Ба хотир гиред !

arcsin a ҳамон вакт вучуд дорад, ки агар модули адади *a* аз воҳид калон набошад!

Мувофики ин гуфтахо халли муодилаи дода шуда намуди зеринро мегирад:

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad x = -\arcsin a + \pi(2k+1), \quad k \in Z.$$

Муттаҳидии онҳо формулаи умумии ҳалли муодиларо медиҳад.

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$$

Савол ба миён меояд: барои ёфтани кимати арксинус чаро маҳз фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$-ро интихоб намудем? Ба он максад, ки ин фосила ба ибтидои координат наздик аст.

Ҳолатҳои гуногуни ҳалли муодилаи $\sin x = a$ -ро дар ҷадвали зерин (ҷадвали 3) ҷойгир мекунем:

М и с о л х о:

1. $\arcsin 0 = 0;$ 2. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$

Қимати $\arcsin a$ $(a \in [0;1])$ бо ёрии ҷадвал ва ё калкулятор ҳисоб карда мешавад.

М и с о л х о:

а) $\arcsin 0{,}7815 \approx 51^\circ 24'$ (ҷадвали VIII – В.М.Брадис)

б) $\arcsin 0{,}45 \approx 26^\circ 48'$ (бо ёрии калкулятор)

Ҷадвали 3

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

№	Муодила	Ҳалли муодила ба воситаи градус	Ҳалли муодила ба воситаи радиан
1	$\sin x = 0$	$x = 180^\circ k$	$x = \pi k$
2	$\sin x = 1$	$x = 90^\circ + 360^\circ k$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(1 + 4k)$
3	$\sin x = -1$	$x = -90^\circ + 360^\circ k$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k - 1)$
4	$\sin x = \pm a$, $\lvert a \rvert < 1$	$x = \pm\alpha^\circ + 180^\circ k$, α° - кунчи тез	$x = \pm \arcsin\lvert a \rvert + \pi k$
5	$\sin x = a$, $\lvert a \rvert > 1$	Муодила ҳал надорад	

Фишангчаи «Р/Г» (радиан/градус)-ро ба холати «Р» оварда адади 0,45-ро ворид мекунем ва пайи хам тугмачахои «Г», "*arcsin*"- ро зер карда дар индикатор натичаро мехонем.

Аз таърифи арксинус айниятхои зерин бармеоянд:

1. $\sin(\arcsin a) = a$, агар $-1 \le a \le 1$ бошад.

Мехонем: Синуси адад аз фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ки синуси он ба a баробар аст, худи хамон адад a мебошад.

Мисол. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

2. $\arcsin(\sin x) = x$, агар $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ бошад.

Агар $\sin x = a$ гузорем, онгоҳ ин айнияти ба таърифи арксинус баробарқувва аст: $\arcsin a = x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Мисол. $\arcsin(\sin\frac{\pi}{3}) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

?

1. Ба калимахо ва рамзхои асосии матн ахамият дихед: арксинус, *arcsin a*, *sin*(*arcsin a*), *arcsin*(*sin x*).
2. Теорема доир ба решаро баён кунед.
3. Арксинуси a чй маъно дорад?
4. Арксинус чй гуна киматхо кабул мекунад?
5. Дар кадом маврид арксинуси a муайян аст?

Машқҳо

Ҳисоб кунед (1° - 3):

1°. а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin 1$; в) $\arcsin\frac{1}{2}$; г) $\arcsin 2$;

д) $\arcsin(-2)$; е) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; ё) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ж) $\arcsin 0{,}3240$

2. а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $-\arcsin(-1)+\arcsin 1$; г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}$.

3. а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arcsin(-0{,}4848)+\arcsin(0{,}997)+\arcsin(0{,}3240)$.

Қимати ифодаҳоро ёбед (4° – 6):

4°. а) $\arcsin(\sin 30^{\circ})$; б) $\arcsin(\sin\frac{\pi}{4})$.

5. а) $\sin(\arcsin 0{,}8)$; б) $\arcsin\left(\sin(-\frac{\pi}{7})\right)$.

6. а) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)$; б) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

§ 2. Арксинус ва ҳалли муодилаи *cosx = a*

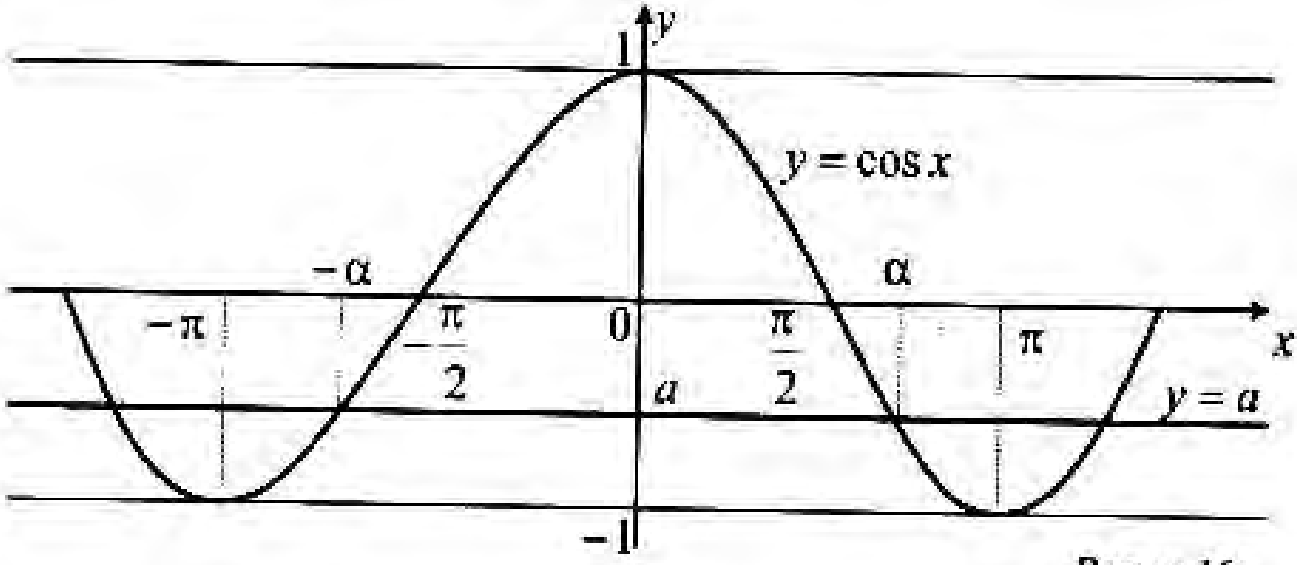
Муодилаи $\cos x=a$ $(|a|\le 1)$ -ро ҳал мекунем. Агар $a>1$ бошад муодила ҳал надорад, вале ҳангоми $-1\le a\le 1$ будан муодила ҳалҳои бешумор дорад (расми 16). Функсияи косинус дар фосилаи $[0;\ \pi]$ монотонӣ кам шуда, ҳамаи қиматҳоро аз 1 то -1 қабул мекунад.

Мувофиқи теорема оид ба реша дар ин фосила ягона адади α вуҷуд дорад, ки муодиларо қаноат мекунад. Аз симметрияи график айён аст, ки ҳалли дуюм $-\alpha$ ба фосилаи $[-\pi;0]$ тааллуқ дорад. Ин ҳалҳоро менависем:

$$x=\alpha+2\pi k,\ \ x=-\alpha+2\pi k,\ \ k\in Z$$

Ҳардуи ин формулаҳоро якҷоя мекунем:

$$x=\pm\alpha+2\pi k,\ \ k\in Z$$



Расми 16

М и с о л: Муодилаи $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ҳал карда шавад.

Ҳ а л. Ҳалли асосии муодила $x = \frac{\pi}{6}$ аст. Ҳалҳои бокимондаро менависем: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ҳалли асосии муодилаи $\cos x = a$ $(|a| \le 1)$-ро **арккосинус** номидаанд ва бо $x = \arccos a$ ишорат мекунанд.

Таъриф. ***arccos a* - кунҷи *x*-ро меноманд, ки ба фосилаи $[0;\pi]$ тааллуқ дошта, косинуси он ба *a* баробар аст. Мувофиқи таъриф, агар *arccos a* = α бошад, онгоҳ cos α = *a* ва $-1 \le a \le 1$ аст.**

Акнун ҳалли муодилаи $\cos x = a$ $(|a| \le 1)$-ро дар намуди умумӣ менависем:

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z}$$

Қиматҳои арккосинусро бо ёрии ҷадвал ва ё калкуляторҳо ҳисоб кардан мумкин аст.

Мавридҳои гуногуни ҳалли муодилаи $\cos x = a$-ро дар ҷадвал (ҷадвали 4) ҷойгир мекунем:

Ҷадвали 4

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

№	Муодила	Ҳалли муодила ба воситаи градус	Ҳалли муодила ба воситаи радиан
1	$\cos x = 0$	$x = 90^\circ + 180^\circ k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(1 + 2k)$
2	$\cos x = 1$	$x = 360^\circ k$	$x = 2\pi k$
3	$\cos x = -1$	$x = 180^\circ + 360^\circ k$	$x = \pi + 2\pi k = \pi(1 + 2k)$
4	$\cos x = \pm a$, $\lvert a \rvert < 1$	$x = \pm\alpha^\circ + 180^\circ k$, α°-кунчи тез	$x = \pm \arccos\lvert a \rvert + 2\pi k$
5	$\cos x = a$, $\lvert a \rvert > 1$	Муодила хал надорад	

Мисолҳо:

а) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; б) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$

Барои арккосинус айниятҳои зерин ҷой дорад:

1. $\cos(\arccos a) = a, \quad -1 \le a \le 1.$

Ин айнияти аз таърифи арккосинус бармеояд.

Мисол. $\cos(\arccos\frac{1}{2}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$

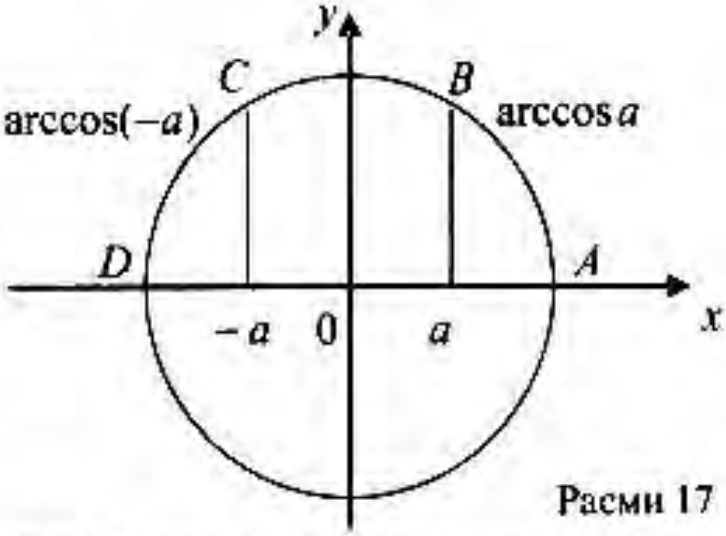
2. $\arccos(\cos x) = x, \quad 0 \le x \le \pi$

Агар $\cos x = a$ гузорем таърифи арккосинус ҳосил мешавад

$$\arccos a = x, \quad x \in [0; \pi] \text{ ва } \cos x = a$$

3. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

Дурустии ин айниятро бо **тарзҳои гуногун:** ба воситаи давраи воҳидӣ, графики косинус ва аз ду тарафи баробари гирифтани косинус нишон додан мумкин аст. Тарзи якумро мегирем. Дар давраи воҳидӣ ба ададҳои a ва $-a$ қиматҳои мувофики онҳо $arccos\ a$ ва $arccos\ (-a)$ рост меоянд (расми 17).



Расми 17

Аз нақша: $\cup AB = \cup CD$, $\cup AC = \cup ACD - \cup CD = \pi - \cup AB$;

$$\cup AB = \arccos a; \ \cup AC = \arccos(-a)$$

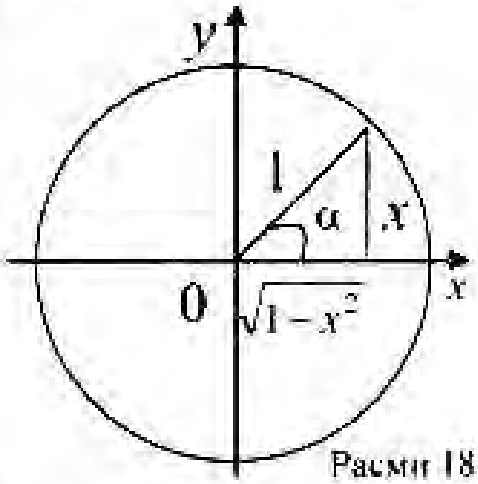
Пас, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

Дидан душвор нест, ки ҳам $\arccos a$ ва ҳам $\pi - arc\cos a$ ба фосилаи $[0;\pi]$ тааллуқ доранд.

Ин формула Шуморо аз хатоҳои зиёд огаҳ месозад. Онро аз хотир набароред!

М и с о л. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{2}{3}$.

Дар графики $y = cosx$ мустақилона нишон диҳед, ки ин айнияти ҷой дорад.



Расми 18

4. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Мегузорем: $\arcsin x = \alpha$, $\sin\alpha = x$

Дар давраи воҳидӣ (расми 18) камонеро интихоб мекунем, ки синусаш x бошад, $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Аз секунҷаи росткунча меёбем: $\cos\alpha = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

М и с о л. $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

?

1. Ба калимаҳо ва рамзҳои асосии матн эътибор диҳед: арккосинус, *arccos a*, *cos*(*arccos a*), *arccos*(*cos x*), *cos*(*arcsin x*) ва г.
2. Арккосинуси *a* чӣ маъно дорад?
3. Арккосинуси *a* кадом қиматҳоро қабул мекунад?
4. Арккосинуси *a* дар кадом маврид муайян аст?

Машқҳо

7. Ҳисоб кунед (шифоҳӣ):

а) $\arcsin 0 - \arccos 0$; б) $\arcsin(-x) + \arcsin x$;

в) $\arccos x + \arccos(-x)$; г) $\arccos 1 - \arccos(-1)$.

Ёбед (8° – 10):

8°. а) $\arccos 0$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos\frac{1}{2}$; г) $\arccos(-1)$;
д) $\arccos(-3)$; е) $\arccos 0{,}3058$; ё) $\arccos 0{,}3725$.

9. а) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) $\arccos 0+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\arccos(-0{,}1189)$.

10. а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arccos 0{,}9397+\arccos(-0{,}4928)+\arccos(0{,}7490)$.

Дар байни ифодахо яке аз аломатхои ">", "<", ё ин ки "="-ро гузоред (11° - 13):

11°. а) $\cos\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$ ва $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$ ва $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

12. а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ва $\cos\left(-3\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arcsin\frac{1}{2}-3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}$ ва $2\arcsin 1-2\arccos(-1)$.

13. а) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$ ва $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$ ва $\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

14*. Айниятхоро исбот кунед:

а) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$; б) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

§ 3. Арктангенс ва арккотангенс. Ҳалли муодилаҳои $tgx = a$ ва $ctgx = a$

Функсияи тангенс дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ҳамаи киматҳои тири ададиро қабул мекунад. Аз ин рӯ, муодилаи $tgx = a$ дар ин фосила танҳо як реша дорад. Агар онро бо α ишора кунем ва ба назар гирем, ки даври тангенс баробари π аст, онгоҳ ҳалҳои боқимонда аз рӯи формулаи зерин ёфта мешавад:

$$x = \alpha + \pi k, \quad k \in Z$$

М и с о л: Муодилаи $tgx = \sqrt{3}$ ҳал карда шавад.

Ҳ а л. Ҳалли асосии $tgx = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$ аст; ҳалҳои боқимонда:

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z$. Ҳалли асосиро $\alpha = arctga$ ишора карда, ба он таъриф медиҳем:

Таъриф. *arctg a* - кунҷи $x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ -ро меноманд, ки тангенси он ба *a* баробар аст.

Ҳалли умумии муодилаи $tgx = a$ намуди зеринро мегирад:

$$\boxed{x = arctga + \pi k, \quad k \in Z}$$

Ҳолатҳои гуногуни ҳалли муодилаи $tgx = a$ -ро дар ҷадвал (ҷадвали 5) ҷойгир мекунем:

М и с о л ҳ о:

а) $arctg0 = 0$; б) $arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

Муодилаи $ctgx = a$ ба монанди муодилаи $tgx = a$ дида баромада мешавад. Асоснок намудани ҳалли онро ба ихтиёри Шумо ҳавола намуда, натиҷаи охиринро менависем:

Ҷадвали 5

№	Муодила	Ҳалли муодила ба воситаи градус	Ҳалли муодила ба воситаи радиан
1	$tgx = 0$	$x = 180^\circ k$	$x = \pi k$
2	$tgx = 1$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
3	$tgx = -1$	$x = -45^\circ + 180^\circ k$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$
4	$tgx = \pm a$	$x = \pm\alpha^\circ + 180^\circ k$	$x = \pm arctg\lvert a\rvert + \pi k$

$$x = \alpha + \pi k, \qquad 0 < \alpha < \pi, \quad k \in Z.$$

Ва ё

$$\boxed{x = arcctga + \pi k, \quad k \in Z}$$

Таъриф. ***arcctg a*** **- кунҷи** $x \in (0;\pi)$**-ро меноманд, ки котангенси он ба *a* баробар аст.**

М и с о л. Муодилаи $ctgx = \sqrt{3}$ ҳал карда шавад.

