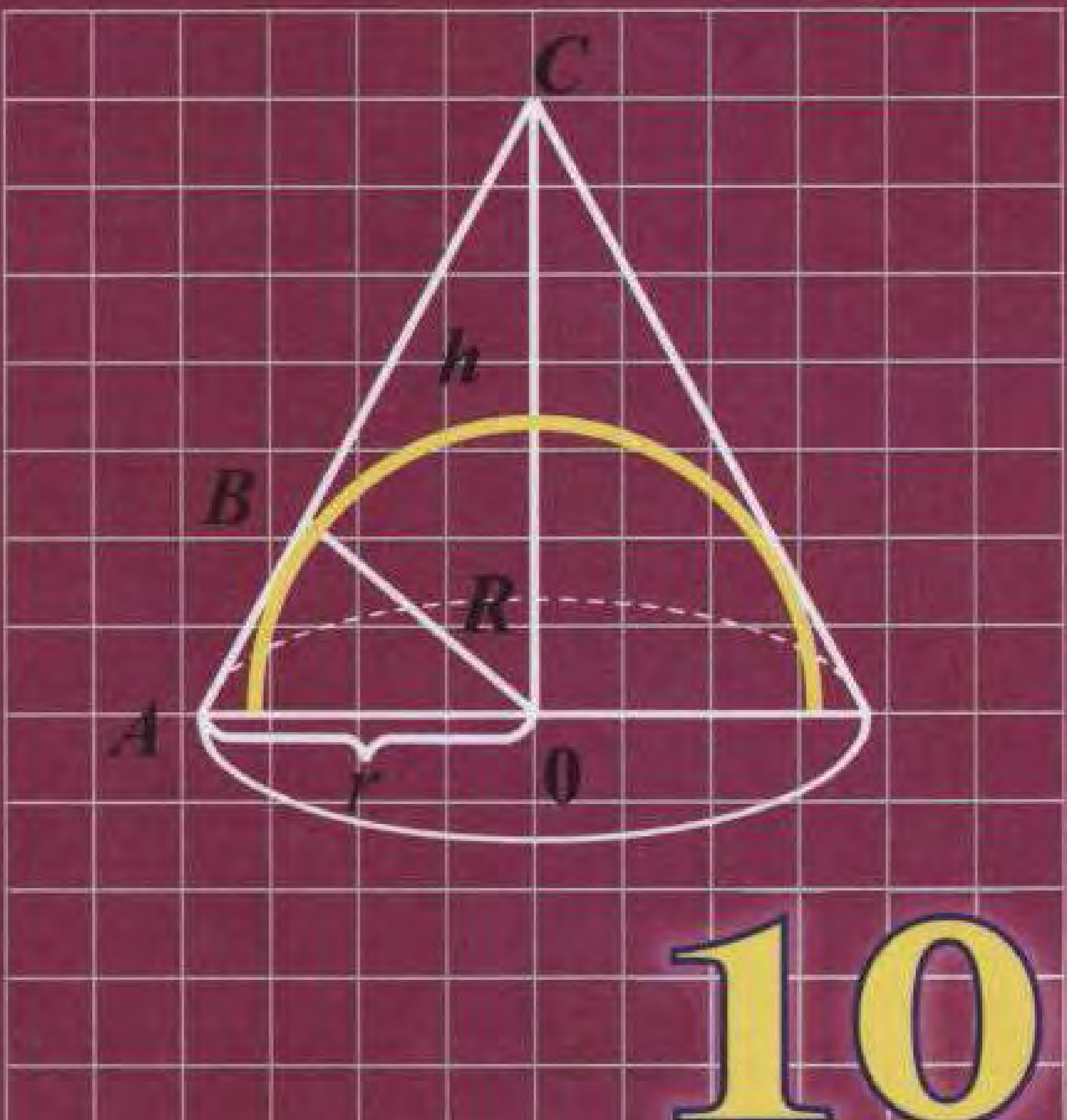
Ғуломов И., Акбаров Р., Изатуллоев К.,
Ҳалимов Ғ., Маҳмудов Т.

АЛГЕБРА

ВА ИБТИДОИ АНАЛИЗ



10

Ғуломов И., Акбаров Р., Изатуллоев К.,
Ҳалимов Ғ., Маҳмудов Т.

Алгебра
ва ибтидои анализ

Китоби дарсӣ барои синфи 10

Мушовараи Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон ба чоп тавсия кардааст.

Душанбе
ОПЕК
2005

Сарсухан

Хонандагони азиз!

Шумо ба омӯзиши фанни «Алгебра ва ибтидои анализ» шурӯъ мекунед, ки вай мантикан давоми фанни «Алгебра» мебошад. Ҳангоми омӯзиш Шумо ба мафҳумҳои нав, ба монанди дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ, муодила ва системаи муодилаҳои ирритсионалӣ, муодила ва системаи муодилаҳои тригонометрӣ, мафҳуми асосбунёди анализ - ҳосила ва татбиқи он шинос мешавед. Дар қатори тарзҳои хусусии ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсияҳо оид ба методи умумии маълум намудани онҳо маълумот мегиред. Шумо мефаҳмед, ки бо зарурияти ҳал кадани ягон масъалаи муайян методҳои умумии ҳалли онҳо ба вуҷуд омада, минбаъд инкишоф меёбанд. Бинобар ин аз ибтидо то интиҳои китоб Шумо ба ибораи «методи математикӣ» дучор мешавед. Татбиқи методҳои математикӣ дар омӯзиши назария ва ҳалли масъалаҳо боварии Шуморо барои амиқ аз худ намудани математика зиёд мекунад.

Китоб аз 5 боб иборат буда, бобҳо ба параграфҳо тақсим мешаванд. Ҳар боб аз гузориши масъала оғоз меёбад. Дар онҳо зарурати омӯзиши мафҳумҳо ва ё масъалаҳое, ки ба пайдоиши ин ё он мафҳум мусоидат намудаанд, ифода ёфтааст. Баъди ҳар як параграф саволҳои **назоратӣ** ва машқҳо зери аломати $\boxed{?}$ ҷой дода шудаанд. Онҳо ёдовар мешаванд, ки кадом мафҳумҳо ва аломатҳои асосӣ дар ин параграфҳо баён ёфтаанд. Интиҳои ҳар як боб аз гӯшаи – «Худро санҷед», корҳои амалӣ, супоришҳои мустақилона ва машқҳои иловагӣ иборат аст.

Маводҳои гӯшаи «Худро санҷед» барои омӯзиши мустақилона, эҷоду бунёдкорӣ ва «кашф» - и хурди асрорҳои математикӣ тавсия шудаанд. Барои ҳар як боб машқҳо алоҳида рақамгузорӣ шудааст. Дар аксарияти машқҳо се дараҷаи азхудкунӣ ба инобат гирифта шуда, онҳо дар се вариант (1 - дарачаи хатмии талабот, 2 – дарачаи хуби азбаркунии маводи таълимӣ дар ҳаҷми пурра ва 3 - дараҷаи баланд, ки ба синфҳои равияи риёзӣ дошта мувофиқ меояд) дода шудаанд. Супоришҳои мустақилона низ аз се дараҷаи талабот иборат мебошанд.

Маводҳои илова бо рамзи ишорат ёфтааст. Рамзи зарурати дар хотир нигоҳ доштани таърифҳоро мефаҳмонад. Таърихи пайдоиш ва инкишофи ҳар як мафҳум хотимаи бобро ташкил медиҳад. Ҳарчанд омӯхтани ин маводҳо шарт набошад ҳам, вале хонандаи ҷӯянда аз онҳо маълумотҳои зиёди таърихӣ ва иловагиро дарёфт карда метавонад. Дар китоб саҳми математикони замони Сомониён ва хусусан халқҳои Осиёи Миёна дар инкишофи алгебра ва тригонометрия мавкеъи хосаро ёфтааст. Мазмуни асосии китобро тасвирҳо (графикҳо, расмҳо ва схемаҳо) бо тафсил шарҳ медиҳад.

Муаллифон

БОБИ I. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ ВА СИСТЕМАИ ОНҲО

Шумо ба дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ ва хосиятҳои он шинос ҳастед. Ин хосиятҳо имкон медиҳанд, ки табдилдиҳиҳои айниятии ифодаҳо ба амал оварда шуда, ҳисоббарориҳои онҳо содда ва ададҳо байни ҳамдигар муқоиса карда шаванд.

Аз ин рӯ, баъди такрори дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ Шумо ба дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ ва хосиятҳои он шиносоӣ пайдо мекунед. Омӯзиши дараҷа бо нишондиҳандаи ирратсионалӣ бошад барои аз худ намудани муодилаҳои ирратсионалӣ ва системаи онҳо замина бунёд мекунад.

Муодила яке аз мафҳумҳои асосии курси математикаи мактабӣ ба ҳисоб меравад, зеро ҳалли масъалаҳои зиёди амалӣ ба тартиб додан ва ҳал кардани муодилаҳо оварда мерасонад. Бар замми он, масъалаҳои зиёде мавҷуданд, ки аз рӯи мазмун гуногун буда, онҳо ба соҳаҳои мухталифи фаъолияти инсонӣ мутааллиқанд ва ба намудҳои маълуми муодилаҳо оварда мерасонанд. Ҳал карда тавонистани намудҳои маълуми муодилаҳо имконият медиҳад, ки гурӯҳи зиёди масъалаҳо ҳал карда шаванд. Методи муодилаҳо яке аз методҳои дониста гирифтани дунёи ҳақиқӣ ҳисоб мешавад. Дар ин боб Шумо тарзҳои ҳалли муодилаҳои ирратсионаӣ ва системаи онҳоро меомӯзед.

§1. Мафҳуми дараҷаи нишондиҳадааш ирратсоналӣ

Ба шумо дараҷаи нишодиҳандааш ратсионалӣ ва хосиятҳои он аз синфи 9 маълум аст. Бори дигар онҳоро ба хотир меорем:

Дараҷаи адади $a>0$ - и нишондиҳандааш ратсионалии $r=\frac{m}{n}$ гуфта адади $\sqrt[n]{a^m}$ -ро меноманд; дар ин ҷо m - адади бутун ва n - адади натуралӣ $(n>1)$.

Менависем:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Ҳангоми $a = 0$ будан дараҷа фақат барои нишондиҳандаҳои мусбат муайян аст. Мувофиқи таъриф барои $r > 0$ - и дилхоҳ $0^r = 0$ аст.

Барои ҳаргуна ду адади ратсионалии r ва s ва ададҳои мусбати дилхоҳи a ва b хосиятҳои зерин ҷой доранд:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ 2. $a^r : a^s = a^{r-s}$ 3. $(a^r)^s = a^{rs}$

4. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$ 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

6. Агар $0 < a < b$ бошад, ҳангоми $r > 0$ будан $a^r < b^r$ ва ҳангоми $r < 0$ будан $a^r > b^r$ аст.

7. Аз $r > s$ бармеояд, ки ҳангоми $a > 1$ будан $a^r > a^s$ ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан $a^r < a^s$ аст.

Акнун дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалиро муайян менамоем.

Бигузор a - ягон адади мусбат ва α - адади ирратсионалӣ бошад. Ёдовар мешавем, ки касрҳои даҳии беохири ғайридаврӣ ададҳои ирратсионалиро ташкил медиҳанд. Масалан, $\alpha = \pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ...$

Пас, мувофиқи таърифи дараҷа a^{α} - дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ мебошад.

Ҳолати $a > 1$ - ро муоина мекунем.

Барои намуна адади $3^{\sqrt{2}}$ - ро дида мебароем: дар ин ҷо $a = 3 > 1$ ва нишондиҳандаи дараҷа $\alpha = \sqrt{2}$ - адади ирратсионалӣ мебошад.

Маълум аст, ки $\sqrt{2}=1,414213...=a_0,a_1a_2a_3a_4...a_n...$

Акнун наздикшавии даҳии адади $\sqrt{2}$ -ро бо норасой r_n ва бо зиёдатӣ r_n' тартиб медиҳем:

$$r_n=a_0,a_1a_2...a_{n-1}a_n;$$

$$r_n'=a_0,a_1a_2...a_{n-1}a_n+\frac{1}{10^n}.$$

Якчанд аъзоҳои аввалаи ин пайдарпаиҳоро менависем:

$$r_n:1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ 1,41421;...$$

$$r_n':2;\ 1,5;\ 1,42;\ 1,415;\ 1,4143;\ 1,41422;...$$

Он гоҳ барои ду пайдарпаии дараҷаҳо навишта метавонем:

$$3^1;\ 3^{1,4};\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};...;\ 3^{r_n};...$$

$$3^2;\ 3^{1,5};\ 3^{1,42};\ 3^{1,415};...;\ 3^{r_n'};...$$

қиматҳои ин дараҷаҳоро дар компютер (калкулятор) ҳисоб карда, мувофиқи хосияти 7-уми дараҷа бо нишондиҳандаи ратсионалӣ меёбем, ки:

$$3^1=3<3^{\sqrt{2}}<3^2=9;$$

$$3^{1,4}\approx 4,6555367<3^{\sqrt{2}}<3^{1,5}\approx 5,1961524;$$

$$3^{1,41}\approx 4,7069650<3^{\sqrt{2}}<3^{1,42}\approx 4,7589613;$$

$$3^{1,414}\approx 4,7276950<3^{\sqrt{2}}<3^{1,415}\approx 4,7328917;$$

$$3^{1,4142}\approx 4,7287339<3^{\sqrt{2}}<3^{1,4143}\approx 4,7292534;$$

$$3^{1,41421}\approx 4,7287858<3^{\sqrt{2}}<3^{1,41422}\approx 4,7288378;$$

....

$$3^{r_n}<3^{\sqrt{2}}<3^{r_n'}$$ мешавад.

Қимати $3^{\sqrt{2}}$, ки дар компютер (ё калкулятор) ҳисоб карда шудааст, чунин мебошад: $3^{\sqrt{2}}\approx 4,7288$.

Ба ҳамин тариқ, ҳангоми $a>1$ ва $\alpha>0$ будан дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалии a^{α} ададе мебошад, ки аз ҳамаи ададҳои намуди a^{r_n} калон ва аз ҳамаи ададҳои намуди $a^{r'_n}$ хурд аст, яъне $a^{r_n}<a^{\alpha}<a^{r'_n}$. Дар ин ҷо r_n ва r'_n қиматҳои тақрибии α бо норасоӣ ва бо зиёдатӣ бо ягон саҳеҳии дода шуда мебошанд.

Ҳангоми $0<a<1$ будан, $a^{r_n}>a^{\alpha}>a^{r'_n}$ аст.

Агар $\alpha<0$ бошад, $a^{-\alpha}=\dfrac{1}{a^{\alpha}}$ мешавад. Қайд менамоем, ки ададди a^{α} ҳамеша мусбат буда, он ягона аст. Ғайр аз ин, барои α -и дилхоҳ $1^{\alpha}=1$ ва $0^{\alpha}=0$ $(\alpha>0)$ мебошад.

Аз хосиятҳои нишондиҳанда натиҷа мебарояд, ки дараҷаи адад бо нишондиҳандаи дилхоҳи ҳақиқӣ муайян буда, барои он хосиятҳои 1-7 ҷой доранд.

?

1. Ба калимаҳо, ибораҳо ва рамзҳои дар матн оварда шуда эътибор диҳед: дараҷа, ададди ирратсионалӣ, дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ ва a^{α}.
2. Ададди ратсионалӣ чист?
3. Таърифи дараҷаи нишондиҳандааш растионалиро баён кунед ва хосиятҳои асосии онро гӯед.
4. Ададди ирратсионалӣ чист?
5. Дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ чӣ маъно дорад ва онро чӣ тавр муайян мекунанд?
6. Хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандааш ададди ҳақиқиро номбар намоед.

Машқҳо

1°. Қимати ифодаҳои зеринро бо саҳеҳии то 0,1 (бо ёрии компютер, калкулятор ё ҷадвал) ҳисоб кунед:

а) $5^{1,4}$ ва $5^{1,5}$; б) $5^{1,41}$ ва $5^{1,42}$;

в) $5^{1,414}$ ва $5^{1,415}$; г) $5^{2,23}$ ва $5^{2,24}$.

Ҳисоб кунед (2°–3):

2°. а) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $3^{1-2\sqrt{3}}\cdot 9^{1+\sqrt{3}}$;

в) $8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}}$; г) $\left(3^{\sqrt[5]{8}}\right)^{\sqrt[5]{4}}$.

3. а) $32^{\sqrt{2}} : 2^{5\sqrt{2}}$; б) $\left(5^{\sqrt[3]{9}}\right)^{\sqrt[3]{3}}$;

в) $27^{2-2\sqrt{3}}\cdot 9^{1+\sqrt{3}}$; г) $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{3}}$.

4*. Қимати ифодаи $2^{\sqrt{5}}$-ро бо саҳеҳии то 0,01 (аз компютер истифода карда) ҳисоб кунед.

Аз компютер ва хосиятҳои дараҷа истифода карда ададҳоро муқоиса кунед (5°–6):

5°. а) $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ ва $(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2,1}$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2,2}$;

в) $2^{0,4}$ ва $2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$; г) $1,2^{-\sqrt{3}}$ ва $1,2^{\sqrt{5}}$.

6. а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ ва 1; б) $3^{-\sqrt{12}}$ ва $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,8}$;

в) $2,5^{-\sqrt{2}}$ ва 1; г) $0,3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ва $0,3^{\frac{1}{3}}$.

Ифодаҳоро содда кунед (7–8*):

7. а) $\left(a^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}$; б) $a^{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$;

в) $x^{3}\cdot\sqrt[4]{x^{2} : x^{4\pi}}$; г) $y^{\sqrt{2}}\cdot y^{1,3} : \sqrt{y^{3\sqrt{2}}}$

8*. а) $\frac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^{2}}+1$; б) $\frac{\left(a^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}$;

в) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$; г) $\sqrt{(x^{\pi}+y^{\pi})^2-4(xy)^{\pi}}$.

§ 2. Муодилаҳои иррратсионалӣ

Таъриф. Муодилаҳое, ки дар онҳо тағйирёбанда дар зери аломати реша омадааст, муодилаҳои ирратсионалӣ ном доранд.

Масалан, муодилаҳои 1) $\sqrt{x-2}=0$; 2) $\sqrt[3]{x}-3=0$;
3) $\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x}$; 4) $\sqrt{x-5}=\sqrt{3-x}$; 5) $\sqrt{x-2}=x-8$;
6) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$ ва 7) $\sqrt{x}=-2$ ирратсионалианд.

Ҳалли муодилаҳои ирратсионалӣ дар натиҷаи пай дар пай иваз намудани онҳо ба муодилаҳои баробарқувваи оддитарин ба амал оварда мешавад.

Муодилаҳои болоро ҳал мекунем.

1) $\sqrt{x-2}=0$. Ҳар ду тарафи муодиларо ба квадрат бардошта ҳосил мекунем: $x-2=0$. Аз ин ҷо: $x=2$. Месанҷем: $\sqrt{2-2}=0$. Пас, $x=2$ ҳалли муодила мебошад.

2) $\sqrt[3]{x}-3=0$. Аъзои муодила (- 3)-ро аз тарафи чап ба тарафи рост бо аломати муқобил гузаронида муодилаеро ҳосил мекунем, ки ба муодилаи додашуда баробарқувва мебошад: $\sqrt[3]{x}=3$.

Ҳар ду тарафи муодиларо ба куб бардошта меёбем: $x=27$. Месанҷем: $\sqrt[3]{27}-3=0$; $3-3=0$.

Ҷавоб: $x=3$.

3) $\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x}$. Решаи квадратӣ ҳамон вақт маъно дорад, ки агар ифодаи зери реша ғайриманфӣ бошад, яъне $x^2-3\geq 0$ ва $2x\geq 0$.

Аз системаи нобаробариҳои $\begin{cases} x^2-3\ge 0, \\ 2x\ge 0 \end{cases}$ меёбем, ки $x\ge\sqrt{3}$ ва фосилаи $\left[\sqrt{3};\ +\infty\right)$ соҳаи қиматҳои имконпазири муодила аст. Ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардошта пайдо мекунем: $x^2-3=2x$. Аз ин ҷо: $x^2-2x-3=0$. Решаҳои ин муодила $x_1=-1$ ва $x_2=3$ мебошанд.

Месанҷем. қимати $x=-1$-ро ба муодила мегузорем: $\sqrt{(-1)^2-3}=\sqrt{2\cdot(-1)}$. Ҳарду қисми баробарӣ муайян нестанд, пас $x_1=-1$ решаи муодила шуда наметавонад. Агар дар муодила решаи $x_2=3$-ро гузорем, баробарии дуруст хосил мешавад: $\sqrt{3^2-3}=\sqrt{2\cdot 3}$ ё $\sqrt{6}=\sqrt{6}$. Пас, $x=3$ решаи муодила мебошад.

Ҷавоб: $x=3$.

Маълум мешавад, ки ҳангоми ҳалли муодилаҳои ирратсионалӣ решаҳои бегона пайдо шуданашон мумкин аст. Бинобар ин, ҳар яке аз решаҳои ёфташударо аввал санҷида баъд ҷавоби муодилаи додашударо навиштан лозим аст. Решаҳои бегона бошад, ҳангоми ду тарафи муодиларо ба квадрат бардоштан пайдо мешавад, яъне $(-a)^2=a^2$, аммо $-a\ne a$ мебошад.

4) $\sqrt{x-5}=\sqrt{3-x}$. Соҳаи қиматҳои имконпазири муодиларо маълум мекунем:

$$\begin{cases} x-5\ge 0, \\ 3-x\ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 5, \\ x\le 3. \end{cases}$$

Аз ин ҷо дидан душвор нест, ки муодилаи дода шуда ҳал надорад, зеро буриши маҷмӯи ҳалҳои нобаробариҳои система холӣ аст.

Ҳамин тавр муодиларо ҳал накарда аз рӯи соҳаи қиматҳои имконпазири муодила муқаррар намудем, ки муодила дорои реша нест.

Ҷавоб: муодила ҳал надорад.

5) $\sqrt{x-2}=x-8$. Муодилаи дода шуда ба системаи

$$\begin{cases} x-2=(x-8)^2, \\ x-8\geq 0 \end{cases}$$ баробарқувва аст.

