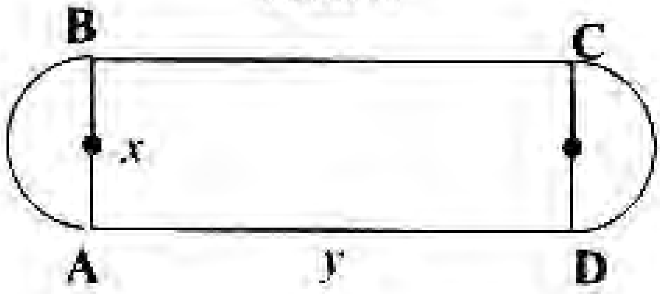
Расми 70 а) б)

59. Барои тайёр кардани қуттии кушода аз буридаи тунукаи шакли секунҷаи баробартараф доштаи тарафаш a истифода мебаранд. Барои он ки ғунҷоиши қуттӣ калонтарин шавад, аз бурида порчаи росткунҷаи масоҳаташ калонтаринро буридан лозим аст. Ин корро чӣ тавр бояд иҷро кард?

60. Дар секунҷаи баробартарафи тарафаш $a = 30см$ росткунҷаи масоҳаташ калонтаринро кашидан лозим аст. Тарафҳои росткунҷа чи гуна бояд бошанд?

61. Дар майдончаи спортии назди мактаб роҳи дарозиаш l -ро барои давидан тайёр намуданд. Қарор доданд, ки дар қисми ба роҳ маҳдуд буда, ки шакли нимдоираҳоро доранд, гул шинонанд. Барои он ки

Расми 71



Расми 71

масоҳати шакли дар расми 71 тасвир ёфта калонтарин бошад, бузургиҳои AB ва AD бояд чи гуна бошанд?
Масоҳатро барои $l = 100м$ ҳисоб кунед. – Чаро $y = 0$?

62. Траекторияи чараёни обе, ки насоси обкашӣ ба боло мепартояд, бо параболаи $y = 3x - \frac{1}{8}x^2$ ифода меёбад. Баландии калонтарин ва дурии калонтарини афтиши обро муайян кунед.

63. Дар саҳифаи китоб матни нашрӣ $S\ см^2$ -ро ишғол мекунад. Васеъгии қисми болоӣ ва поёнии саҳифа a см, аз чап ба рост бояд b см бошад.

а) Сарфи коғазро дар назар дошта, андозаҳои саҳифаро тарзе маълум кунед, ки масоҳати саҳифаи матндор калонтарин бошад.

б) Ҳисоббарориро ҳангоми $S = 150см^2$, $a = 3см$ ва $b = 2см$ ичро кунед.

64. Сохтани канали обёрикунандаи буришаш росткунҷа ба лоиҳа даровaрда шудааст. Андозаҳои буриш чи гуна бояд бошанд, то ки барои рӯйкашкунии деворҳо ва чуқурии канали дарозиаш l миқдори камтарини материал сарф шавад? Барои рӯйбасткунии 1 км канал сарфи камтарини материал чӣ қадар аст?

Масоҳати сатҳи рӯйкашкунандаро дар мавриди:

а) $x = 3$ м, $y = 1{,}5$ м ва $S_{буриш} = 4{,}5\ м^2$;

б) $x = 2{,}25$ м, $y = 2$ м ва $S_{буриш} = 4{,}5\ м^2$;

ҳисоб карда, онҳоро муқоиса кунед.

65. Буриши канал шакли росткунҷа дошта, периметри он бе қисми болой (хати расиши моеъ) ба p ва дарозии канал ба l баробар аст. Ҳамин гуна андозаҳои буришро муайян кунед, ки ҳангоми бо об пур кардани канал ҳаҷми он калонтарин бошад.

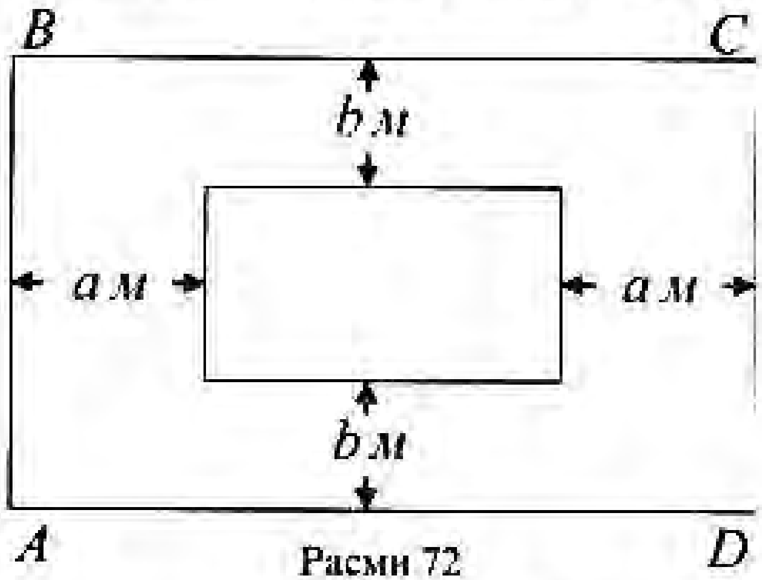
Ҳаҷми оби каналро дар ҳолати:

а) $p = 12$ м, $x = 6$ м, $y = 3$ м ва $l = 250\ м$;

б) $p = 12$ м, $x = 4$ м, $y = 4$ м ва $l = 250\ м$;

ҳисоб карда, хулоса бароред.

66. Барои сохтани иморати росткунҷашакли масоҳаташ S майдони росткунҷаеро ҷудо карданд, ки сарҳади он аз сохтумон ба масофаи a м ва b м дур аст (нигаред ба расми 72). Андозаҳои бино чигуна бояд бошанд, ки масоҳати майдони $ABCD$ хурдтарин шавад? Ҳангоми $a = 36$ м, $b = 16$ м ва $S = 400\ м^2$ масоҳати хурдтарини майдонро ҳисоб кунед.



Расми 72

67. Барои системаи марказии гармидиҳӣ зарфи васеъкунандаи болояш пӯшида сохтанд, ки он шакли параллелепипеди росткунҷаро дорад.

Агар ҳаҷми зарф V ва баландиаш h бошад, дар кадом андозаҳои параллелепипед барои сохтани он миқдори камтарини материал сарф мешавад?

Дар мавриди $V = 75$ *л*, $h = 900$ *мм*, $S_{\min}$-ро хисоб кунед.