Ҳ а л. $ctgx = \sqrt{3}$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$.

Мавридҳои гуногуни ҳалли муодилаи $ctgx = a$ -ро дар ҷадвал (ҷадвали 6) ҷой медиҳем:

Ҷадвали 6

№	Муодила	Ҳалли муодила ба воситаи градус	Ҳалли муодила ба воситаи радиан
1	$ctgx = 0$	$x = 90^\circ + 180^\circ k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
2	$ctgx = 1$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
3	$ctgx = -1$	$x = -45^\circ + 180^\circ k$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$
4	$ctgx = \pm a$	$x = \pm\alpha^\circ + 180^\circ k$, α° - кунҷи тез	$x = \pm arcctg\lvert a\rvert + \pi k$

Барои арктангенс ва арккотангенс айниятҳои зерин ҷой доранд:

1. $tg(arctga) = a$;
2. $ctg(arcctga) = a$;
3. $arctg(tgx) = x$;
4. $arcctg(ctgx) = x,\ 0 < x < \pi$;
5. $arctg(-x) = -arctgx$;
6. $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$.

?

1. Ба калимаҳо ва рамзҳои манбаъвие, ки дар матн дучор меоянд, эътибор диҳед: арктангенс, арккотангенс, $arctga$, $arcctga$, $tg(arctga)$, $arctg(tgx)$, $ctg(arcctga)$, $arcctg(ctgx)$.
2. Арктангенси a чӣ маъно дорад? Кадом киматҳоро қабул мекунад?
3. Арктангенси a дар кадом маврид муайян аст?
4. Арккотангенси a чӣ маъно дорад?
5. Арктангенс ва арккотангенс функсияҳои камшавандаанд ё афзуншаванда?
6. Муодилаҳои тригонометрии соддатарин $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$ ва $ctgx = a$ чандто ҳал доранд?

Машқҳо

Ҳисоб кунед (15° – 17):

15°. а) $arctg0$; б) $arctg1$; в) $arctg(-1)$; г) $arcctg0$; д) $arcctg1$; е) $arctg\sqrt{3}$.

16. а) $arctg0 + arctg\sqrt{3} + arcctg\sqrt{3} + arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

б) $arctg(-1) + arcctg(-1) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

17. а) $2\arccos\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} - 3arctg1$;

б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - arctg\frac{\sqrt{3}}{3} - arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

18. Айниятҳоро исбот кунед:

а) $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$; б) $tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $ctg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Қимати ифодаҳоро ёбед (19° – 22*):

19°. а) $tg(arctg1 + arctg(-1))$; б) $tg\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg\sqrt{3}\right)$;

в) $tg\left(arctg0 + arctg\left(-\sqrt{3}\right)\right)$; г) $tg\left(arctg0 + arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.

20. а) $tg\left(2arctg1 + 2arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$; б) $\cos(arcctg(-0{,}2839))$;

в) $tg\left(arctg\left(-\sqrt{3}\right)\right) + \sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + ctg\left(arcctg\sqrt{3}\right)$;

г) $tg(\arcsin 0{,}912)$.

21. а) $tg\left(arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{4}\right)$; б) $\sin(2arctg3)$.

22*. а) $\cos\left(arcctg\frac{3}{4} + arcctg\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$;

б) $\sin\left(2arctg\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)$.

Н и ш о н д о д. $arctg\frac{1}{2} = \alpha$, $\arccos\frac{3}{4} = \beta$ ишорат карда аз формулаҳои $\sin(\alpha - \beta)$, $\sin 2\alpha$ ва $\cos 2\alpha$ истифода баред.

§ 4. Ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ

Ҳалли муодилаҳои мураккаби тригонометрӣ бо ёрии табдилдиҳиҳои гуногун ба ҳалли муодилаҳои оддатарин ($\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, ва $ctgx = a$) оварда мешаванд.

Методҳои ҳалли муодилаҳои тригонометрӣ хеле зиёданд. Вале дар амал **методи табдилдиҳиҳои маълум, методи ба забкунандаҳо чудокунӣ** ва **методи дохил намудани номаълуми нав бештар** истифода бурда мешавад.

1. Муодилаҳое, ки бо ёрии табдилдиҳиҳои маълум ҳал карда мешаванд

Татбиқи ин тарзро дар ҳалли муодилаҳо дида мебароем.

М и с о л ҳ о. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1. $\sin 5x \cos 3x = \sin x \cos x$

Ҳ а л. Тарафи чапи муодила табдилдиҳиҳии маълумро ифода мекунад; ҳосили зарбро ба сумма табдил медиҳем:

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \sin x \cos x.$$

Ва ё $\sin 8x + \sin 2x = 2\sin x \cos x$

Тарафи рости ин баробарӣ табдилдиҳии маълумро ифода мекунад:

$$\sin 8x + \sin 2x = \sin 2x$$

Аз ин ҷо: $\sin 8x = 0$, $8x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{8}$, $k \in Z$.

Ҷ а в о б. $x = \frac{\pi k}{8}$, $k \in Z$.

2. $\sin x + \sin 3x = 0$

Ҳ а л. Тарафи чап табдилдиҳии маълум аст. Суммаро ба ҳосили зарб табдил медиҳем:

$$2\sin\frac{x+3x}{2} \cdot \cos\frac{x-3x}{2} = 0 \Rightarrow 2\sin 2x \cos x = 0$$

Таваҷҷӯҳ фармоед! Агар дар муодилаи тригонометрӣ тарафи чапи он ҳамзарбҳои номаълум доштa, тарафи рости ба сифр баробар бошад, ҳар якеи ин ҳамзарбҳоро ба сифр баробар карда, муодилаҳои ҳосилшударо ҳал кардан лозим аст.

Аз ин чо: $\sin 2x = 0, \quad 2x = \pi k, \quad x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z$

ва $\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

Азбаски ҳамаи ҳалҳои муодилаи дуюм дохили ҳалҳои якум ҳастанд (санҷед!), бинобар ин **ч а в о б** ро кӯтоҳ $x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z$ менависем.

3. $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$

Ҳ а л. Ба ҳар се аъзои тарафи чапи муодила табдилдиҳии маълумро тадбиқ мекунем. Суммаро ба ҳосили зарб табдил медиҳем:

$$\sin 5x + \sin x = 2\sin 3x \cos 2x$$

Ғайр аз ин, $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ аст. Баъди 1-ро ба тарафи чап гузаронидан муодила намуди зеринро мегирад:

$$2\sin 3x \cos 2x + (1 - \cos 2x) - 1 = 0; \quad 2\sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$$

Зарбкунандаи умумиро аз қавс мебарорем:

$$\cos 2x \cdot (2\sin 3x - 1) = 0$$

Аз ин чо ду муодила ҳосил мекунем:

$$\cos 2x = 0, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z;$$

$$2\sin 3x - 1 = 0, \quad \sin 3x = \frac{1}{2},$$

$$3x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Азбаски $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ аст, онгоҳ $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z$ мешавад.

Ба ҳамин тариқ, ҳалли муодила аз ададҳои зерин иборатанд:

Ҷ а в о б: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z,\ x=(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z.$

Масъала. Координатаҳои нуқтаҳои буриши ду синусоидаро муайян кунед: $y_1=2\sin x$ ва $y_2=\sin 3x$

Ҳ а л. Муодилаи зеринро тартиб медиҳем

$$2\sin x=\sin 3x$$

Табдил медиҳем: $\sin x+\sin x=\sin 3x$

$$\sin x=\sin 3x-\sin x$$

Тарафи рости муодила табдилдиҳии маълум аст:

$$\sin x=2\sin x\cos 2x$$

Аз ин ҷо: $\sin x=0,\quad x=\pi k,\ k\in Z$

$$\cos 2x=\frac{1}{2},\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$$

Нуқтаҳои матлуби буриши синусоидаҳоро меёбем:

$(0;0),\ (\frac{\pi}{6};1),\ (\frac{5\pi}{6};1),\quad (\pi;0)$ ва ғайраҳо

2. Муодилаҳое, ки ба воситаи табдилдиҳиҳо ба муодилаҳои алгебравӣ оварда мешаванд

Агар муодила аз якчанд функсияҳои тригонометрии аргументи якхела дошта иборат бошад, онгоҳ ҳамаи функсияҳоро ба воситаи яке аз онҳо ифода кардан мумкин аст. Дар он сурат нисбат ба ин функсия муодилаи алгебравие ҳосил мешавад, ки онро бо **методи дохил намудани номаълуми нав** ва ё **бо зарбкунандаҳо ҷудокунӣ** ҳал мекунанд.

М и с о л ҳ о. Ҳалли муодилаҳо.

1. $2\sin^2 x+\cos x-1=0$

Ҳ а л. Агар $\sin^2 x$-ро ба воситаи косинус ифода кунем, муодилаи алгебравӣ нисбат ба функсияи косинус ҳосил мешавад:

$$2(1-\cos^2 x)+\cos x-1=0,\quad 2\cos^2 x-\cos x-1=0.$$

Номаълуми нав дохил мекунем: $\cos x=y.$

Муодилаи квадратии $2y^2 - y - 1 = 0$ ҳосил мешавад.

Ҳалли он: $y_1 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = 1.$

Пас, $\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi k = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Ҷ а в о б: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in Z, \ x = 2\pi k, \ k \in Z.$

2. $3\sin x + \cos x = 1$

Ҳ а л. Муодиларо дар ин намуд менависем:

$$3\sin x - (1 - \cos x) = 0$$

$\sin x$ ва $(1 - \cos x)$ -ро бо ёрии формулаҳои нисфи кунҷ ифода карда пайдо мекунем:

$$6\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0, \quad 3\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 0$$

Ба **зарбкунандаҳо** ҷудо мекунем:

$$\sin\frac{x}{2}(3\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}) = 0$$

Аз ин ҷо:

$$\sin\frac{x}{2} = 0, \ \frac{x}{2} = \pi k, \ x = 2\pi k, \ k \in Z$$

$$3\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0, \ tg\frac{x}{2} = 3,$$

$$\frac{x}{2} = arctg3 + \pi k, \quad x = 2arctg3 + 2\pi k, \ k \in Z.$$

Ҷ а в о б: $x = 2\pi k, \ k \in Z; \ x = 2arctg3 + 2\pi k, \ k \in Z.$

3. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = 1 + \cos 2x$

Ҳ а л. Ҳамаи аъзоҳои муодиларо ба тарафи чап мегузаронем:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x)-(1+\cos 2x)=0$$

Маълум, ки $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ ва ифодаи $1+\cos 2x$ бошад баробари $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ аст.

Онгоҳ, $\cos x-2\cos^2 x=0$.

Муодилаи алгебравӣ нисбат ба функсияи косинус пайдо шуд. Зурбкунандаи умумиро аз қавс мебарорем.

$$\cos x(1-2\cos x)=0$$

Аз ин чо: $\cos x=0,\ \ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z$

$$1-2\cos x=0,\ \ \cos x=\frac{1}{2},\ \ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z.$$

Ҷ а в о б: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z$ ва $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z.$

3. Муодилаҳое, ки ба воситаи паст кардани дарача ҳал карда мешаванд

Агар муодила квадрати синусҳо ва косинусҳоро дарбар гирад, формулаҳои $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ ва $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$-ро истифода бурда, тартиби муодиларо паст мекунем. Махсусан, дар муодилаҳое, ки онҳо аз синус ва косинуси дарачаҳои чуфти баланд иборатанд, татбиқи ин формулаҳо ба мақсад мувофиқ аст.

М и с о л ҳ о. Ҳалли муодилаҳо.

1. $4\sin^2 x-\cos 2x=5$

Ҳ а л. Бо ду тарз ҳал мекунем.

Т а р з и 1. Агар $\sin^2 x$-ро ба $\frac{1-\cos 2x}{2}$ иваз кунем, дарачаи

муодила паст шуда, нисбат ба $\cos 2x$ муодилаи хаттӣ пайдо мешавад.

$$4\cdot\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)-\cos 2x=5,\quad \cos 2x=-1,\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$$

Т а р з и 2. Ба эътибор мегирем, ки $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ аст. Онгоҳ, $4\sin^2 x-(1-2\sin^2 x)=5;\quad \sin^2 x=1;$

$$x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z \quad \text{ва} \quad x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Ҷ а в о б. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$

2. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cos x$

Ҳ а л. Муодила дар ин намуд ба ягон табдилдиҳии маълум шабоҳате надорад. Вале дида метавонем, ки:

$$(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\frac{1}{2}\sin 2x \qquad \text{мешавад.}$$

Акнун ба муодилаи ҳосилшуда **табдилдиҳиҳои маълумро** татбиқ кардан мумкин аст. Аз формулаҳои $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ ва $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\sin 2x$$

Аз ин ҷо: $\qquad 1+\cos^2 2x=\sin 2x$

Аз рӯи айнияти асосӣ $(\cos^2 2x+\sin^2 2x=1)$ $\cos^2 2x$-ро ба $1-\sin^2 2x$ иваз карда, нисбат ба функсияи $\sin 2x$ муодилаи алгубравӣ пайдо мекунем:

$$\sin^2 2x+\sin 2x-2=0$$

Гузориши $\sin 2x=y$ муодилаи квадратии зеринро медиҳад:

$$y^2 - y - 2 = 0, \quad y_1 = 2; \quad y_2 = -1.$$

$\sin 2x = 2$, ҳал надорад, зеро $-1 < \sin x < 1$ аст.

$$\sin 2x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z.$$

Ҷ а в о б. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$

4. Муодилаҳои якчинса

Муодилаҳои намуди

$$a\sin x + b\cos x = 0 \qquad (1)$$

ва $$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos x = 0 \qquad (2)$$-ро дида мебароем.

Таъриф. Муодилае, ки дар он суммаи дарачаҳои синус ва косинуси ҳар як ҷамъшавандаи тарафи чап якхела аст, муодилаи якчинса ном дорад.

Муодилаҳои (1) ва (2) – мувофиқан муодилаҳои якчинсаи дарачаи якум ва дуюм мебошанд. Ҳар ду тарафи муодилаи якумро ба $\cos x (\cos x \neq 0)$ ва ҳарду қисми муодилаи дуюмро ба $\cos^2 x$ таксим карда, нисбат ба tgx муодилаи алгебравӣ ҳосил мекунем:

$$atgx + b = 0$$

$$atg^2 x + btgx + c = 0$$

Ин муодилаҳо ба воситаи гузориши $tgx = y$ ҳал карда мешаванд:

$$ay + b = 0, \quad y = -\frac{b}{a}, \quad tgx = -\frac{b}{a};$$

$$x = -arctg\frac{b}{a} + \pi k, \quad k \in Z.$$

$$ay^2 + by + c = 0,$$

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, агар $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ бошад, муодила

ду решаи ҳакикӣ дорад, ҳангоми $b^2 - 4ac < 0$ муодила ҳал надорад.

Мисолҳо. Ҳалли муодилаҳо.

1. $2\sin x - 3\cos x = 0$

Ҳ а л. Ду тарафи муодиларо ба $\cos x (\cos x \neq 0)$ таксим мекунем:

$$2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 3 = 0, \quad 2tgx = 3, \quad x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Ҷ а в о б. $x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

2. $\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 0$

Ҳ а л. $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{8\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{7\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0, \quad tg^2 x - 8tgx + 7 = 0.$

Гузориши $y = tgx$ муодилаи квадратии $y^2 - 8y + 7 = 0$-ро медиҳад. Ҳалли он: $y_1 = 1$ ва $y_2 = 7$

Решаҳои муодилаи дода шударо меёбем:

$$tgx = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z,$$

$$tgx = 7, \quad x = arctg7 + \pi k, \quad k \in Z.$$

Ҷ а в о б: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$ ва $x = arctg7 + \pi k, \quad k \in Z.$

3. $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2.$

Ҳ а л. Ба тарафи рости муодила айнияти $2 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$-ро татбиқ мекунем:

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x),$$

$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

Ду тарафи муодиларо ба $\cos^2 x$ таксим мекунем:

$$tg^2 x - 4tgx + 3 = 0.$$

$tgx = y$ мугезорем: $y^2 - 4y + 3 = 0$. Решаҳои он: $y_1 = 1$ ва $y_2 = 3$.