Муодилаи якуми системаро ҳал мекунем.

$$x-2=(x-8)^2 \Rightarrow x^2-17x+66=0.$$

Ҳалли он: $x_1=6$ ва $x_2=11$

Санҷиш. Шарти $x-8\geq 0$ барои $x=6$ ҷой надорад. Бинобар ин, муодила як реша дорад: $x=11$.

Ҷавоб: $x=11$.

6) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$. Гузориши $u=\sqrt[4]{x-3}$ -ро истифода бурда, ҳосил мекунем: $u^2-u-6=0$. Ин муодила дорои ҳалҳои $u_1=2$ ва $u_2=3$ мебошад. Акнун қиматҳои x -ро меёбем:

$\sqrt[4]{x-3}=-2$, $x-3=(-2)^4$, $x=19$

$\sqrt[4]{x-3}=3$, $x-3=3^4$, $x=84$

Месанҷем. Решаи $x=19$ ҳалли муодила шуда наметавонад, чунки $\sqrt{19-3}-6=\sqrt[4]{19-3}$, $4-6=2$ ва $-2\neq 2$.

Пас, $x=84$ ҳалли муодила мебошад.

Ҷавоб: $x=84$.

7) $\sqrt{3x}=-2$. Қимати решаи арифметикӣ адади манфӣ шуда наметавонад, бинобар ин муодила ҳал надорад.

?

1. Ба ибораи муодилаи ирратсионалӣ ва рамзи $\sqrt{x}$ эътибор диҳед.
2. Муодилаи ирратсионалӣ чист?
3. Ҳалҳои бегонаи муодилаи ирратсионалӣ чӣ маъно дорад?

Машқҳо

Муодилаҳоро ҳал намоед (9°–21^*):

9°. (Шифоҳӣ) а) $\sqrt{x}=3$; б) $\sqrt{x}=7$; в) $\sqrt{x+2}=3$; г) $\sqrt{x-1}=2$.

10°. а) $\sqrt{x^2-7}=3$; б) $\sqrt[3]{x+3}=2$;

в) $\sqrt[4]{x-3}=2$; г) $\sqrt{x+3}=2$.

11°. а) $\sqrt[3]{x+2}=3$; б) $\sqrt{x-1}=7$;

в) $\sqrt{20-x^2}=16$; г) $\sqrt{x^2+36}=10$.

12. а) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$; б) $\sqrt{x}=x-2$;

в) $\sqrt{x-2}=\dfrac{x}{3}$; г) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+3}=0$.

13. а) $x-\sqrt{x+1}=1$; б) $\sqrt{x+1}=x-5$;

в) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}$; г) $\sqrt{x-1}=3-x$.

14. а) $\sqrt{x^2+5x-3}=\sqrt{x}$; б) $\sqrt{2x-1}=x-2$;

в) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$; г) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$.

15. а) $\sqrt{5-x}=x-5$; б) $1+\sqrt{4x+5}=2x+2$;

в) $x-2=\sqrt{4-2x}$; г) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x-1}}=1$.

16. а) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$; б) $x+1=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}$;

в) $3+\sqrt{3x+1}=x$; г) $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{x+9}$.

17. а) $21+\sqrt{2x-7}=x$; б) $\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=4$;

в) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=2$; г) $\sqrt{x-15}-\sqrt{12-x}=3$.

18. а) $\sqrt{11x-2}+3\sqrt{x}=6$; б) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x}+1$;

в) $\sqrt{x+5}=\sqrt{4x+9}-\sqrt{x}$; г) $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$.

19. а) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4$; б) $2+\sqrt{10-x}=\sqrt{22-x}$;

в) $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$; г) $\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=\dfrac{2-x}{2+x}$.

20*. а) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=27-x$; б) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$;

в) $3\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4$; г) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$.

21*. а) $x\sqrt{3x^2+13}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{3x^2+13}=2$; б) $\dfrac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2}$;

в) $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3$; г) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

§ 3. Системаи муодилаҳои ирратсионалӣ

Акнун тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои ирратсионалиро дида мебароем.

Ҳалли системаи муодилаҳои ирратсионалӣ – маънои ёфтани ҷуфти ададҳоеро дорад, ки ҳангоми дар муодилаҳои система ба ҷои тағйирёбандаҳои x ва y гузоштани онҳо баробарии ададии дуруст ҳосил шавад.

Мисол. Системаи муодилаҳои ирратсионалии зеринро ҳал мекунем:

$$\textbf{1.}\quad \begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2},\\ x-y=6.\end{cases}$$

Ҳал: Муодилаи якуми системаро бо махраҷи умумӣ оварда ҳосил мекунем:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=\dfrac{3}{2}\sqrt{xy},\\ x-y=6.\end{cases}\qquad \text{ё}\qquad \begin{cases}2(x-y)=3\sqrt{xy},\\ x-y=6.\end{cases}$$

Дар муодилаи якум ба ҷои $x-y$ адади 6-ро гузошта меёбем:

$$2\cdot 6=3\sqrt{xy} \text{ ё ки } \sqrt{xy}=4, \quad xy=16$$

Тарзи гузоришро истифода мебарем. Аз муодилаи дуюми система $x=6+y$ -ро дар муодилаи ҳосилшуда мегузорем:

$$(6+y)\cdot y=16 \text{ ё ин ки } y^2+6y-16=0.$$

Аз ин ҷо:

$$y_{1,2}=-3\pm\sqrt{9+16}=-3\pm 5; \quad y_1=2 \text{ ва } y_2=-8.$$

Пас,

$$x_1=6+2=8 \text{ ва } x_2=6+(-8)=-2.$$

Санчиш нишон медиҳад, ки $x_1=8$ ва $y_1=2$ системаи муодилаҳоро қаноат мекунонанд.

Ҷавоб: $x = 8$ ва $y = 2$.

2. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ x\cdot y=8.\end{cases}$

Ҳ а л: Тағйирёбандаҳои нав дохил мекунем:

$$u=\sqrt[3]{x} \quad \text{ва} \quad v=\sqrt[3]{y} \qquad (u\geq 0, \ v\geq 0)$$

Он гоҳ система намуди зеринро мегирад:

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^3\cdot v^3=8.\end{cases} \qquad \text{ё} \qquad \begin{cases}u+v=3,\\ u\cdot v=2.\end{cases}$$

Системаро бо тарзи гузориш ҳал мекунем. Аз муодилаи якуми система меёбем: $u=3-v$. Баъди гузоштани қимати u дар муодилаи дуюми система ва иҷрои табдилдиҳиҳои муайян ҳосил мекунем:

$$v^2-3v+2=0.$$

Аз ин ҷо

$$v_1=2 \text{ ва } v_2=1.$$

Решаҳои мувофики u: $u_1=1$ ва $u_2=2$ мебошанд.

киматҳои $u=2$ ва $\vartheta=1$ - ро дар баробариҳои $u=\sqrt[3]{x}$ ва $v=\sqrt[3]{y}$ гузошта пайдо мекунем:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2, \\ \sqrt[3]{y} = 1. \end{cases}$$

Агар ҳар ду тарафи муодилаҳои системаро ба куб бардорем, он гоҳ ҳосил мешавад:

$$\begin{cases} x = 8, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ҳамин тавр, қиматҳои $u = 1$ ва $v = 2$ -ро дар баробариҳои $u = \sqrt[3]{x}$ ва $\vartheta = \sqrt[3]{y}$ гузошта соҳиб мешавем:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1, \\ \sqrt[3]{y} = 2. \end{cases}$$

Баъди ба куб бардоштани ду тарафи муодилаҳо ҳосил мешавад: $x = 1$ ва $y = 8$;

Ҷавоб: $x = 8$ ва $y = 1$; $x = 1$ ва $y = 8$.

3. $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 2} = 3, \\ \sqrt{x + 2y + 5} = y - x. \end{cases}$

Ҳ а л. Ҳар ду тарафи муодилаҳои системаро ба квадрат бардошта ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 9, \\ x + 2y + 5 = y^2 - 2xy + x^2. \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} 2x + y = 7, \\ x + 2y + 5 = y^2 - 2xy + x^2. \end{cases}$$

Аз муодилаи якуми система $y = 7 - 2x$ мешавад. Онро дар муодилаи дуюми система гузошта ҳосил мекунем:

$$x + 2(7 - 2x) + 5 = (7 - 2x)^2 - 2x(7 - 2x) + x^2 \quad \text{ё ки}$$

$$x + 14 - 4x + 5 = 49 - 28x + 4x^2 - 14x + 4x^2 + x^2.$$

Баъди ислоҳ намудани аъзоҳои монанд муодилаи квадратии $3x^2 - 13x + 10 = 0$ ҳосил мешавад. Решаҳои он:

$x_1 = 1$ ва $x_2 = 3\frac{1}{3}$ мебошанд.

Ин қиматҳоро дар баробарии $y = 7 - 2x$ гузошта пайдо мекунем: $y_1 = 5$ ва $y_2 = \frac{1}{3}$.

Месанҷем. Системаро танҳо ҷуфти $x_1 = 1$ ва $y_1 = 5$ қаноат мекунонад.

Ҷавоб: $x_1 = 1$, $y_1 = 5$.

?

1. Ҳалли системаи муодилаҳои ирратсионалиро баён кунед.
2. Тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои ирратсионалиро номбар кунед.

Машқҳо

Системаи муодилаҳоро ҳал намоед (22°–28*):

22°. а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ 4\sqrt{x}-2\sqrt{y}=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=1,\\ 3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=10;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{y}=4,\\ 3\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=5;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=2.\end{cases}$

23. а) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5,\\ x+y=35;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{5}{2},\\ x+y=5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ x\cdot y=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1\\ x-y=7.\end{cases}$

24. а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=2,\\ x-2y+1=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1,\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8, \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=3. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=5, \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\dfrac{15}{4}, \\ x\cdot y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x\cdot y}=56, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4, \\ x-y=32. \end{cases}$

26. а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1, \\ xy=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{2x+y+2}=3, \\ \sqrt{x+2y+5}=y-x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \\ x-y=16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ xy=216. \end{cases}$

27*. а) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=4, \\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}, \\ x\cdot y=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8, \\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2. \end{cases}$

28*. а) $\begin{cases} \sqrt{xy}=12, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7, \\ x\cdot y=9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x\cdot y=64, \\ x-y+\sqrt{xy}=20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ x\cdot y=27. \end{cases}$

Маълумотҳои таърихӣ

Мафҳуми дараҷаи нишондиҳандааш натуралиро юнониҳои қадим медонистанд. Барои онҳо ифодаи квадрати адад ҳангоми ҳисоб кардани масоҳати квадрат ва куби адад ҳангоми ёфтани ҳаҷми куб маълум буд.

Дар давлатҳои қадимаи Шумеру Бобулистон (асри XIX пеш аз милод) бошад аз ҷадвалҳои квадрати ададҳо a^2 ва кубҳо a^3 истифода менамуданд.

Рамзҳои ҳозиразамони дараҷаро дар намуди a^4, a^5,... олими фаронсавӣ Декарт (1596-1650) дар «Геометрия» ном асараш (1637) дохил намудааст.

Таълимот дар бораи дараҷаҳои нишондиҳандаашон касрӣ дар асарҳои математики фаронсавӣ Никола Орем (1323-1382) баён ёфтааст. Маълум аст, ки математики дигари фаронсавӣ Никола Шюке (1445-1500) дар рисолаи «Илм оид ба адад» (1484) аввалин шуда дараҷаҳои нишондиҳандаашон манфӣ ва сифриро истифода бурдааст. Математики ҳолландӣ Симон Стевин (1548-1620) дар «Тафсирҳои математикӣ» ном асари худ (1605-1608) пешниҳод намуд, ки $a^{\frac{1}{n}}$ решаи $\sqrt[n]{a}$ фаҳмида мешавад.

Олими англис Исаак Ниютон (1643-1727) дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалиро муттасил истифода бурда, нишондиҳандаҳои решаҳоро низ нишон додаст: $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$ ва ғайра.

Математики олмонӣ М.Штифел (1487-1567) бошад таърифи дараҷаи нишондиҳандааш сифрӣ ва касриро баён кард. Дохил намудани истилоҳи «нишондиҳанда» (олмонӣ – Exponent) ба ӯ тааллуқ дорад.

Дар асари математики итолиёвӣ Никколо Тарталя (тақ. солҳои 1500-1557) «Рисола оид ба адад ва андоза» (1556) муодилаи намуди $x+\sqrt[3]{x}=6$ вомехӯрад, ки он бо сухан ифода ёфтааст. Навишти муодилаҳои ирратсионалӣ, ки ба рамзҳои имрӯза мувофиқанд дар асари математики англис Вилям

Оутред (1575-1660) «Калиди математика» (1631) дучор меоянд. Ин асар ба инкишофи минбаъдаи алгебра таъсири калон расонидааст.

Худро санҷед !

1. Дар байни ифодаҳо кадом аломатро бояд гузошт?

Ба ифодаҳо бодиққат назар кунед. Тахмин кунед, ки дар байни онҳо чигуна муносибат ҷой дорад ва аломати мувофиқро гузошта адади номаълум «?»-ро ёбед.

$$3^{3\sqrt{3}} \quad 9^{\sqrt{3}} \quad 3^{\sqrt{3}}$$

$$25^{\sqrt{2}} \quad 5^{\sqrt{2}} \quad ?$$

2. Муодиларо ҳал накарда, исбот кунед, ки онҳо решаҳои ҳақиқӣ надоранд:

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=1; \quad \sqrt{x^2-81}=\sqrt{x-8+\sqrt{8-x}}.$$

Оё ин муодилаҳоро муодилаҳои баробарқувва номидан мумкин аст?

Кори амалии № 1

МАҚСАДИ КОР. Ёфтани қимати тақрибии дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ ва муқоисаи онҳо.

СУПОРИШ. Аз компютер (ё калкулятор) истифода карда қимати ифодаҳои $3^{\sqrt{5}}$ ва $5^{\sqrt{3}}$-ро ба саҳеҳии то 0,001 ҳисоб кунед ва онҳоро муқоиса намоед.

ТАРТИБИ ИҶРОИ КОР

1. Аз компютер (ё калкулятор) истифода бурда қимати тақрибии ададҳои $\sqrt{3}$ ва $\sqrt{5}$-ро ёбед.

2. Якчанд наздикшавиҳои даҳии $\sqrt{3}$ ва $\sqrt{5}$-ро бо норасоӣ ва бо зиёдатӣ тартиб диҳед.

3. Мувофиқан қиматҳои тақрибии ифодаҳои $3^{\sqrt{5}}$ ва $5^{\sqrt{3}}$-ро пай дар пай ҳисоб кунед.

4. Қимати ифодаҳои $3^{\sqrt{5}}$ ва $5^{\sqrt{3}}$-ро бо саҳеҳии то 0,001 нависед.

5. Қиматҳои ҳосилшударо муқоиса намоед.

Супориши мустақилона доир ба боби I

Варианти 1°

1. Ҳисоб кунед:

а) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $16^{\sqrt{3}} : 2^{4\sqrt{3}}$; в) $\left(2^{\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{9}}$

2. Муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $\sqrt{7-x} = x-7$; б) $\sqrt{x} = 2-x$;

в) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+3} = 0$; г) $\sqrt[3]{x+3} = 2$.

3. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15. \end{cases}$

Варианти 2

1. Ҳисоб кунед:

а) $2^{1-2\sqrt{5}} \cdot 4^{1+\sqrt{5}}$; б) $125^{\sqrt{3}} : 5^{2\sqrt{3}}$; в) $(8^{\sqrt[5]{16}})^{\sqrt[5]{2}}$.

2. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $2\sqrt{x+5} = x+2$; б) $21 + \sqrt{2x-7} = x$;

в) $\sqrt{16 - \sqrt{x+1}} = 4$; г) $\sqrt{x^2+5x+1} + 1 = 2x$.

3. Системаи муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6, \\ x - y = 12. \end{cases}$

Варианти 3*

1. Ҳисоб кунед:

а) $343^{1-2\sqrt{5}} \cdot 49^{3\sqrt{5}-2}$; б) $3^{\sqrt{2}+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}-1}$;

в) $\left(2^{3+\sqrt{5}}\right)^{3-\sqrt{5}} : \left(3^{3-2\sqrt{2}}\right)^{3+2\sqrt{2}}$.

2. Муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $1+\sqrt{4x+5}=2x+2;$ б) $5\sqrt[4]{x}+2=3\sqrt{x};$

в) $\sqrt{11x-2}+3\sqrt{x}=6;$ г) $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}.$

3. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=-1.\end{cases}$

МАШҚҲОИ ИЛОВА ОИД БА БОБИ I

Ба параграфи 1

29. Ҳисоб кунед:

а) $(4^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2};$ б) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{3}};$

в) $8^{1+2\sqrt{2}}\cdot4^{1-3\sqrt{3}};$ г) $49^{\sqrt{7}}:7^{2\sqrt{7}}.$

30. Ададҳои зеринро бо адади 1 муқоиса кунед:

а) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\sqrt{3}};$ б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{3}};$

в) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sqrt{3}};$ г) $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{10}}.$

31*. Аз компютер истифода карда қимати ифодаи $3^{\sqrt{5}}$ -ро бо саҳеҳии то 0,01 ҳисоб кунед.

Ба параграфҳои 2 – 3

Муодилаҳоро ҳал намоед (32–34*):

32. а) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0;$ б) $\sqrt[5]{25x-7}-\sqrt[5]{7x-25}=0;$

в) $\sqrt{3x-18}=3\sqrt{2};$ г) $(x^2-4)(\sqrt{x+5})=0.$

33. а) $(x^2-9)\sqrt{2-x}=0$; б) $\sqrt[3]{5-\sqrt{x+15}}=1$;

в) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$; г) $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-18}=1$.

34*. а) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$; б) $\sqrt[5]{\dfrac{x-3}{5-x}}+\sqrt[5]{\dfrac{5-x}{x-3}}=2$;

в) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$; г) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$.

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (35–36*):

35. а) $\begin{cases}\sqrt{x}+3\sqrt{y}=10,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3,\\ x\cdot y=8;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sqrt{xy-2x}=4,\\ \sqrt{\dfrac{y}{x-2}}=1.\end{cases}$

36*. а) $\begin{cases}\sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10,\\ 4\sqrt{3y+4}-5\sqrt{6+x}=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=1{,}5\\ x-y=6;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x-\sqrt{xy}+y=7,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10,\\ \sqrt{x^2-y^2}=9.\end{cases}$

Мо ба омӯзиши функцияҳои намуди махсус **функсияҳои тригонометрӣ** машғул мешавем. Бо ёрии онҳо ҳодисаҳои гуногуни даврӣ баён карда мешаванд. Аз замонҳои қадим олимон мушоҳида менамуданд, ки ҳодисаҳои зиёди табиат даврӣ ба амал меоянд. Падари илмҳои юнонӣ **Фалес** (625-547 пеш аз милод) такроршавии фаслҳои солро омӯхта, дарозии солро 365 рӯз муқаррар кард. Ӯро пайравӣ намуда нуҷумшиноси намоёни Александрӣ – **Клавдии Птоломей** (асри II милодӣ) давраро ба 360 қисми баробар тақсим кард. **Анаксагор** (асри V пеш аз милод) сабабҳои ба вуҷуд омадани дигаргуншавии моҳро медонист. Донишманди дигари Юнони қадим **Гераклит** нишон медиҳад, ки ҳама чиз дар табиат ба мисли мадду ҷазри оби баҳр бо ҳам алоқамандаңд. Кам шудан ва аз соҳил дур рафтани оби баҳр, ки бо таъсири қувваи кашиши офтобу моҳ ба амал меояд, дар ҳар шабонарӯз ду бор такрор мешавад. Ингуна мисолҳоро аз таърих хеле зиёд овардан мумкин аст.

Қайд кардан лозим аст, ки ба ҳодисаҳои зиёди табиат мо аз овони хурдӣ одат кардаем. Мо медонем, ки бадалшавии шаб ва рӯз дар натиҷаи даврзании шабонарӯзии Замин дар атрофии меҳвари худ ба амал меояд. Вақте ки моҳтоб комилан зери сояи замин мемонад, ҳар сол гирифтани он рӯй медиҳад.

Мадохилу махориҷи энергияе, ки замин аз офтоб ва баръакс, офтоб аз замин мегирад барои дар сайёраи мо нигоҳ доштани ҳарорати доимӣ басанда аст. Ва ин раванд даврӣ такрор меёбад. Ҳамин тавр, тапиши дил, гардиши чарх, паҳншавии зукком ва ғайраҳо равандҳои даврианд.

Дар замони ҳозира равандҳои гуногуни даврӣ, чунончӣ, ҳаракатҳои лапишдор, паҳншавии мавҷ, ҳаракати механизмҳо, лапиши ҷараёни тағйирёбандаи электрикӣ, ки дар физика, механика ва техника омӯхта мешаванд, ба функсияҳои тригонометрӣ асос меёбанд.

Ба сифати аргументи функсияи даврӣ бештар кунҷ хизмат мекунад. Пас, **кунҷ чист?** Онро чӣ тавр чен мекунанд? Шумо ба ин мафҳум дар алгебраи синфи 9 шинос шуда будед.