68. Тайёр кардани зарфи слиндрии аз боло кушодаи ҳаҷмаш a л зарур аст. Андозаҳои он чи гуна бояд бошанд, то ки барои сохтани зарф материали камтарин сарф шавад?

69. Андозаҳои зарфи слиндрии аз боло кушода чи гуна бояд бошанд, то ки ҳангоми маълум будани масоҳати сатҳи он S зарфи ҳаҷмаш калонтарин сохта шавад.

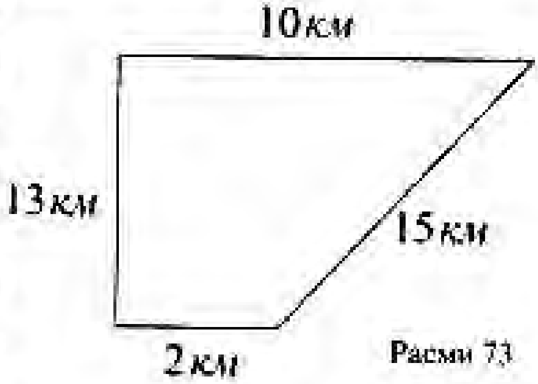
70. Аз 32 гӯгирд росткунҷаи масоҳаташ калонтарин созед.

71. (Кеплер). Дар доираи радиусаш R росткунҷаи масоҳаташ калонтарин созед.

Агар $R = 6$ *см* бошад, масоҳати калонтарин чӣ қадар аст?

72. (Евклид). Аз ҳамаи росткунҷаҳои периметрашон p кадомаш масоҳати калонтарин дорад?

73. (Л. Н. Толстой). Пах-қаҳрамони ҳикояи «Оё ба одам замини зиёд лозим аст?» бо бошқирдҳо ба чунин қарордод омад: ба маблағи 1000 рубл ба ӯ ҳамон қадар замине медиҳанд, ки чӣ қадаре вай дар тамоми рӯз аз баромад то фурӯравии Офтоб давр зада



Расми 73

баромада тавонад. Ӯ дар ин вақт тарҳи трапетсияеро тай намуд, ки дар расми 73 оварда шудааст. Периметри он 40 км, масоҳаташ –78 км². Оё Пах метавонист, ки 40 км тай карда, тарҳи чоркунҷаи масоҳаташ калонтаринро давр зада барояд?

74. Исбот кунед, ки аз ҳамаи призмаҳои асосашон чоркунҷа ва масоҳати сатҳашон S-куб ҳаҷми калонтарин дорад.

75. (Кеплер). Дар кураи дода шуда слиндри ҳаҷмаш калонтаринро созед. Нисбати диаметри асос ба баландии он чӣ қадар аст?

76. Ду ҷисм дар як вақт аз рӯи тарафҳои кунҷи рост ба ҳаракат даромаданд. Яке **аз қулла** бо суръати 10 км/соат ва дигаре **ба**

кулла бо суръати 30 км/соат ҳаракат мекард. Агар дар ибтидои ҳаракат масофаи байни онҳо 120 км бошад, баъди чанд вақт масофаи байнашон хурдтарин мешавад?

77. Аз пункти A ва B дар як вақт аспсавор бо суръати v_1 км/соат ва велосипедрон бо суръати v_2 км/соат аз рӯи тарафҳои кунҷи рост ба ҳаракат даромаданд. Агар дар ибтидои ҳаракат яке дар масофаи a км ва дигаре дар масофи b км аз қуллаи кунҷ 0 воқеъ бошад, баъди чанд вақт масофаи байни онҳо хурдтарин мешавад?

78. Деги бӯғӣ аз слиндре, ки бо ду нимсфера ба анҷом расидааст, иборат мебошад. Дар кадом қимати радиус барои тайёр кардани деги ҳаҷмаш v л об материали камтарин сарф мешавад?

79. Ҳамингуна ададеро ёбед, ки суммаи он ба квадрати худи адад қимати хурдтарин дошта бошад.

80. Дар зарфи слиндршакли пӯшидаи ҳаҷмаш V нисбати диаметри асос ба баландии он чӣ гуна бояд бошад, то ки барои сохтани зарф материали камтарин сарф шавад?

§ 9. Истифодаи ҳосила дар исботи айниятҳо ва нобаробариҳо

Дар баъзе ҳолатҳо истифодаи ҳосила имконият медиҳад, ки айниятҳо ва табдидиҳиҳои алгебравӣ ба осонӣ иҷро карда шавад.

Барои исботи айнияти $f(x) \equiv \varphi(x)$ дар порчаи $[a;b]$ иҷро шудани шартҳои зерин кифоя аст:

1) Функсияҳои f, φ дар порчаи $[a;b]$ бефосилаанд.

2) Барои нуқтаи ихтиёрии $x \in [a;b]$, $f'(x) = \varphi'(x)$

3) Ақалан дар як нуқтаи $x_0 \in [a;b]$ шарти $f(x_0) = \varphi(x_0)$ иҷрошаванда бошад.

Инро дар мисолҳо нишон медиҳем.

1. Исбот мекунем, ки баробарии

$$(x+m+n)^2+(m+n-x)^2+(x-m+n)^2+(x+m-n)^2=4(x^2+m^2+n^2)$$
айният аст; дар ин ҷо m, n -доимиҳо.

Ҳ а л. Тарафи чап ва рости баробариро ҳамчун функсияи аргументи x дар $D(f)$ дида баромада, аз рӯи формулаи дараҷа ва функсияи мураккаб ҳосила мегирем:

$$f'(x)=\left((x+m+n)^2\right)'+\left((m+n-x)^2\right)'+\left((x-m+n)^2\right)'+$$

$$+\left((x+m-n)^2\right)'=2(x+m+n)(x+m+n)'+2(m+n-x)(m+n-x)'+$$

$$+2(x-m+n)(x-m+n)'+2(x+m-n)(x+m-n)'=2(x+m+n)\cdot 1+$$

$$+2(m+n-x)\cdot(-1)+2(x-m+n)\cdot 1+2(x+m-n)\cdot 1=8x;$$

$$\varphi'(x)=\left(4(x^2+m^2+n^2)\right)'=8x.$$

Азбаски $f'(x)=\varphi'(x)=8x$, пас баробарӣ айният аст. Агар ба назар гирем, ки ифодаҳои дар кавс буда, квадрати суммаи се ададро ифода мекунад, онгоҳ ин мисолро бе истифодаи ҳосила, бо тарзи муқаррарӣ низ ҳал кардан мумкин буд.