Ҳалли муодилаи додашуда:

Ҷ а в о б: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$ ва $x = arctg3 + \pi k,\ \ k \in Z$.

?

1. Кадом тарзҳои ҳалли муодилаҳои тригонометриро медонед?
2. Моҳияти тарзи ба зарбкунандаҳо ҷудокуниро фаҳмонед.
3. Чигуна муодилаҳоро муодилаҳои якчинса меноманд? Тарзҳои ҳалли онҳоро баён кунед.
4. Кадом намуди муодилаҳои тригонометрӣ ба воситаи паст кардани дарача ҳал карда мешаванд?

Машқҳо

Муодилаҳои зеринро бо тарзи ба зарбкунандаҳо ҷудокунӣ ҳал кунед ($23^\circ - 25$):

23°. а) $\cos x(\sin x - 3) = 0$; б) $\sin x(2\cos x - 1) = 0$;

в) $\cos x(2\sin x + 1) = 0$; г) $\sin^2 x = \sin x$;

д) $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos x$; е) $\sqrt{3}tgx - tg^2 x = 0$;

ё) $\cos^2 x + 3\cos x = 0$; ж) $\sqrt{3}\sin x\cos x = \sin^2 x$;

з) $3\cos^2 x + \cos x = 0$.

24. а) $\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4}{5}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4}{5}x\right)$; б) $1 + \cos x = \sin^2\frac{x}{2}$;

в) $ctg^2\frac{x}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}ctg\frac{x}{4} = 0$; г) $\cos^2\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$.

25. а) $\sin 2x + \cos x = 0$; б) $tg^2 x\sin^3 x = \sin^3 x$;

в) $\cos 4x\cos 5x = \cos 6x\cos 7x$.

Муодилаҳоро ҳал кунед ($26^\circ - 29^*$):

26°. а) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=1$;

б) $cos(x-30^\circ)\cos(x+30^\circ)-\sin(x-30^\circ)\sin(x+30^\circ)=0$.

27. а) $\sin x\sin 2x+\cos x\cos 2x=0$;

б) $\sin x\sin 2x=\cos x\cos 2x$;

в) $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0$;

г) $\sin 3x-cos 2x\sin x=0$.

28. а) $\cos 5x\cos x=\cos 4x$; б) $\cos x\cos 2x=\cos 3x$.

29^*. а) $\cos x\sin 3x-\cos 5x\sin 7x=\frac{1}{2}\sin 4x$;

б) $\sin(x+30^\circ)\sin(x-30^\circ)=\frac{1}{8}-\sin^2 x$.

Муодилаҳоро ҳал кунед ($30^* - 33^*$):

30°. а) $\cos 4x+\cos 2x=0$; б) $\sin 5x-\sin x=0$.

31. а) $\sin(x+60^\circ)-\sin(x-60^\circ)=\sqrt{3}$;

б) $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.

32. а) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x=0$;

б) $\cos 2x+\cos 8x=1+\cos 6x$.

33^*. а) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$;

б) $\cos 2x+\sin 2x+\cos x-\sin x=1$.

Муодилаҳоро бо ёрии тангенси нисфи
кунҷ ҳал кунед ($34^\circ - 36$):

34°. а) $3\sin x+4\cos x=4$; б) $2\sin x+5\cos x=-5$.

35. а) $3\sin x+4\cos x=3$; б) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}$.

36. а) $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$; б) $\sin 2x-4\cos 2x=4$.

Қимати калонтарин ва хурдтарини суммаро ёбед ($37^\circ - 39$):

37°. а) $\sin x+\cos x$; б) $1+\cos x$; в) $2\sin x+3$;

38. а) $1-4\cos 2x$; б) $\frac{1}{4}+2\cos^2 x$; в) $10-9\sin^3 3x$.

39. а) $1-8\sin^2 x\cos x$; б) $2\sin^2 x-\cos 2x$; в) $1+tgxtg2x$.

Муодилаҳоро бо методи дохил намудани номаълуми нав ҳал кунед (40° – 42):

40°. а) $\sin^2 x+2\sin x+1=0$; б) $4\cos^2 x-4\cos x+1=0$;

в) $tg^2 2x-7tg2x+10=0$; г) $\cos^2(\pi-x)+8\cos(\pi-x)=-7$.

41. а) $tg^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)tgx+\sqrt{3}=0$;

б) $\cos^2 5x-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\cos 5x+\frac{\sqrt{2}}{4}=0$;

в) $2\sin^2 x+5\sin(1{,}5\pi-x)=2$; г) $\sin^2\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{3}=0$.

42. а) $7\sin^2 x-5\cos^2 x+2=0$; б) $tg^2 x+ctg^2 x=2$;

в) $2\cos^2 x=3\sin x$; г) $2-3tgx\cos^2 x=\cos^2 x$.

Муодилаҳоро ҳал кунед (43° – 46^*):

43°. а) $\cos^4 x-\sin^4 x=1$; б) $\cos^4 x-\cos^2 x=0$;

в) $4\cos^2 x+\cos 2x=5$; г) $\sin 2x+2\cos^2 x=0$.

44. а) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}$; б) $\sin^2 x+\cos^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$.

45. а) $1+\cos^2 x=\sin^4 x$;

б) $\sin^4 x+\cos^4 x-3\sin 2x+\frac{5}{2}\sin^2 2x=0$.

46^*. а) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}$; б) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Муодилаҳоро ҳал кунед (47° – 50^*):

47°. а) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$; б) $3\sin^2 x-5\sin x\cos x=0$;

в) $\cos 2x+2\cos^2 x=0$; г) $\sin xctgx+\cos xtgx=0$;

д) $\sin 3x + \cos 3x = 0$; е) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$.

48. а) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

б) $4\sin^2 x + \cos^2 x = 4\sin x\cos x$.

49. а) $3\sin^2 2x - 0{,}5\sin 4x = 4\cos^2 2x$;

б) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 3$;

в) $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7$; б) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x = -1$.

50*. а) $25\sin^2 x + 30\sin x\cos x + 9\cos^2 x = 25$;

б) $4\sin^2 x + 7\cos^2 x + 3\sin 2x - 6\cos 2x = 1$.

Н и ш о н д о д. Формулаҳои дучанда ва айнияти $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ -ро истифода бурда, ба муодилаи якчинса оред.

§ 5. Системаи муодилаҳои тригонометрӣ ва ҳалли онҳо

Агар системаи муодилаҳо фақат аз муодилаҳои тригонометрӣ ва ё аз муодилаҳои тригонометрию алгебравӣ иборат бошад, онро *системаи муодилаҳои тригонометрӣ* меноманд.

Ба Шумо тарзҳои гуногуни ҳалли системаи муодилаҳои алгебравӣ: **ҷамъи алгебравӣ, гузориш, дохил намудани номаълуми нав** маълуманд.

Системаҳои муодилаҳои тригонометрӣ низ бо ҳамин тарзҳо ҳал карда мешаванд.

1. Тарзи ҳалли системаи намуди

$$\begin{cases} \sin x\cos y = a, \\ \cos x\sin y = b. \end{cases} \qquad (1)$$

-ро дар мисоли зерин дида мебароем:

М и с о л. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin y \cos x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ҳ а л. Муодилаҳоро ҷамъ ва тарҳ карда ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \sin y \cos x = 1, \\ \sin x \cos y - \sin y \cos x = 0. \end{cases}$$

Тарафи чапи муодилаҳои система табдилдиҳиҳои маълуманд:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = 0. \end{cases}$$

Ҳар яке аз ин муодилаҳоро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = \pi n. \end{cases} \qquad k, n \in Z$$

Чӣ тавре ки мебинем дар ин ҷо мо ду параметр k ва n $(k, n \in Z)$ -ро дохил намудем. Агар дар ин система мо танҳо як параметр (масалан, k)-ро истифода менамудем, ин сабабгори гумшавии ҳалли системаи дода шуда мегардид.

Бинобар ин, фаромӯш набояд кард, ки:

Ҳангоми ҳалли системаи муодилаҳои тригонометрӣ ба ҳар як муодилаи дар он ворид буда як параметр (аз маҷмуи z) интихоб кардан лозим аст.

Системаи ду муодилаи дуномаълумадор ҳосил шуд. Онхоро ҷамъ ва тарҳ карда, ҳалли системаи дода шударо меёбем:

Ҷ а в о б:
$$\begin{cases} x = \pi\left(\dfrac{\pi}{2} + k + \dfrac{1}{4}\right), \\ y = \pi\left(k - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{4}\right). \end{cases} \qquad k,\ n \in Z$$

2. Тарзи ҳалли системаи намуди

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = a, \\ \sin x - \cos y = b. \end{cases}$$

Ҳалли системаро дар мисоли зерин нишон медиҳем.
Системаи муодилаҳоро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{4}{5}, \\ \sin x - \cos y = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Ҳ а л. Муодилаҳои системаро ҷамъ ва тарҳ карда меёбем:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = \dfrac{3}{10}. \end{cases}$$

Ҳар яке аз ин муодилаҳоро ҳал карда, пайдо мекунем:

Ҷ а в о б: $$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \pm \arccos \dfrac{3}{10} + 2\pi k. \end{cases} \qquad k,\ n \in Z$$

3. Тарзи ҳалли системаи намуди

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ x + y = b. \end{cases} \qquad (1)$$

-ро дар мисоли зерин нишон медиҳем.
М и с о л. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Ҳ а л. Аз муодилаи дуюми система y -ро маълум намуда $\left(y=\frac{\pi}{3}-x\right)$, онро ба муодилаи якуми система мегузорем:

$$\begin{cases}\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2},\\ x+y=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Ҳосили зарби ду косинусро мувофиқи формулаҳои сумма ва фарқи косинусҳо табдил дода ҳосил мекунем:

$$\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}+x\right)=1,\\ x+y=\frac{\pi}{3}.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1,\\ x+y=\frac{\pi}{3}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\\ x+y=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Аз системаи охирин меёбем:

$$\begin{cases}2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z\\ x+y=\frac{\pi}{3}\end{cases}\quad \text{ва}\quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\\ y=-\pi k.\end{cases}\quad k\in Z$$

Ҷ а в о б: $x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \ k\in Z$ ва $y=-\pi k,\ \ k\in Z$

?

1. Ба калимаҳо ва ибораҳои манбаъвие, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: параметр, муодилаҳои тригонометрию алгебравӣ, системаи муодилаҳои тригонометрӣ, системаи ду муодилаи дуномаълума ва г.
2. Системаи муодилаҳои тригонометриро маънидод кунед.
3. Тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои тригонометриро номбар кунед.

Машкҳо

51. (Шифоҳӣ). Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} \sin(x+y)=1, \\ \sin(x-y)=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos 2y=\frac{1}{2}, \\ \cos 2x=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Бо методи табдилдиҳиҳои маълум, ҷамъи алгебравӣ ва дохил кардани номаълуми нав системаи муодилаҳоро ҳал кунед ($52^{\circ}-54^{*}$):

52°. а) $\begin{cases} \cos(x+y)=0, \\ \cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x\cos y=-0{,}5, \\ \cos x\sin y=0{,}5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos x\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \sin x\sin y=\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x\sin y=\frac{1}{4}, \\ 3tgx=ctgy. \end{cases}$

53. а) $\begin{cases} \sin x\cos y=\frac{1}{6}, \\ \sin x+\cos y=\frac{5}{6}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x\cos y=\frac{3}{4}, \\ \sin x\sin y=\frac{1}{4}. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x+\cos y=-\frac{1}{2}, \\ \sin x-2\cos y=1. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x+2\cos y=1{,}5, \\ \sin x-\cos y=0. \end{cases}$

54^{*}. а) $\begin{cases} tgx+tgy=2, \\ \cos x\cos y=\frac{1}{2}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} tgx+tgy=\sin x, \\ tgx-tgy=\sin(-x). \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x\sin y=0{,}75, \\ tgxtgy=3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x-\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=2. \end{cases}$

Системаи муодилаҳоро бо методи гузориш ва табдилдиҳиҳои маълум ҳал кунед (55° – 57^{*}):

55°. а) $\begin{cases} tgy = 0, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

56. а) $\begin{cases} tgx + tgy = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} tgxtgy = 0, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

57^{*}. а) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ x + y = 75^{\circ}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos 2x - \cos 2y = -\sqrt{3}. \end{cases}$

§ 6. Ҳалли нобаробариҳои тригонометрии оддитарин

Ҳалли ҳаргуна нобаробарии тригонометрӣ одатан ба ҳалли нобаробариҳои оддитарин $\sin x \le a$, $\cos x \le a$, $tg \le a$ ва г. оварда мерасонад.

Барои ҳалли нобаробариҳои тригонометрӣ зарур аст, ки:

1. Графики функсияҳои тригонометрии мувофиқро созем;
2. Дар давраи воҳидӣ ҳалли нобаробариро тасвир карда тавонем;
3. Даври будани функсияро ба эътибор гирем.
4. Нобаробариро дар фосилаи дилхоҳ, ки дарозии он ба даври функсияи дода шуда баробар аст, муоина намоем.

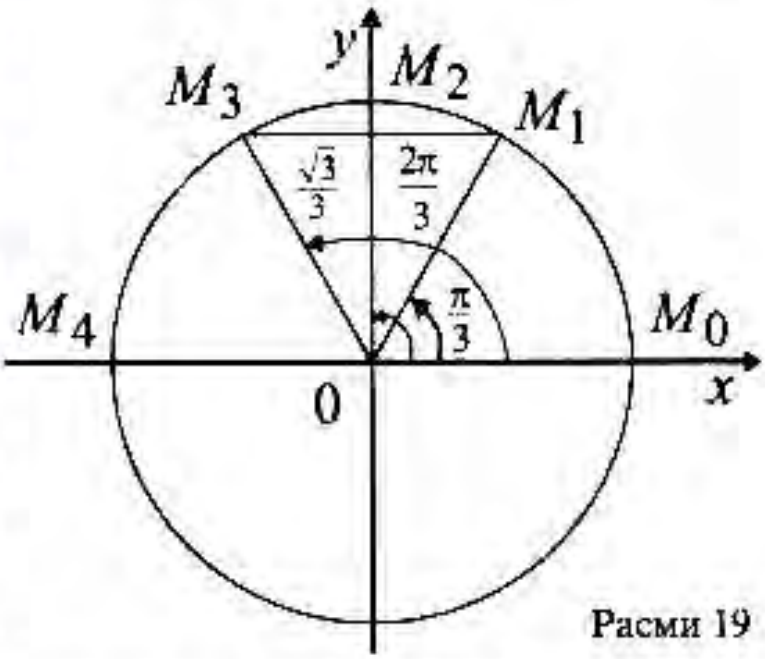
Ин амалиёт хусусияти алгоритмӣ дорад. Онро ба инобат гирифтан шарт аст.

Мисоли 1. Нобаробарии $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ҳал карда шавад.

Тарзи 1. **Давраи воҳидӣ месозем.** Адади $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$-ро дар тири синусҳо мегузорем. Хати росте, ки аз болои ин адад мегуза-

рад, давраро дар нуқтаҳои M_1 ва M_3 мебурад. Аз расми 19 айён аст, ки камонҳои M_0M_1 ва $M_0M_1M_3$ ба $\frac{\sqrt{3}}{2}$ баробаранд.

Нобаробарии дода шударо ҳамаи камонҳо, ки ибтидои онҳо дар нуқтаи M_0 воқеъ буда, охирашон ба нуқтаҳои дилхоҳи дохилии камони $M_1M_2M_3$ марбутанд, қаноат мекунанд, яъне $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$.