§ 1. Формулаҳои тригонометрии ҷамъ ва натиҷаҳои онҳо

Бо ёрии давраи воҳидӣ (дар синфи 9, боби IV, §§11-12) ду гурӯҳи формулаҳои тригонометриро ҳосил карда будем:

гурӯҳи I – айниятҳои тригонометрие, ки вобастагии байни ҳамон як аргументро ифода мекунанд;

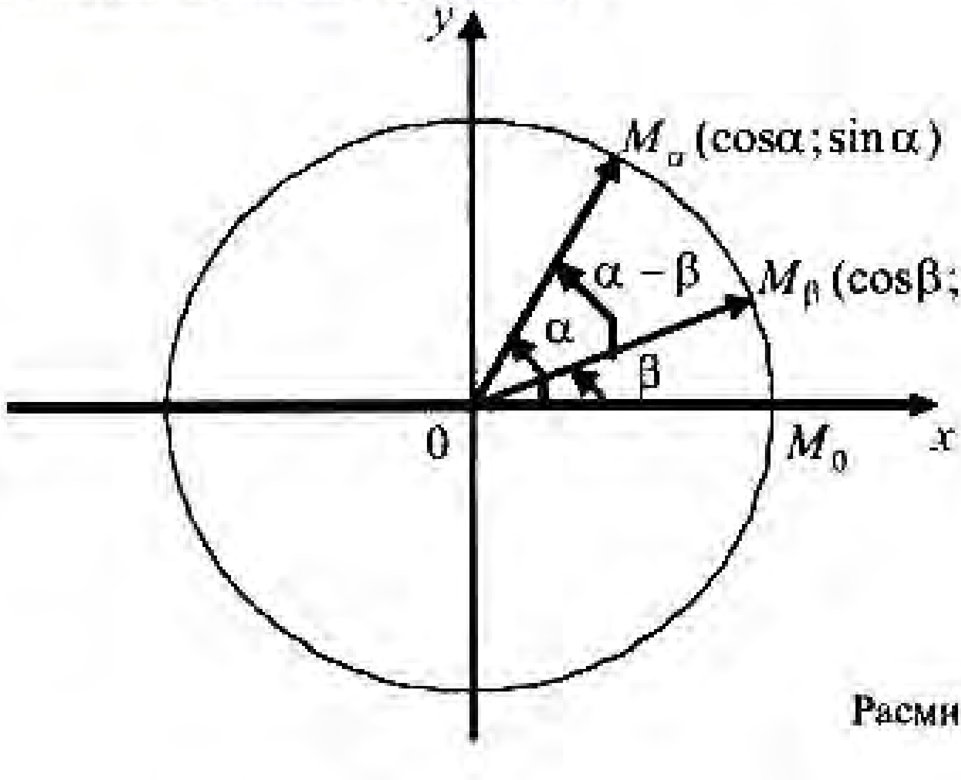
гурӯҳи II – айниятҳои тригонометрие, ки формулаҳои мувофиқояндаро муқаррар менамуданд.

Акнун мақсад мегузорем, ки формулаҳои гурӯҳи III – суммаи функсияҳои тригонометриро ҳосил намоем.

Ибтидо формулаи фарқи косинусҳоро исбот мекунем.

***Теорема.* Косинуси фарқи ду кунҷ ба ҳосили зарби косинусҳо плюс ба ҳосили зарби синусҳои онҳо баробар аст.**

Исбот. Дар давраи воҳидӣ кунҷҳои α ва β-ро месозем. Фарз мекунем, ки нуқта аз ҳолати ибтидоӣ M_0 ба равиши мусбат ҳаракат карда, мавқеи M_β ва M_α-ро гирад, дар он сурат ин нуқтаҳо бо ёрии векторҳои $\overline{OM_\alpha}$ ва $\overline{OM_\beta}$ ба равиши мусбати тири абсисса мувофиқан кунҷҳои α ва β-ро ташкил медиҳанд (расми 1).



Расми 1

Векторҳои $\overrightarrow{OM_\alpha}$ ва $\overrightarrow{OM_\beta}$ - ғайрисифрианд: $\left|\overrightarrow{OM_\alpha}\right| = \left|\overrightarrow{OM_\beta}\right| = 1$. Ба Шумо аз курси геометрияи синфи 9 ҳосили зарби скалярии ин векторҳо маълум аст:

$$\overrightarrow{OM_\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_\beta} = \left|\overrightarrow{OM_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM_\beta}\right| \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

Аз ин ҷо: $$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\overrightarrow{OM_\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_\beta}}{\left|\overrightarrow{OM_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM_\beta}\right|}$$

Ҳосили зарби скалярии векторҳои $\overrightarrow{OM_\alpha}\{\cos\alpha;\sin\alpha\}$ ва $\overrightarrow{OM_\beta}\{\cos\beta;\sin\beta\}$ бо формулаи

$\overrightarrow{OM_\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_\beta} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$ ифода меёбад.

Он гоҳ:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

Теорема исбот шуд.

Натиҷаҳо.

<u>**Косинуси сумма**</u>. Суммаи ду кунҷро ҳамчун фарқ ифода кардан мумкин аст: $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$

Аз ин рӯ, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta)$

Азбаски косинус функсияи ҷуфт ва синус функсияи тоқ аст, бинобар ин

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

<u>**Синуси сумма**</u>. Яке аз формулаҳои мувофиковариро истифода мебарем:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Ба ҳамин тариқ,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (3)$$

Синуси фарқ. Дар формулаи охирин β-ро ба $(-\beta)$ иваз намуда ҳосил мекунем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Яъне, $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \qquad (4)$$

Мисолҳо меорем.

1. $\cos 75^\circ$ хисоб карда шавад.

Ҳал. Кунчи 75°-ро ҳамчун суммаи $30^\circ+45^\circ$ тасвир мекунем. Он гох,

$$\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos 30^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\cdot\sin 45^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\approx 0{,}259.$$

2. $\sin 105^\circ$-ро ҳисоб кунед.

Ҳал. $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 45^\circ=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Тангенси сумма. Мувофиқи таърифи тангенс навишта метавонем:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

Ба ҳамин тариқ,

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta} \qquad (5)$$

Тангенси фарқ. Дар формулаи (5) кунчи β-ро ба $(-\beta)$ иваз намуда ҳосил мекунем:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta} \qquad (6)$$

Исбот ва ба хотир гирифтани формулаи котангенси сумма ва фарқи ду кунҷ ҳеҷ зарурате надорад. Бо ин мақсад кифоя аст, ки $ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{1}{tg(\alpha\pm\beta)}$ истифода бурда шавад.

Ҳамин тавр, маълум гардид, ки формулаҳои ҷамъкунӣ асосан аз шаш формула иборат будааст. Аз ин формулаҳо истифода бурда ҳамаи формулаҳои мувофиқовариро ҳосил кардан мумкин аст. Масалан, агар $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ бошад,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\beta+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\beta=\sin\beta,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\beta+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\beta=\cos\beta$$

мешаванд. Формулаҳои боқимондаро мустақилона санҷед.

?

1. Формулаҳои косинуси сумма ва фарқи ду кунҷро нависед. Онҳоро бо сухан баён кунед.
2. Формулаҳои тангенси сумма ва фарқи ду кунҷро нависед.
3. Аз формулаҳои тангенси сумма ва фарқи ду кунҷ чӣ тавр формулаҳои котангенси сумма ва фарқро ҳосил мекунанд?

Машқҳо

Бе ҷадвал ҳисоб кунед (1°–3):

1°. а) $\cos 75^\circ$; б) $\cos 120^\circ$; в) $\sin 105^\circ$; г) $tg 15^\circ$; д) $\sin 285^\circ$.

2. $\cos(\alpha+\beta)$ ва $\cos(\alpha-\beta)$, агар $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{8}{17}$,

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ва $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ бошанд.

3. $tg(\alpha+\beta)$ ва $tg(\alpha-\beta)$, агар $ctg\alpha = \frac{1}{4}$ ва $ctg\beta = \frac{5}{6}$ бошанд.

Қимати ифодаҳоро ёбед (4°–6):

4°. а) $\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$;

б) $\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$;

в) $\sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ$;

г) $\cos 90^\circ \cos 30^\circ + \sin 90^\circ \sin 30^\circ$.

5. а) $\cos 107^\circ \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \sin 17^\circ$;

б) $\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ$;

в) $\sin 51^\circ \cos 21^\circ - \cos 51^\circ \sin 21^\circ$;

г) $\cos 16^\circ \cos 14^\circ - \sin 16^\circ \sin 14^\circ$.

6. а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\alpha - \sin\alpha$;

б) $2\cos(60^\circ - \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$;

в) $\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^\circ) - \sin\alpha + \cos\alpha$;

г) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos(\alpha - 30^\circ) + \sin\alpha$.

Содда кунед (7°–10*):

7°. а) $\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$; б) $\cos(\alpha-\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$.

8. а) $\sin(15^\circ + \alpha)\cos(5^\circ - \alpha) + \cos(15^\circ + \alpha)\sin(5^\circ - \alpha)$;

б) $\sin 3\alpha \cos\alpha - \cos 3\alpha \sin\alpha$;

в) $\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta$;

9. а) $\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha + \cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$;

в) $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$;

10*. а) $\sin^2(30+\alpha)+\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin^2\alpha$;

б) $\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos\alpha$.

Ҳисоб кунед (11°–14*):

11°. а) $\dfrac{tg19^\circ+tg26^\circ}{1-tg19^\circ tg26^\circ}$; б) $\dfrac{tg84^\circ-tg24}{1+tg84^\circ tg24^\circ}$.

12. а) $\dfrac{tg93^\circ-ctg57^\circ}{1+tg93^\circ ctg57^\circ}$; б) $\dfrac{1+tg2^\circ tg152^\circ}{tg152^\circ-tg2^\circ}$.

13. а) $\dfrac{ctg78^\circ-ctg303^\circ}{1+tg(-192^\circ)ctg237^\circ}$; б) $\dfrac{tg225^\circ-ctg81^\circ ctg69^\circ}{ctg261^\circ+tg201^\circ}$.

14*. $\cos(\alpha-\beta)$-ро ҳисоб кунед, агар $\sin\alpha+\sin\beta=0$ ва $\cos\alpha+\cos\beta=b$ бошад.

Н и ш о н д о д. Ҳар як баробариро ба квадрат бардошта натиҷаҳоро ҷамъ кунед.

Ёбед (15°–17):

15°. а) $\sin(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)$, агар $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha\in(0;\dfrac{\pi}{2})$ бошад;

б) $\cos(45^\circ-\beta)-\cos(45^\circ+\beta)$, агар $\sin\beta=\dfrac{1}{2}$, $\alpha\in(0;\dfrac{\pi}{2})$ бошад.

16. а) $\cos(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)$, агар $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\alpha\in(\dfrac{3\pi}{2};2\pi)$ бошад;

б) $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$, агар $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha \in (0;\frac{\pi}{2})$ бошад.

17. а) $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})-\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})$, агар $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ бошад;

б) $tg\alpha, tg\beta$, агар $tg\alpha+tg\beta=2$ ва $tg(\alpha+\beta)=4$ бошад.

§ 2. Формулаҳои кунҷи дучанда ва нисфи кунҷ

Формулаҳои кунҷи дучанда ҳолати хусусии формулаҳои ҷамъкунӣ мебошанд. Онҳо функсияҳои тригонометрии кунҷи дучанда 2α -ро ба воситаи функсияҳои тригонометрии кунҷи α ифода мекунанд.

Дар формулаи косинуси сумма $\alpha = \beta$ гузошта ҳосил мекунем:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad (1)$$

Агар тарафи рости баробарии (1)-ро ба воситаи синус ё косинуси кунҷи додашуда ифода намоем, формулаҳои зерин ҳосил мешаванд:

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \qquad \text{ва ё} \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Косинуси кунҷи дучанда ба фарқи квадратҳои косинус ва синуси кунҷи дода шуда баробар аст.

Ҳамин тавр, аз рӯи формулаи ҷамъи синусҳо пайдо мекунем:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (2)$$

Ин формуларо бо сухан баён кунед!

Айнан ҳамин тавр, барои тангенси кунҷи дучанда меёбем:

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \qquad (3)$$

Ба ҳамин тариқ, **гурӯҳи IV** айниятҳое мебошанд, ки онҳо формулаҳои кунҷи дучандаро ифода карда, аз се формулаи асосӣ иборатанд.

Аз формулаҳои кунҷи дучанда айниятҳое ҳосил кардан мумкин аст, ки онҳо ба функсияҳои тригонометрии нисфи кунҷ вобастаанд.

Дар формулаҳои $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ва ё $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ кунҷи α-ро ба $\frac{\alpha}{2}$ иваз намуда ҳосил мекунем:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \qquad \text{ва} \qquad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Аз ин ҷо: $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ ва $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

Ва ё
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (1)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (2)$$

Агар баробарии дуюмро ба якум тақсим кунем, формулаи тангенси нисфи кунҷ пайдо мешавад:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (3)$$

Ҳангоми истифодабарии формулаҳои (1-3) дар кадом чоряк ба охир расидани кунҷи $\frac{\alpha}{2}$-ро ба эътибор гирифта, дар назди радикал аломати мувофиқ гузошта мешавад.

Барои тангенси нисфи кунҷ боз формулаҳои

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (4)$$

ҷой доранд (онҳоро мустақилона исбот кунед).

Формулаи (4) аз он сабаб писандида аст, ки радикал надорад.

Ҳамин тавр, **гурӯҳи V** – айниятҳое мебошанд, ки онҳо функсияҳои тригонометрии нисфи кунҷро ифода намуда, аз се формулаи асосӣ иборат аст.

Мисолҳо.

1. $\sin\frac{\pi}{8}$ бе ҷадвал ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Кунҷи $\frac{\pi}{8}$ нисфи кунҷи $\frac{\pi}{4}$ аст.

Пас, $$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Азбаски $\frac{\pi}{8}$-кунҷи тез аст, пеш аз радикал аломати (+) гузоштем.

2. Дода шудааст: $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Ёбед: $\sin\frac{\alpha}{2}$ ва $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Ҳал. Аз шарт меёбем, ки $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$. Кунҷи α ба чоряки сеюм тааллуқ дорад. Дар он $\cos\alpha$ манфӣ аст:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2}=-\frac{15}{17}.$$

Инак, $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{15}{17}\right)}{2}}=\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{15}{17}\right)}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

1. Формулаҳои функсияҳои тригонометрии кунҷи дучандаро нависед. Онҳоро бо сухан баён кунед.
2. Нишон диҳед, ки айниятҳои тригонометрии нисфи кунҷ аз формулаҳои кунҷи дучанда ба амал меоянд.
3. Тангенси нисфи кунҷро ба воситаи синус ва косинуси кунҷ ифода намоед.

Машқҳо

18. Ҳисоб кунед (шифоҳӣ):

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; б) $2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1$; в) $1-2\sin^2 15^\circ$.

Ёбед (19° – 21):

19°. а) $\dfrac{2\sin 15^\circ \sin 75^\circ}{\cos 15^\circ \cos 75^\circ}$; б) $\dfrac{1-2\sin^2 30'}{2\cos^2 15^\circ - 1}$;

в) $\dfrac{2tg\dfrac{\pi}{12}}{1+tg^2\dfrac{\pi}{12}}$; г) $\sin 2\alpha,\ \cos 2\alpha,\ ctg 2\alpha$,

агар $\sin\alpha = \dfrac{5}{3},\ \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ бошад.

20. а) $\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\sin^2\dfrac{\pi}{12}$; б) $\dfrac{1-2\sin^2 22^\circ 30'}{2\cos^2 15^\circ - 1}$;

в) $\cos 2\alpha$, агар $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3},\ \alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

г) $\sin 2\alpha,\ \cos 2\alpha,\ tg 2\alpha,\ ctg 2\alpha$,

агар $\cos\alpha = \dfrac{5}{13},\ \alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ бошад.

21. а) $\dfrac{1-tg^2 15^\circ}{1+tg^2 15^\circ}$; б) $\dfrac{\cos 12^\circ \cos 78^\circ}{\cos 66^\circ}$; в) $\dfrac{3-tg^2 15^\circ}{3tg^2 15^\circ - 1}$;

г) $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$, агар $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

Нишон диҳед, ки:

22. 1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; 3) $tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$.

Содда кунед ($23^\circ - 25$):

23°. а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$; в) $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

г) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$; д) $\frac{\sin 80^\circ}{2\cos 40^\circ}$; е) $\frac{\cos 40^\circ + \sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}$.

24. а) $\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)$; б) $\frac{(1+\cos 2\alpha)^2}{\sin^2 2\alpha}$;

в) $\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{1-\sin 2\alpha}$; г) $ctg\alpha(1-\cos 2\alpha)$.

25. а) $(\sin\alpha - \sin 2\alpha)^2 + (\cos\alpha - \cos 2\alpha)^2$; б) $\frac{tg2\alpha - tg\alpha}{tg2\alpha\cdot tg\alpha}$.

Айниятҳоро исбот кунед ($26^\circ - 28$):

26°. а) $\sin 30^\circ\cdot\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha}{2}}{1-2\sin^2\frac{3\alpha}{2}} = \frac{1}{2}tg3\alpha$.

27. а) $\frac{tg\alpha\cdot tg2\alpha}{tg2\alpha - tg\alpha} = \sin 2\alpha$; б) $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \cos 2\alpha$.

28. а) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$; б) $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \cos 4\alpha$.

Нишондод. а) Ба $2\sin\frac{\pi}{5}$ сурат ва махраҷи касрро зарб ва тақсим кунед.

Ҳисоб кунед (29° – 32^*):

29°. а) $\sin 15^\circ$; б) $\cos 15^\circ$; в) $tg\,22^\circ 30'$;

г) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$, агар $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ бошад;

30. а) $\sin\frac{5\pi}{12}$; б) $\cos\frac{5\pi}{12}$; в) $tg\frac{5\pi}{12}$;

г) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$, агар $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ бошад.

31. а) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$, агар $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, агар $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ бошад.

32^*. а) $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$.

33. (Айниятҳои Берунӣ). Исбот кунед, ки:

а) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos\alpha}$; б) $\sin\frac{\alpha}{4} = \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\alpha}}$;

в) $\sin\frac{\alpha}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}$.

§ 3. Ифодаи функсияҳои тригонометрӣ ба воситаи тангенси нисфи кунҷ

Ҳангоми ҳисоб намудани қимати функсияҳои тригонометрии кунҷи x дар бисёр мавридҳо лозим меояд, ки решаи квадратӣ бароварда шавад. Ин ҳолат барои ҳалли муодилаҳо ва исботи айниятҳои тригонометрӣ чандон муфид нест. Бинобар ин, мувофиқи мақсад аст, ки функсияҳои тригонометрӣ ба воситаи яке аз онҳо ратсионалӣ ифода карда шавад. Ин вазифаро тангенси нисфи кунҷ иҷро карда метавонад.

***Т е о р е м а*. Агар $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ бошад, онгоҳ $\sin x$, $\cos x$ ва tgx ба воситаи $tg\frac{x}{2}$ бо ёрии формулаҳои зерин ратсионалӣ ифода меёбанд:**

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \quad (1) \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \quad (2)$$

ва
$$tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} \quad (3)$$

И с б о т. Мувофиқи формулаҳои дучанда навишта метавонем:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} \quad \text{ва} \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

Тарафи рости ин баробариҳоро ба $1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$ тақсим мекунем:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

Агар сурат ва махраҷи касрҳои ҳосилшударо ба $\cos^2\frac{x}{2}$ тақсим кунем ифодаҳои матлуб барои синус ва косинус ҳосил мешаванд:

$$\sin x = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};$$

$$\cos x = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

ва $\quad tgx = tg2\cdot\frac{x}{2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}.$

Маълум аст, ки ҳамаи ин формулаҳо ҳангоми $\alpha = \pi(2k+1)$ будан маъно надоранд.

Теорема исбот шуд.

Ин формулаҳоро бо сухан баён кунед.

Гурӯҳи VI ҳам аз се формулаи асосӣ иборат буда, айниятҳое мебошанд, ки синус, косинус ва тангенсро ратсионалӣ ифода мекунанд.

М и с о л. Ёбед: $\sin x+\cos x$, агар $tg\frac{x}{2} = 3$ бошад.

Ҳ а л. $\quad \sin x + \cos x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} =$

$$=\frac{2tg\frac{x}{2}-tg^2\frac{x}{2}+1}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cdot 3-9+1}{1+9}=-0{,}2.$$

?

1. $sinx$-ро бо ёрии тангенси нисфи кунҷ чӣ тавр ифода кардан мумкин аст? – Косинуси кунҷро чӣ?
2. Формулаи тангенси кунҷро, ки ба воситаи тангенси нисфи кунҷ ифода ёфтааст, нависед.

Машқҳо

Ёбед ($34^{\circ}-36^{*}$):

34°. 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $tg\alpha$;

4) $\sin 2\alpha$, агар $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ бошад.

35. 1) $\cos 2\alpha$; 2) $tg2\alpha$, агар $tg\alpha=\frac{3}{4}$ бошад;

3) $\sin 4\alpha$, агар $tg\alpha=3$ бошад;

4) $\cos 4\alpha$, агар $tg2\alpha=8$ бошад.

36*. 1) $\frac{3+2\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$, агар $tg\frac{\alpha}{2}=2$ бошад.

2) $\cos^2 2\alpha$, агар $tg\alpha=\sqrt{3}$ бошад.

3) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$, агар $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ бошад.

4) $\frac{\sin\alpha}{2-5\cos\alpha}$, агар $tg\frac{\alpha}{2}=2$ бошад.

§ 4. Табдилдиҳии суммаи функсияҳои тригонометрӣ ба ҳосили зарб

Айниятҳои гурӯҳи III имконият медиҳанд, ки суммаи функсияҳои тригонометрӣ ба ҳосили зарб табдил дода шаванд.

Фарз мекунем, ки $\sin x + \sin y$ -ро ба ҳосили зарб табдил додан лозим аст. Формулаҳои сумма ва фарқи синуси ду аргументро менависем:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad (2)$$

Баробариҳои якум ва дуюмро аввал ҷамъ ва баъд аз якум баробариҳои дуюмро тарҳ карда ҳосил мекунем:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \quad (3)$$

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \quad (4)$$

Акнун н о м а ъ л у м и н а в дохил мекунем:

$$\alpha+\beta = x, \qquad \alpha-\beta = y \quad (5)$$

Баробариҳои (5)-ро ҷамъ ва баъд тарҳ карда меёбем:

$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \qquad \beta = \frac{x-y}{2}$$

Аз рӯи ин номаълумҳо баробариҳои (3) ва (4) намуди зеринро мегиранд:

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} \quad (6)$$

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}} \quad (7)$$

Формулаи шашро ин тавр шарҳ медиҳем: **суммаи синусҳои ду кунҷ ба дучандаи ҳосили зарби синуси нимсумма ба косинуси нимфарқи ин кунҷҳо баробар аст.**

Ба монанди ҳамин, формулаи ҳафтум хонда мешавад (баён кунед!)

Айнан ҳамин тавр, аз айниятҳои

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned} \qquad (8)$$

формулаҳои сумма ва фарқи ду косинусҳоро меёбем:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \qquad (9)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad (10)$$

Тафсири шифоҳии формулаҳои нуҳум ва даҳумро аз ёд набаройед!