Вале дар мисоли зер, ки табдилдиҳии зиёди тригонометриро талаб мекунад, истифодаи ҳосила ҳалли онро хеле осон мегардонад.

2. Дурустии айниятро нишон диҳед:

$$2\cos^2 x-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}=\cos^4 x+\frac{5}{8}$$

Ҳ а л. Ишорат мекунем:

$$f(x)=2\cos^2 x-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}, \quad D(f)=R;$$

$$f_1(x)=\cos^4 x+\frac{5}{8}, \quad D(f_1)=R.$$

Ҳосилаҳои функсияҳоро меёбем:

$$f'(x)=\left(2\cos^2 x-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)'=-4\cos x\sin x+\sin 2x-\frac{\sin 4x}{2}=$$

$$=-2\sin 2x+\sin 2x-\sin 2x\cos 2x=-\sin 2x(1+\cos 2x)=$$

$$=-2\sin\ 2x\cos^2 x;$$

$$f_1'(x)=\left(\cos^4 x+\frac{5}{8}\right)'=-4\cos^3 x\sin x=$$

$$=-4\cos^2 x\cdot\cos x\sin x=-2\sin 2x\cos^2 x.$$

Ҳосилаҳои ҳар ду тараф баробар шудаанд, пас баробарӣ айният будааст.

Барои исботи нобаробариҳо бо ёрии ҳосила маълумотҳое, ки дар § 4 ифода ёфтаанд, кифоя аст.

***Ба ёд меорем*, ки аз шарти зарурии экстремум далели зерин бармеояд:**

Агар функсияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ муайян ва бефосила бошад, онгоҳ вай дар ин фосила қимати хурдтарин (m) ва калонтарин (M)-ро доро буда шарти

$$m\le f(x)\le M \qquad \textbf{(1)}$$

ҷой дорад.

Аз ин далел **алгоритми** зерини ҳалли нобаробарӣ дар порчаи $[a;b]$ бармеояд.

1) Ҳосилаи f'-ро меёбем.

2) Нуқтаҳои критикиро дар порчаи дода шуда маълум мекунем.

3) Аломати ҳосиларо дар ин нуқтаҳо меёбем. Фарз мекунем, ки функсия дар нуқтаи $x_0\in[a;b]$-минимум ва дар нуқтаи x_1 -максимум дорад. Онҳоро ҳисоб мекунем.

4) Қиматҳои функсияро дар охирҳои порча меёбем. $f(a)=m$, $f(b)=M$.

5) Барои ҳамаи $x \in [a;b]$ хулоса мебарорем.

3. Нишон диҳед, ки барои ҳамаи $x \in [-2;4]$ нобаробарии $-20 \le x^3 - 3x^2 \le 16$ дуруст аст.

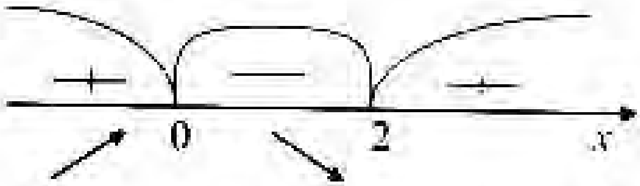
Ҳ а л.

1) Мегузорем: $f(x) = x^3 - 3x^2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$;

2) Нуқтаҳои критикӣ: $f'(x) = 0$; $3x(x-2) = 0$; $x = 0$, $x = 2$.

3) Аломати ҳосиларо дар ин фосилаҳо маълум мекунем (расми 74):

$$f_{\max}(0) = 0 \quad \text{ва} \quad f_{\min}(2) = -4$$



Расми 74

4) Қиматҳои функсияро дар охирҳои порча меёбем:

$f(-2) = -8 - 12 = -20$; $\quad f(4) = 64 - 48 = 16$.

5) Мувофиқи тасдиқи (1) нобаробарии $-20 \le x^3 - 3x^2 \le 16$ дар фосилаи $[-2;4]$ дуруст аст.

?

1. Ҳангоми исботи айниятҳо дар ягон порча иҷрои кадом шартҳо кифояанд?
2. Алгоритми исботи нобаробариҳоро дар ягон порча баён кунед.
3. Моҳияти истифодаи ҳосила ҳангоми исботи айниятҳо ва нобаробариҳо дар чӣ ифода меёбад?

Машқҳо

Айниятҳоро бо ёрии ҳосила исбот кунед ($81^\circ - 83^*$):

81°. а) $\dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \dfrac{1 + tgx}{1 - tgx}$; $\quad$ б) $\sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}\cos 4x$;

в) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 x$; $\quad$ г) $(1-x)(1 + x + x^2 + x^3) = 1 - x^4$.

82. а) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2-1$;

б) $\sin^2 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1$;

в) $\sin^2 x+\cos(60^\circ+x)\cdot\cos(60^\circ-x)=\dfrac{1}{4}$;

г) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\dfrac{3}{2}\sin^2 2x$;

83*. а) $16\sin^4 x-(\sin^2 x-3\cos^2 x)^2=24\sin^2 x-9$;

б) $4(\cos 3x\cdot\sin^3 x+\sin 3x\cdot\cos^3 x)=3\sin 4x$;

в) $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=-1$.

84. Дурустии нобаробарихоро барои фосилаҳои дода шуда нишон диҳед:

а) $8\sqrt{x+1}>8-2x-x^2$, $[0;8]$;

б) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x\in R$;