Расми 19

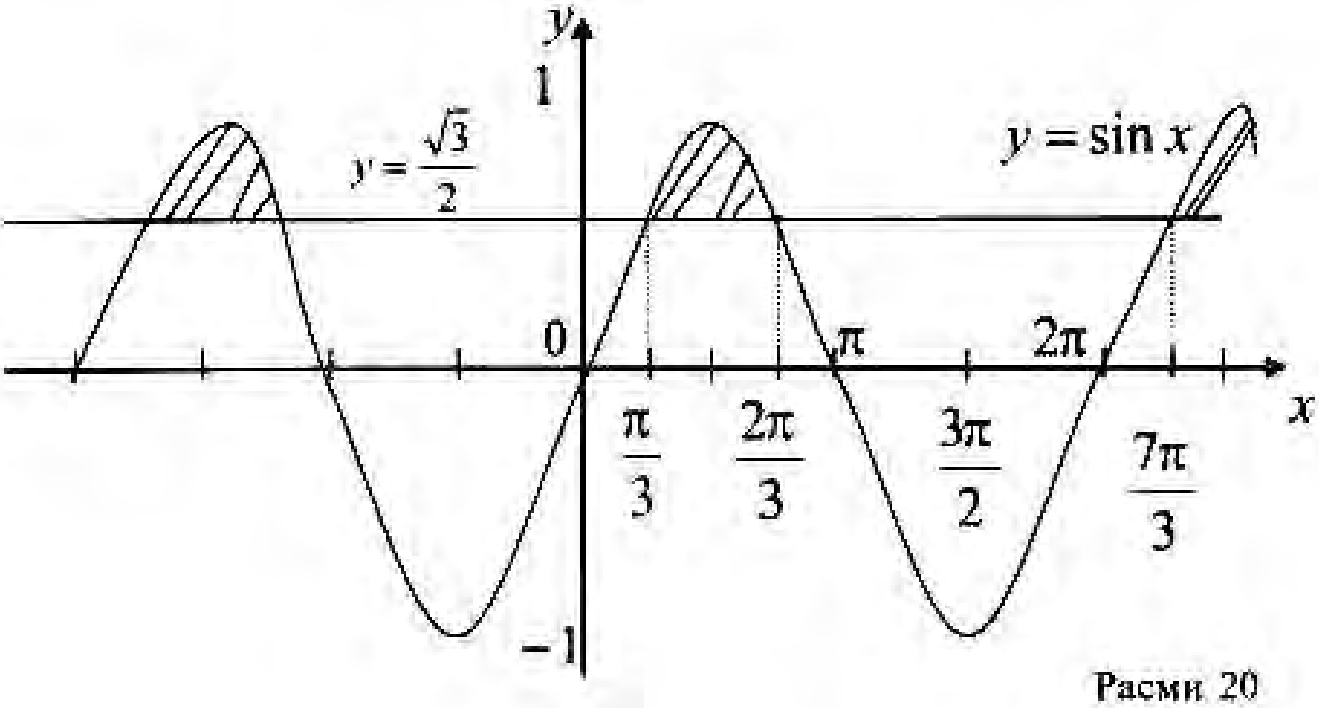
Барои пайдо кардани ҳамаи ҳалҳои нобаробарӣ ба охирҳои фосилаи $\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$ $2\pi k$ -ро илова мекунем (чаро?):

Ҷ а в о б: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z.$

Т а р з и 2. Графики функсияҳои $y = \sin x$ ва $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ -ро дар як нақша месозем (расми 20).

Аз расм намоён аст, ки хати рости $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ синусоидаро дар нуқтаҳои бешумор мебурад. Фосилаҳое, ки дар онҳо нобаробарӣ ҳал дорад, хеле зиёданд. Яке аз ин фосилаҳо $\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$ аст.

Даври будани синусро ба эътибор гирифта ҷавобро менависем:

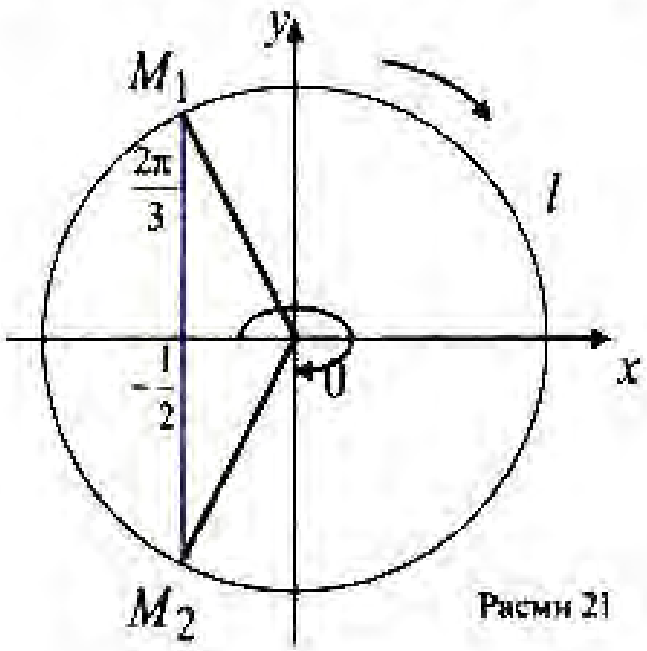


Расми 20

$$\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

М и с о л и 2. Нобаробарии $\cos x>-\frac{1}{2}$ ҳал карда шавад.

Ҳ а л. Нобаробариро ҳамаи нуқтаҳои давраи воҳидӣ, ки абсиссаашон аз $-\frac{1}{2}$ калон аст, қаноат мекунонад. Аз расми 21 дида мешавад, ки нуқтаҳои ин камон l дар тарафи рости хати рости $x=-\frac{1}{2}$ воқеъанд (онҳо ба хатти ғафс ҷудо карда шудаанд; охирҳои он ба нуқтаҳои M_1 ва M_2 дохил нестанд). Нуқтаи M_1 дар қисми болоии нимдавра ҷойгир шуда абсиссааш $-\frac{1}{2}$ аст; ординатаи он $\arccos(-\frac{1}{2})=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ мебошад.



Расми 21

Кунҷи x ба фосилаи $(0;2\pi)$ тааллук дорад. Ҳамаи ҳалҳои нобаробарӣ аз ин фосила намуди зайлро мегирад.

$$-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$

Агар даври будани косинусро ба эътибор гирем ва ба охирҳои ин фосила адади $2\pi k$ -ро илова намоем, ҳалҳои боқимонда ҳосил мешаванд:

Ҷ а в о б: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z$

1. Ба калимаҳо ва иборахои манбавие, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: давраи воҳидӣ, нобаробарии тригонометрӣ, ҳалли нобаробарии тригонометрӣ, фосилаҳое, ки дар онҳо нобаробарӣ ҳал дорад.

?

2. Хусусияти алгоритми доштани ҳалли нобаробариҳои тригонометриро маънидод кунед.

3. Методҳои ҳалли нобаробариҳои тригонометриро баён кунед.

4. Чӣ тавр, аз рӯи як ҳалли нобаробарӣ ҳалҳои боқимондаи он муайян карда мешаванд?

Машқҳо

Нобаробариҳоро ҳал кунед (58° – 60):

58°. а) $\sin x > 0$; б) $\sin x > \frac{1}{2}$;

в) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x > \frac{1}{2}$.

59. а) $\sin x \le \cos x$; б) $\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$;

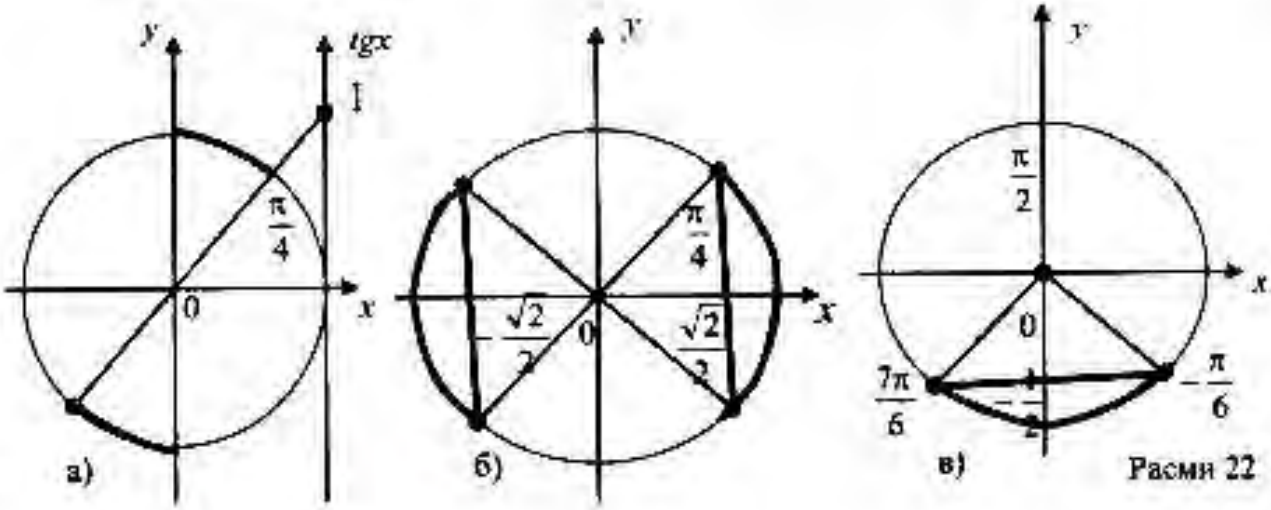
в) $\cos(-2x) \ge \frac{1}{2}$; г) $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \ge \sqrt{3}$;

60. а) $\sin(2x - 30^\circ) < 0{,}2$;

б) $\sin x\cos\frac{x}{2}+\cos x\sin\frac{x}{2}>\frac{1}{3}$;

в) $2\cos^2 x+3\cos x-2\geq 0$; г) $\left(\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\geq 0$.

61. Дар давраи вохидӣ ҳамаи ҳалҳои нобаробарихои тригонометрӣ тасвир ёфтаанд (расми 22 а, б, в). Онҳо кадом нобаробариҳоанд?



Расми 22

Худро санҷед !

Иштибох дар кучост?

1. Толибилме баён намуд: «$\cos(-x)=\cos x$ аст, аз ин рӯ $\arccos(-x)=\arccos x$, яъне функсияи арккосинус – функсияи чуфт мебошад». Магар ин мулоҳиза дуруст аст?

2. Хонандае муодиларо ин тавр ҳал кард:

$$\sin^2 x+2\sin x-3=0;\quad \sin x=1;\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$$

Магар ин ҳал дуруст аст?

3. Нобаробарии зерин чунин ҳал карда шудааст:

$$\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0;\qquad \sin 2x>\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \frac{\pi}{8}<x<\frac{3\pi}{8}.$$

Норасоии ҳал дар кучост?

Кори амали № 3

Максади кор. Истифодаи формулаҳои тригонометрӣ дар ҳалли масъалаҳои амалӣ ва муодилаҳои алгебравӣ.

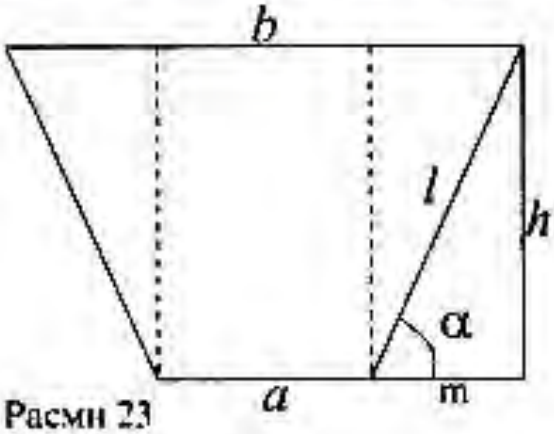
Варианти 1°. Истифодаи функсияи арктангенс барои муайян кардани кунҷи моилии паҳлӯҳои ҷӯйи обгузар.

Буриши кундалангии ҷӯйи обгузар трапетсияи баробарпаҳлӯ буда, a ва b мувофикан дарозии асосҳои поёнӣ ва болоии ҷӯй, h - чуқурии он, m- давоми асоси поён, α -кунҷи моилии паҳлӯҳо ба асос ва l- моилии паҳлӯҳоро ифода мекунад (расми 23).

Аз расм айён аст, ки:

$$tg\alpha = \frac{h}{m} = \frac{2h}{b-a} \qquad (1)$$

$$\alpha = arctg\frac{2h}{b-a}$$



Расми 23

Дода шудааст: a, b, h

1. Формулаи нишебии паҳлӯҳоро муайян кунед.
2. Аз рӯи ҷадвали 7 α ва l-ро ҳисоб кунед:

Рақами тартиб	a м	b м	h м	Рақами тартиб	a м	b м	h м
1	0,6	3,6	1,5	4	0,8	3,8	3,0
2	1,0	4,0	1,5	5	0,8	5,8	5,0
3	0,6	10,6	5,0	6	1,0	2,5	1,5

Варианти 2. Истифодаи айнияти $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ барои ёфтани решаҳои ҳақиқии системаи:

$$\begin{cases} a^2x^2 + b^2y^2 = c^2, & (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0) \\ xy = d. & (d \neq 0) \end{cases} \qquad (1)$$

Ҳалли ин гуна системаи муодилаҳо ба Шумо аз синфи 9 маълум аст. Ҳоло барои ҳалли системаи (1) айнияти $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ -ро истифода мебарем.

Ду тарафи муодилаи якуми системаи якро ба c^2 таксим мекунем:

$$\begin{cases}\left(\frac{a}{c}\right)^2 x^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2 y^2=1,\\ xy=d.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\frac{ax}{c}\right)^2+\left(\frac{by}{c}\right)^2=1,\\ xy=d.\end{cases} \qquad (2)$$

Муодилаи якуми системаи (2)-ро ба айнияти асосии тригонометрӣ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ муқоиса намуда, навишта метавонем: $\frac{ax}{c}=\sin\alpha$ ва $\frac{by}{c}=\cos\alpha.$

Аз ин ҷо: $x=\frac{c}{a}\sin\alpha$ ва $y=\frac{c}{b}\cos\alpha$ (3)

Қиматҳои x ва y-ро ба муодилаи дуюми системаи ду гузошта ҳосил мекунем:

$$xy=\frac{c}{a}\sin\alpha\cdot\frac{c}{b}\cos\alpha=\frac{c^2}{ab}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{c^2\cdot 2}{2ab}\cdot\sin\alpha\cos\alpha=d$$

яъне $\sin 2\alpha=\frac{2abd}{c^2}$, $\left|\frac{2abd}{c^2}\right|\le 1.$ (4)

Агар $\left|\frac{2abd}{c^2}\right|\le 1$ бошад, ҳалҳои ҳақиқии системаи (1) вуҷуд доранд. Аз баробари (4) кунҷи α -ро муайян карда, ба воситаи муносибатҳои (3) x ва y -ро ёфта метавонем.

С у п о р и ш. Дода шудааст: $\begin{cases}0{,}680x^2+0{,}76y^2=1,\\ xy=0{,}564.\end{cases}$

1. Аз система ***a***, ***b***, ***c*** -ро маълум кунед.

2. Аз рӯи формулаи (4) $\sin 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед, агар $\left|\frac{2abd}{c^2}\right|\le 1$ бошад.

3. Кунҷи α -ро маълум намоед.

4. Формулаҳои (3)-ро истифода бурда, ҳалҳои системаи дода шуда (x ва y)-ро ёбед.

Супориши мустақилона доир ба боби III

Варианти 1°. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1. $\sin 2x = \frac{1}{2}$,

2. $\cos^2 x + 3\cos x = 0$,

3. $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$.

4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x - y = 60^\circ. \end{cases}$

5. Нобаробариро ҳал кунед: $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Варианти 2. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1. $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$.

2. $2\sin^2 2x - 1 = 0$.

3. $tg^2 x = tgx$.

4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = 0{,}75, \\ x - y = 60^\circ. \end{cases}$

5. Нобаробариро ҳал кунед: $2\cos x - 1 \geq 0$.

Варианти 3*. Муодилаҳоро ҳал кунед:

1. $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

2. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$.

3. $4\sin x + 3\cos x = 5$.

4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0{,}25, \\ \sin y \cdot \cos x = 0{,}75. \end{cases}$

5. Нобаробариро ҳал кунед: $4\sin 2x \cdot \cos 2x \geq \sqrt{2}$.

МАШҚҲОИ ИЛОВА ОИД БА БОБИ III

Ба параграфҳои 1 - 3

Ҳисоб кунед ($62^{\circ} - 64^{*}$):

62°. а) $\arcsin 1$, б) $\arcsin 0$,

в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

63. а) $\arccos 0$, б) $\arccos(-1)$,

в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$, г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

64*. а) $\arcsin 0 + \arccos 0 + arctg 0$,

б) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + arctg\frac{\sqrt{3}}{3}$,

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

г) $\sin(3arctg\sqrt{3}) - \arccos 0$.

Ба параграфҳои 4 - 5

Муодилаҳоро ҳал кунед ($65^{\circ} - 67^{*}$):

65°. а) $2\sin 3x - \sqrt{3} = 0$, б) $\cos(2x - 18^{\circ}) = \frac{1}{2}$,

в) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, г) $tg(5x + 6^{\circ}) = 1$.

66. а) $\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)\cdot tgx = 0$, б) $\cos 3x \cdot \cos x = 0$,

в) $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$, г) $\cos 2x - \sin 2x = 0$.

67*. а) $\cos 2x + \cos 4x = 0$, б) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$,

в) $tg3x - tgx = 0$, г) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos x$.