Мисолҳо. Ифодаҳои зеринро ба ҳосили зарб табдил диҳед:

1. $\sin 40^\circ+\sin 16^\circ=$ (мувофиқи формулаи (6))=

$$=2\sin\frac{40^\circ+16^\circ}{2}\cdot\cos\frac{40^\circ-16^\circ}{2}=2\sin 28^\circ\cos 12^\circ.$$

2. $\cos\alpha-\sin\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\sin\alpha=$ (аз рӯи формулаи (7))=

$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\alpha}{2}=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha).$$

3. $\underbrace{\sin x+\sin 2x}+\underbrace{\sin 3x+\sin 4x}=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=$

$$=2\cos\frac{x}{2}(\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{7x}{2})=4\sin 2{,}5x\cos x\cos 0{,}5x.$$

4. Айниятро исбот кунед: $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=tg3\alpha$

Тарафи чапро мувофиқи формулаҳои (6) ва (9) табдил медиҳем: $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\dfrac{2\sin 3\alpha\cdot\cos 2\alpha}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha}=tg3\alpha.$

? 1. Бо ёрии кадом айниятҳо суммаи функсияҳои тригонометрӣ ба ҳосили зарб табдил дода мешаванд?
2. Тарзи ба хотиргирии айниятҳои ҳосилшударо фаҳмонед.

Машқҳо

37. Ёбед (шифоҳӣ): а) Дар кадом қимати α баробарии

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{1-\cos\alpha}$$ дуруст аст?

б) Оё дуруст аст, ки $\sin\frac{2\pi}{16} + \sin^2\frac{7\pi}{16} = 1$ аст?

Ба ҳосили зарб табдил диҳед (38° – 40):

38°. а) $\cos 16^\circ - \cos 36^\circ$; б) $\sin 9^\circ - \sin 7^\circ$;

в) $\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{2\pi}{9}$; г) $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$.

39. а) $\cos 25^\circ + \sin 25^\circ$; б) $\sin 40^\circ - \cos 70^\circ$;

в) $\cos\frac{4\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{9}$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

д) $\sin\alpha + \cos\alpha$.

40. а) $\frac{\cos 38^\circ + \cos 22^\circ}{\cos 38^\circ - \cos 22^\circ}$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

в) $\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \sin 7\alpha$;

г) $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha$.

Айниятҳоро исбот кунед (41° – 44^*):

41°. а) $\frac{\cos 3\alpha - \cos\alpha}{\sin 2\alpha} = -2\sin\alpha$; б) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -ctg\frac{\alpha+\beta}{2}$;

в) $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$;

г) $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = ctg\frac{\alpha+\beta}{2}$.

42. а) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=tg\alpha\cdot tg\beta;$

б) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}=tg3\alpha;$ в) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=tg(\dfrac{\pi}{4}+\alpha);$

43. а) $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2};$ б) $\cos\dfrac{\pi}{5}-\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}.$

в) $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})+\cos(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})=2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\alpha}{2});$

г) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot ctg\alpha=1;$ д) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=ctg\alpha.$

44*. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бошад.

§ 5. Табдилдиҳии ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ ба сумма

Дар бисёр ҳолатҳо ҳангоми ҳалли муодилаҳо табдилдиҳиҳои айниятҳои тригонометрӣ ва ҳисоббарориҳо лозим меояд, ки ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ ба суммаи ин функсияҳо табдил дода шаванд. Ба ин мақсад чор формулаи аввалини гурӯҳи III –ро менависем:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (4)$$

Баробариҳои якум ва дуюмро ҷамъ карда ҳосил мекунем:

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)} \qquad (5)$$

Аз баробарии якум баробарии дуюмро тарҳ карда меёбем:

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)} \qquad (6)$$

Ду баробарии охиринро ҷамъ карда пайдо мекунем:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)} \qquad (7)$$

Гурӯҳи VII формулаҳои айниятҳоеро ифода мекунанд, ки онҳо суммаи функсияҳои тригонометриро ба зарб ва баръакс зарбро ба сумма табдил медиҳанд.

Хулоса, мо ҳафт гурӯҳи айниятҳо (табдилдиҳиҳо)-ро дида баромадем, ки онҳо функсияҳои тригонометриро бо ҳам алоқаманд менамоянд. Ба ин табдилдиҳиҳо ва сохти муайянкунандаи онҳо **табдилдиҳиҳои маълум** ном медиҳем. Ба хотир гирифтани ҳамаи онҳо зарурате надоранд ва бинобар ин лозим меояд, ки аз ҷадвалҳо ва маълумотномаҳо истифода бурда тавонем.

Ҳангоми табдилдиҳиҳои айниятҳои тригонометрӣ интихоби тарзи ба амал овардани онҳо аз ҳама муҳим ҳисоб мешавад.

Акнун истифодаи **методи табдилдиҳиҳои маълумро** дар ҳалли мисолҳо дида мебароем.

1. Ифодаи $\cos^2 x\cos 3x$ -ро дар намуди суммаи функсияҳои тригонометрӣ нависед.

Ҳ а л. Ин тавр муҳокима меронем. Ифодаи дода шуда аз **табдилдиҳии маълум** (формулаи панҷум, § 5) бо чӣ фарқ мекунад? Дар ин ҷо $\cos x$ ба квадрат бардошта шудааст. Ин фарқиятро аз байн бардоштан лозим. Вале чӣ тавр? Мувофиқи табдилдиҳии маълум (§ 2) $\cos^2 x$ -ро ба ифодаи $\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ иваз намуда ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos 3x$$

Ба ҷамъшавандаи дуюми ифода айнияти маълумро татбиқ карда меёбем:

$$\cos^2 x\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{4}(\cos x+\cos 5x)=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 5x.$$

2. Содда намоед: $\cos^2 5^\circ+\cos^2 1^\circ-\cos 6^\circ\cos 4^\circ$

Ҳ а л. Оё ифодаи додашуда дар намуди умумӣ маълум аст? – Не. - Оё аъзоҳои маълум дорад? – Бале, якто: $\cos 6^\circ \cos 4^\circ$.

$$\cos 6^\circ \cos 4^\circ = \frac{1}{2}(\cos 2^\circ + \cos 10^\circ).$$

- Ду аъзои аввала чӣ? – Онҳо табдилдиҳиҳои маълуми гурӯҳи IV-ро баён мекунанд:

$$\cos^2 5^\circ = \frac{1+\cos 10^\circ}{2}; \qquad \cos^2 1^\circ = \frac{1+\cos 2^\circ}{2}.$$

Пас, $$\cos^2 5^\circ + \cos^2 1^\circ - \cos 6^\circ \cos 4^\circ = \frac{1}{2}(1+\cos 10^\circ) +$$

$$+\frac{1}{2}(1+\cos 2^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 2^\circ + \cos 10^\circ) = 1.$$

?

1. Ба воситаи кадом айниятҳо ҳосили зарби функсияҳои тригонометрӣ ба сумма табдил дода мешаванд?
2. Ҳафт гурӯҳи айниятҳои тригонометрӣ табдилдиҳиҳои маълум ном гирифтанд. Дар зери ин мафҳум чиро мефаҳмед? Шарҳ диҳед.

Машқҳо

45. Ҳисоб кунед (шифоҳӣ):

а) $(a\sin\pi + b\cos\pi + mtg\pi)^3$; б) $\dfrac{tg^2 60^\circ - tg 45^\circ}{\sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ}$

Ба сумма табдил диҳед (46° – 49^*):

46°. а) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; б) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$;

в) $\sin 17^\circ \sin 43^\circ$; г) $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$.

47. а) $\dfrac{2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}$; б) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$;

в) $\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$.

48. а) $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)$;

б) $\cos55^\circ\cdot\cos65^\circ\cos175^\circ$.

49*. а) $\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cos8\alpha\cos16\alpha$;

б) $\cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ$.

Нишондод. Аз формулаи $\cos\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$ истифода баред.

§ 6. Табдилдиҳиҳои айниятии ифодаҳои тригонометрӣ

Масъалаи **табдилдиҳиҳои айниятиро** ба масъалаи муайян кардани **мавқеи маҳал** муқоиса кардан мумкин аст.

Шахсе, ки хоҳиши рафтани ягон ҷой дорад, одатан ӯ ҳамаи роҳҳои маҳалро намедонад. Тасодуфҳои зиёде пеш омаданаш мумкин аст. Вале ба ӯ муяссар мегардад, ки аввал як нишонаи муайянкунанда A-ро маълум созад. Баъди ин, то ба нишонаи дигар B роҳ паймудан ба ӯ имконият пайдо мешавад. Ин нишона ба ӯ ёфтани роҳи сеюм C-ро муайян мекунад то он даме, ки ба мақсад ноил гардад.

Ба монанди он ки ҳамаи гуногуншаклии нишонаҳои роҳро баён кардан мумкин нест, айнан ҳамон тавр ҳамаи табдилдиҳиҳои айниятҳои тригонометриро низ ифода кардан имконнопазир аст.

Бо вуҷуди он, баъзе аз предметҳо ва дар маҳал ҷойгиршавии онҳоро аниқ тасвир намуда, ин ашёҳоро ба сифати **аломатҳои муайянкунанда** қабул кардан мумкин аст.

Ба ҳамин монанд, лозим меояд, ки баъзе ифодаҳои тригонометрӣ ва табдилдиҳии айниятии онҳоро ҳамчун **нишонаҳои муайянкунанда** интихоб карда, баҳри мукаммал аз худ намудани онҳо саъю кӯшиш намоем.

Инак, татбиқи ҳафт гурӯҳи айниятҳои тригонометриро, ки онҳо методи табдилдиҳиҳои маълум ном гирифтаанд, ҳангоми содда намудани ифодаҳои тригонометрӣ дида мебароем.

Мисоли 1. Ифодаро содда кунед: $\cos(60^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)$

Ҳал. Мувофиқи формулаҳои косинуси фарқи ду кунҷ ва косинуси сумма навишта метавонем:

$$\cos(60^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)=$$

$$=\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha+\sin 60^\circ\cdot\sin\alpha+\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha-\sin 60^\circ\cdot\sin\alpha=$$

аъзоҳои монандро ислоҳ намуда ҳосил мекунем:

$$=2\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha=\cdot\cos\alpha$$

Мисоли 2. Содда кунед: $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$

Ҳал. Дар сурати ифода формулаи синуси кунҷи дучандаро татбиқ мекунем:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=$$

баробарии $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$-ро дар назар дошта, навишта метавонем:

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=1.$$

Мисоли 3. Айниятро исбот кунед: $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=tg^2\dfrac{\alpha}{2}$

Исбот. Т а р з и 1. Тарафи чапи айниятро гирифта, аз формулаи синуси кунҷи дучанда истифода мебарем:

$$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

зарбкунандаи умумиро аз қавс бароварда, баъди ихтисоркунӣ пайдо мекунем:

$$=\frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Ба сурат ва махраҷи ифодаи охирин айниятҳои маълум

$1=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ва $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$-ро истифода намуда ҳосил мекунем:

$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=tg^2\frac{\alpha}{2}$$

Т а р з и 2. Сурат ва махрачи ифодаро ба $\sin\alpha$ тақсим мекунем:

$$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{\frac{2\sin\alpha}{\sin\alpha}-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{2\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2(1-\cos\alpha)}{2(1+\cos\alpha)}=$$

Мувофиқи айниятҳои тригонометрии нисфи кунҷ $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ ва $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ навишта метавонем:

$$=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=tg^2\frac{\alpha}{2}$$

Мисоли 4. Ифодаро ба намуди ҳосили зарб нависед:

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

Ҳал. Аз рӯи формулаи $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ифодаро табдил медиҳем: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=$ ифодаҳои дар қавс буда табдилдиҳиҳои маълуманд, ба онҳо формулаҳои фарқ ва суммаи синуси ду кунҷро, ки ба зарб табдил дода шудаанд, татбиқ мекунем:

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

Аз формулаи синуси кунҷи дучанда истифода мебарем:

$$= \sin 2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin 2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$$

Ба ҳамин тариқ, $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$ будааст.

Мисоли 5. Айниятро исбот кунед:

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2 + (\cos\alpha+\cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Исбот. Қавсҳоро мекушоем. Гурӯҳбандӣ намуда, формулаи фарқи синуси ду аргументро истифода мебарем:

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2 + (\cos\alpha+\cos\beta)^2 = \sin\alpha^2 + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta +$$

$$+\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) +$$

$$+(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= 2 + 2\cos(\alpha-\beta) = 2(1+\cos(\alpha-\beta)) = 2\cdot 2\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

?

1.Чӣ гуна табдилдиҳиро табдилдиҳии айниятии тригонометрӣ меноманд?

2. Табдилдиҳиҳои маълуми тригонометрӣ барои табдилдиҳиҳои айниятии ифодаҳои тригонометрӣ ҳамчун нишонаҳои муайянкунанда хизмат мекунанд. Шумо инро чӣ тавр маънидод мекунед?

Машқҳо

Ҳисоб кунед ($50^{\circ} - 52^{*}$)

50°. а) $\sin 135^{\circ}$; б) $\cos 135^{\circ}$; в) $\cos 105^{\circ}$; г) $\sin 75^{\circ}$.

51. а) $\sin\frac{13\pi}{12}$; б) $\cos\frac{5\pi}{12}$;

в) $\sin 21^{\circ}\cdot\cos 9^{\circ} + \cos 21^{\circ}\cdot\sin 9^{\circ}$;

г) $\cos 32^{\circ}\cdot\cos 58^{\circ} - \sin 32^{\circ}\cdot\sin 58^{\circ}$.

52^{*}. а) $\cos 105^{\circ} + \cos 75^{\circ}$;

б) $\sin 278^\circ \cdot \cos 68^\circ - \cos 278^\circ \cdot \sin 68^\circ$;

в) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$; г) $\cos^2 \dfrac{7\pi}{12} - \sin^2 \dfrac{7\pi}{12}$.

Содда кунед ($53^\circ - 55^*$):

53°. а) $\sin 12^\circ \cdot \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cdot \cos 12^\circ$; б) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$;

в) $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot tg\alpha$;

г) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

54. а) $\dfrac{\cos^2 \alpha - ctg^2 \alpha}{tg^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$; б) $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} - tg^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

в) $\dfrac{tg\alpha}{1 - tg^2 \alpha} \cdot \dfrac{ctg^2 \alpha - 1}{ctg\alpha}$; г) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos\alpha} - \cos\alpha$.

55^*. а) $\sin^2 26^\circ - \sin^2 64^\circ$; б) $2\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ$;

в) $\cos^4 \alpha - 6\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$;

г) $\cos 4\alpha + \sin 4\alpha \cdot tg 2\alpha$.

Айниятҳоро исбот кунед ($56^\circ - 58^*$):

56°. а) $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot tg\alpha = tg\alpha$;

б) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$;

в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1$;

г) $4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$.

57. а) $\sin 2\alpha - tg\alpha = \cos 2\alpha \cdot tg\alpha$; б) $(tg\alpha + ctg\alpha) \cdot \sin 2\alpha = 2$;

в) $1 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin 2\alpha$; г) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$.

58^*. а) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3 \alpha$; б) $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos\alpha$;

в) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 2$; г) $\dfrac{\cos^3 \alpha - \sin 3\alpha}{1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

§ 7. Функсияҳои тригонометрии аргументаш ададӣ

Дар системаи координатаи декартӣ давраи воҳидиеро мекашем, ки маркази он дар ибтидои координат воқеъ бошад.

Нуқтаи сарҳисобро бо M_0 ишорат мекунем. Ба он координатаи (1;0) мувофиқ меояд (расми 2). Бигузор нуқтаи М аз рӯи давра ҳаракат кунад. Ҳангоми дар атрофии марказ 0 ба кунҷи α давр задан ин нуқта ҳолати M_α-ро мегирад. Координатаи онро бо x ва y ишорат мекунем:

Таъриф. Синуси адади α гуфта ординатаи нуқтаи M_α ва косинуси адади α абсциссаи нуқтаи M_α-ро меноманд, ки дар давра ба ин адад мувофиқ меоянд.

Менависанд: $\sin\alpha = y;\ \cos\alpha = x.$ (1)

Нуқтаи M_α бошад намуди зеринро мегирад: $M_\alpha(\cos\alpha;\sin\alpha)$. Аз расм айён аст, ки барои координатаҳои нуқтаи дилхоҳи давраи воҳидӣ $M_\alpha(x;y)$ муодилаи $x^2+y^2=1$ ҷой дорад.

Агар муносибатҳои (1)-ро ба назар гирем

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \qquad (2)$$

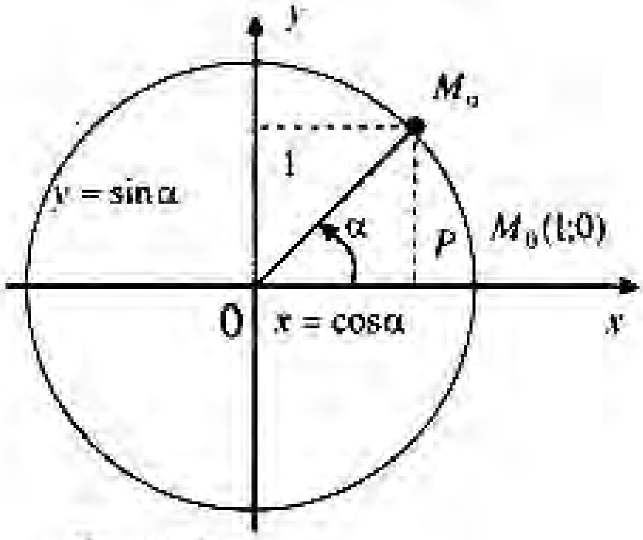
мешавад. Формулаи (2)-ро **айнияти асосии тригонометрӣ** меноманд.

Таъриф. Тангенси адади α гуфта нисбати ордината ба абсциссаро меноманд.

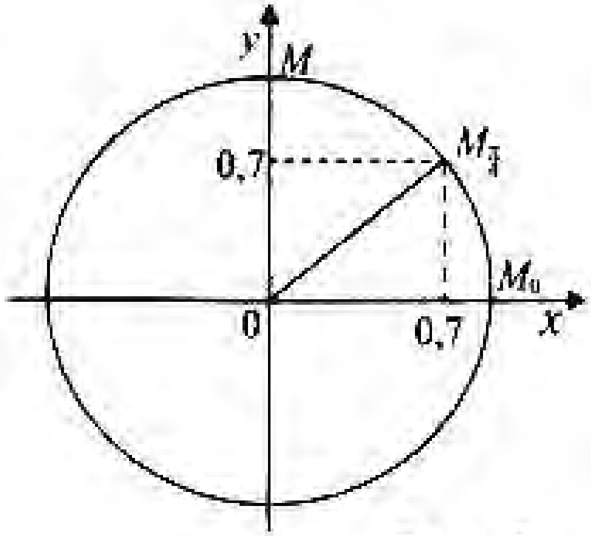
Мувофиқи таъриф $tg\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\right)$.

Котангенси адади α гуфта нисбати абсцисса ба ординатаро меноманд.

Аз рӯи таъриф $ctg\alpha=\dfrac{x}{y}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\alpha\neq\pi n, n\in Z)$.



Расми 2



Расми 3

Аз ин таърифҳо **қоида** (алгоритм)-и зерини дода шудани функсияҳои тригонометрӣ бармеояд:

1. ба адади α нуқтаи мувофиқи давраро меёбем;
2. координатаҳои нуқтаро чен мекунем;
3. нисбатҳои матлубро маълум месозем.

Мисол меорем.

Қимати функсияҳои тригонометриро барои адади $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ёбед.

Ҳал. Давраи воҳидӣ месозем (расми 3). Камони $M_0M = \frac{\pi}{2}$ аст. Аз нуқтаи сарҳисоб M_0 ба равиши мусбат ҳаракат карда адади $\frac{\pi}{4}$-ро қайд мекунем ки ба он нуқтаи $M_{\frac{\pi}{4}}$ рост меояд ва дар нисфи камони MM_0 ҷойгир мешавад. Координатаҳои онро чен карда меёбем: $x \approx 0{,}7$; $y \approx 0{,}7$.

Он гоҳ, навишта метавонем: $M_{\frac{\pi}{4}}(0{,}7; 0{,}7)$.

Пас, $\cos\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7$; $\sin\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7$; $tg\frac{\pi}{4} = ctg\frac{\pi}{4} = 1$.

$$tg\frac{\pi}{6}\approx\frac{1}{2}:0{,}86\approx0{,}58;\ \ ctg\frac{\pi}{6}=0{,}86:\frac{1}{2}\approx1{,}72.$$

Қимати тақрибии функсияҳои тригонометрӣ аз рӯи микрокалкуляторҳо ва ҷадвалҳои махсус (В.М.Брадис. Ҷадвалҳои чорраҳамаи математикӣ) муайян карда мешаванд.

Оё қиматҳои функсияҳои тригонометриро донистан зарур аст? Бале, лозиманд. Ҳангоми муайян намудани нишебии обдави бом, нишебиҳои роҳ, моилии зинапояи хонаҳои истиқоматӣ, моилии пахлӯи хандақ, баландии предметҳои дастнорас ва ғ. лозим меояд, ки кунҷҳои моилӣ ҳисоб карда шаванд. Ин корро танҳо бо ёрии ҳисоб намудани қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ ба ҷо овардан мумкин аст.

Бо кунҷҳои $0^\circ(0)$, $30^\circ(\frac{\pi}{6})$, $45^\circ(\frac{\pi}{4})$, $60^\circ(\frac{\pi}{3})$, $90^\circ(\frac{\pi}{2})$, $180^\circ(\pi)$, $270^\circ(\frac{3\pi}{2})$, $360^\circ(2\pi)$ минбаъд ҳар лаҳза вомехӯрем. Аммо барои ин кунҷҳо қиматҳои ҳамаи функсияҳои тригонометриро ба хотир гирифтан шарт нест.