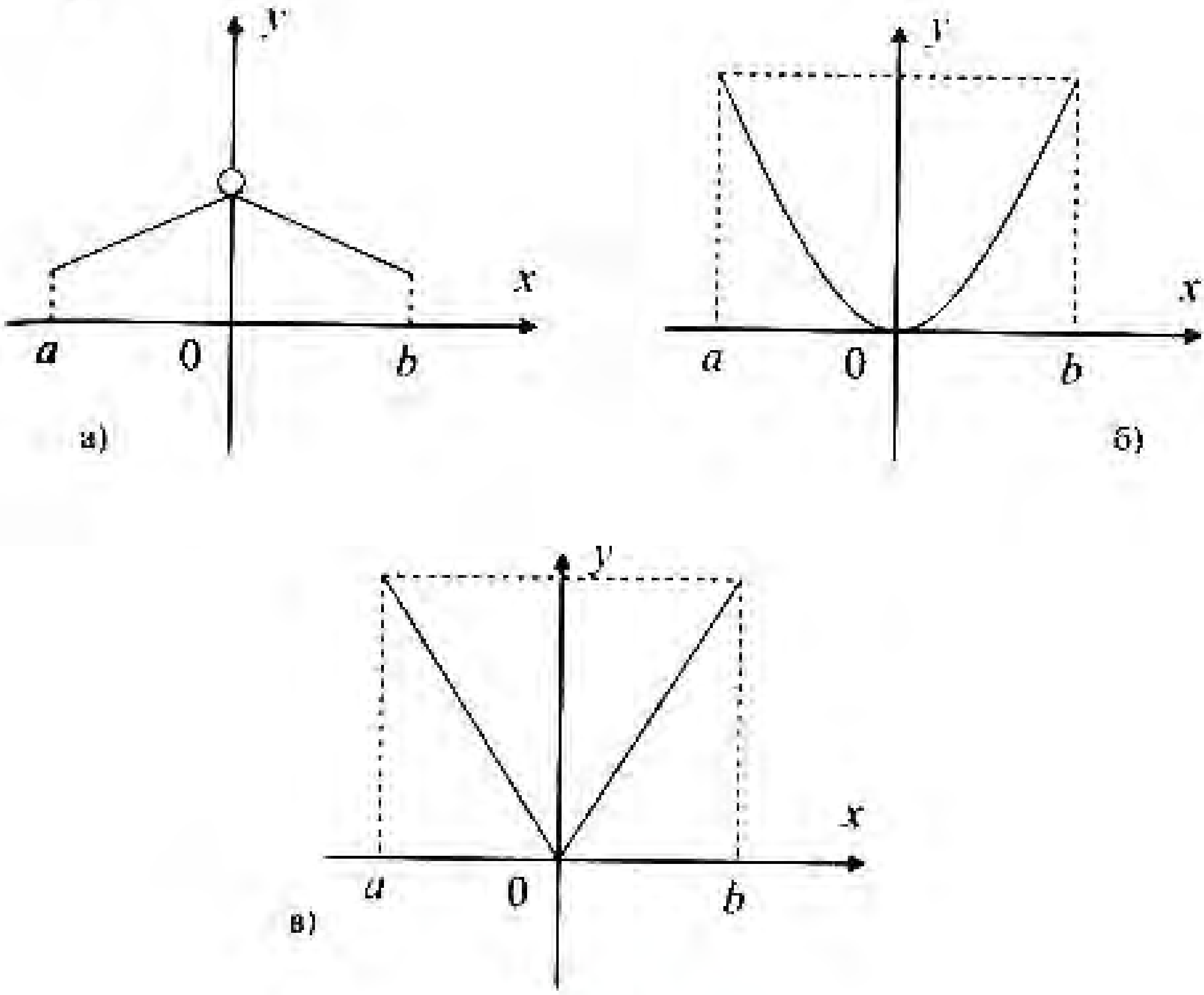
в) $0\le\sin x+tgx\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$, $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Худро санҷед!

Оё дуруст аст, ки:

1. Ҳаргуна функсия қимати калонтарин дорад.
2. Ҳаргуне функсияи аз боло маҳдуд қимати калонтарин дорад.
3. Агар ягон адад ҳамаи қиматҳои функсияро маҳдуд карда, бо яке аз онҳо мувофиқ ояд, онгоҳ ин адад-қимати калонтарини функсия аст.
4. Ба расми 75 бо диққат назар кунед: ба қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳо чӣ ҳолат рӯй медиҳад?

5.



Расми 75

Кори амалии № 5

Мақсади кор: Истифоди функсияҳои тригонометрӣ барои бо тарзи параметрӣ дода шудани хати кач.

Омӯзиши траекторияи ҳаракати тир

Муодилаҳои ҳаракати тири тӯп бо тарзи параметрӣ дода шуда аст:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha \qquad (1)$$

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

дар ин ҷо v_0 -суръати ибтидоии тир, α-кунҷи моилии тири парвозкунанда ба ҳамворӣ, $g = 9{,}8\,м/с^2$

1. Агар $v_0 = 400\, м/с$ ва $\alpha = 60^\circ$ бошад вобаста ба t дар фосилаи $[0;40]$ ҷадвали дурӣ ва баландии парвози тирро тартиб диҳед (ҷадвали 11). Қимати t -ро баъди ҳар як 5 сония $(t = 0,5,10,15,...,30,35,40)$ гирифта ҳисоббарориро то бутунҳо яклухт кунед.

Ҷадвали 10

t	1	5	10	15	20	25	30	35	40
$x(t)$	0	1000м	...						...
$y(t)$	0	1600м	...						...

2. Масштаби мувофиқ интихоб намуда, нуқтаҳоро аз рӯи координатаҳои ёфташуда дар системаи координати декартӣ қайд кунед.

3. Нуқтаҳои сохташударо аз рӯи хати каҷ пайваст кунед. Ин хати каҷ – траекторияи ҳаракати тир аст.

4. Аз нақша координатаҳои нуқтаҳоро дар лаҳзаи $t = 1;4;9;12;16,5;22,5;37;39,5$ маълум кунед.

5. Аз муодилаҳои (1) ва (2) t-ро хориҷ карда, нишон диҳед, ки траекторияи ҳаракат

$$y = ax^2 + bx \qquad (3)$$

парабола ҳаст (дар ин ҷо, $a = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, $\quad b = tg\alpha$).

6. Дурии парвози тирро муайян кунед.

7. Аз муодилаи (1) истифода бурда вақти парвози тирро маълум кунед.

8. Координатаҳои суръатро ёбед.

9. Суръати ҳаракати тирро дар лаҳзаи $t = 0,1,2,3,...,10$ ҳисоб кунед.

Супориши мустақилона доир ба боби V

Варианти 1°

1. Функсияи $y = x^3 - x + 1$ -ро тадқиқ намуда, графикашро созед.

2. Нуқта аз рӯи қонуни $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2t - 1$ ростхатта ҳаракат мекунад (x -бо метрҳо, t -бо сонияҳо). Шитоби нуқтаро дар лаҳзаи $t = 3c$ ёбед.

3. Қимати тақрибии $f(x) = 4x^3 - 10x^2 - 5x + 12$ ҳангоми $x = 1{,}995$ ёфта шавад.

4. Қимати хурдтарин ва калонтарини функсияи $y = -3x^2 + x - 1$ -ро дар порчаи $[0;3]$ ёбед.

Варианти 2

1. Адади 9-ро ба ду зарбшавандаҳои мусбат тавре ҷудо намоед, ки суммаи хурдтаринро дошта бошад.