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (68° – 70^{*})

68°. а) $\begin{cases} x+y=\pi, \\ \cos x-\cos y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos^2 x+\sin^2 x=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x-\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}, \\ tgx\cdot tgy=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

69. а) $\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=\dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x+\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x\cdot\sin y=0{,}25, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

70^{*}. а) $\begin{cases} tgx+tgy=1, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x=\sin y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$

Ба параграфи 6

Нобаробариҳои тригонометриро ҳал намоед (71 – 72):

71. а) $\cos x>-\dfrac{1}{2}$; б) $|\sin x|\le|\cos x|$;

в) $6\cos^2 x-11\cos x+4>0$; г) $4\sin^2 x-8\sin x+3\ge 0$

72. а) $\sin x>-\dfrac{1}{2}$; б) $tgx\ge-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos x\ge-0{,}7$; г) $ctgx>-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

БОБИ IV. ҲОСИЛА

Дар алгебраи синфи 9 (боби 1) Шумо ҳангоми омӯзиши функсияи квадратӣ ба мафҳумҳои максимум ва минимум шинос шудед. Ингуна масъалаҳо дар фаъолияти амалии инсон аҳамияти калон доранд. Онҳо аз рӯи мазмун, шакл ва методҳои ҳал хеле гуногунанд, вале новобаста аз ин, ҳалли онҳо ба як мақсад – ёфтани **тарзи беҳтарин** равона карда шудаанд.

Вокеан, инсон тамоми ҳаёт тадбир меҷӯяд, ки дар ҳама ҷо чизи беҳтару хубтар ва судмандтарро пайдо кунад, аз чизи беманфиату зараровар даст кашад.

Дар математика тадқиқи масъалаҳо оид ба экстремум 25 аср қабл аз ин оғоз ёфта буд. Ва ҳалли онҳо дар давоми таърихи математика ба рушду нумӯи ин фан мусоидат намуданд. Вале муддати тӯлонӣ барои муайян кардани экстремумҳо дар математика нуқтаи назари ягона вуҷуд надошт. Тақрибан сесад сол пеш – дар аснои ташаккулёбии асосҳои таҳлили математикӣ ба омӯзиши ингуна масъалаҳо олими фаронсавӣ **П.Ферма** (1601-1665) ибтидо гузошт.

Маълум гардид, ки ҳалли ин масоил ба **гузаронидани расанда ба хати каҷ** ва тадқиқи он вобаста будааст. Баъзе ҳолатҳои хусусии ҳалли ин масъаларо олимони Юнони қадим медонистанд. Ба Шумо аз геометрия маълум аст, ки Евклид тарзи сохтани расанда ба давраро **маълум** карда буд. Расанда ба давра ҳамчун хати росте, ки ба давра танҳо як нуқтаи умумӣ дорад, таъриф дода мешавад.

Ин таъриф хусусияти умумӣ надорад. Онро барои хатҳои каҷи дилхоҳ истифода бурдан мумкин нест. Баъдтар **Архимед** (тақ. 287-212 пеш аз милод) ва **Аполлон** (тақ. 262-200 то милод) ба дигар хатҳои каҷ (парабола, гипербола ва г.) расанда сохтаанд. Аммо ба онҳо кашфи **методи умумии гузаронидани расанда ба нуқтаи дилхоҳи ҳаргуна хати каҷ** муяссар нагардид.

Дар асри XVII аз тарафи олимони кишварҳои гуногун методҳои зиёди математикӣ барои ҳисоббарориҳои масоҳатҳо ва ҳаҷмҳо, аз он ҷумла, методи гузаронидани расанда ба хати каҷ кашф гардидаанд. Дар ин бобат саҳми

ду донишманди бузург – олими англис **Исаак Ниютон** (1643-1727) ва олмонӣ **Готфрид Вилгелм Лейбнитс** (1646-1716) басе арзанда аст. Барои Ниютон ҳисоб намудани суръати тағйирёбии ҳолати ҳиссача вобаста аз тағйирёбии вақт хеле муҳим буд. Аз ҳамин нуктаи назар барои ӯ **ҳосила суръат** ҳисоб меёфт.

Г.В. Лейбнитс ба натиҷаҳои Ферма ва дигар донишмандон такя намуда, алгоритми ҳалли масъалаи расанда ба хати каҷро математикӣ муайян кард. Кори ӯ соли 1684 интишор ёфта, дар он қоидаҳои асосии ҳосилагирӣ ворид гардида буданд. Истилоҳҳо ва аломатҳои кунунӣ аз ӯ ибтидо мегиранд.

Ниютон ва Лейбнитс новобаста аз якдигар нишон доданд, ки тадқиқи ҳодисаҳое, ки дар табиат, илму техника ғайримунтазам мегузаранд, танҳо ба воситаи ҳосила ба ҷо овардан имконпазир аст.

Таҳлили математикие, ки ба он ин ду донишманд асос гузоштанд, **дар асоси мафҳуми** ҳосила ҳамчун суръати тағйирёбии функсия бунёд гардид.

Мафҳуми ҳосила бо пуррагӣ дар мактаби олӣ омӯхта мешавад. Бинобар ин дар омӯзиши он то андозае маҳдуд мешавем.

§ 1. Афзоиши аргумент ва функсия

Фарз мекунем, ки функсияи $y = f(x)$ дода шудааст. Бигузор x ва x_1 ду қимати тағйирёбандаи новобаста аз $D(f)$ бошад. Онгоҳ фарқи $x_1 - x$ **афзоиши аргумент** ном дошта, бо Δx («делта икс» мехонем; онро дар асти XVIII Эйлер ворид намудааст) ишорат карда мешавад:

$$\Delta x = x_1 - x, \quad x_1 = x + \Delta x \qquad (1)$$

Дар ин маврид мегӯянд, ки қимати аввалаи аргумент x ба Δx афзоиш ёфт.

Хотирнишон мекунем: Δ (ҳарфи юнонӣ) зарбкунандаи x ҳисоб намешавад; он аломати ичрои амалиҳо фарқро ифода мекунад. Ба монанди он ки синусро бе x навиштан мумкин нест, айни ҳол Δ-ро бе x навишта наметавонем.

Агар ба аргументҳои x ва x_1 қиматҳои мувофиқи функсия - $f(x)$ ва $f(x_1)$ рост оянд, онгоҳ қимати функсияи дода шуда ба бузургии

$$f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

тағйир меёбад.

Таъриф. Фарқи байни қимати нави функсия $f(x+\Delta x)$ ва қимати аввалаи он $f(x)$-ро **афзоиши функсия** дар нуқтаи x меноманд ва бо $\Delta f(x)$ («делта эф аз икс» мехонем) ё ин ки Δy ишорат мекунанд (расми 24):

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Аз ин чо:

$$f(x_1) = f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \qquad (2)$$

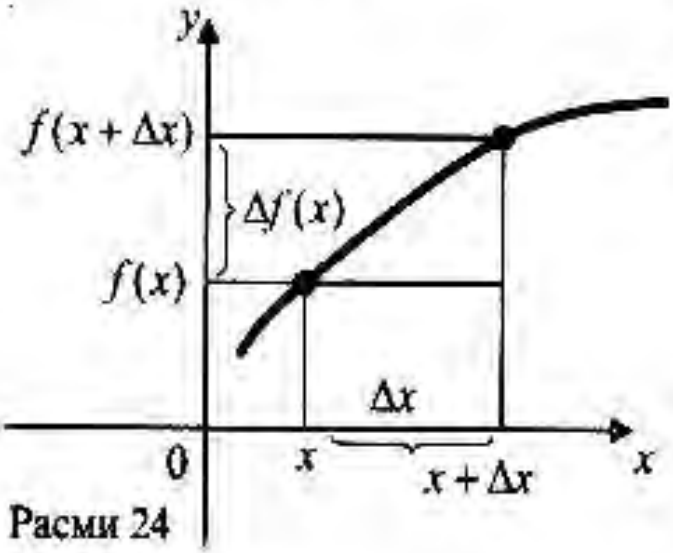
Мисолҳо:

1. Функсияи $y = x^2$ дода шудааст.

Афзоиши Δx ва Δy-ро ёбед, агар:

а) $x = 2$ ва $x_1 = 2{,}5$;

б) $x = 2{,}1$ ва $x_1 = 1{,}9$ бошад.



Расми 24

Ҳал.

а) $\Delta x = x_1 - x = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$;

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = 2{,}5^2 - 2^2 = 2{,}25.$$

б) $\Delta x = x_1 - x = 1{,}9 - 2{,}1 = 0{,}2$;

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 1{,}9^2 - 2{,}1^2 = -0{,}39.$$

Ба хамин тарик, агар $x_1 > x$ бошад, афзоиши $\Delta x = x_1 - x$ адади мусбат ва агар $x_1 < x$ бошад, афзоиш адади манфӣ аст. Вобаста ба ин, фаҳмост, ки афзоиши функсия низ бузургии мусбат ва манфӣ шуда метавонад.

2. Квадрати тарафаш a дода шудааст. Ҳангоми ченкунии дарозии тарафи квадрат саҳв ба Δx баробар шуд. Саҳви

масоҳати он ба чӣ баробар аст?

Ҳ а л. Азбаски саҳви ченкунии дарозии тарафи квадрат ба Δx баробар аст, пас аз рӯи таърифи афзуншавӣ $x = a + \Delta x$ мешавад. Маълум аст, ки $|x - a| = \Delta x$ саҳви мутлакро ифода мекунад. Пас, $|\Delta s| = |s(x) - s(a)| = |(a + \Delta x)^2 - a^2| = |2a\Delta x + (\Delta x)^2|$.

Аз ин чо бармеояд, ки саҳеҳии ҳисоббарории масоҳати квадрат аз дуруст ченкунии он вобаста аст: ҳар қадаре ки тарафи квадрат саҳеҳ чен карда шавад (яъне Δx хурд бошад), ҳамон қадар қимати саҳеҳи масоҳати квадрат x^2 аз a^2 фарқ мекунад.

3. Ҳаракати мунтазам ва суръати онро дида мебароем. Шумо аз курси физикаи синфи 9 – қисми кинематика ба намудҳои ҳаракат ва конунҳои он шинос ҳастед. Фаҳмидед, ки барои муайян кардани суръати мошинҳо **спидометр** (инглисӣ – суръатсанҷ) хизмат мекунад.

Фарз мекунем, ки нуқтаи материалӣ аз рӯи хати рост ҳаракат мекунад. Фосилаи вақти $[t; t_1]$-ро дида мебароем. Ягон лаҳзаи вақт t-ро қайд мекунем. Нуқта дар муддати t аз ибтидои ҳаракат роҳи $s(t)$-ро тай мекунад. Масофае, ки нуқта дар фосилаи аз t то $t_1 = t + \Delta t$ мегузарад, баробари

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

мебошад.

Суръати миёнаи ҳаракати нуқта дар фосилаи $[t; t_1]$ ба нисбати роҳи тайкардашуда бар давомнокии вақт баробар аст:

$$v_{миёна} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} \qquad (3)$$

Айнан ҳамин тавр, **суръати миёнаи тағйирёбии функсияро** дохил мекунем. Бигузор функсияи $y = f(x)$ дода шуда бошад; x ва y бузургиҳои метематикӣ буда, ягон маъноии физикӣ надоранд.

Онгох, муносибати

$$v_{миёна} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (4)$$

суръати миёнаи тағйирёбии функсия аз рӯи x ном дорад.

М и с о л. Қонуни ҳаракат бо формулаи $s(t) = 5t^2$ *м* дода шудааст. Лаҳзаи $t = 1c$ -ро қайд намуда, тағйирёбии масофаро дар фосилаи $t = 1c$ то $t_1 = 1{,}2c$ ҳисоб кунед.

Х а л.

$$s(1) = 5 \cdot 1^2 = 5\,м; \quad s(1{,}2) = 7{,}2\,м;$$

$$s(1{,}2) - s(1) = 7{,}2 - 5 = 2{,}2\ м;$$

$$\Delta t = t_1 - t = 1{,}2 - 1 = 0{,}2c.$$

$$v_{миёна} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2{,}2}{0{,}2} = 11\ м/с.$$

?

1. Ба калимаҳои манбаъвӣ ва рамзҳое, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: афзоиши аргумент (Δx), афзоиши функсия (Δy), суръати миёна.
2. Афзоиши аргумент чист?
3. Афзоиши функсия чист?

Машқҳо

Афзоиши функсияро дар намуди умумӣ ёбед ($1^\circ - 3^*$):

1°. а) $y = x - 1$; б) $y = x^2 + x$; в) $y = x^3$.

2. а) $y = x^2 + 3x + 4$; б) $y = x\sin x$; в) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

3*. а) $y = x^3 - 3x - 4$; б) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$; в) $y = x\cos 2x$.

4°. Функсияи $y = 2x + 5$ дода шудааст, x_1 ва Δy -ро ёбед, агар:

а) $x = 3$ ва $\Delta x = 0{,}2$; б) $x = 4$ ва $\Delta x = 0{,}06$;

в) $x = 7$ ва $\Delta x = 0{,}01$ бошанд.

5. Функсияи $y = x^2$ дода шудааст: Δy ва Δx -ро ёбед, агар:

а) $x_1 = 2{,}5$ ва $x = 2$; б) $x_1 = 3{,}9$ ва $x = 3{,}75$;

в) $x_1 = -1{,}2$ ва $x = -1$ бошад.

6. Функсияҳои зерин дода шудаанд:

а) $y = -\frac{3}{x}$; б) $y = \frac{1}{2x}$; в) $y = \frac{1}{x} - x$.

Δy -ро ёбед, агар $x = 2$ ва $\Delta x = 0{,}8$ бошад.

Нисбати $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -ро дар намуди умумӣ ёбед ($7^\circ - 9^*$):

7°. а) $y = 0{,}5x + 1$; б) $y = 2x^2$; в) $y = 5$.

8. а) $y = x^2 - 2x$; б) $y = \frac{x+1}{x-1}$; в) $y = x^3 + 3x$.

9*. а) $y = \sin x$; б) $y = -\frac{7}{x}$; в) $y = \cos x$.

Афзоиши функсия ва нисбати $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -и функсияҳои зеринро ёбед ($10^\circ - 12^*$):

10°. а) $y = \frac{1}{x}$, агар $x = 2$ ва $\Delta x = -0{,}4$ бошад;

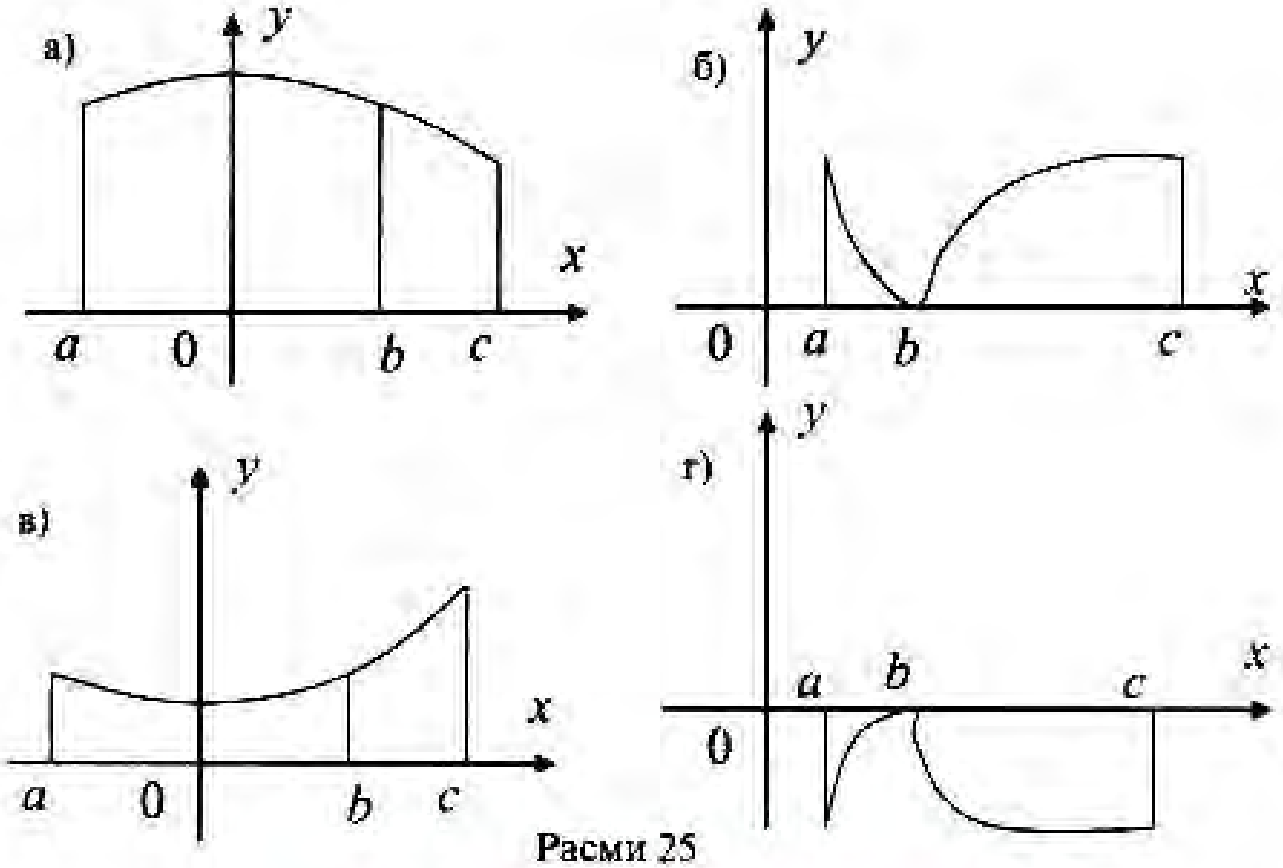
б) $y = x^2 + 1$, агар $x = 1$ ва $\Delta x = 0{,}2$ бошад.