Дар ин бобат, фаромӯш набояд кард, ки:

1. аз рӯи формулаҳои мувофиқоварӣ қимати функсияи тригонометрии адади дилхоҳро бо ёрии функсияи кунҷе, ки дар ҳамон як чоряк мехобанд, табдил дода ҳисоб кардан мумкин аст;

2. агар қимати яке аз функсияҳои тригонометрӣ маълум бошад, аз рӯи айниятҳои асосӣ ва чоряке, ки дар он қимати аргумент шомил аст, қимати функсияҳои тригонометрии боқимондаро муайян кардан душвор нест;

3. донистани қимати функсияҳои тригонометрӣ барои кунҷҳои $30^\circ(\frac{\pi}{6})$, $45^\circ(\frac{\pi}{4})$ ва $60^\circ(\frac{\pi}{3})$ ҳалли аксарияти масъалаҳои амалиро осон мегардонад.

Қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ дар ҷадвали зерин дода шудаанд (Ҷадвали 1):

Кунҷ α / Номи функсия	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Вуҷуд надорад	0	Вуҷуд надорад	0
$ctg\alpha$	Вуҷуд надорад	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Вуҷуд надорад	0	Вуҷуд надорад

Шарҳ медиҳем, ки ададҳои ҷадвал чӣ тавр ҳосил шудаанд. Фарз мекунем, ки $\alpha = \frac{\pi}{6}$ бошад (нигар ба расми 3). Он гоҳ нуқтаи ҳаракаткунанда ба равиши мусбат бо тири Ox кунҷи $30^\circ (\frac{\pi}{6})$ -ро ташкил медиҳад. Дар секунҷаи росткунҷа катете, ки ба муқобили кунҷи 30° меҳобад, ба нисфи гипотенуза баробар аст, яъне $y = \frac{1}{2}$.

Аз айнияти $x^2 + y^2 = 1$ меёбем, ки $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пас, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $ctg\frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} = \sqrt{3}$.

Ба ҳамин монанд қиматҳои функсияҳои тригонометрии дигар кунҷҳо ҳисоб карда мешаванд. Тавсия медиҳем, ки Шумо онҳоро ҳисоб кунед.

Мисолҳо.

1. Дода шудааст: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Қимати функсияҳои $\sin\alpha$, $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳ а л. Кунҷи α дар чоряки чорум воқеъ аст; Дар ин чоряк синус манфӣ мебошад. Аз айнияти $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ меёбем:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \qquad \text{ва} \qquad \sin\alpha = -\frac{4}{5};$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3}; \qquad ctg\alpha = -\frac{3}{4}.$$

2. Дода шудааст: $tg\alpha = -2$, $\alpha \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. Қимати *sina*, *cosa* ва *ctga* -ро ёбед:

Ҳ а л. Айнияти $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$-ро табдил дода $\cos\alpha$ -ро ба воситаи $tg\alpha$ ифода мекунем:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

Кунҷ ба чоряки сеюм тааллуқ дорад. Косинус, синус дар ин чоряк манфианд.

Пас, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $ctg\alpha = -\frac{1}{2}$.

?

1. Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенси ададро диҳед.
2. Қоидаи дода шудани функсияҳои тригонометриро баён кунед.
3. Аз рӯи формулаҳои мувофиқоварӣ қимати функсияи тригонометрии дилхоҳро чӣ тавр ёфтан мумкин аст?
4. Ба Шумо таърифи тригонометрии кунҷи тез аз геометрияи синфи 8 маълум аст. Нишон диҳед, ки онҳо ҳолати хусусии таърифҳои дар § 7 баён гардида ҳисоб мешаванд.

Машқҳо

Ҳисоб кунед ($59^\circ - 61^*$):

59*. а) $\sin 150^\circ$; б) $\cos\frac{2\pi}{3}$; в) $tg120^\circ$;

г) $ctg135^\circ$; д) $5\sin 90^\circ + 2\cos 0^\circ - 2\sin 270^\circ + 10\cos 180^\circ$;

60. а) $\cos 2\frac{2}{3}\pi$; б) $\sin(7\pi + \frac{\pi}{6})$; в) $tg\frac{4\pi}{3}$;

г) $ctg\frac{11\pi}{6}$; д) $4\sin\pi - 2\cos\frac{3\pi}{2} - tg\pi + \cos\pi - \cos 0$;

61*. а) $\cos^2\frac{77\pi}{4}$; б) $\sin 930^\circ - \cos^2(-675^\circ) + tg^2 855^\circ$;

в) $a^3 tg\frac{\pi}{4} + a^2 b tg^2\frac{\pi}{3} + 9ab^2 ctg^2\frac{\pi}{3} - 2b^2\cos\frac{\pi}{6}$.

62. (Шифоҳӣ). қиматҳои функсияи $y = \frac{8}{x-2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}$-ро ҳисоб кунед, агар $x = 1, 2, 3, 4$ бошад.

Аз рӯи қимати яке аз функсияҳо қимати се функсияи боқимондаро ёбед ($63^\circ - 66^*$):

63°. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

64. $tg\alpha = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

65. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$;

66*. $ctg\alpha = -\frac{5}{12}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Оё ҳамингуна адади α вуҷуд дорад, ки барои он баробариҳои зерин ҷой дошта бошанд? ($67^\circ - 69^*$):

67*. а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; б) $tg\alpha = \frac{1}{3}$, $ctg\alpha = 3$.

68. а) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = 0{,}5$; б) $tg\alpha = 1+\sqrt{2}$, $ctg\ \alpha = -1$.

69*. а) $\sin\alpha = \frac{36}{85}$, $\cos\alpha = -\frac{77}{85}$; б) $tg\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, $ctg\alpha = 3\sqrt{2}-4$.

§ 8. Функсияҳои даврӣ

Функсияҳои тригонометрӣ – функсияҳои даврианд.

Таъриф. Функсия даврӣ ном дорад, агар ҳамингуна адади $T \neq 0$ вучуд дошта бошад, ки илова ва ё кам намудани он ба қимати дилхоҳи аргумент қимати функсияро тағйир надиҳад.

Менависанд: $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$.

Т е о р е м а. Адади 2π даври синус ва косинус аст.

Исбот. Нишон медиҳем, ки $\cos(x+2\pi) = \cos x$ ва $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

Дар ҳақиқат, ҳангоми ҳаракат кардани нуқта аз рӯи давра ба ҳар як нуқтаи M_x нуқтаи $M_{x+2\pi}$ рост меояд (ба монанди расми 2). Ин нуқтаҳо бо координатаҳояшон намуди зайлро мегиранд:

$$M_x(\cos x; \sin x) \text{ ва } M_{x+2\pi}(\cos(x+2\pi); \sin(x+2\pi)).$$

Азбаски ин нуқтаҳо болои ҳам меафтанд, координатаҳои низ бо ҳам мувофиқанд, яъне:

$$\cos x = \cos(x+2\pi); \quad \sin x = \sin(x+2\pi).$$

Теорема исбот шуд.

Қайд кардан лозим аст, ки қимати косинус (синус) барои нуқтаи дилхоҳи давра такрор шуда меистад, агар он ба адади бутуни гардишҳо давр занад, яъне

$$\cos x = \cos(x+2\pi n), \quad \sin x = \sin(x+2\pi n), \quad n \in Z.$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки адади $2\pi n (n \in Z)$ ҳам даври косинус (синус) будааст.

Н а т и ҷ а. Косинус ва синус даври беохир доранд. Дар байни ин даврҳо адади 2π мақоми махсус дорад, зеро он даври хурдтарини мусбати косинус (синус) мебошад. Дар воқеъ, қимати хурдтарини мусбати Т бояд кадом адад бошад, то ки $\cos x = \cos(x+T)$ шавад?

Фарз мекунем, ки нуқта дар ҳолати $M_{\frac{\pi}{2}}(x=\frac{\pi}{2})$ воқеъ аст, онгоҳ $\cos\frac{\pi}{2}=0$. Ғайр аз ин $\cos\frac{\pi}{2}=\cos(\frac{\pi}{2}+T)=0$. Ин вазъият ҳамон вақт имкон дорад, ки агар T аз 2π хурд набошад, яъне $T=2\pi$. Пас, адади 2π - даври хурдтарини мусбати косинус будааст.

Агар ҳаракати нуқта ба равиши манфӣ сурат гирад, он гоҳ $\cos x = \cos(x-2\pi)$, яъне адади -2π даври хурдтарини манфии косинус аст.

Ба ҳамин монанд муқаррар кардан мумкин аст, ки даври хурдтарини мусбати синус адади 2π мебошад.

Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки:

$$tgx=\frac{\sin(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)}=\frac{\sin x}{\cos x};\quad ctgx=\frac{\cos(x+2\pi)}{\sin(x+2\pi)}=\frac{\cos x}{\sin x},$$

яъне, яке аз даврҳои тангенс (котангенс) адади 2π аст.

М и с о л ҳ о.

1. Исбот намоед, ки функсияҳои зерин даврӣ буда, даври мусбати хурдтаринашон Т аст:

а) $f(x)=\cos(x+\frac{2\pi}{3}),\quad T=2\pi.$

б) $f(x)=\sin\frac{4x}{5},\quad T=\frac{5}{2}\pi.$

Ҳ а л. а) $f(x+2\pi)=\cos\left((x+2\pi)+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+2\pi\right)=$

$$= \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$$

пас, даври функсия 2π будааст.

б) $f\left(x + \frac{5}{2}\pi\right) = \sin\frac{4}{5}\left(x + \frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}\pi\right) =$

$$= \sin\left(\frac{4}{5}x + 2\pi\right) = \sin\frac{4}{5}x.$$

Шарти $f(x+T) = f(x)$-ро қаноат кард, бинобар ин

даври функсия $T = \frac{5}{2}\pi$ будааст.

2. Даври мусбати хурдтарини функсияҳоро ёбед:

а) $f(x) = \sin\frac{3}{2}x$; б) $f(x) = \sin\frac{x}{4} + 5\cos\frac{2x}{3}$.

Ҳ а л. а) Мувофики шарти даври будани функсия менависем:

$$f(x+T) = \sin\frac{3}{2}(x+T) = \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{3T}{2}\right) = \sin\left(\frac{3x}{2} + 2\pi\right) = f(x).$$

Аз ин ҷо: $\frac{3T}{2} = 2\pi$ ва $T = \frac{4\pi}{3}$-даври функсия будааст.

б) Аввал даври ҳар як ҷамъшавандаҳоро меёбем:

$$f_1(x+T) = \sin\frac{1}{4}(x+T) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{T}{4}\right) = \sin\left(\frac{x}{4} + 2\pi\right) = f_1(x).$$

Аз ин ҷо: $\frac{T}{4} = 2\pi$, $T = 8\pi$ даври $f_1(x)$.

$$f_2(x+T) = 5\cos\frac{2}{3}(x+T) = 5\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{2T}{3}\right) = 5\cos\left(\frac{2}{3}x + 2\pi\right) = f_2(x);$$

$\frac{2T}{3} = 2\pi$, $T = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$ даври $f_2(x)$.

Даври функсияи додашуда хурдтарин каратии умумии ададҳои 8π ва 3π мешавад, ки он ба 24π баробар аст.

Ба хотир мегирем:

Агар функсия аз суммаи функсияҳои бефосила ва даврӣ иборат бошад, даври он ба хурдтарин каратии умумии даврҳои ҷамъшавандаҳо баробар аст.

Дар китоби дарсии алгебраи синфи 9 хосиятҳои дигари функсияҳои тригонометрӣ – аломатҳо, ҷуфту тоқ будани онҳо нишон дода шуда, формулаҳои мувофиқоварӣ исбот гардида буданд.

Онҳоро хотирнишон мекунем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha, \quad ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha, \quad ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha;$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha;$$

$$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha, \quad ctg(\pi-\alpha)=-ctg\alpha;$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha, \quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha;$$

$$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha, \quad ctg(\pi+\alpha)=ctg\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha, \quad ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha, \qquad ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha.$$

Доир ба татбиқи ин формулаҳо якчанд м и с о л меорем.

1. Дар намуди функсияи тригонометрии кунҷи тез нависед: $\cos 1914^\circ$

Ҳ а л. Табдил медиҳем:

$$\cos 1914^\circ=\cos(5\cdot 360^\circ+114^\circ)=\cos 114^\circ=\cos(90^\circ+24^\circ).$$

Кунҷи $90^\circ+24^\circ$ ба чоряки II ворид буда, дар ин чоряк косинус аломати манфӣ дорад ва мувофиқи формулаи $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ меёбем:

$$\cos 1914^\circ=\cos(90^\circ+24^\circ)=-\sin 24^\circ.$$

2. Ҳисоб кунед: $3\sin\frac{25\pi}{6}$.

Ҳ а л. $\frac{25\pi}{6}$-ро ин тавр менависем: $\frac{25\pi}{6}=4\pi+\frac{\pi}{6}$.

Он гоҳ, $3\sin\frac{25\pi}{6}=3\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\frac{\pi}{6}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

3. Ифодаро содда кунед: $\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)}{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}-\cos(2\pi-\alpha)$.

Ҳ а л. Мувофиқи формулаҳои $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$,

$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ ва $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ навишта метавонем:

$$\frac{\sin^2(\pi-\alpha)}{1+\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}-\cos(2\pi-\alpha)=\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}-\cos\alpha=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=1.$$

?

1. Даври функсияҳои синус ва косинус кадом адад аст?
2. Оё адади 2π даври функсияҳои тангенс ва котангенс ҳисоб шуда метавонанд?
3. Даври мусбати хурдтарини функсияҳои тригонометриро чӣ тавр муайян мекунанд?

Машқҳо

Дурустии баробариҳоро нишон диҳед (70° – 72):

70°. а) $\sin(2\pi+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}$; б) $\cos(4\pi+\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}$.

71. а) $\sin\frac{38\pi}{9}=\sin\frac{2\pi}{9}$; б) $\cos(-\frac{50\pi}{9})=\cos\frac{4\pi}{9}$.

72. а) $\cos\frac{57\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$; б) $\sin\frac{22\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}$.

Айниятҳоро исбот кунед (73° – 75):

73°. а) $\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$; б) $\sin(\alpha+\pi)=\sin(\alpha-\pi)$;

в) $tg(3\alpha+2\pi)=tg3\alpha$; г) $ctg(\alpha+\pi)=ctg(\alpha-\pi)$.

74. а) $\sin(\alpha+\frac{5\pi}{3})=\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$; б) $\cos(5\pi-\alpha)=\cos(3\pi-\alpha)$;

в) $tg(4\alpha-3\pi)=tg(4\alpha+3\pi)$; г) $ctg(\alpha+\frac{3\pi}{2})=ctg(\alpha-\frac{3\pi}{2})$.

75. а) $3\sin4\alpha+6\sin\alpha+\sin(\alpha-\pi)+5\sin(\alpha+\pi)=3\sin4\alpha$;

б) $\sin(-\frac{41\pi}{6})\cdot\sin\frac{19\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Даври функсияҳоро ёбед ($76^\circ-78$):

76°. а) $y=\sin 2\alpha$; б) $y=2\cos\alpha$; в) $y=tg3\alpha$; г) $y=ctg\alpha$.

77. а) $y=\cos\frac{\alpha}{2}$; б) $y=2\sin 5\alpha$; в) $y=2tg3\alpha$; г) $y=ctg\frac{1}{2}\alpha$.

78. а) $y=\sin\alpha+\cos\alpha$; б) $y=\sin 2\alpha+\cos 4\alpha$; в) $y=\sin\alpha+tg\alpha$.

Аломати киматҳои функсияҳои тригонометриро муайян кунед ($79^\circ-81$):

79°. а) $\sin\frac{\pi}{2}$; б) $\cos 0$; в) $tg\frac{3\pi}{2}$; г) $ctg\pi$.

80. а) $\sin\frac{5\pi}{3}$; б) $\cos(-\frac{3\pi}{4})$; в) $tg\frac{7\pi}{5}$; г) $tg\frac{3\pi}{5}$.

81. а) $\cos(-\frac{4\pi}{8})$; б) $\sin(-\frac{7\pi}{12})$; в) $tg(-\frac{7\pi}{5})$; г) $ctg2$.

Кадомаш калон аст (шифоҳӣ):

82. а) $\cos 20^\circ$ ё ин ки $\cos^2 20^\circ$? б) $tg46^\circ$ ё ин ки $tg^2 46^\circ$?

в) $tg\frac{4\pi}{15}+tg(-\frac{4\pi}{15})$ ё ин ки $3\cos 25^\circ-3\cos(-25^\circ)$?

г) $2\cos(-\frac{\pi}{2})-2\cos\frac{\pi}{2}$ ё ин ки $\sin\frac{3\pi}{10}+\sin(-\frac{3\pi}{10})$?

Аломати функсияҳоро маълум кунед ($83^\circ-85$):

83°. а) $\cos 179^\circ$; б) $\sin(-272^\circ)$; в) $tg200^\circ$; г) $ctg185^\circ$.

84. а) $\sin 2012^\circ$; б) $\cos 10\pi$; в) $tg512^\circ$; г) $ctg(-5{,}6\pi)$.

85. а) $\cos(-0{,}5)\cdot tg2{,}4\cdot\sin(-\pi)$; б) $\sin(-4{,}2)\cdot\cos(-5{,}6)\cdot\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Кадомаш калон аст?

86*. а) $\sin\frac{2\pi}{9}$ ё ин ки $\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$?;

б) $\sin\frac{11\pi}{36}$ ё ин ки $\sin^2(\frac{11\pi}{36})$?.

в) $\cos\frac{7\pi}{9}$ ё ин ки $ctg\frac{27\pi}{9}$?; г) $\sin\frac{17\pi}{9}$ ё ин ки $tg\frac{17\pi}{9}$?.

Муайян кунед, ки кадоме аз функсияҳои зерин ҷуфт ва кадомашон тоқанд (87° – 89):

87°. а) $y=2\sin\alpha$; б) $y=-\cos\alpha$; в) $y=-tg\alpha$; г) $y=\frac{1}{2}ctg\alpha$.

88. а) $y=a^2-\cos\alpha$; б) $y=a\cdot\sin\alpha$;

в) $y=\frac{\cos\alpha}{tg\alpha}$; г) $y=tg\alpha+ctg\alpha$.

89. а) $y=\frac{a^3}{\cos\alpha}$; б) $y=a+\frac{a^2}{\sin\alpha}$;

в) $y=\sin\alpha+\cos\alpha$; г) $y=\sin(\cos\alpha)$.

§ 9. Тадқиқи функсияҳои тригонометрӣ

1. Функсияи $y = sinx$, хосиятҳо ва графики он

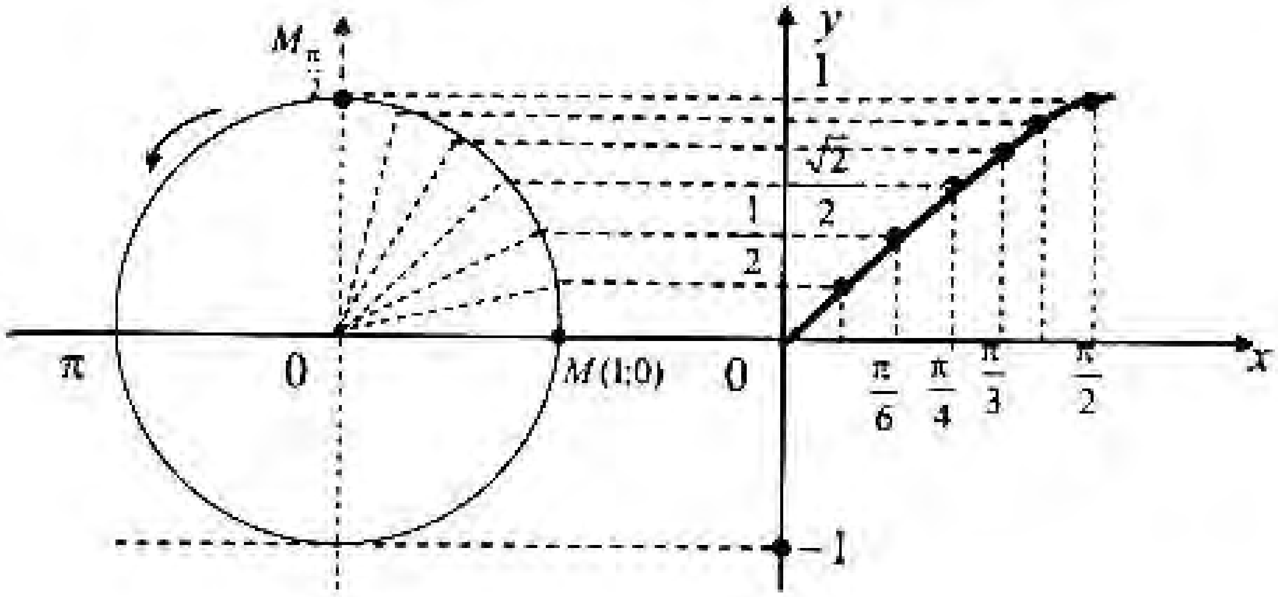
Функсияи $y = sinx$-ро дида мебароем.

Аз таърифи синус истифода намуда, графики онро месозем. Дар тарафи чапи системаи координати декартӣ давраи воҳидӣ мекашем.

Ба ин мақсад чоряки давра ва порчаи $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-и тири абссиссаро ба шаш қисми баробар тақсим мекунем (расми 4).

Аз нуқтаҳои тақсимот ба тири абссисса хатҳои параллелӣ мегузаронем. Дар тири Ox кунҷҳои $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$ -ро қайд мекунем. Аз ин нуқтаҳо то ба буриши хатҳои параллелии гузаронидашуда перпендикулярҳо мефарорем.