2. Нуқта аз рӯи қонуни $S(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t$ ҳаракат мекунад. Шитоби онро дар лаҳзаи $t = 2c$ ёбед.

3. Функсияи $f(x) = -3x^2 + x$ -ро тадқиқ карда, графики онро созед. Дар кадом қимати a муодилаи $f(x) = -a$ ду реша дорад?

4. Қимати тақрибии $\dfrac{1}{0{,}999^{20}}$ -ро ҳисоб кунед.

Варианти 3*

1. Функсияи $y = -x^2 + 4x$ -ро доир ба экстремум тадқиқ кунед.

2. Функсияи $y = x^4 - 8x^2 - 9$ дода шудааст:

а) қимати калонтарин ва хурдтарини онро дар фосилаи $[-1;1]$ ёбед.

б) Қимати тақрибии онро ҳангоми $x = 0{,}15$ ҳисоб кунед.

в) Функсияро тадқиқ карда, графики онро созед.

3. Қонуни ҳаракати ростхаттаи ҷисм бо муодилаи $S=-t^3+3t^2+9t+3$ дода шудааст. Суръати максималии ҳаракати ҷисм (S -бо метрҳо, t -бо сонияҳо)-ро ёбед.

4. Бо истифодаи ҳосила дурустии айниятро нишон диҳед: $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

МАШҚҲОИ ИЛОВА ОИД БА БОБИ V

Ба параграфҳои 1-3

85. Фосилаҳои афзуншавӣ (камшавӣ)-и функсияҳои зеринро ёбед:

1) $y=\dfrac{x}{x+1}$; 2) $y=2x^2+3x+4$;

3) $y=3x^2+2x+1$; 4) $y=3x^2-2x+1$.

86. Экстремумҳои функсияҳои зеринро ёфта, графики онҳоро созед.

1) $y=3x^2-x^3$; 2) $y=x^4-2x^3+3$;

3) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$; 4) $y=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$.

Ба параграфи 4

87. Функсияро тадқиқ намуда, графикашро созед:

а) $y=x^2-5x+6$; б) $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x-2$;

в) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2+1$; г) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Ба параграфҳои 5-7

88. Дифференсиали функсияҳои зеринро ёбед:

а) $y=3x^4-2x^3+4x-1$; б) $y=\sin 4x+2x$;

в) $y=x^2(x-2)$; г) $y=\dfrac{\sin x+1}{\cos x}$.

89. Қимати тақрибии ифодаҳои зеринро ёбед:

а) $\sin 31^\circ$; б) $\sqrt{209}$;

в) $0{,}99^3$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{9{,}09}}$.

90. Суръат ва шитоби ҷисмеро, ки ростхатта ҳаракат мекунад ёбед, агар ҳаракати нуқта бо муодилаҳои зерин дода шуда бошанд:

а) $x = t^3 + 5t^2 + 3;\quad t = 2c.$

б) $x = \sqrt{t+4},\quad t = 5c.$

в) $x = t^2 - 3t + 1,\quad t = 3c.$

г) $x = \sqrt[3]{2t+6},\quad t = 1c.$

Ба параграфҳои 8-9

91. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияҳои зеринро ёбед:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9,$ дар порчаи $[-2; 2]$;

2) $y = x^3 + 6x^2 + 9x,$ дар порчаи $[-4; 0]$;

3) $y = x^4 - 2x^2 + 3,$ дар порчаи $[-4; 3]$;

4) $y = x^4 - 8x^2 + 5,$ дар порчаи $[-3; 2]$

ҶАВОБҲО

Боби I

8*. в) $a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}$; г) $\left|x^{\pi} - y^{\pi}\right|$. **10°**. в) 19; г) 1. **11°**. а) 25, г) 8. **12.** г) 6; **13.** б) 8. **14.** а) 3; в) 3. **15.** г) 1. **16.** а) 4; в) 8. **17.** в) 5. **19.** а) – 2; г) 0. **20***. б) $\frac{5}{4}$; г) 84. **21***. г) 5. 23. в) (4; 1), (1; 4). **24.** б) (0; 0); в) (25; 49). **25.** а) (81; 16). **26.** в) (25; 9). **27***. в) (1; 9), (9; 1). **28.** а) (9; 16), (16; 9). **35.** а) (16; 4), $\left(36; 1\frac{7}{9}\right)$. **36***. в) (9; 4).

Боби II

2. $-\frac{84}{85}$ ва $-\frac{36}{85}$. **3.** $-1\frac{7}{19}$ ва $\frac{14}{29}$. **5.** а) 0; в) 0,5. **6.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **7°**. б) $-\cos(\alpha - \beta)$. **8.** а) $\sin 20°$; в) $\cos(\alpha - \beta)$. **9.** а) $\cos\beta$; б) $ctg\alpha$. **10***. а) 0,5; б) 0. **11°**. б) $\sqrt{3}$. **12.** а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.** а) 1; б) $\sqrt{3}$. **14***. $\frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$. **15°**. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **16.** а) $\frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$. **17.** а) $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

20. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{17}{81}$; г) $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$; $tg 2\alpha = \frac{120}{169}$.

21. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-tg 75°$; г) 0,36 ва 0,28. **23°**. а) $2\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; г) $\cos^2\alpha$; г) $\sin 40°$; е) 1. **24.** а) 1; б) $ctg^2\alpha$; в) 1; г) $\sin 2\alpha$. **25.** а) $2\cdot(1 - \cos\alpha)$; б) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$. **29.** а) $0{,}5\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; в) $\sqrt{2} - 1$. **30.** г) $\sqrt{0{,}1}$; $\sqrt{0{,}9}$ ва 0,(3). **31.** а) $-\frac{4}{\sqrt{17}}$; $-\frac{1}{17}$ ва 4.

34°. 1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$. **36*.** 1) 9; 2) $\frac{1}{4}$. **39.** а) $\sqrt{2}\cos 20^\circ$; б) $\cos 10^\circ$;

в) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 5^\circ$; г) $\sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. **40.** а) $-\sqrt{3}tg8$; б) $\sqrt{2}\cos\alpha$;

в) $-4\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha$; г) $4\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 5\alpha$. **46°.** б) 0,25;

в) $\frac{1}{2}\left(\cos 26^\circ - \frac{1}{2}\right)$. **47.** а) 1; б) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta$;

в) $\frac{1}{2}(\sin\beta + \sin(\alpha + 3\beta))$. **48.** а) $\sin 3\alpha$; б) $-\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$. **49*.** а) $\frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}$;

б) $\frac{1}{16}$. **50°.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$. **51.** г) 0. **52*.** в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

53°. а) $\frac{1}{2}$; г) 1. **54.** б) $\cos 2\alpha$; в) 1. **55*.** в) $\cos 4\alpha$; г) 1. **59°.** б) $-\frac{1}{2}$.

60. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; **66*.** $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $tg\alpha = -\frac{12}{5}$.

67°. а)-б) ҳа. **68.** а) – б) ҳа. **76°.** а) π; в) $\frac{\pi}{3}$. **77.** а) 4π; в) $\frac{2}{5}\pi$.

78. а) 2π; б) π; в) 2π. **88.** а) ҷуфт; б) тоқ; в) тоқ; г) тоқ.
89. а) тоқ; г) ҷуфт. **95°.** а) $[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in Z$;

б) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; в) $x \neq \pi k, k \in Z$. **96.** а) $x \neq 2\pi k, k \in Z$;

б) $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$; г) тири ададӣ, ғайр аз $x = \pi k, k \in Z$.

97. а) $\left[\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in Z$; г) $x \neq 2\pi k, k \in Z$. **98°.** а) $[0;2]$; б) $[0;2]$;

в) $[1;5]$; г) $(-\infty; +\infty)$. **99.** а) $[1;7]$; б) $[0;1]$; в) $[1;5]$; г) $[0; +\infty)$.

100. а) $[-2;2]$; **103°.** б) афзуншавӣ-$[4\pi k-2\pi;4\pi k]$ ва камшавӣ - $[4\pi k;2\pi-4\pi k]$, $k\in Z$.

104. а) афзуншавӣ - $\left[2\pi-k-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; камшавӣ - $\left[2\pi k+\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.

105. а) афзуншавӣ - $\left[\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right]$ ва камшавӣ - $\left[\pi k-\frac{\pi}{2};\pi k\right]$;

б) афзуншавӣ - $[6\pi k-3\pi-6;-6+6\pi k]$ ва камшавӣ - $[6\pi k-6;3\pi-6+6\pi k]$, $k\in Z$

в) афзуншавӣ - $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};-\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k\in Z$; г) камшавӣ - $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **107.** в) $ctg2$, $\cos1$, $\sin1$, $tg1$.

108. в) $ctg3$, $tg2$, $\cos2$, $\sin2$. **112.** а) $x_{\max}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\max}=5$; $x_{\min}=-\frac{5}{2}\pi+2\pi k$, $k\in Z$; $y_{\min}=-1$;

б) $x_{\max}=2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\max}=1$; $x_{\min}=\pi+2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\min}=-5$;

в) $x_{\max}=\frac{2\pi}{7}+2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\max}=3$; $x_{\min}=\frac{9\pi}{7}+2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\min}=-3$; г) $x_{\max}=\frac{5\pi}{28}+\pi k$, $k\in Z$,

$y_{\max}=1$; $x_{\min}=-\frac{9\pi}{7}+2\pi k$, $k\in Z$, $y_{\min}=-1$.

Боби III

1°. б) $\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) вуҷуд надорад; е) $-\frac{\pi}{4}$; ё) $-\frac{\pi}{3}$. **2.** б) $\frac{5\pi}{9}$;

в) π; г) -30°. **3.** а) 75°. **4°.** а) 30°; б) $\frac{\pi}{4}$. **6.** а) $\frac{8\sqrt{3}}{49}$. **8°.** а) $\frac{\pi}{2}$;

б) 0; г) π; д) вуҷуд надорад. **9.** $\frac{3\pi}{4}$. **10.** а) $\frac{19\pi}{12}$; б) π.

11°. а) $<$; б) $<$. 12. а) $>$; б) $=$. **13.** а) $=$. **15°.** а) 0; б) $\frac{\pi}{4}$;

в) $-\frac{\pi}{4}$; г) 0; д) $\frac{\pi}{4}$. **17.** а) 0; б) $-\frac{\pi}{2}$. **19°.** а) 0; б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

20. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 21. а) $\frac{8}{7}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{\sqrt{14}}{5}-\frac{3\sqrt{2}}{20}$. **23.** ё) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$;

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. **24.** а) $x=\frac{5\pi}{24}-\frac{5}{4}\pi k$ ва $x=-\frac{5\pi}{12}-\frac{5\pi k}{2},\ k\in Z$.

25. а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ва $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **27.** а)

$x=\pi k+\frac{\pi}{2},\ k\in Z$; б) $x=\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\in Z$; г) $x=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

28. а) $\frac{\pi n}{5},\ n\in Z$; б) $x=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$. **29*.** а) $\frac{\pi k}{12},\ k\in Z$;

б) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **30°.** а) $x=\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\in Z$;

б) $x=\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\in Z$. **31.** а) $x=2\pi k,\ k\in Z$; б) $x=\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z$.

32. а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=2\pi k,\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5},\ k\in Z$

б) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ x=\frac{\pi k}{4},\quad k\in Z$.

33*. а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\frac{2\pi k}{5},\ k\in Z$;

б) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k;\ x=(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

34°. а) $x=2\pi k,\ x=2arctg\frac{3}{4}+\ +2\pi k,\quad k\in Z$

35. а) $x=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ x=2k\pi-2arctg\frac{1}{7},\ k\in Z$.

36. а) $x=-\frac{\pi}{6}+(-1)^{n}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **37°.** а) 1 ва $\sqrt{2}$; в) 5 ва 1. **38.** а) 5 ва – 3; б) 2,25 ва 0,25; в) 10 ва 1. **39.** а) 1 ва – 1; б) 3 ва – 1; в) надорад. **40°.** а) $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$;

б) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. **41.** г) $x=-3\pi+4\pi k,\ k\in Z$ ва $x=\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k,\ k\in Z$. **42.** а) $\pm30^\circ+180^\circ k,\ k\in Z$;

б) $x=\pm\frac{\pi}{4+\pi k},\ k\in Z$. **43°.** б) $x=\pi k,\ k\in Z$;

г) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. **44*.** а) $x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

Нишондод. Суммаи дарачаҳои чорро то квадрати суммаи ду ифода пурра кунед, баъд формулаи $\sin 2\alpha$ -ро истифода баред;

б) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **45.** а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

46*. а) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; б) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

47°. а) $x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; б) $x=180^\circ k$; в) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$;

д) $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z$. **48.** б) $x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$;

г) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad x=arctg2+\pi k,\quad k\in Z$. **50*.** а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$,

$x=arctg\frac{8}{15}+\pi k,\ k\in Z$; б) $x=\pi k,\ x=-arctg\frac{2}{3}+\pi k,\ k\in Z$.