11. а) $y = \sqrt{x}$, агар $x = 1{,}44$ ва $\Delta x = 0{,}25$ бошад;

б) $y = \frac{1}{x+2}$, агар $x = 2$ ва $\Delta x = 0{,}1$ бошад.

12*. а) $y = \cos x$, агар $x = \frac{\pi}{3}$ ва $\Delta x = \frac{\pi}{15}$ бошад.

13. Дар расми 25 графики функсияҳо тасвир ёфтаанд. Муайян кунед, ки **сурьати миёнаи тағйирёбии** ин функсияҳо дар кадом парча-парчаи $[a;b]$ ё ин ки $[b;c]$ калон аст.



Расми 25

§2. Суръати лаҳзагии ҳаракат

Суръати миёнаи ҳаракат – ҳаракати ғайримунтазамро пурра тавсиф дода наметавонад. Аз формулаи (3) бармеояд, ки агар ҳар чӣ қадар аз t_1 ба t наздик шавем, яъне фосилаи вақт $\Delta t=t_1-t$-ро хурд кардан гирем, ҳамон қадар суръати миёна ҳаракатро саҳеҳ ифода карда метавонад. Дар ин маврид фарқ байни қимати суръати миёна ва қимати суръати лаҳзагӣ (онро **суръати нуқта дар лаҳзаи** t ҳам мегӯянд) кам шудан мегирад. Онгоҳ муносибати (3) ба ягон адад наздик мешавад. Ин ададро қимати суръати лаҳзагӣ дар нуқтаи t номида бо $v(t)$ ишорат мекунанд.

Бинобар ин, қабул кардаанд:

Таъриф. Суръати лаҳзагӣ v дар нуқтаи t ҳудудест, ки ҳангоми майл кардани t_1 ба t он ба суръати миёнаи нуқта $v_{миёна}$ майл мекунад.

Ниютон нахустин бор онро бо лотинӣ (limit - лимит) ишора карда, ҳадди охирин номидааст.

Ин таъриф на танҳо моҳияти суръати лаҳзавиро ошкор месозад, инчунин қоидаеро муайян мекунад, ки барои

қисоб кардани он мусоидат менамояд, яъне:

$$v(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} v_{миёна} \qquad (5)$$

Тартибе, ки бо ин восита аз суръати миёна дар фосилаи $[t; t_1]$ ба суръати нукта дар лазаи t гузашта шуд, номи **гузариши худудиро** гирифтааст.

Мутобиқи ин қоида формулаи (4)-ро ин тавр навишта метавонем.

$$v = \lim_{x_1 \to x} v_{миёна} = \lim_{x_1 \to x} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (6)$$

Ва онро **суръати тағйирёбии функсияи** y дар қимати дода шудаи x меноманд.

Мисолҳо.

1. Аз физика маълум аст, ки қонуни ҳаракати мунтазам тезшашаванда бе суръати ибтидоӣ намуди зайлро дорад:

$$s(t) = \frac{at^2}{2}, \quad a - шитоб \qquad (7)$$

Суръати лаҳзагиро меёбем.

Исаак Ниютон (1642 – 1727)

Физик, муҳандис ва математики бузурги англис. Ҳарчанд дар хурдӣ аз тарбияи падару модар маҳрум гашта бошад ҳам, вале меҳнатдӯстӣ, меҳру муҳаббати беандоза ба илм сабабгори кашфиётҳои беназири ӯ дар соҳаи физика (қонунҳои механика, қонуни ҷозибаи олам) ва математика (биноми Ниютон, методи тақрибии ҳалли муодилаҳо, методи фарқиятҳо ва г.) гардидааанд. Истилоҳи «таҳлил»-ро дар илм ӯ ворид намудааст. Панҷ забон (лотинӣ, юнонӣ, яҳудӣ, олмонӣ ва фаронсавӣ)-ро хуб медонист. Забондонӣ ба ӯ имконият медод, ки ба эҷодиёти донишмандони бузург шинос шавад. Ниютон яке аз асосгузорони ҳиссоббарориҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ мебошад.

Х а л. Бо ду тарз ҳисоб мекунем.
Ин ҳаракати ғайримунтазам аст, зеро қонуни он ба воситаи функсияи дарачаи ду нисбат ба t ифода ёфтааст.

Ба воситаи суръати миёна. Фосилаи ихтиёрии вакт $[t;t_1]$-ро қайд карда, суръати миёнаро дар ин порча ҳисоб мекунем:

$$v_{миёна} = \frac{s(t_1)-s(t)}{t_1-t} = \frac{\frac{at_1^2}{2}-\frac{at^2}{2}}{t_1-t} = \frac{a}{2}\cdot\frac{t_1^2-t^2}{t_1-t} = \frac{a}{2}(t_1+t)$$

Акнун порчаи $[t;t_1]$-ро ба нуктаи t наздик мекунем, яъне қимати t_1-ро ҳар чӣ кадар ба t наздик гирем, онгоҳ суммаи t_1+t ба $t_1+t=2t$ ва ифодаи $\frac{a}{2}(t_1+t)$ ба $\frac{a}{2}2t=at$ наздик мешавад. Ин адад суръати лаҳзагӣ дар нуктаи t ҳисоб мешавад.

Мо формулаи маълуми курси физика – суръати мунтазам тезшаванда (бе суръати ибтидой) –ро ҳосил намудем: $V=at$. Ҳисоббароиро ба воситаи формулаи (5) ичро мекунем. Афзоиши аргумент баробари $t_1=t+\Delta t$ аст. Акнун Δt-ро ҳар чӣ кадар хурд кардан мегирем, то ки ба сифр наздик шавад. Дар ин маврид мегӯянд, ки Δt ба сифр майл мекунад ва ин тавр менависенд: $\Delta t \to 0$.

Муносибати (7)-ро ба формулаи (5) гузошта ҳосил мекунем:

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_1)-s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{a(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{at^2}{2}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{a}{2}(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2-t^2)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{a(2t\Delta t+(\Delta t)^2)}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}(at+\frac{a\Delta t}{2})$$

Азбаски $\Delta t \to 0$, онгоҳ $at + \frac{a\Delta t}{2} \to at$, бинобар ин:

$$v(t) = at$$

Ҳамин тавр, аз рӯи функсияи додашудаи $s(t)$ функсияи $v(t)$-ро **ҳосил кардем.** Аз ин рӯ, **суръати лаҳзагӣ ҳосила** ном гирифтааст (унвонаш ҳам аз ҳамин чо ба вучуд омадааст).

Қайд мекунем, ки ҳосила нисбат ба ягон функсияи ибтидоӣ дида баромада мешавад.

2. Лифт (англисӣ – мошини болобардор) баъди ба ҳаракат даромадан аз рӯи қонуни $s(t) = 1{,}5t^2 + 2$ ҳаракат мекунад; дар ин чо t-вакт бо сонияҳо, s-роҳи тай гардида бо метрҳо. Суръати ҳаракатро аз лаҳзаи ибтидои ҳаракат ба инобат гирифта, дар охири сонияи чорум ёбед.

Ҳ а л. Мувофики таърифи афзоиш тағйирёбии ҳаракатро дар фосилаи $t = 4$ ва $t_1 = 4 + \Delta t$ ҳисоб мекунем. Дар ин муддат лифт масофаи $s(4 + \Delta t) - s(4)$-ро тай мекунад. Суръати лаҳзагӣ бошад:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(4 + \Delta t) - s(4)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1{,}5(4 + \Delta t)^2 + 2) - (1{,}5 \cdot 4^2 + 2)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1{,}5 \cdot 16 + 1{,}5 \cdot 8\Delta t + 1{,}5(\Delta t)^2 + 2 - 1{,}5 \cdot 16 - 2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (12 + 1{,}5\Delta t)$$

мешавад.

Азбаски $\Delta t \to 0$, он гох $12 + 1{,}5\Delta t \to 12$, яъне $v(t) = 12\ {}^{м}/_{с}$. Муайян кардани суръати ҳаргуна тағйирёбанда масъалаи асосиест, ки он ба мафҳуми ҳосила оварда мерасонад. Ва тарзе, ки бо ёрии он мафҳуми суръат муайян карда шуд, имконият медиҳад, ки дар соҳаҳои гуногун истифода бурда шавад.

?

1. Ба калимаҳои асосие, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: суръати лаҳзагӣ, суръати миёна.
2. Суръати лаҳзагӣ чист?
3. Суръати лаҳзагиро бо ёрии суръати миёна чӣ тавр алоқаманд менамоянд?

Машқҳо

Суръати миёнаи ҳаракати нуктаро, ки аз рӯи қонуни $s = s(t)$ ба амал меояд, дар фосилаҳои вакти дода шуда муайян кунед (14° – 16*):

14°. $s(t) = 4t + 2$, $[1;3]$, $[0,2;\ 0,3]$, $[2;6]$, $[t_1;\ t_2]$

15. $s(t) = 3t^2 - 6$, $[3;3,5]$, $[0;5]$, $[1;7]$, $[t_1;\ t_2]$

16*. $s(t) = 3t^2 - 2t + 5$, $[0;4]$, $[1;7]$, $[2;9]$, $[t_1;\ t_2]$

17. Маъноои физикии нисбати $\frac{\Delta s}{\Delta t}$-ро шарҳ диҳед.

18°. Нукта аз рӯи қонуни $s = t + 2$ ростхата ҳаракат мекунад. Ёбед: 1) суръати миёнаи ҳаракат дар фосилаҳои вакти $[1;2]$, $[2;2,2]$, $[3;3,3]$;

2) суръати лаҳзагӣ ҳангоми $t = 2$ ва $t = 3$.

19. Нукта аз рӯи қонуни $s = t^2 + 2$ ростхата ҳаракат мекунад. Ёбед: 1) суръати миёнаи ҳаракат дар фосилаҳои вакти $[1;2]$, $[1,2;2]$, $[2;2,2]$;

2) суръати лаҳзагӣ ҳангоми $t = 1$ ва $t = 2$.

20. Нукта аз рӯи қонуни $s = 2t^2 - 3t + 1$ ростхата ҳаракат мекунад. Суръати лаҳзагии ҳаракатро ҳангоми $t = 1$, $t = 2$ ва $t = t$ ҳисоб кунед.

21. Ду нукта (-яке аз онҳо аз рӯи қонуни $s = 10t^2$ ва дигаре бо қонуни $s = \frac{4}{3}t^3$) дар як вакт аз рӯи хати рост ба ҳаракат даромаданд. Кадоме аз онҳо дар лаҳзаи; а) $t = 5c$ ва б) $t = 10c$ суръати зиёдтар дорад.

22. Дар расми 26 графики роҳи ҳаракати нукта $s = s(t)$ вобаста аз вакт t тасвир ёфтааст. Муайян кунед, ки:

а) дар кадом фосилаи вакт нукта мунтазам ҳаракат кардааст;

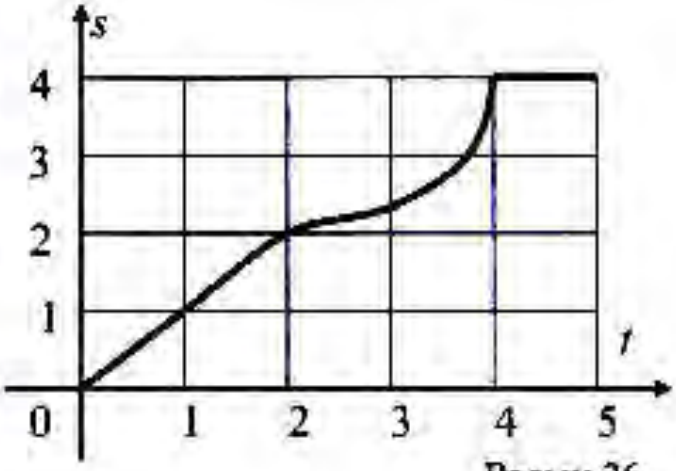
б) дар кадом фосилаи вакт дар ҷояш қарор дошт;

в) дар кадом фосилаи вакт ба суръати баландтарин ноил гашт;

г) суръати миёнаи ҳаракати нуқта дар фосилаҳои вақти [0;2], [2,5;4],[3;4] ва [4;5] чӣ қадар аст;

д) суръати лаҳзагӣ ҳангоми $t = 4$ ба чӣ баробар аст;

е) агар масштаб 1 воҳид = 20 м бошад, нуқта дар 5 сония чӣ қадар роҳ тай намудааст.



Расми 26

23. Ибтидои суръати маҳлулшавии намак дар об хеле калон аст, вале бо андозаи сершавии маҳлул суръати он кам шудан мегирад. Дар расми 27 графики вобастагии маҳлулшавии массаи намак $x = f(t)$ аз вакт оварда шудааст.

1) Дар кадом фосилаи вақт суръати миёнаи маҳлулшавии намак калон аст? Инро чӣ тавр шарҳ медиҳед?

2) Дар кадом фосилаҳо суръати миёнаи маҳлулшавӣ баробар аст?

3) Дар кадом фосилаҳо суръати лаҳзагии маҳлулшавӣ баробар аст?

4) Дар кадом нуқта суръати лаҳзагӣ калонтар аст? Суръати маҳлулшавӣ дар лаҳзаи t чӣ маъно дорад?

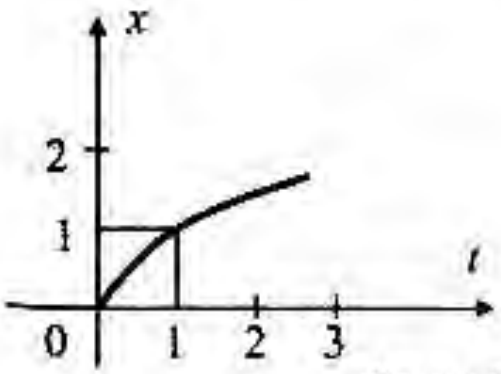
24. Дар расми 28 графики конуни ҳаракати $s = s(t)$ вобаста аз вақт тасвир ёфтааст.

1) Дар кадом лаҳзаи вақт суръат калон аст?

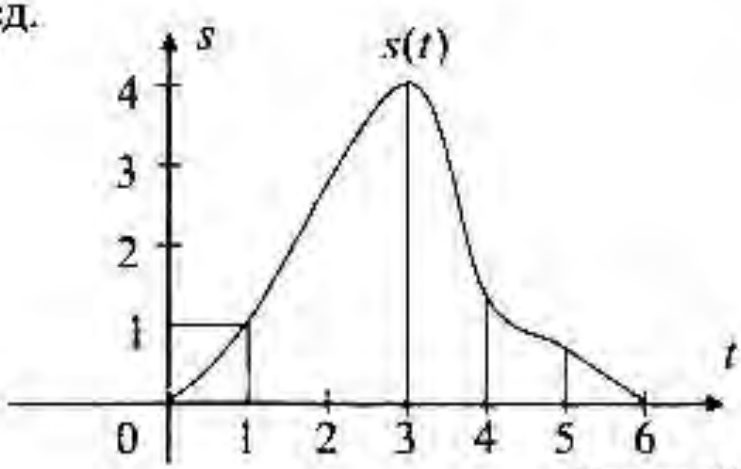
2) Дар тамоми вакт суръат чӣ тавр тағйир меёбад?

3) Суръатро дар лаҳзаҳои $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, ва $t = 4$, ҳисоб кунед.

4) Графики суръатро созед.



Расми 27



Расми 28

§ 3. Расанда ба хати кач

Акнун мафҳуми ҳосиларо аз нуқтаи назари математикӣ дида мебароем. Бинобар ин, ба аломатҳои он ягон маънои физикӣ намедиҳем. Ба ин масъала нахустин бор корҳои Г.В. Лейбнитс равшанӣ андохтаанд. Аз онҳо мо ба суолҳои **расанда чист? Онро чӣ тавр бояд ҳисоб кард?** посух гирифта метавонем. Маълум гардид, ки ҳосила маънои геометрӣ доштааст. Ва мафҳуми расанда ба хати качро геометрӣ шарҳ додан мумкин аст.