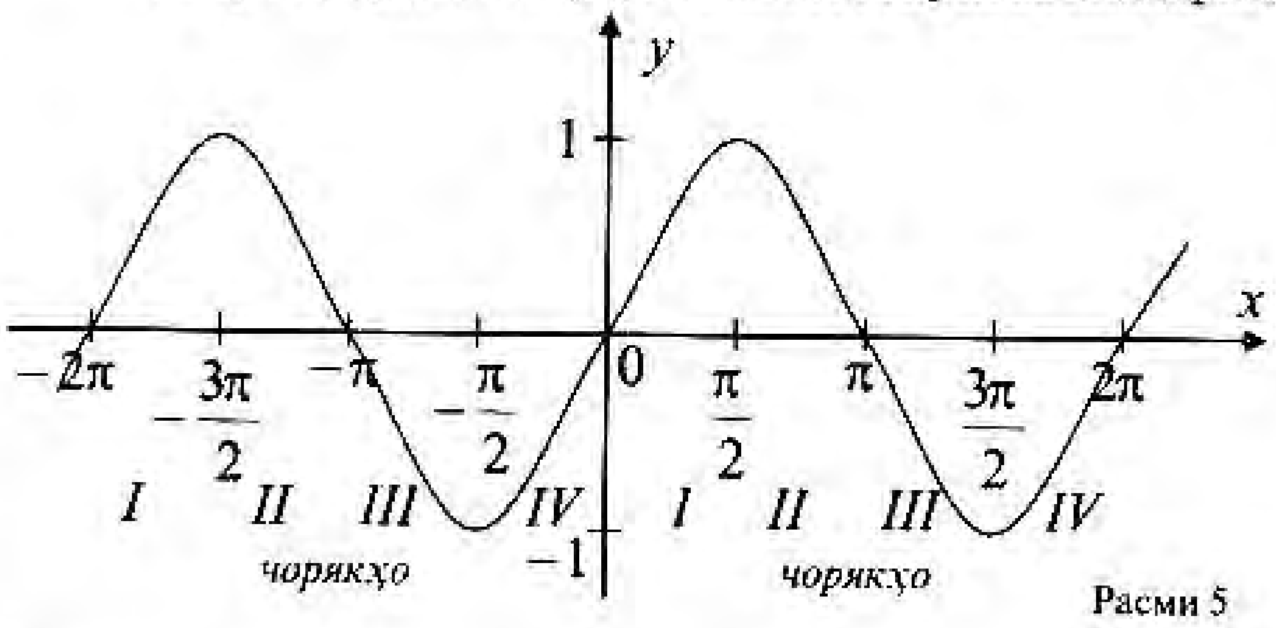
Агар ин нуқтаҳоро паи ҳам пайваст намоем графики синус дар фосилаи $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ҳосил мешавад. Азбаски нуқтаҳои тарафи рост (чоряки I) ва чапи давра (чоряки II) бо ҳам симметрианд, бинобар ин графики синус нисбат ба хати



рости $x = \frac{\pi}{2}$ симметрӣ мебошанд. Ин имконият медиҳад, ки графики синусро дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ созем. Ҳамин тавр, симметрӣ ҷойгиршавии нуқтаҳои давра дар чорякҳои III ва IV графики синусро дар фосилаи $[\pi;2\pi]$ ба вуҷуд меорад.

Мо танҳо як қисми графики $y = \sin x$-ро, ки ба фосилаи $[0;2\pi]$ рост меояд сохтем. Бо сабаби даврӣ будани функсияи синус қисми дуюми график, дар фосилаи $[2\pi;4\pi]$, ки бо якум якхела аст, сохта мешавад.

Агар тоқ будани синусро ба инобат гирем ва пиндорем,



Расми 5

ки нуқта M_α ба муқобили равиши ақрабаки соат ҳаракат мекунад, онгоҳ дар фосилаи $[0;-2\pi]$ қиматҳои синус ҳамон тавр такрор меёбанд, ки ба тағйирёбии қиматҳои он дар фосилаи $[0;2\pi]$ баръакс мебошанд (расми 5).

Хати каҷи ҳосилшударо соли 1639 математики фаронсавӣ Фабрӣ синусоида номида буд.

Акнун графики сохташударо механем ва мувофиқи тартиби умумии тадқиқи функсия хосиятҳои асосии функсияи синусро муқаррар мекунем.

1. Соҳаи муайянӣ – маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ R.

2. Соҳаи қиматҳо – порчаи $[-1;1]$, зеро проексияҳои нуқтаҳои график ба тири ордината пурра ба ин порча тааллуқ доранд.

3. Сифрҳо (решаҳо)-и функсия - $x = \pi k,\ k \in Z$. Ин нуқтаҳои бурриши синусоида бо тири абсисса мебошанд.

4. Фосилаҳои аломати доимӣ дошта:

- дар фосилаи $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ функсия мусбат $(\sin x > 0)$ аст; ба он чоракҳои I-II рост меояд;

- дар фосилаи $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in Z$ синус манфӣ $(\sin x < 0)$ мебошад; ба он чоракҳои III-IV мувофиқ аст.

Ба он эътибор медиҳем, ки дар наздикии нуқтаи x = 0 синусоида ба биссектрисаи кунҷҳои координатии I ва III тақрибан мувофиқанд. Бинобар ин, дар сурати хурд будани қиматҳои ададии x аз рӯи бузургии мутлақ $\sin x \approx x$ мешавад.

5. Нуқтаҳои экстремуми функсия:

- қимати калонтарини синус баробари 1 аст, агар

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z;$$

- қимати хурдтарини синус баробари – 1 аст, агар

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z.$$

6. Фосилаҳои монотонӣ:

- дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, ки он ба чоряկҳои IV-I давраи воҳидӣ мувофиқ меоянд, функсияи синус меафзояд;

- дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, ки он ба чорякҳои II-III мувофиқ аст, функсияи $y = \sin x$ кам мешавад.

7. Функсияи $y = sinx$ тоқ аст, яъне графики синусоида нисбат ба ибтидои координата симметрӣ мебошад.

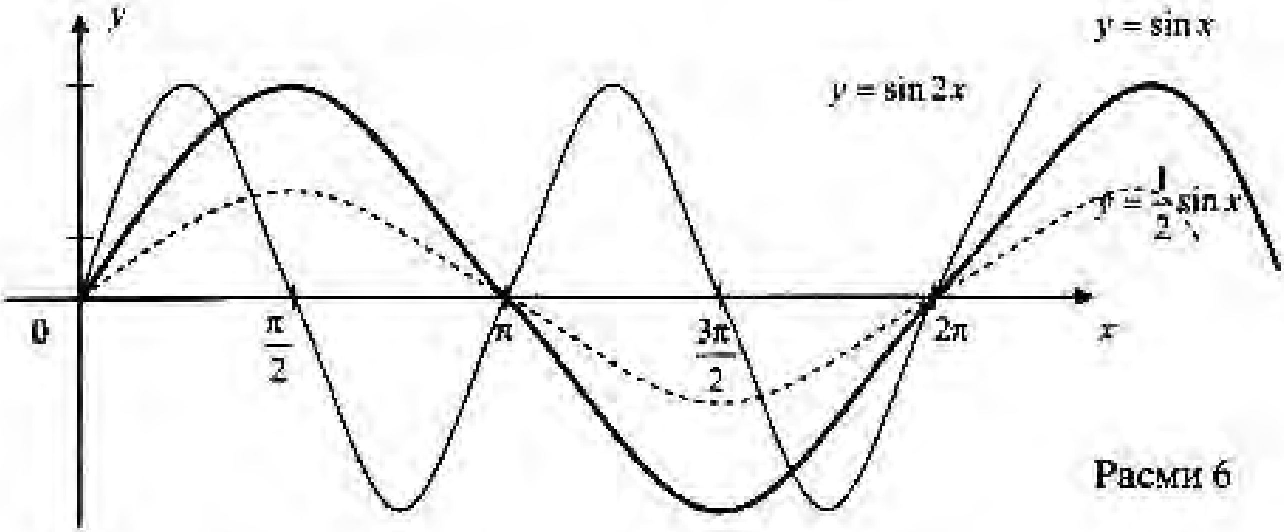
8. Функсияи $y = sinx$ - функсияи даврӣ аст. Аз график бармеояд, ки агар тири x-ро бо порчаҳои дарозиашон ба 2π баробар (онҳоро нуқтаҳои $...-4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...$ ифода мекунад) тақсим кунем, онгоҳ тамоми график ба қисмҳои якхела ҷудо мешавад. Ва ин қисмҳо аз ҳамдигар дар натиҷаи параллелкӯчонӣ аз рӯи тири абсисса ба амал меоянд. Адади 2π бошад – даври хурдтарини мусбати синус аст.

Агар қимати синус ба ягон адад зарб карда шавад $(y = a\sin x)$, онгоҳ графики он ба графики $y = \sin x$ мувофиқ меояд. Ҳангоми $a > 1$ будан, графики $y = a\sin x$ дар натиҷаи a маротиба дароз кардани графики функсияи синус қад-қади тири y ҳосил мешавад. Дар сурати $0 < a < 1$ будан, графики синусро ба дарозии тири ордината $\frac{1}{a}$ маротиба фишурда графики $y = a\sin x$-ро ҳосил мекунем.

Ҳамин тавр, агар синусоида (ба мисли асбоби мусиқии гармон) аз рӯи тири x фишурда ва ё дароз карда шавад, графики $y = \sin ax$ ҳосил мегардад.

Мисолҳои табдилдиҳии оддитарини синусоидаҳо дар расми 6 оварда шудаанд.

Синусоида татбиқи амалии зиёд дорад. Дар физика қонуни ҳаракати лапанда, ки номи **лаппиши гармоники** (аз



Расми 6

юнонӣ – мувофик) – ро дорад бо формулаи $y = A\sin(\omega x+\alpha)$ муайян карда мешавад. Бузургиҳои доимӣ A, ω, α - маънои физикии муайян доранд: A-амплитудаи лапиш, ω-зудии лапиш, $(\omega x+\alpha)$ - фазаи лапиш ва α-фазаи ибтидоӣ.

2. Функсияи $y = cosx$, хосиятҳо ва графики он

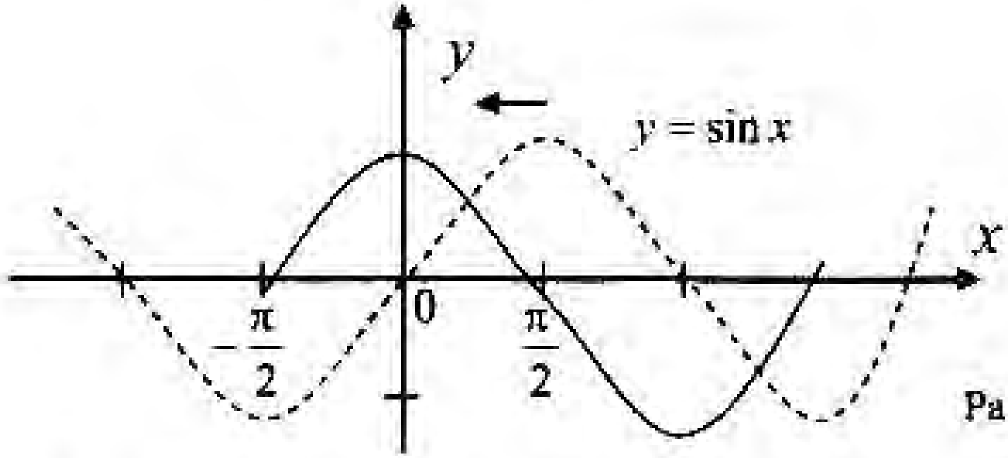
Графики функсияи $y = cosx$-ро ба монанди графики $y = sinx$ сохтан мумкин аст. Аммо айни ҳол беҳтар аст, ки аз формулаи мувофиқоварии $\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ истифода барем, зеро графики $y = sinx$ ба мо маълум аст.

Агар синусоидаро аз рӯи тири Ox ба адади $\frac{\pi}{2}$ ба тарафи чап кӯчонем, графики $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ ҳосил мешавад. Ин графики $y=\cos x$ аст (расми 7).

Графики пурраи функсияи $y=\cos x$ дар расми 8 тасвир ёфтааст.

Хосиятҳои асосии функсияи $y=\cos x$-ро баён мекунем:

1. $D(f)=(-\infty;+\infty)$.
2. $E(f)=[-1;1]$.



Расми 7

3. $\cos x = 0$, агар $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ бошад.

4. Фосилаҳои аломати доими дошта:

$\cos x > 0$, агар $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$

$\cos x < 0$, агар $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ бошад.

5. Нуқтаҳои экстремуми функсия:

$\cos x = 1$, агар $x = 2\pi k$, $k \in Z$ ва

$\cos x = -1$, агар $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ бошад.

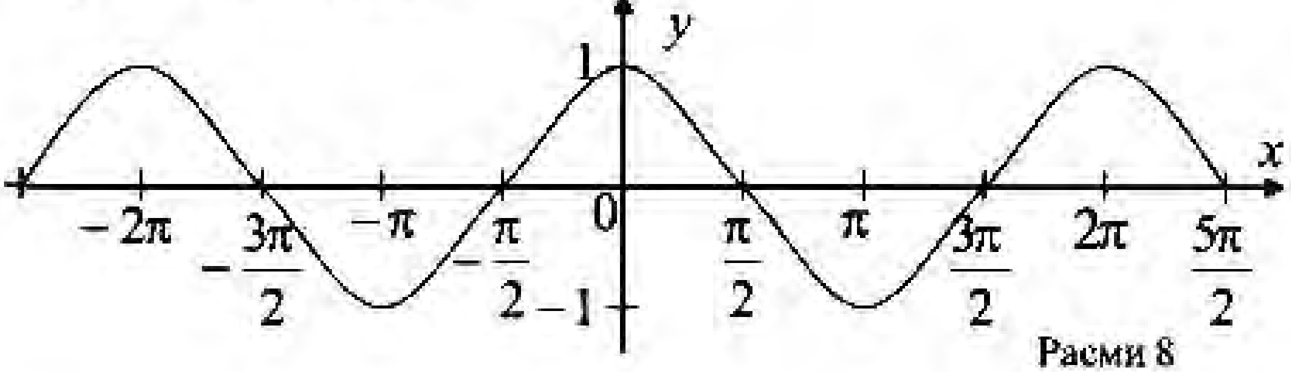
6. Фосилаи монотонӣ

- дар фосилаи $[-\pi + 2\pi k;\ 0 + 2\pi k]$, $k \in Z$, ки ба чорякҳои сеюм – чорум рост меояд, функсия меафзояд;

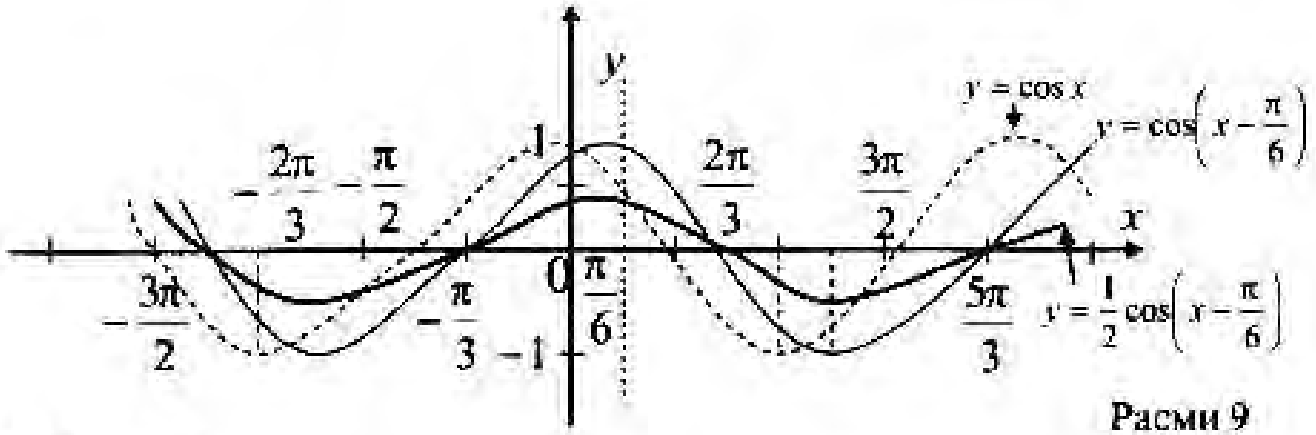
- дар фосилаи $[0 + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$, ки ба чорякҳои якум – дуюм мувофиқ аст, функсия кам мешавад;

7. $\cos x = \cos(-x)$.

8. $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$.



Расми 8



Расми 9

Мисол.

1. Функсияи $y = \frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{6})$ -ро тадқиқ карда, графики онро созед.

Ҳал. Методи созиш:

- графики косинусро ба тарафи рост ба адади $\frac{\pi}{6}$ кӯчонида (дар расм ба хати борик тасвир ёфтааст), графики $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$ -ро ҳосил мекунем:

- графики $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$ -ро аз рӯи тири ордината 2 маротиба фишурда, графики матлубро пайдо мекунем (расми 9);

- барои ёфтани сифрҳои функсия муодилаи $\frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{6}) = 0$ -ро ҳал мекунем: $\frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k,$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

3. Функсияи $tg\ x$, хосиятҳо ва графики он

Мувофиқи таъриф нисбати $\frac{\sin x}{\cos x}$ тангенси адади x -ро маълум мекунад.

Аз рӯи тартиби умумии тадқиқи функсия хосиятҳои онро баён мекунем.

1. **Соҳаи муайянӣ** – маҷмӯи R, бидуни ададҳое, ки дар онҳо $\cos x = 0$ аст, яъне $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

2. **Соҳаи қиматҳо** – маҷмӯи R. Инро нишон медиҳем. Бо ҳамон тарзе, ки графики $y = \sin x$-ро сохта будем, графики тангенсро дар фосилаи $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ месозем (расми 10). Аз ҷадвалҳои В.М.Брадис истифода бурда, ҷадвали зеринро тартиб медиҳем (ҷадвали 2).

Ҳангоми афзудани x аз 0 то $\frac{\pi}{2}$ тангенс меафзояд. Ба замми ин, ҳар қадаре, ки x ба $\frac{\pi}{2}$ наздик шавад, ҳамон қадар *sinx* ба 1 ва *cosx* ба 0 наздик мешавад. Аз ин рӯ, нисбати $\frac{\sin x}{\cos x}$ ҳамон қадар калон шудан мегирад. Ва графики тангенс бошад ба хати вертикалии $x = \frac{\pi}{2}$ наздик мешавад.

Акнун нишон медиҳем, ки қимати тангенс адади дилхоҳи ҳақиқӣ шуда метавонад. Тиреро месозем, ки ибтидои он дар нуқтаи M_0 воқеъ буда, ба тири ордината параллел мебошад (расми 11). Ин тирро – **тири тангенсҳо** меноманд. Дар он нуқтаи ихтиёрии B-ро мегирем, ки ба адади дилхоҳи a мувофиқ ояд. Нуқтаи $O(0;0)$-ро ба B пайваст мекунем. Хати

Ҷадвали 2

Қиматҳои аргумент x	0	$\frac{\pi}{12} = 15^\circ$	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{5\pi}{12} = 75^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
Қиматҳои $y = tgx$	0	0,27	0,58	1,73	3,73	Вуҷуд надорад
Афзуншавии tgx	-	0,27	0,31	0,73	2,00	Вуҷуд надорад

рости OM аз рӯи нуқтаҳои $O(0;0)$ ва $M(cosx; sinx)$ мегузарад. Ба Шумо аз геометрия (синфи 9) муодилаи хати росте, ки аз болои ду нуқта мегузарад, муаълум аст. Муодилаи он намуди зеринро мегирад: $y = xtgx$. Абсиссаи нуқтаи B, ки дар ин хати рост мехобад ба 1 баробар аст. Пас, ординатаи нуқтаи B ба tgx баробар мешавад, яъне:

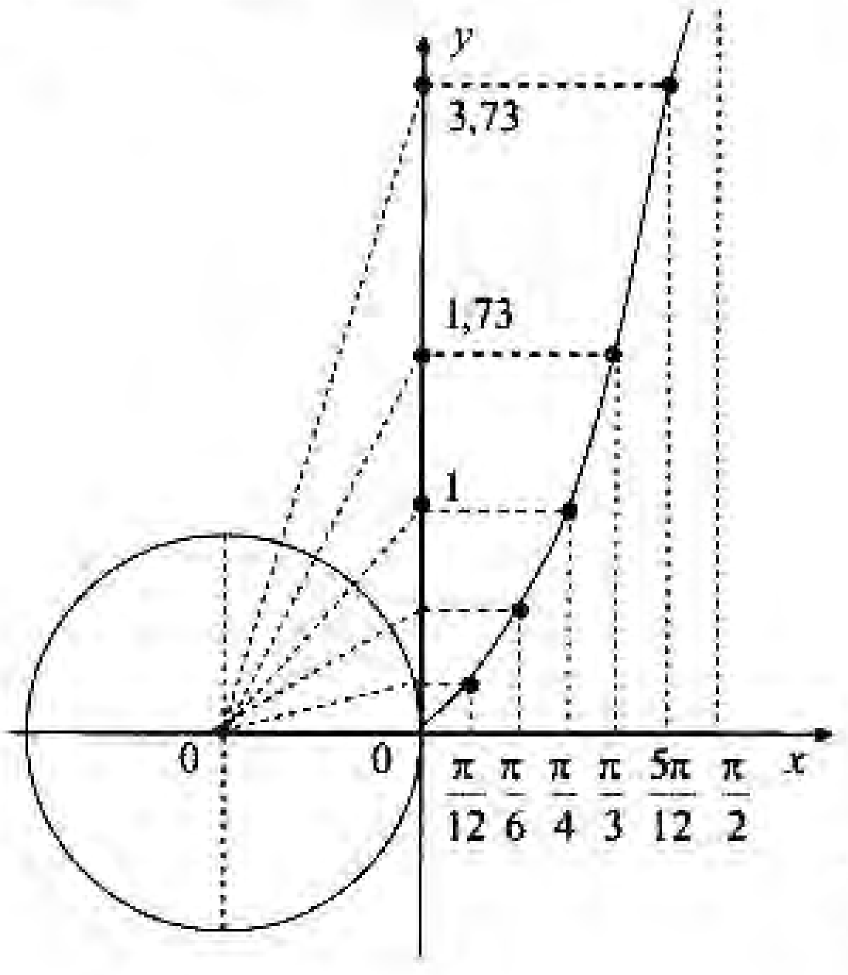
$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{a}{1} = a$$

Бо ҳамин тариқ, соҳаи қиматҳои тангенс ҳамаи ададҳои ҳақиқии R будааст.

3. Сифрҳои функсия - $x = \pi k,\ k \in Z$, зеро дар ин нуқтаҳо синус ба сифр баробар аст.

4. Фосилаҳои аломати доимӣ дошта:

- дар фосилаи $(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k),\ k \in Z$, ки бо чорякҳои якум ва сеюм рост меоянд, $tgx > 0$ аст.



Расми 10

- дар фосилаи $(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k)$, $k \in Z$, ки бо чорякҳои дуюму чорум мувофиқ аст, функсияи $y = tgx$ манфӣ мебошад.