52°. а) $x_1=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k+2\pi),\quad y_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(k-2\pi)$ ва

$x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(k+2\pi),\ y_2=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k-2\pi),\ k,n\in Z$;

г) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k+n),\ y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k-n),\ k,n\in Z$.

53. б) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k+n),\ y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k-n),\ k,n\in Z$.

в) $x=y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **54.** а) $x=\frac{\pi}{4}+\pi(k+n)$,

$y=\frac{\pi}{4}+\pi(k+n),\ k,n\in Z$; в) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k+n)$,

$y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k-n),\ k,n\in Z$. **55°.** а) $x=\frac{\pi}{4}-\pi k,\ y=\pi k,\ k\in Z$;

б) $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ y_1=-2\pi k,\ x_2=2\pi k,\ y_2=\frac{\pi}{2}-2\pi k,\ k\in Z$.

56. а) $x_1=\pi k,\ y_1=\frac{\pi}{4}-\pi k$, ва $x_2=\frac{\pi}{4}-\pi n,\ y_2=\pi n,\ n\in Z$.

57*. а) $x_1 = 45^\circ + 180^\circ k$, $y_1 = 30^\circ - 180^\circ k$; $x_2 = 30^\circ + 180^\circ k$; $y_2 = 45^\circ - 180^\circ k$, $k \in Z$. **58°.** б) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

в) $2\pi k - \frac{5\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$;

г) $2\pi k - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **59.** б) $\pi k - \frac{3\pi}{8} < x < -\frac{\pi}{8} + \pi k$;

г) $\pi k \le x < \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

60. а) $\frac{\pi}{2}(2k-1) + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\arcsin 0{,}2 < x < \pi k + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\arcsin 0{,}2$;

б) $\frac{4}{3}\pi k + \frac{2}{3}\arcsin\frac{1}{3} < x < -\frac{2}{3}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi(2k+1)$;

в) $2\pi k - \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$

Боби IV

3*. б) $\frac{x^2\Delta x + x(\Delta x)^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 - \Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$. **4°.** а) 3; 2 ва 0,4.

5. а) 0,5. **7°.** а) 0,5; б) $4x + \Delta x$. **10°.** б) $\Delta y = 0{,}08$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}2$.

33°. а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) – 5%; г) 3. **34.** а) $6x$; б) $8x+1$; в) x; г) $6x+2$.

35. а) $-\frac{5}{x^2}$; б) $-\frac{2}{3x^2}$; в) $-\frac{2}{x^3}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **36.** а) 6; б) 9. **37.** а) b;

б) – 3; в) – 5; г) 1; д) – 2; е) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **38*.** а) $y = 2x - 1$; б) $y = 2x - 4$;

б) $y = x + 2\frac{3}{4}$; г) $y = -2x + 3$. **44°.** а) -3; б) -1; в) 1; г) 3. **45.** а) 6;

б) 2. **46*.** а) 1; в) 3. **47.** а) 1; в) 1; е) $\frac{1}{2}$. **48*.** а) 3; в) $-\frac{1}{2}$.

49°. 1) $4x$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - 4$; 14) $x(9x+4)$. **50.** 1) $2x^5 + 4x^7$;

18) $3x^2 + 10x - 1$. **51*.** 1) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3} - 15x^2$; 18) $\frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

56. а) $S = 5 + 3t - t^2$; б) $S = \frac{2t + 0{,}75t^2}{5}$. **57*.** б) $S = 1 - t$;

в) $y = \sqrt{1 - x^2}$. **65.** а) -2; 0; 2. **74.** г) $\frac{7}{2\sqrt{7x-3}}$.

75. б) $4(x^2 + 4x - 1)\cdot(x+2)$. **76*.** в) $\frac{2}{\sqrt{4x+5}}$. **78°.** а) 3; г) 3.

79. а) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{4}{3}$. **80*.** г) a. **84*.** а) $-\frac{a}{\sin^2(ax+k)}$.

85. а) $2\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$. **90.** а) 0; 2; г) 0; $\frac{2}{3}$. **99.** $0{,}2\,м/сония^2$.

Боби V

1°. б) $[2;\infty)$-меафзояд; $(-\infty;2)$-кам мешавад;

в) $(-\infty;-3)$-кам мешавад; $(-3;+\infty)$-меафзояд;

е) $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$-меафзояд; $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$-кам мешавад;

ё) $(-\infty;0)$-кам мешавад; $(0;+\infty)$-меафзояд.

2. в) $(-1;+\infty)$-меафзояд; $(-\infty;-1)$-кам мешавад;

г) $(-\infty;0{,}25)$-кам мешавад; $(0{,}25;+\infty)$-меафзояд;

д) $(-\infty;+\infty)$-меафзояд; е) $(-\infty;0)$ ва $(2;+\infty)$-меафзояд; $(0;2)$-кам мешавад; ё) $(-\infty;0)$ -кам мешавад; $(0;+\infty)$-меафзояд.

3. в) $(-\infty;0)$ ва $[3{,}2;5)$-кам мешавад; $(0;3{,}2]$-меафзояд.

4*. а) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ ва $(1;+\infty)$-меафзояд; $\left(\frac{1}{3};1\right)$-кам мешавад; в) $[0;8]$ ва $[12;+\infty)$-меафзояд; $(-\infty;0)$ ва $[8;12]$-кам мешавад.

5°. а) $x=-1$ нуқтаи $\min$; б) $x=4$ нуқтаи $\max$; г) Экстремум надорад; д) $x=2{,}5$ нуқтаи $\max$. **6.** а) $x=0$ нуқтаи $\max$, $x=3$ нуқтаи $\min$; б) $x=1$ нуқтаи $\max$; $x=2$ нуқтаи $\min$; в) $x=2$ нуқтаи $\max$; $x=-\frac{3}{2}$ нуқтаи $\min$. **7.** а) $x=3$ нуқтаи $\max$; б) $x=\frac{4}{3}$ нуқтаи $\max$; в) $(1;2)$ нуқтаи $\max$, $(-1;-2)$-нуқтаи $\min$; д) экстремум надорад. **9.** а)-б) x_0 нуқтаи max, $f(x_0)$-max. функсия; в)-г) x_0-нуқтаи $\min$, $f(x_0)$-$\min$. функсия; д)-е) функсия экстремум надорад (қатъшавӣ); ё)-ж) функсия экстремум надорад (қатъшавӣ). **10*.** Нишондод: қимати хурдтарини функсия $\frac{4ac-b^2}{4a}=-12$, ҳангоми $x=-\frac{b}{2a}=6$ ҳосил мешавад. Коэффитсиенти ***a, b, c***-ро ёфта функсияро тадқиқ кунед. $x=6$-нуқтаи $\min$. **11°.** а) $x_{\max}=\frac{a}{2}$, $y_{\max}=\frac{a^2}{4}$; б) $x_{\max}=\frac{a}{4}$, $y_{\max}=\frac{a^2}{8}$. **12.** а) $x_{\max}=\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y_{\max}=\frac{a^4}{2}$.