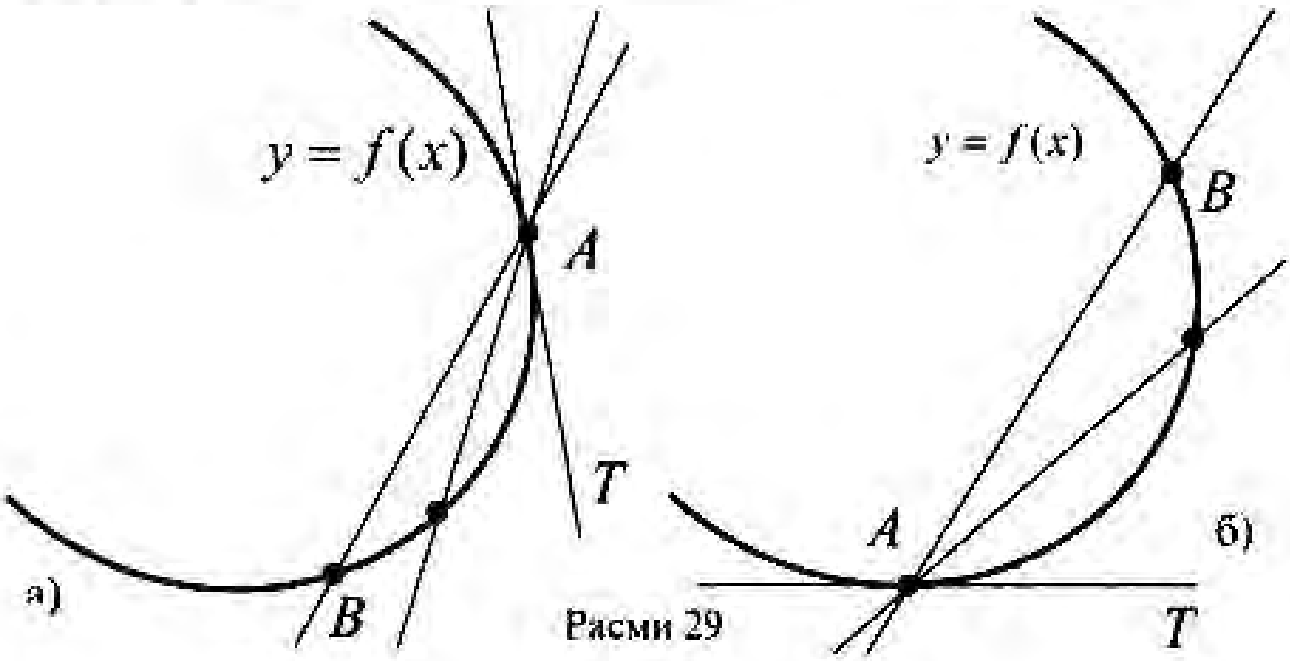
Фарз мекунем, ки хати качи $y = f(x)$ дода шудааст. Ду ҳолат чой дорад (расми 29 а, б). Дар хати кач нуқтаи A-ро қайд мекунем; ба он наздиктар нуқтаи B-ро мегирем ва бурандаи AB-ро мегузаронем. Вакте ки нуқтаи B **ба дарозии** хати кач чой ифаз мекунад, бурандаи AB дар атрофи нуқтаи A давр мезанад.

Таъриф. Расандаи T ба хати качи $y = f(x)$ дар нуқтаи A гуфта вазъияти ҳудудии AT-и бурандаи AB-ро меноманд, агар нуқтаи B аз рӯи хати кач чой иваз карда, вазъияти нуқтаи A-ро гирад.

Расанда – хати рост аст. Муодилаи хати рост намуди зеринро дорад:

$$y = kx + b$$

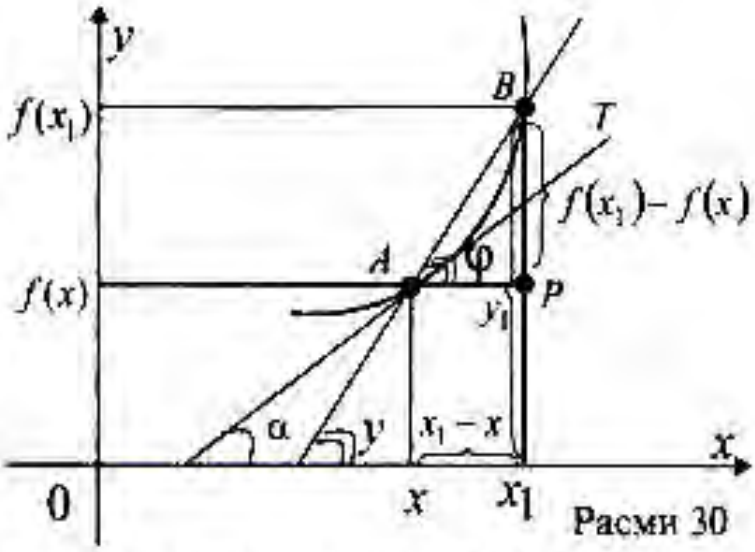
дар ин чо k - коэффитсиенти кунчи расанда ва он баробари $k = tg\alpha$ аст.



Расми 29

Пас, барои он ки расанда сохта шавад, коэффитсиенти кунчии онро муайян кардан лозим аст.

Ба монанди сурьати лаҳзагӣ – амали гузариши ҳудудиро истифода мебарем.



Расми 30

Бигузор $y = f(x)$ дода шуда бошад ва графики он ягон хати качро ифода кунад (расми 30).

Дар он нуктаи $A(x;y)$-ро қайд мекунем. Бо як нуқта моилии хати качро дар ин нуқта ҳисоб кардан мумкин нест. Аз ин рӯ, наздик ба он нуктаи $B(x_1;y_1)$-ро мегирем. Хати рости AB бурандаи графики $y = f(x)$ аст. Агар ҳар чӣ қадар аз нуктаи B ва A аз рӯи хати кач наздиктар омадан гирем, буранда ба ҳолате наздик мешавад, ки он аз мавкеи расандаи нуктаи A, яъне AT кам фарқ мекунад. Кунчи байни тири абсисса ва бурандаи AB-ро бо φ, кунчи байни тири OX ва расандаи AT-ро бо α ишорат мекунем.

Аз расм бевосита барои k ифодаи муайянеро маълум кардан мумкин нест. Бинобар ин, аввал коэффитсиенти кунчии бурандаи AB-ро меёбем: онро бо k_1 ишорат мекунем.

Готфрид Вилгелм Лейбнитс (1646-1716)

Математик, файласуф ва мантиқшиноси бузурги олмонӣ. Ӯ дар инкишофи илмҳои табиатшиносӣ ва техникӣ саҳми бузург гузоштааст. Президенти нахустини Академияи илмҳои Берлин буд. Муаллифи зиёда аз 7500 асару мақолаҳо буда, асосгузори ҳисоббарориҳои дифферренсиалӣ ва интегралӣ мебошад. Истилоҳҳо ва рамзҳои ворид намудаи ӯ дар ин соҳа то ҳанӯз истифода бурда мешаванд.

Аз секунҷаи ABP айён аст, ки:

$$k_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = tg\varphi$$

Барои ёфтани k лозим аст, ки $x_1 \to x$; дар он сурат буранда AB дар атрофи нуқтаи A давр зада, ба ҳолати ҳудудиӣ AT (агар ин ҳудуд чой дошта бошад) наздик мешавад ва кунҷи φ бошад ба ҳадди охирини ҳуд - кунҷи α наздик мешавад.

Пас, коэффитсиенти кунҷии расандаро ҳамчун ҳудуди ифодаи $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$, ҳангоми $x_1 \to x$ (яъне $\Delta x = x_1 - x \to 0$) ёфта метавонем:

$$k(x) = \lim_{x_1 \to x} k_1 = \lim_{\alpha_1 \to \alpha} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\varphi \to \alpha} tg\varphi = tg\alpha \qquad (1)$$

Баробарии (1) **суръати тағйирёбии функсияи** $y = f(x)$-ро ташреҳ медиҳад.

Ба монанди суръати лаҳзагӣ, ин гузариши ҳудудӣ номи дифференсирони (аз лотинӣ differentia – фарқ)-и функсияи $y = f(x)$-ро гирифтааст. Ин номи амал ба он алоқаманд аст, ки ҳангоми $x_1 \to x$ лимити нисбати **фарқи** $f(x_1) - f(x)$ бар $x_1 - x$ муайян карда мешавад.

Дифференсиронӣ ё ин ки ёфтани ҳосила – **амали нави математикӣ** буда, бо муайян кардани суръат дар механика ва ёфтани коэффитсиенти кунҷии расанда дар ягон нуқтаи хати каҷ бо самти мусбат (манфи)-и тири абсисса дар геометрия ҳамон як маъноро дорад.

1. Ба калимаҳои манбаъвие, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: буранда, расанда, коэффитсиенти кунҷӣ, дифференсиронӣ.

?

2. Расанда чист?
3. Коэффитсиенти кунҷии расанда ба графики функсияро чӣ тавр меёбанд?
4. Амалии дифференсирониро маънидод кунед.

Машкҳо

Маънои геометрии ҳосила

Коэффитсиенти кунҷии бурандаи параболаи $y = x^2$-ро ёбед, агар буранда аз болои нуқтаҳои зерин гузарад (25°–27*):

25°. а) (1; 1) ва (1,2; 1,44); б) (- 1,2; 1,44) ва (- 1; 1);

26. а) абсиссаҳояшон $x_1 = 1$ ва $x_2 = 1{,}3$; б) $x_3 = -4$ ва $x_4 = 1{,}3$ бошад.

27*. $A(x; y)$ ва $B(x_1; y_1)$.

Дар параболаи $y = x^2$ нуқтаҳои абсиссаашон – 1 ва 2 гирифта шудаанд. Ёбед (28° – 29):

28°. а) коэффитсиенти кунҷи бурандаро, ки аз болои ин нуқтаҳо мегузарад; б) муодилаи бурандаро нависед; в) муодилаи хати росте, ки ба парабола дар нуқтаҳои дода шуда расанда мебошанд, маълум кунед; г) коэффитсиенти кунҷии расанда ба чӣ баробар аст?

29. Шартҳои болоро барои параболаи кубии $y = x^3$ бо нуқтаҳои абсиссаашон $x_1 = 1$ ва $x_1 = -2$ иҷро намоед.

§ 4. Таърифи ҳосила ва ҳисоб намудани он

Аз мисолҳои дар боло муоина гардида таърифҳои зерини ҳосила ба амал меоянд:

1. Ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ гуфта суръати тағйирёбии онро меноманд.

(!) 2. Ҳудуди нисбати афзоиши функсия ба афзоиши аргумент, ҳангоми афзоиши аргумент ба сифр майл кардан, ҳосилаи функсия ном дорад.

Менависанд: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ё ки $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x)$, агар $\Delta x \to 0$.

Ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ бо ёрии **алгоритми** зерин ҳисоб карда мешавад:

Қ а д а м и 1. Дар фосилаи $[x; x+\Delta x]$ ба аргументи функсия афзоиш медиҳем: $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$.

Қ а д а м и 2. Аз кимати афзуншудаи функсия кимати аввалаи функсияро тарҳ мекунем:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

Қ а д а м и 3. Нисбати афзоиши функсия ба афзоиши аргументро муайян мекунем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Қ а д а м и 4. Ҳангоми $\Delta x \to 0$, ҳудуди ин нисбатро меёбем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Ин қадамро бо тирча ҳам навишта метавонем:

агар $\Delta x \to 0$, онгоҳ $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$

М и с о л. Функсияи $y = x^2$ дода шудааст. Ёбед:

а) Коэффитсиенти кунчии расанда ба хати каҷ дар нуқтаи $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

б) Муодилаи расанда ба графики функсия дар ин нуқта.

Ҳ а л. а) Дар фосилаи $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}+\Delta x\right]$ афзоиши функсияро ҳисоб мекунем: $\Delta y = \left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \Delta x + (\Delta x)^2$

Нисбат тартиб медиҳем: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 1 + \Delta x$

Ин нисбат коэффитсиенти кунчии бурандаро, ки аз нуқтаҳои $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ ва $(x; y)$ мегузарад, ифода мекунад.

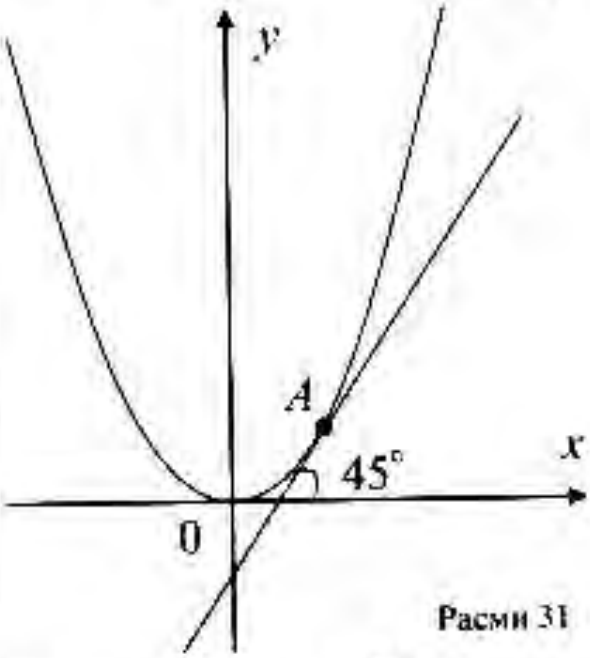
Акнун Δx -ро ба сифр майл кунонида коэффитсиенти кунчи расанда k -ро ба графики $y = x^2$ дар нуктаи $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ меёбем (расми 31):

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) = 1,$$

зеро $1 + \Delta x \to 1$

Пас, $k = tg\alpha = 1$; $\alpha = 45^\circ$.

б) Муодилаи расандаро ба графики функсияи $y = x^2$ дар нуктаи $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ муайян мекунем.



Расми 31

Коэффитсиенти кунчии расанда $k = 1$ аст. Муодилаи расанда хати рост буда, намуди зеринро мегирад:

$$y = kx + b = x + b$$

Азбаски муодилаи расанда аз нуктаи $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ мегузарад, қиматҳои координатаҳои нуктаро ба чои x ва y гузошта, параметри b -ро меёбем:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + b, \quad b = -\frac{1}{4}.$$

Пас, $y = x - \frac{1}{4}$ муодилаи расанда ба графики функсия мебошад.

Ҳамин тавр амал карда муодилаи расандаро ба графики функсияи $y = f(x)$ дар нуктаи $(x_0; f(x_0))$ меёбем.

Муодилаи хати рост $y = kx + b$ аст. Агар параметрҳои k ва b-ро ёфта ба чояшон гузорем, муодилаи расанда пайдо мешавад.

Маълум аст, ки: $k = tg\alpha = f'(x_0)$. Онгох: $y = f'(x_0)x + b$.

6 – 11504 Гуломов, 10 к.л.

Расанда аз нуктаи $(x_0; f(x_0))$ мегузарад, бинобар ин координатаҳои ин нукта муодилаи

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

-ро қаноат мекунад.

Аз ин ҷо: $$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Қиматҳои k ва b-ро ба муодилаи хати рост гузошта, муодилаи расанда ба хати качро ҳосил мекунем:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

?

1. Ба калимаҳои манбаъвӣ ва рамзҳое, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: ҳосила, расанда, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, y'.
2. Алгоритми ёфтани ҳосилаи функсияро баён кунед.
3. Ҳосилаи функсия чист?
4. Муодилаи расанда ба нуктаи (x_0, y_0)-ро нависед.

Машкҳо

Аз рӯи алгоритми асосӣ ҳосилаҳои функсияҳои зеринро ҳисоб кунед ($30^\circ - 32^*$):

30°. а) $f(x) = 2x - 5$; б) $t = -x^2$;

в) $y = x^2 + 2x$; г) $y = \frac{1}{3x+2}$.

31. а) $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$; б) $y = 3 + x^3$;

в) $y = \frac{x}{x-2}$; г) $y = (x-5)(x+7)$.

32*. а) $y = 2x^3 - 3x$; б) $y = \sqrt{2x+1}$;

в) $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$; г) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; д) $y = x^n$

Аз таърифи ҳосила истифода бурда, ҳосилаи функсияҳои зеринро ёбед (33° – 35*):

33°. а) $y = 2x - 1$; б) $y = \frac{1}{2}x - 3$;

в) $y = -5x + 4$; г) $y = 3x - 2$.

34. а) $y = 3x^2$; б) $y = 4x^2 + x$;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$; г) $y = 3x^2 + 2x + 3$;

35*. а) $y = \frac{5}{x}$; б) $y = \frac{2}{3x}$;

в) $y = \frac{1}{x^2}$; г) $y = \sqrt{x}$.

36. Ҳосилаи функсияҳои машқи 34-ро дар нуқтаҳои

а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$ ҳисоб кунед.

37. Аз таърифи ҳосила истифода бурда, ҳосилаи функсияҳои зеринро дар нуктаи $x = 0$ ёбед:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c$; б) $f(x) = 2x^2 - 3x$;

в) $f(x) = (x-2)(x-3)$; г) $f(x) = \sqrt{2x+1}$;

д) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$; е) $f(x) = \sqrt{(x+2)^3}$.