5. Нуқтаҳои экстремуми функсия – қимати калонтарин ва хурдтарин надорад.

6. Тангенс функсияи даврӣ буда, даври хурдтарини он ба π баробар аст:

$$tg(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=tgx.$$

7. Тангенс функсияи тоқ аст, яъне $tg(-x) = -tgx$.

8. Фосилаҳои монотонӣ.

Дар фосилаи $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ ва $\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$, ки ба чорякҳои I ва IV мувофиқ меоянд, функсияи тангенс меафзояд. Дарвоқеъ, агар $0 \le x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ бошад, онгоҳ дар ин фосила синус афзуда, косинус кам мешавад, яъне $\sin x_1 < \sin x_2$ ва $\cos x_1 > \cos x_2$. Аз нобаробарии охирин мебарояд,

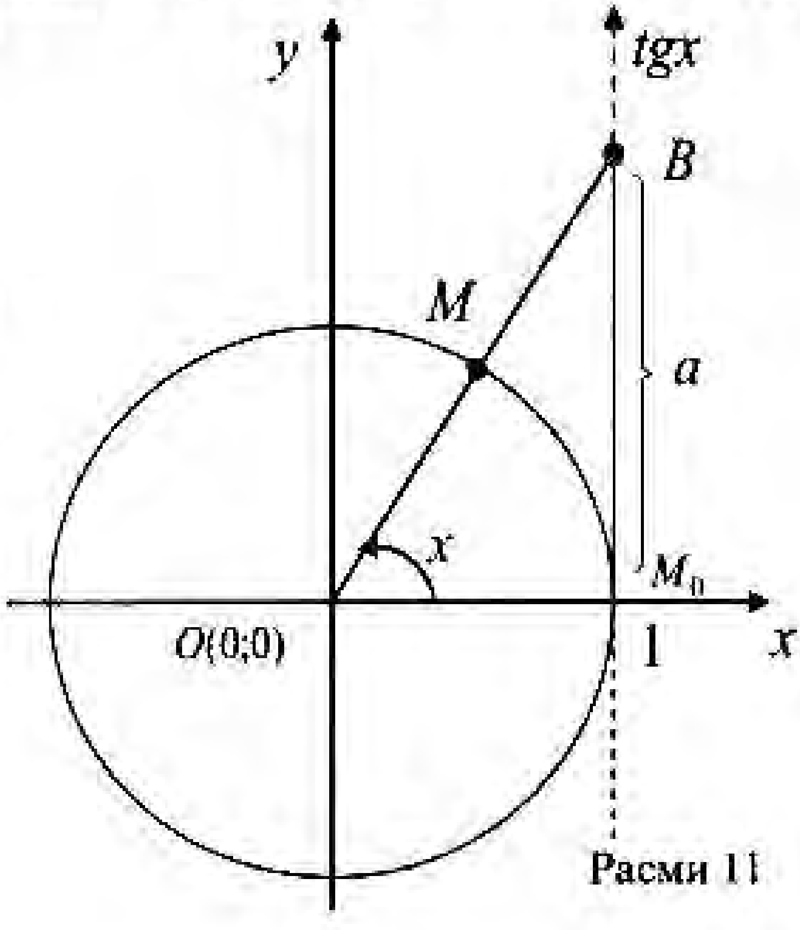
ки $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$.

Ин нобаробариро бо $\sin x_1 < \sin x_2$ зарб карда ҳосил мекунем:

$$tgx_1 < tgx_2.$$

Агар $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 \le 0$ бошад, онро дар намуди

$$0 \le -x_2 < -x_1 < \frac{\pi}{2}$$



Расми 11

навишта метавонем. Ин навишт маънои онро дорад, ки ададҳои $(-x_2)$ ва $(-x_1)$ ба чоряки якум тааллуқ доранд. Дар ин чоряк тангенс афзуншаванда аст.

Азбаски тангенс функсияи тоқ аст, он гоҳ навишта метавонем:

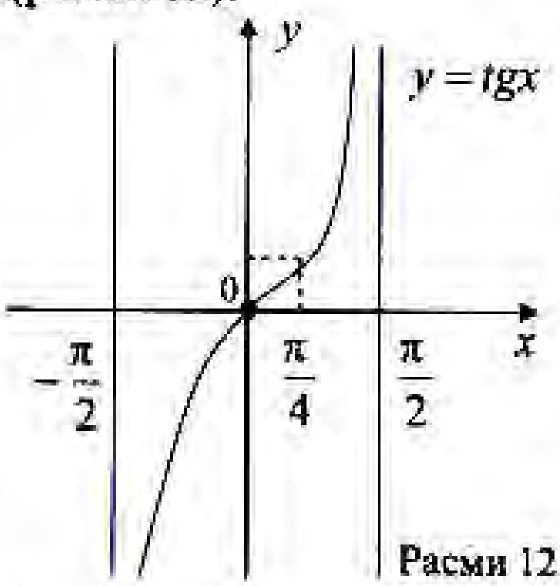
$$tg(-x_2) < tg(-x_1) \Rightarrow -tgx_2 < -tgx_1 \Rightarrow tgx_1 < tgx_2$$

Ба ҳамин тариқ, тангенс ҳам дар чоряки якум (аломати мусбат дорад) ва хам дар чоряки чорум (аломати манфӣ дорад) афзуншаванда мебошад.

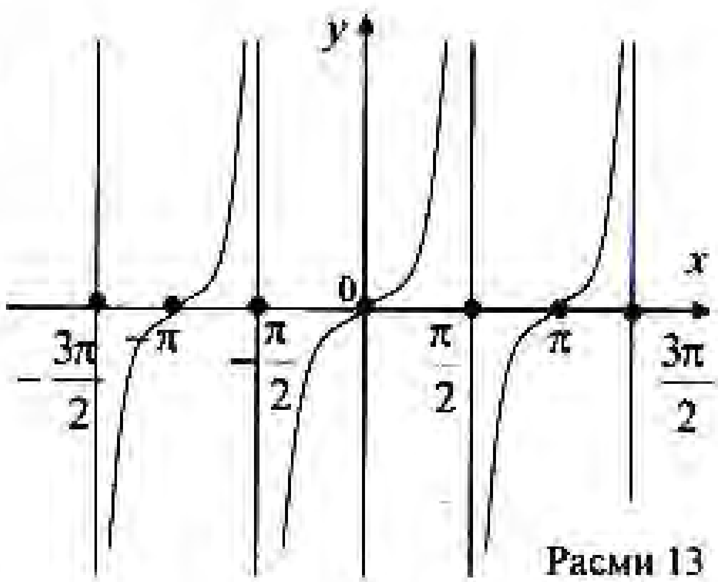
Умуман дар фосилаи $(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k)$, $k \in Z$ функсияи $y = tgx$ афзуншаванда аст.

Пас, фосилаҳои монотонии тангенс ба соҳаи муайянии он мувофиқ будааст.

9. Графики $y = tgx$ -ро месозем. Барои фосилаи $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ графики функсияро аз рӯи нуқтаҳо сохтем. Хосияти тоқ будани функсияро ба инобат гирифта, ин қисми графикро нисбат ба ибтидои координат симметрӣ инъикос менамоем. Дар натиҷа графики $y = tgx$ дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ки дарозии он ба даври функсия π баробар аст, ҳосил мешавад (расми 12).



Расми 12



Расми 13

Агар графики дар ин фосила ҳосилшударо ба дарозии тири абсисса (ба тарафи чап ва рост) ба $\pi, 2\pi, 3\pi$ ва ғ. кӯчонем, графики тангенс дар **ҳамаи тири ададӣ** R пайдо мешавад (расми 13).

Қайд кардан лозим аст, ки аз рӯи ин график ҳамаи хосиятҳои тангенсро низ шарҳ додан мумкин аст.

Мисол.

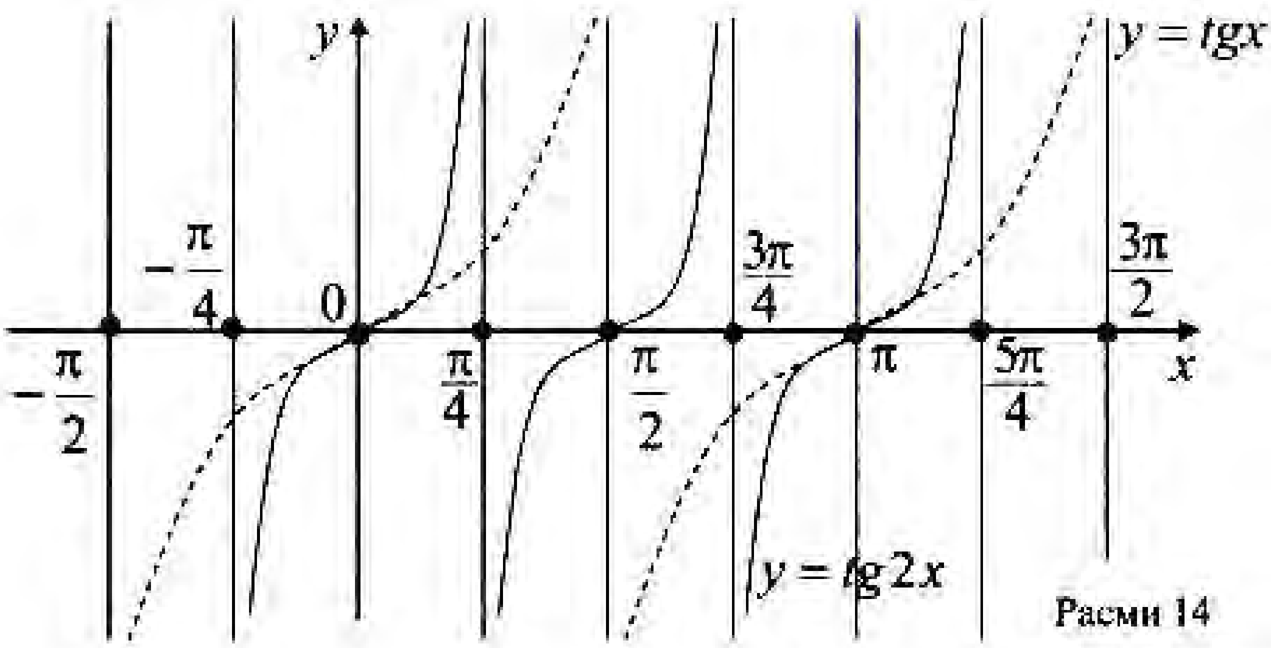
Графики $y = tg2x$ сохта шавад.

Созишро бо ду тарз: аз рӯи тартиби умумии тадқиқи функсия ва бо ёрии табдилдиҳии графики $y = tgx$ иҷро кардан мумкин аст.

Ҳал. Графики функсияро ба воситаи табдилдиҳӣ месозем.

Агар графики функсияи тангенсро аз рӯи тири абсисса 2 маротиба фишурем, графики $y = tg2x$ ҳосил мешавад, зеро даври функсияи додашуда $T = \frac{\pi}{2}$ аз даври тангенс 2 маротиба хурд аст (расми 14).

? 1. Сифрҳои синус, косинус, тангенс ва котангес кадом нуқтаҳоянд?
2. Оид ба фосилаҳои монотонии синус ва косинус чӣ гуфта метавонед? Роҷеъ ба тангенс ва котангенс чӣ?
3. Фосилаҳое, ки дар онҳо синусу косинус, тангенсу котангенс аломатҳои доимӣ доранд номбар кунед.



Расми 14

4. Чаро графики тангенс ба қисмҳои алоҳидае, ки онҳо бо ҳам алоқаманд нестанд, ҷудо мешаванд?

5. Оё тангенс дар ҳамаи соҳаи муайянӣ афзуншаванда аст? Ҷавобро асоснок намоед.

6. Даври хурдтарини мусбати синус, косинус, тангенс ва котангенс кадом ададҳоянд?

Машқҳо

90°. Шифоҳӣ.

Ба таври схематикӣ графики функсияҳоро тасвир кунед:

а) $y = \sin x$, дар фосилаи $\left[-180^\circ; 0^\circ\right]$;

б) $y = \cos x$, дар фосилаи $\left[-90^\circ; 90^\circ\right]$;

в) $y = tgx$, дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$;

г) $y = |\sin x|$, дар фосилаи $[0; 2\pi]$.

Графики функсияҳоро созед ва муайян намоед, ки онҳо бо ёрии кадом табдилдиҳӣ (параллелкӯчонӣ ва ё фишурдашавӣ) сохта мешаванд ($91^\circ - 94^*$):

91°. а) $y = 2\sin x$; б) $y = -3\cos x$;

в) $y = \sin(-x)$; г) $y = \cos x - 1$;

д) $y = tg3x$; е) $y = ctg2x$; ё) $y = 3\sin x + 1$; и) $y = \cos|x|$.

92. а) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$; б) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$;

в) $y = 2\cos(x + \frac{\pi}{3})$; г) $y = -3\cos(\frac{x}{2} - 1)$;

д) $y = tgx + 1$; е) $y = ctg(x - \frac{\pi}{2})$.

93. а) $y = |\sin x|$; б) $y = 1 + |\cos x|$; в) $y = \cos^2 x$;

г) $y = 3\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$; д) $y = 1 + 0{,}5\sin(2x + 60^\circ)$; е) $y = 2tg3x - 2$.

94*. а) $y = \sin x + 2\cos x$; б) $y = |\sin x| + \sin x$;

в) $y = (\sin x - \cos x)^2$; г) $y = \frac{1}{3}tg(2x + 60^\circ)$; д) $y = ctg|x|$.

Соҳаи муайянии функсияҳоро ёбед ($95^\circ - 97$):

95°. а) $y = \sqrt{\sin x}$; б) $y = \frac{1}{\cos x}$; в) $y = tg\frac{x}{2}$; г) $y = 2ctgx$.

96. а) $y = \frac{2}{1 - \cos x}$; б) $y = \frac{2}{\sin x + \cos x}$;

в) $y = \sqrt{tgx}$; г) $y = 1 + ctgx$.

97. а) $y = \sqrt{\sin 2x}$; б) $y = \sqrt{1 - \cos x}$;

в) $y = tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$; г) $y = 2 - ctg0{,}5x$.

Соҳаи қиматҳои функсияҳоро ёбед ($98^\circ - 100$):

98°. а) $y = 1 + \sin x$; б) $y = 1 - \cos x$;

в) $y = 3 + 2\sin x$; г) $y = tgx$.

99. а) $y = 4 - 3\cos x$; б) $y = 1 - |\sin x|$;

в) $y = \frac{3\sin x - 2}{4}$; г) $y = tg^2 x$.

100. а) $y = -3\cos^2 x - 1$; б) $y = (1 + \cos x)^2$;

в) $y = \sqrt{5 - \sin x}$; г) $y = 1 - ctg^2 x$.

101°. Аз рӯи графики функсияҳои $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ фосилаҳоеро нишон диҳед, ки дар онҳо функсияи синус ва косинус: а) қиматҳои мусбат қабул мекунанд;
б) соҳиби қиматҳои манфӣ мешаванд.

102. Дар порчаи $[0;2\pi]$ фосилаҳоеро маълум кунед, ки дар онҳо функсияҳои синус ва косинус дар як вақт: а) меафзоянд ва б) кам мешаванд.

Фосилаҳои монотонии функсияҳоро ёбед (103° – 105):

103°. а) $y = \frac{1}{2}\sin x$; б) $y = \cos\frac{x}{2}$;

104. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \cos 2x$.

105. а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \cos(\frac{x}{3} + 2)$; в) $y = tg(2x - \frac{\pi}{4})$.

Ададҳоро бо тартиби афзуншавиашон чойгир кунед (106°-108):

106°. а) $\sin\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{3}$;

б) $\cos 20^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos 30^\circ$.

107. а) $\sin\frac{4\pi}{3}$, $\sin\frac{5\pi}{6}$, $\sin\frac{11\pi}{12}$, $\sin\frac{13\pi}{7}$;

б) $\cos 31^\circ$, $\cos 24^\circ$, $\cos 63^\circ$, $\cos 51^\circ$, $\cos 107^\circ$;

в) $\sin 1$, $\cos 1$, $tg 1$, $ctg 2$.

108. а) $\sin 7\pi$, $\sin(-7\frac{5}{6}\pi)$, $\sin\frac{25\pi}{12}$, $\sin(-\frac{17\pi}{12})$;

б) $\cos 1$, $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 4$; в) $\sin 2$, $\cos 2$, $tg 2$, $ctg 3$.

109°. (Шифоҳӣ). Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро ёбед:

а) $y = \frac{1}{2 - \sin x}$; б) $y = \frac{1}{\cos x - 1}$.

Экстремумҳои функсияҳоро ёбед (110° – 112):

110°. а) $y = \frac{1}{2}\sin x$; б) $y = \cos\frac{x}{4}$;

в) $y = 2tg\frac{x}{2}$; г) $y = \frac{1}{2}ctg\frac{x}{4}$;

111. а) $y = \frac{1}{3}\sin x - 1$; б) $y = \frac{1}{5}\cos x + 1$;

в) $y = 1 + 2tgx$; г) $y = ctgx - 1$.

112. а) $y = 3\sin x + 2$; б) $y = 3\cos x - 2$;

в) $y = 3\cos(x - \frac{2\pi}{7})$; г) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{7})$.

Аз таърихи инкишофи маълумотхои тригонометрӣ

Мафҳумҳои аввалини тригонометрӣ ва астрономӣ дар мамлакатҳои Шарқ – Ҳиндустон, Миср, Бобулистон ва Хитой ба вуҷуд омадаанд. Дар Бобулистони қадим гирифтани офтоб ва моҳтобро пешакӣ гуфта метавонистанд. Соли 585-и милодӣ олими Юнони қадим **Фалес** гирифтани офтобро пешгӯи кард. **Гиппарх** (тақ. 180-125 пеш аз милод) дар 12 китоб ҷадвали хордаҳо (юнонӣ-«тор»)-и давраро тартиб дод. Баъди 400 сол ҳамингуна ҷадвалҳоро барои камонҳои аз 0° то 180° **Клавдий Птоломей** (тақ. 100-178) дар «Куллиёти математикӣ» (иборат аз 13 китоб) ҷой дод. Градус (лотинӣ - «қадам»)-ро ба дақиқаҳо (хурдшуда) ва сонияҳо (дуюм хурдшуда) тақсим кард.

Дар асрҳои V-XII ҳисоббарориҳои тригонометрӣ дар асарҳои математикони ҳинд **Ариабхата** (тақ. 476-550), **Брахмагупта** (598-660) ва **Бхаскара** (1114-1178) инкишоф ёфт.

Ҳиндуҳо ба мисли Птоломей давраро ба 360 қисм тақсим мекарданд. Онҳо «хорда»-ро «ҷива» (тори камон) номидаанд. Арабҳо онро баъдтар «ҷайб» (маънояш «бағал»), ном мебурданд. Дар асри XII ин калима аз тарафи олими итолиёӣ **Герарди Кремони** (1114-1187) ба забони лотинӣ sinus тарҷума гардид.

Аз охири асри VIII сар карда, мафҳумҳои асосии тригонометрӣ дар байни арабҳо паҳн гардид.

Бо фармони халифаи Бағдод **Ал-Мансур** асарҳои олимони Ҳинд ба арабӣ тарҷума шудаанд. Олими бузурги Осиёи миёна **Ал-Хоразмӣ** (780-847), ки дар Бағдод кор мекард ба ҷадвалҳои хордаҳои тартиб додаи юнониҳо ва ҳиндуҳо шинос шуда, ҷадвалҳои боз ҳам саҳеҳтарро сохт. Математик ва астрономи намоёни суриягӣ **Ҷобир ал-Баттонӣ** (858-929) барои муайян кардани баландии **офтоб** мафҳуми нави тригонометрӣ ворид намуда, онро «соя» (аз рӯи истилоҳи имрӯза тангенс) номид. Дар қатори ҷадвалҳои синусу тангенс боз ҷадвалҳои котангенсро амалӣ гардонд. Ҷадвалҳои тартиб додаи ӯ на фақат дар Шарқ, балки дар Аврупо низ маълум буданд.

Бо тағйиротҳои сиёсӣ, иқтисодӣ, иҷтимоӣ ва маънавии асрҳои IX-X нигоҳ накарда дар замони давлатдории Оли Сомон дар Осиёи Миёна як зумра математикони номвар фаъолият мекарданд, ки онҳо дар рушду нумӯи маълумотҳои тригонометрӣ саҳми босазо гузоштаанд. Асарҳои илмии Форобӣ, Абулвафо, Хуҷандӣ, Сино, Берунӣ ва садҳо дигар математикони намоён беҳамто ва такрорнашавандаанд. **Абунаср ал-Форобӣ** (870-950) ба корҳои Птоломей пайравӣ карда, хатти тангенс ва котангенсро дохил кард ва хордаҳоро ба синус иваз намуд. Олими машҳури форсу тоҷик **Муҳаммад Абулвафо** (940-998) дар таърихи илм аввалин шуда **радиуси давраи тригонометриро ба воҳид** баробар қабул кард. Ин кашфиёт дар илм табаддулоти куллиро ба вуҷуд овард. Онро олимони Аврупо баъд аз ӯ кашф карданд.

Абдулвафо бори нахуст тангенс ва котангенсро ҳамчун функсияи тригонометрӣ ба илм дохил кард ва барои онҳо ҷадвал тартиб дод. Мунаҷҷимон ба хотири ин марди бузург яке аз кӯҳҳои тарафи намоёни моҳро ба номи ӯ гузоштаанд.

Муҳаммад-ал-Хуҷандӣ (ваф. 1000) ба исботи теоремаи синусҳо комёб гардид. Ба ӯ ихтирои асбоби сектанта (кунҷсанҷ)-и радиусаш тақрибан 40 м тааллуқ дорад.

Донишманди барҷастатарини асри XI **Абу Райҳон Берунӣ** (973-1040) ба Абулвафо пайравӣ намуда, радиуси давраи тригонометриро ба воҳид баробар қабул кард, тарзи амалии ҳисоб намудани масофаи дастнорас ва чуқурии чоҳро бо ёрии функсияҳои тангенс ва котангенс муайян намуд. Муқаррар кард, ки радиуси Замин $R \approx 6339{,}58$ км аст (аз ҳисобҳои ҳозира 31,53 км фарқ дорад). Олими тоҷику форс Насириддини Тӯсӣ (1201-1274) дар ин соҳа як қатор кашфиётҳои навро ба илм ворид намуд.