13. а) $x_{\min}=a+1$, $y_{\min}=a+2$; б) $x_{\max}=\frac{3a}{4}$, $y_{\max}=\frac{27a^4}{256}$.

14. а) $x_{min}=1$, $y_{min}=-4$; б) $x_{max}=-1$, $y_{max}=\frac{1}{3}$ ва $x_{min}=1$, $y_{min}=-2\frac{1}{3}$. **21°.** а) $y-4x+2=0$. **22.** а) $y-4x+9=0$; б) $y+3x=0$. **23*.** б) $y-3x=\frac{\pi}{2}$. **25.** б) 1,9938. **30*.** а) 0,0140.

33. 1,8м/с. **34.** а) 13. **36.** б) 21м/с ва $-\frac{1}{3}$ м/с; 13м/с ва $7\frac{2}{3}$ м/с.

39. $7{,}8\,{}^{км}\!/_{с}$. **40°.** $A\omega$; 0. **42.** Нишондод: аз $m=kx^2$ коэффитсиенти k-ро маълум намуда, дифференсиали онро ёбед. $20\,{}^{г}\!/_{см}$. **43.** $t=3c$. **44.** $\pm 6\ м/с$. **45°.** а) $x'(t)=3$, $y'(t)=-4$, $v=5$ ва $3y+4x+8=0$. **46.** б) $x'(t)=2-8t$; $y'(t)=1-2t$; $v=|2t-1|\sqrt{5}$; $16y^2+8xy-x^2-4y+28=0$.

47*. а) $x'(t)=16t$, $y'(t)=32t$; **54°.** в) $y_{max}=\frac{2}{3}$, $y_{min}=-\frac{2}{3}$; ґ) $y_{max}=2$, $y_{min}=-12$. **55.** а) $y_{max}=\frac{8}{3}$, $y_{min}=-\frac{2}{3}$; б) $y_{max}=5$, $y_{min}=3$; в) $y_{max}=2$, $y_{min}=0$ дар нуқтаи $x=0$ ва $x=3$; г) $y_{max}=34$, $y_{min}=2$. **56.** а) $y_{max}=10$, $y_{min}=6$; б) $y_{max}=\frac{\pi}{2}$, $y_{min}=-\frac{\pi}{2}$; в) $y_{max}=25$, $y_{min}=\frac{9-2\sqrt{3}}{9}$; г) $y_{max}=2$, $y_{min}=2{,}5$. **57*.** а) $y_{max}=0$, $y_{min}=-2$; в) $y_{max}=7\frac{1}{4}$, $y_{min}=-1$. **58.** а) $x=\frac{a}{2}$, б) $\frac{2a^3}{27}$. **61.** $x=\frac{l}{\pi}$, $y=0$.

62. 18м ва 24м. **63.** $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$. **64.** $x = \sqrt{25}$ ва $y = \sqrt{\frac{5}{2}}$;

а) $S_{\min} = 6000\, м^2$; б) $S_{\min} = 6500\, м^2$.

65. $x = \frac{p}{2}$, $y = \frac{p}{4}$ ва $v_{\max} = \frac{p^2 l}{8}$; а) $V_{\max} = 4500\, м^3$;

б) $V_{\max} = 4000\, м^2$. **66.** $x = \sqrt{\frac{as}{b}}$, $y = \sqrt{\frac{bs}{a}}$; $S_{\min} = 4620\, м^2$.

67. $x = y = \sqrt{\frac{V}{h}}$; $S_{\min} = 2\left(\frac{V}{h} + 2\sqrt{Vh}\right)$; $S_{\min} = 121\, дм^2$.

69. $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. **70.** $x = y = 8$. **71.** $x = y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $S_{\min} = \frac{R^2}{2}$.

72. $x = \frac{a}{2}$. 75. $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{d}{h} = \sqrt{2}$. **76.** Баъди 3 соату 3 дақ. ҳаракат. **77.** $x = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$. **78.** $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$, $v = \frac{4\pi R^3}{3}$ -дег бояд сферикӣ бошад. **80.** $h = 2z$.

Мундарича

БА ХОТИР ГИРЕД!

Хосиятҳои дараҷа

1. $a^0=1$
2. $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$
3. $a^r a^s=a^{r+s}$
4. $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$
5. $(a^r)^s=a^{rs}$
6. $(a\text{в})^r=a^r\text{в}^r$
7. $\left(\frac{a}{\text{в}}\right)^r=\frac{a^r}{\text{в}^r}$

Амалҳо бо решаҳо

1. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$
2. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$
3. $\sqrt{a^2}=|a|$
4. $\sqrt[n]{a\text{в}}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{\text{в}}$
5. $\sqrt[n]{\frac{a}{\text{в}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\text{в}}}$
6. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k=\sqrt[n]{a^{mk}}$
7. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$
8. $\sqrt[mn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^k}$

Ҳосилаи функсияҳо

1. $(C)^1 = 0$
2. $(KX + \mathit{в})^1 = K$
3. $(X^n)^1 = nX^{n-1}$
4. $(\sin x)^1 = \cos x$
5. $(\cos x)^1 = -\sin x$
6. $(\operatorname{tg} x)^1 = \frac{1}{\cos^2 x}$
7. $(\operatorname{ctg} x)^1 = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Қоидаҳои дифференсиронӣ

1. $f^1(x) = \operatorname{Lim}_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$
2. $(Cu)^1 = Cu$, C - доимӣ
3. $(u + v)^1 = u^1 + v^1$
4. $(uv)^1 = u^1 v + u v^1$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)^1 = \frac{u^1 v - u v^1}{v^2}$

u *ва* v *функсияҳо*

6. $f(\varphi(x))^1 = f^1(\varphi(x)) \cdot \varphi^1(x)$

6. *Мубодилаи расанда ба графики функсияи* $y = f(x)$

$$y - y_0 = f^1(x_0)(x - x_0)$$