Дар Осиёи Миёна ҷадвалҳои тартибдодаи олимони Самарқанд **Ғ.Кошонӣ** (ваф. 1430), **Қушчӣ** (ваф. 1474) ва **Қ.Румӣ** (1360-1437) оид ба қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ аз ҳама саҳеҳтар буданд.

Ба ҳамин тариқ, халқҳои Шарқи Наздик ва Осиёи Миёна махсусан тоҷикон пешрафти маълумотҳои тригонометрӣ саҳми муҳим гузоштаанд. Баъдтар аврупоиҳо - олими англис **Фома Брадвардин** (1290-1349), олмонӣ **Иоҳанн Мюллер** (машҳур бо номи Региомонтан) (1436-1474) ва дигарон аз ин халқҳо тригонометрияро омӯхта, онро инкишоф додаанд. Соли 1600 олими олмонӣ **Эдмунд Гентер** истилоҳи «косинус»-ро ворид намуд, ки он маънои синуси камони иловагиро дорад. Рамзҳои ***sin***, ***cos*** ва ғайраро математики швейтсарӣ **Иоҳанн Бернуллӣ** (1667-1748) дар амал ҷорӣ кард. Академики

Берунӣ (973-1048)

Энсиклопедисти бузурги асри XI. То синни 16-солагӣ ҳамаи илмҳои замонаашро аз худ намуд. Ба қалами Берунӣ 150 асар тааллуқ дорад, ки 30-тои он то ба имрӯз омада расидааст. Зиёда аз ҳафт рисолаи ӯ ба масъалаҳои математикӣ бахшида шудаанд.

Леонард Эйлер (1707-1783)

Математик ва механики швейтсарӣ, академики Академияи илмҳои Петербург. Математикаро бо роҳи худомӯзӣ аз худ карда, дар 17-солагӣ соҳиби унвони устоди илм гаштааст. Муаллифи зиёда аз 800 асари илмӣ мебошад. 18 мафҳуми математикӣ номи ӯро дорад. Кашфиётҳои таҳлили математикиро дар соҳаҳои гуногуни илм (назарияи садо, рушноӣ, топология ва г.) татбиқ кардааст.

илмҳои Петербург **Леонард Эйлер** (1707-1783) формулаҳоеро кашф кард, ки бо ёрии онҳо тригонометрияро новобаста аз геометрия сохтан мумкин аст. Эйлер аввалин шуда, тарафҳои секунҷаро бо ҳарфҳои a, b ва c ишорат кард. Тавассути корҳои ӯ тригонометрия ниҳоят ба давраи куллаҳои баланди инкишофи худ расид.

Математикони машҳури рус **Н.И.Лобачевский** (1792-1856) ва В.М.Остроградский (1801-1861) ба тарзи формулавӣ сохтани тригонометрияро ба анҷом расонидаанд.

Дар асри XVIII математикони фаронсавӣ **Даниил Бернулли** (1700-1782) ва **Ж.Фуре** (1768-1830) протсессҳои лапандаро омӯхтанд.

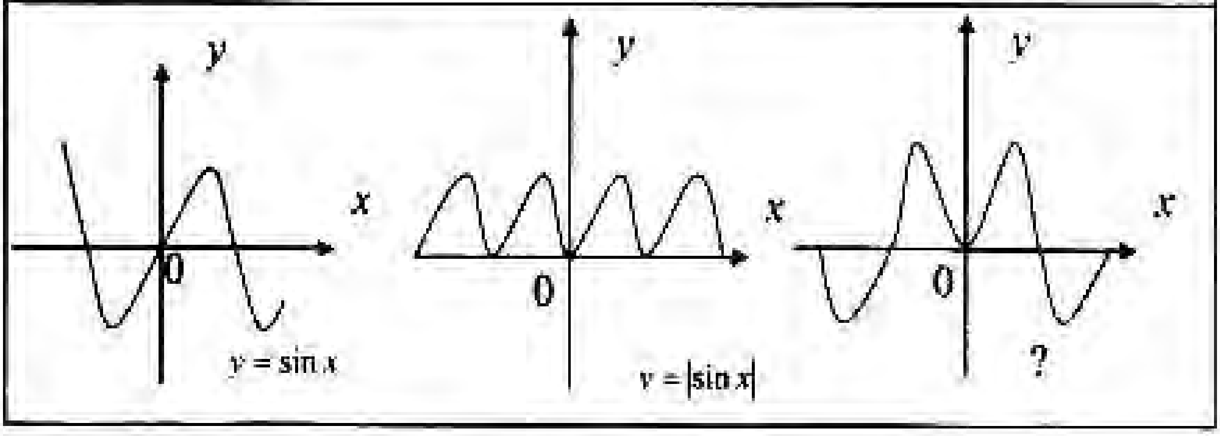
Худро санҷед !

Кадом адад, ифода ё ин ки функсия намерасад?

Ба ифодаҳо бодиққат назар кунед. Амал ва муносибати партофташудаи байни онҳоро гузоред ва аз рӯи табдилдиҳиҳои маълум ба ҷои аломати «?» ифода ё ин ки ададро барқарор кунед. Аз рӯи графикҳои дода шуда функсияро маълум намоед.

1.	$1+tg^2\alpha$	$1+ctg^2\alpha$	$\frac{4}{\sin^2 2\alpha}$
	$\sin 12^\circ \cos 18^\circ$	$\cos 12^\circ \cos 72^\circ$	$\frac{1}{2}$
	$\cos 44^\circ \cos 16^\circ$	$\cos 46^\circ \cos 74^\circ$	?
2.	$\cos 2\alpha$	1	$2\cos^2\alpha$
	$1+\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha+1$	3
	$\sin 30^\circ \cos 45^\circ$	$\cos 30^\circ \sin 45^\circ$	?

3.



Кори амалии № 2

Максади кор. Сохтани графики гузариш аз ченаки градусӣ ба радианӣ мувофиқи формулаи $a = \frac{\alpha\pi}{180}$.

Дар дафтарҳоятон:

1) Аз рӯи формула ҷадвали гузариш аз ченаки градуси ба радианиро тартиб диҳед:

α	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
a	$\frac{\pi}{6}$	...	...	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	...	...	$\frac{3\pi}{2}$	...

2) Системаи координатаи декартӣ кашед. Масштаб интихоб намоед.

3) Дар тири абсисса OX қимати градусии кунҷҳои α -ро гузоред. Ченаки радиании мувофиқи онҳоро дар тири ордината Oy қайд кунед.

4) Аз рӯи нуктаҳо графики гузаришро созед.

5) ба саволи: графики гузариш аз ченаки градусӣ ба радианӣ чигуна хатро медиҳад? ҷавоб диҳед.

6) Аз рӯи график ченаки радиании кунҷҳои $75^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 130^\circ, 165^\circ$, $195^\circ, 225^\circ, 250^\circ, 290^\circ$ -ро муайян кунед.

Супориши мустақилона доир ба боби II

Варианти 1°

1. Айниятро исбот кунед: $\frac{\sin^2\alpha}{tg^2\alpha} + \frac{2\cos^2\alpha}{ctg^2\alpha} - \sin^2\alpha = 1$

2. Агар $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ва $\sin\beta = -\frac{7}{25}$, $\beta \in \left[\pi; \frac{2\pi}{2}\right]$ бошад, $\cos(\alpha+\beta)$-ро ёбед.

3. Графики функсия $y = 3\sin(x + \frac{\pi}{6})$ -ро созед.

4. Даври хурдтарини мусбати функсияи $y = 2\sin 3x$ -ро ёбед.

5. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи

$y = \frac{1}{5}\cos x + 1$-ро маълум кунед.

Варианти 2

1. Айниятро исбот кунед: $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{ctg\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2tg^2\alpha$

2. Ифодаро содда кунед: $\frac{\cos\alpha \cdot tg\alpha}{\sin^2\alpha} - ctg\alpha\cos\alpha$

3. Даври мусбати хурдтарини функсияро ёбед: $y = \sin 4x$

4. Соҳаи муайянии функсияро ёбед: $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$

5. Дурустии баробариро нишон диҳед:

$16\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1$

Варианти 3*

1. Айниятро исбот кунед: $\frac{1 + tg\alpha + tg^2\alpha}{1 + ctg\alpha \cdot ctg^2\alpha} = tg^2\alpha$.

2. Агар $\sin\alpha + \cos\alpha = p$ бошад, $\sin^6\alpha \pm \cos^6\alpha$-ро ёбед.

3. Исбот кунед: 1. $\cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

4. Нобаробариро исбот намоед:

$(tg\alpha + ctg\alpha)^2 \geq 4$, агар $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад.

5. Даври мусбати хурдтарини функсияро ёбед.

$y = \cos 2x + 2\cos 3x$

МАШҚҲОИ ИЛОВА ОИД БА БОБИ II

Ба параграфи 1

113. Ҳисоб кунед:

а) $\cos 23^\circ \cdot \sin 7^\circ + \cos 7^\circ \cdot \sin 23^\circ$;

б) $\sin 53^\circ \cdot \cos 8^\circ - \sin 8^\circ \cdot \cos 53^\circ$;

в) $\cos 13^\circ \cdot \cos 17^\circ - \sin 13^\circ \cdot \sin 17^\circ$;

г) $\sin 33^\circ \cdot \sin 3^\circ + \cos 33^\circ \cdot \cos 3^\circ$.

114. Ифодаҳоро содда намоед:

а) $(\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta)^2 + (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta)^2$;

б) $4\sin(15^\circ + \alpha) \cdot \cos(15^\circ - \alpha) - 2\sin 2\alpha$;

в) $4\cos\alpha \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 3\alpha$;

г) $8\cos^4 x - 4\cos 2x - \cos 4x$.

115. Айниятҳоро исбот кунед:

а) $\cos^2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{4}$;

б) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot tg\alpha = ctg\alpha$;

в) $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin^2\beta$;

г) $16\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = 3$.

Ба параграфи 2

116. Ҳисоб кунед:

а) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$; б) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

в) $2\sin 105^\circ \cdot \cos 105^\circ$; г) $\cos^2\frac{7\pi}{12} - \sin^2\frac{7\pi}{12}$.

117. Ифодаҳоро содда кунед:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha$; б) $4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha$;

в) $(tg\alpha + ctg\alpha) \cdot \sin 2\alpha$; г) $\frac{2\cos^2\alpha \cdot tg\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$.

118. Айниятҳоро исбот кунед:

а) $4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha$; б) $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$;

в) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$; г) $\frac{1 - \cos^2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = tg\alpha$.

119. Қимати $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$-ро ёбед, агар $\sin 2\alpha = -\frac{3}{5}$, $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ бошад.

Ба параграфи 3

120. Агар $\cos\alpha = 0{,}6$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ва $tg\frac{\alpha}{2}$-ро ёбед.

121. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$-ро ёбед, агар $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ бошад.

Ба параграфҳои 4 - 5

Суммаро ба ҳосили зарб табдил диҳед (122 - 123):

122. а) $\cos 52^\circ + \cos 18^\circ$; б) $\cos 78^\circ - \cos 18^\circ$;

в) $\cos\alpha + \cos 5\alpha$; г) $\sin\alpha + \sin 7\alpha$.

123. а) $\frac{1}{2} - \cos\alpha$; б) $1 + 2\cos\alpha$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\alpha$; г) $2\sin\alpha - \sqrt{3}$.

Ҳосили зарбро ба сумма табдил диҳед (124-125):

124. а) $\cos 35^\circ \cdot \cos 5^\circ$; б) $2\cos 35^\circ \cdot \sin 5^\circ$;

в) $2\sin 35^\circ \cdot \cos 5^\circ$; г) $\sin 35^\circ \cdot \sin 5^\circ$.

125. а) $\cos 2\alpha \cdot \cos 3\beta$; б) $\cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$;

в) $\sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)$; г) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$.

Ба параграфҳои 6 - 7

126. Аломати ифодаҳои зеринро муайян намоед:

а) $\sin 110^\circ$; $ctg 220^\circ$; $tg(-95^\circ)$; $\cos 600^\circ$;

б) $\cos 200^\circ$; $\sin 280^\circ$; $ctg(-230^\circ)$; $\sin(-3^\circ)$;

в) $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; $tg 2$; $ctg\left(\frac{4\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $\sin 4$;

127. Ҳисоб кунед:

а) $tg45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot ctg30^\circ$;

б) $3\cos 180^\circ + 5 \cdot ctg270^\circ - 2\sin 360^\circ - tg60^\circ$;

в) $\cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot tg^2\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4}$;

128. Қиматҳои ададии ифодаҳои зеринро ёбед:

а) $\sin\alpha + \cos\alpha$

ҳангоми: 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; 3) $\alpha = 180^\circ$; 4) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

б) $\sin\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$

ҳангоми: 1) $\alpha = 30^\circ$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; 4) $\alpha = 90^\circ$.

129. Ифодаҳоро содда кунед:

а) $\frac{(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{\sin 70^\circ}$;

б) $4\sin(15^\circ + \alpha)\cdot\cos(15^\circ - \alpha) - 2\sin 2\alpha$.

Ба параграфҳои 8 - 9

130. Даври мусбати хурдтарини функсияҳоро ёбед:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = tg4x$; в) $y = ctg\frac{x}{4}$;

г) $y = \cos\frac{3x}{2}$; д) $y = tgx + ctg2x$; е) $y = \sin^2 x + tgx$.

131. Соҳаи муайянии функсияҳои зеринро ёбед:

а) $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$; б) $y = \cos(\lg x)$; в) $y = \sin\frac{1}{x}$; г) $y = \frac{tgx}{\cos 2x}$.

132. Соҳаи қиматҳои функсияҳоро ёбед:

а) $y = 1 + \sin^2 x$; б) $y = |\cos x|$; в) $y = 1 - 2|\sin 3x|$;

г) $y = 2^{\sin x} + 1$; е) $y = x \cdot ctgx$.

БОБИ III. МУОДИЛАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Дар ин боб ба моҳияти муодилаҳои тригонометрӣ, баъзе усулҳои ҳалли онҳо, инчунин ба ҳалли системаҳои муодилаҳои тригонометрӣ шинос мешавем. Аммо барои амиқ ва мукаммал аз худ намудани муодилаҳои тригонометрӣ лозим меояд, ки роҷеъ ба арксинус, арккосинус ва арктангенс маълумоти комил дошта бошем.

§ 1. Арксинус ва ҳалли муодилаи $\sin x = a$

Ҳалли муодилаи $f(x) = a$ барои ҳамаи функсияҳои тригонометрӣ ба теоремаи зерин асос меёбад.

Теорема (доир ба реша). **Агар функсияи f дар фосилаи I афзояд (ё кам шавад) ва адади a қимати дилхоҳи f аз ин фосила бошад, онгоҳ муодилаи $f(x) = a$ дар ин фосила I ягона решаи b-ро дорост.**

Исбот (бо методи аз баръаксӣ). Фарз мекунем, ки муодилаи $f(x) = a$ дар фосилаи I дуто реша дорад: c ва b.

- Байни c ва b чӣ гуна муносибат ҷой дошта метавонад? Ё $c < b$ ва ё $c > b$ аст. Азбаски f-функсияи афзуншаванда аст, аз ин нобаробариҳо бармеояд, ки $f(c) < f(b)$ ё ин ки $f(c) > f(b)$ ҷой доранд. Ин мухолифат нишон медиҳад, ки фарзи мо нодуруст буда, муодилаи $f(x) = a$ дар фосилаи I ғайр аз b дигар реша дошта наметавонад.

Теорема исбот шуд.

Мавриди камшавандагии функсияи f дар фосилаи I айнан нишон дода мешавад (исбот кунед!).

Мисол. Муодилаи $x^3 + 2x = 3$ ҳал карда шавад.

Функсияи $f(x) = x^3 + 2x$, ки аз суммаи ду функсияи афзуншаванда иборат аст, дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ R афзуншаванда мебошад. Бинобар ин, муодилаи $f(x) = 3$ аз як реша зиёд дошта наметавонад. Дидан душвор нест, ки решаи он $x = 1$ аст.

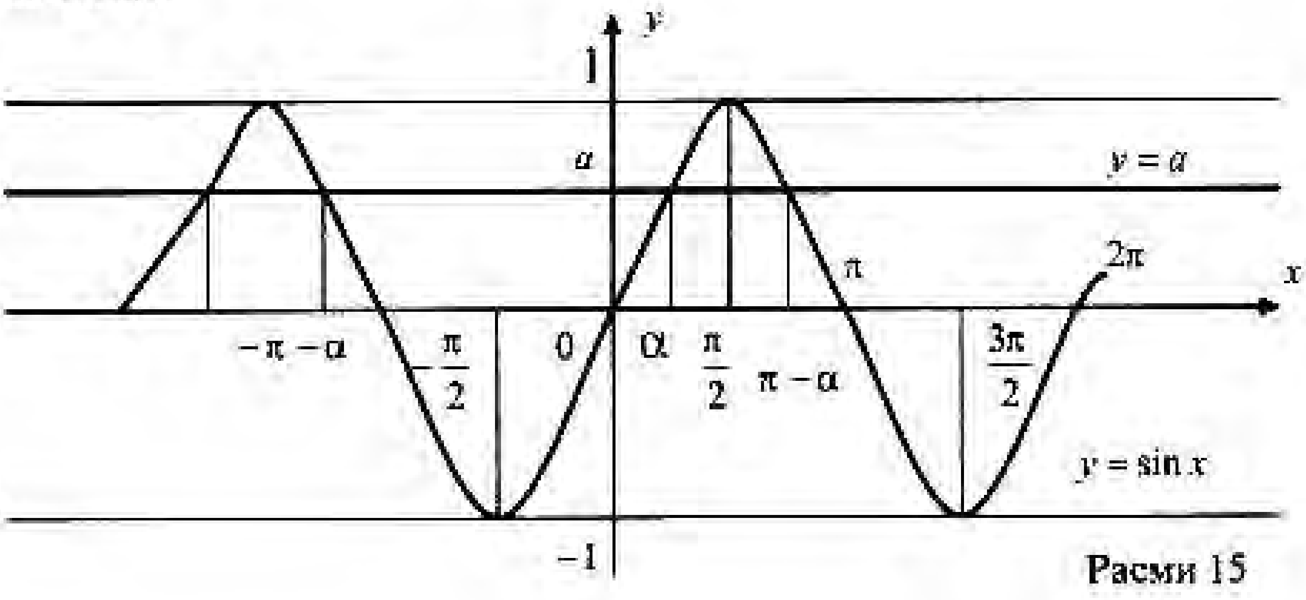
Акнун **муодилаи** $\sin x = a$ $(|a| \le 1)$ -ро ҳал мекунем.

Аз методи зерин истифода мебарем. Графики $y = \sin x$

ва $y = a$ -ро дар як нақша месозем. Абсиссаи нуқтаҳои буриши онҳо ҳалли муодилаи дода шуда мебошад (расми 15).

Аз расм намоён аст, ки ингуна нуктаҳо аз ҳад зиёданд, яъне муодила ҳалҳои бешумор дорад. Мақсад мегузорем, ки аз онҳо **якто ҳалли асосиашро** маълум карда, формула тартиб диҳем, то ки ҳалҳои боқимонда ба воситаи он ифода ёбанд. Азбаски даври синус 2π аст, кифоя мебошад, ки ҳама ҳалҳоро дар ҳудуди ин фосила маълум кунем. Аз график дида мешавад, ки дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ ду адад (ё ин ки кунҷ) вуҷуд доранд, ки синусашон баробари a аст.

Дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функсияи синус афзуда аз -1 то 1 қимат қабул мекунад. Дар фосилаи $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ бошад монотонӣ аз 1 то -1 кам мешавад. Суммаи ин фосилаҳо ба даври синус 2π баробар мебошад. Мувофиқи теорема доир ба реша дар фосилаи якум танҳо як адад α муодилаи $\sin x = a$ $(|a| \leq 1)$ -ро қаноат мекунад. Дар фосилаи дуюм бошад $\pi - \alpha$ решаи муодила аст. Агар ба ададҳои π ва $\pi - \alpha$ даври синус 2π -ро ҳамроҳ кунем, ҳалҳои боқимонда ба вуҷуд меоянд.



Расми 15

Ба ҳамин тариқ, ҳамаи ҳалҳои муодилаи $\sin x = a$ $(|a| \le 1)$ аз рӯи ду формула ёфт мешаванд:

$$x = \alpha + 2\pi k, \quad x = \pi - \alpha + 2\pi k = -\alpha + \pi(2k+1), \quad k \in Z.$$

Ин формулаҳоро ҳамҷоя намуда, ҳосил мекунем:

$x = (-1)^n \alpha + \pi n, \quad n \in Z$ (n-қиматҳои ҷуфт ва тоқ қабул мекунад).

Мисол. Муодилаи $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Ҳалли асосии он $x = \frac{\pi}{3}$ аст. Ҳалҳои боқимонда аз рӯи формулаҳои $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ва $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k = -\frac{\pi}{3} + \pi(2k+1)$, $k \in Z$ ҳосил карда мешаванд. Онҳоро якҷоя мекунем:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$$

Эзоҳ. Ду варианти навишти ҳал ҷой дорад:

1) $x = (-1)^n 60^\circ + 180^\circ n, \ n \in Z$ ва 2) $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z$

Боиси қабул нест, агар дар навишт қисман аз варианти якум ва қисман аз варианти дуюм истифода барем.

Чунончӣ, $x = (-1)^n 60^\circ + \pi n$ ё $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 180^\circ n, \ n \in Z$

навиштан мумкин нест.

Ба **ҳалли асосии муодила** исми махсус – **арксинус** мондаанд ва онро бо $x = \arcsin a$ ишорат мекунанд.

Таъриф. ***arcsin a*** **- кунҷи *x*-ро меноманд, ки ба фосилаи** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ **таалуқ дошта, синуси он ба *a* баробар аст.**

Тарзи навишт: аломати “*arcsin a*” аз ду калимаи лотинӣ “arcus” (камон) ва “sinus” иборат буда, якҷоя навишта мешавад.