38*. Муодилаи расанда ба функсияҳои зеринро, ки абсиссаашон x_0 аст, тартиб диҳед:

а) $y = x^2$, $x_0 = 1$; б) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 2$;

в) $y = x^2 + 3$, $x_0 = \frac{1}{2}$; г) $y = 2 - x^2$, $x_0 = 1$.

§ 5. Гузаришҳои ҳудудӣ ва бефосилагии функсия

Боз як бори дигар ҳудуде, ки ҳосиларо ифода мекунад, менависем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Агар ба сурат ва махрачи ин ҳудуд назар афканем, мебинем, ки ҳар дуи он аз Δx вобастагӣ дорад; Δx бошад ба сифр майл мекунад. Аз ин рӯ, **зарур аст,** ки он **бояд вуҷуд дошта бошад.** Ин чунин маъно дорад, ки дар баробари махрач $\Delta x \to 0$, сурат ҳам бояд ба сифр майл кунад, яъне $\Delta y \to 0$.

Дар кадом ҳолат ин шарт ҷой дошта метавонад?

Пай бурдан душвор нест, ки шарти зарурии ичроиши ин тасдиқ ба мафҳуми бефосилагии функсияи $f(x)$ дар нуқтаи дидабаромадашавандаи x ва ҳудуди ин функсия дар ҳамин нуқта зич алоқаманд аст.

Дар м и с о л ҳ о моҳияти ин тасдиқро шарҳ медиҳем.

Маълум, ки тағйирёбандаи y функсияи тағйирёбандаи x аст. Дар ин маврид суоли зерин ба миён меояд: агар аргумент x ба ягон адади a наздик шавад, онгоҳ у худро чӣ тавр зоҳир мекунад?

1. Функсияи $y = \dfrac{5x+2}{2x+3}$-ро дида мебароем. Фарз мекунем, ки дар наздикии қимати $x = 2$ функсияро тадқиқ кардан лозим аст. Адади 2 ба соҳаи муайянии функсияи додашуда ворид аст. Айён аст, ки қимати x-ро бевосита ба формула гузошта метавонем, зеро:

қимати сурати каср $5 \cdot 2 + 2 = 12$,

қимати махрачи каср $2 \cdot 2 + 3 = 7$

мебошанд.

Пас, барои гузариши ҳудудии ин функсия ҳангоми $x \to 2$ лозим аст, ки қимати функсияро дар ҳамин нуқта ҳисоб кунем:

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$$

Барои қимати дилхоҳи $x = a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{5a+2}{2a+3}$$

мешавад.

Аз тарафи дигар, агар ба ҷои x дар функсияи дода шуда адади a-ро гузорем, боз ҳамон натиҷаро ҳосил мекунем:

$$f(a)=\frac{5a+2}{2a+3}$$

Аксарияти функсияҳо худро ҳамин тавр зоҳир мекунанд. Аз ин ҷо, таърифи зерини бефосилагии функция дар нукта ба амал меояд.

Бигузор $x = a$ ба соҳаи муайянии функсияи $y = f(x)$ дохил бошад.

Т а ъ р и ф. **Агар ҳудуди функсияи $y = f(x)$ ҳангоми аргументи x ба a майл кардан ба қимати функсия дар нуктаи a баробар бошад, онгоҳ функсияро дар ин нукта бефосила меноманд ва чунин менависем:**

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \quad \ldots \qquad (1)$$

Мо онро ба сифати принсип (лотини – ғоя)-и **бефосилагӣ** қабул мекунем, ки дар боло ба забони афзоиш – агар $\Delta x\to 0$, бояд $\Delta y\to 0$ шарҳ дода будем.

Аз он талаботҳои зерин ба миён меояд:

1) функсияи $f(x)$ дар нуктаи a бояд муайян бошад;

2) ҳудуди функсия $\lim_{x\to a} f(x)$ дар нуктаи a мавҷуд бошад;

3) ин ҳудуд бояд ба қимати функсия дар нуктаи a баробар бошад.

Агар аз ин се талабот ақалан яктояш ичро нашавад, мегӯянд, ки функсия дар нуктаи a каниш дорад.

Аз шарти $x\to a$ ва $f(x)\to f(a)$ маълум мешавад, ки ҳангоми $\Delta x=(x-a)\to 0$ намудан $\Delta f(x)=f(x)-f(a)\to 0$. Бинобар ин, баробарии (1) намуди зеринро мегирад:

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0 \ \ldots} \qquad (2)$$

Дар ин ҳолат мегӯянд, ки:

ба афзоиши хурди аргумент $(\Delta x \to 0)$, афзоиши хурди функсия $(\Delta f(x) \to 0)$ мувофиқ меояд. Ё ҳангоми $\Delta x \to 0$, фарқи $\Delta f(x) = f(x) - f(a)$ беохир хурд аст.

Функсияи $y = f(x)$-ро дар фосилаи $[a;b]$ бефосила меноманд, агар он дар ҳар кадоми нуқтаи ин фосила бефосила бошад.

Мисол, функсияи $f(x) = kx + m$ дар $R = (-\infty;\infty)$ бефосила аст, чунки:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[(kx+m)-(ka+m)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} k(x-a) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} k\Delta x = k \cdot \lim_{\Delta x \to a} \Delta x = k \cdot o = 0.$$

2. Ба функсияи $y = \dfrac{x}{x}$ назар меандозем. Аз рӯи таърифи боло ҳангоми $x \to 0$ гузариши ҳудудиро ба амал овардан мумкин нест, зеро функсияи дода шуда дар нуқтаи $x = 0$ номуайян аст, яъне каниш дорад. Вале айён аст, ки барои ҳамаи қиматҳои $x \neq 0$ қимати функсия $y = 1$ мебошад. Аз ин рӯ, адади 1-ро ҳамчун қимати ҳудудии функсия (ҳангоми $x \to 0$) қабул карда метавонем. Ин қимат дар натиҷаи ихтисор кардани сурат ва махраҷи касри дода шуда ба x ҳосил мешавад.

Ба ҳамин тариқ, **агар функсия канишдор бошад онро ба воситаи табдилдиҳӣ,** аз он ҷумла ихтисоркунии сурат ва махраҷ, **ба гояи бефосилагӣ мутобиқ кардан мумкин аст.**

3. Функсияи $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ ҳангоми $x \to 2$ каниш дорад ё ин ки номуайян аст. Гузариши ҳудудиро ичро карда наметавонем. Вале ин мушкилиро то ба ҳудуд гузаштан рафъ кардан мумкин аст, агар сурат ва махраҷро ба зарбкунандаи $x-2$ ихтисор кунем:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

Баъди ихтисоркунӣ ёфтани ҳудуд душвор нест. Ифодаи нав ҳосилшуда $x+2$ муайян аст, бинобар ин ба чои x адади 2-ро гузошта, қимати ҳудудиро меёбем:

$$\lim_{x\to 2} y = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$

Баъзе қоидаҳои гузариши ҳудудиро бе исбот баён менамоем.

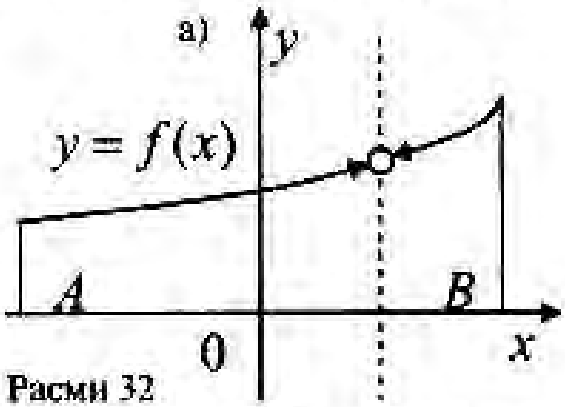
Қоидаи 1. Агар функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a бефосила бошад, онгоҳ ҳангоми $\Delta x \to 0$, $\Delta f \to 0$.

Қоидаи 2. Агар функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a бефосила бошад, онгоҳ ҳангоми $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x)$.

Қоидаи 3. Агар ҳангоми $x \to a$, $f(x) \to A$ ва $g(x) \to B$, онгоҳ а) $f(x)+g(x) \to A+B$;

б) $f(x)\cdot g(x) \to A\cdot B$;

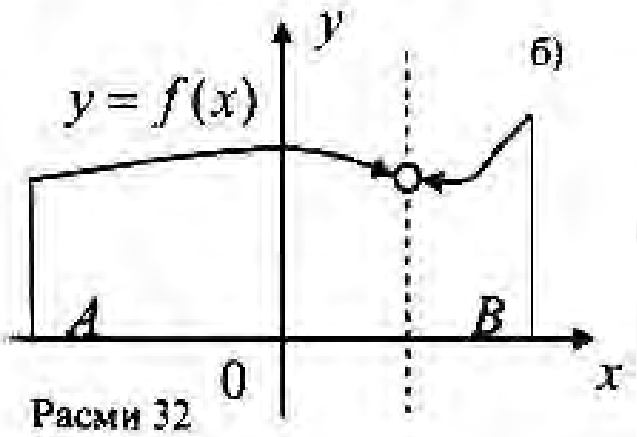
в) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.



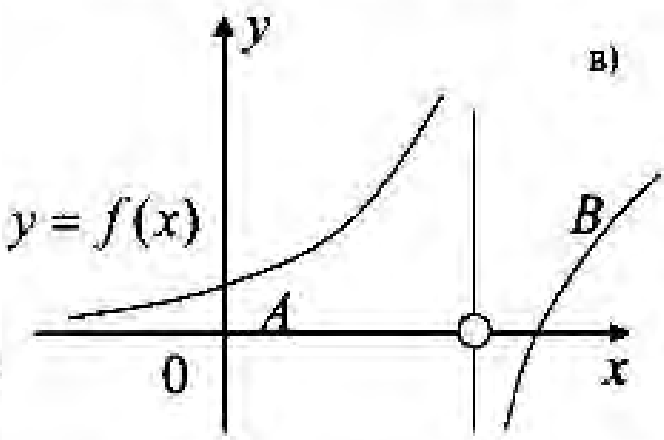
Расми 32

Барои функсияҳои бефосилаи $f(x)$ ва $g(x)$; $A = f(a)$, $B = g(a)$ аст. Ин қоидаҳоро - қоидаҳои сумма, ҳосили зарб ва ҳосили таксими функсияҳои бефосила дар нуқтаи a меноманд. Ба расми 32 нигаред.

Ҳамаи графикҳои дар расм тасвирёфтаи функсия нуқтаҳои каниш доранд. Дар ин нуқтаҳо *хатҳо канда* мешаванд. Нуқтаҳои каниш заминае мебошанд, ки дар асоси онҳо



Расми 32



мафҳуми бефосилагии функси дар нуқта ворид шуда буд. Асоси мафҳуми бефосилагии функсияи $y = f(x)$ -ро дар тасаввуроти мо каниш надоштани графики он ташкил медиҳад. Инро шарҳ медиҳем.

Агар функсия дар нуқта каниш дошта бошад, ин чунин маъно дорад, ки бо тағйирёбии ками аргумент кимати функсия яку якбора зиёд мешавад. Ин ҳолатро мо дар функсияи $y = \frac{1}{x}$ мушоҳида карда метавонем (нақшаро кашед!). Агар аз нуқтаи $x = 0$ (он нуқтаи каниш аст) каме ба тарафи рост ҷой иваз кунем, масалан $x = 0{,}01$ ё $x = 0{,}001$ гирем, қимати функсия якбора аз $y = 100$ то $y = 1000$ тағйир меёбад.

Геометрӣ ин чӣ маъно дорад? Графики функсия нишон медиҳад, ки агар он аз нуқтаи дода шудаи x ҳар чӣ қадар кам (ба тарафи чап ва ё ба тарафи рост) ҷой иваз накунад, қимати функсия ҳам ҳамон қадар кам тағйир меёбад.

Бигузор функсияи f дар порчаи $[a;b]$ бефосила ва қиматҳои функсия дар аввалу охири ин порча мувофиқан ба $f(a) = c$ ва $f(b) = d$ бошанд. Азбаски функсияи f бефосила аст, ин чунин маъно дорад, ки ҳангоми тағйирёбии аргумент аз a то b функсия ягон қиматро напартофта ҳамаи қиматҳои мобайнӣ – аз $f(a)$ то $f(b)$-ро қабул мекунад.

Барои функсияи монотонӣ ба сифати т а ъ р и ф и б е ф о с и л а г ӣ хосияти зерини онро қабул кардан мумкин аст.

Функсияи монотонӣ бефосила аст, агар вай ҳамаи қиматҳои мобайниро қабул кунад.

Дар ҳамин сурат графики функсияро бо қалам яклухт, дастро аз қоғаз наканда кашидан мумкин аст!

Ин мулоҳизаҳо барои фосилаҳое, ки нуқтаи каниш надоранд, ҷой дорад. Агар дар нуқтаи пайвастшавии ду фосила (онҳоро бо A ва B ишорат мекунем) – функсияи монотонӣ номуайян бошад, он гоҳ дар бораи бефосилагии функсия дар ин нуқта сухан рондан мумкин нест. Барои он ки чунин ҳолат ба амал наояд функсияро тавре муайян месозем (табдил медиҳем), ки

дар ин нуқта бефосила бошад. Мисоли ба ин мувофиқ функсияи $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ҳисоб мешавад. Фаҳмост, ки функсия дар нуқтаи $x=2$ муайян нест (яъне каниш дорад), вале агар касрро ихтисор кунем $y=x+2$ ҳосил мешавад. Дар ин маврид каниш бартараф мегардад ва ҳангоми $x=2$ будан қимати ҳақиқии функсия $y=4$ хоҳад шуд.

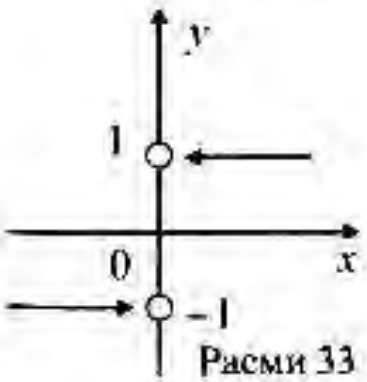
Хуллас, ҳамин тавр муайян кардани функсия онро дар ҳамаи нуқтаҳои тири ададӣ ба функсияи бефосила мубаддал намуд.

Дар баробари ин, функсияҳое вуҷуд доранд, ки онҳоро ҳеҷ дигаргун кардан мумкин нест, то ки дар нуқтаи дода шуда ба функсияи бефосила табдил ёбанд.

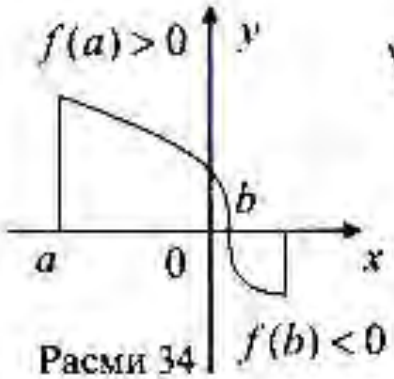
Функсияи $y=\dfrac{1}{x}$ дар нуқтаи $x=0$ номуайян аст. Онро бо ҳеҷ тарз аз нав дигар карда наметавонем, то ин ки каниш бартараф ва функсия дар ин нуқта бефосила шавад. Дар ин маврид мегӯянд, ки функсия «каниши беохир дорад» (ва ё ба беохирӣ майл мекунад).

Функсияи $y=\begin{cases}1, & агар\ \ x>0,\\ -1, & агар\ \ x<0.\end{cases}$ низ дар нуктаи $x=0$ номуайян аст, вале он сохиби «каниши охирнок» мебошад (расми 33). Маънои истилоҳҳои «каниши охирнок» ва «каниши беохир» аз мисолҳои овардашуда маълуманд. Аз ин рӯ, баёни таърифи аниқи онҳоро зарур намешуморем.

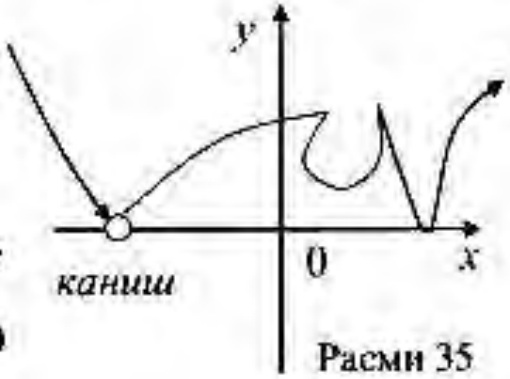
Агар функсияи f дар порчаи $[a;b]$ бефосила ва дар



Расми 33



Расми 34



Расми 35

охирҳои порчаи $[a;b]$ аломатҳои гуногунро қабул кунад он гоҳ вай ақалан дар ягон нукта ба сифр баробар мешавад (расми 34).

Ин хосияти бефорсилагии функсия ҳангоми ҳалли муодилаҳо бо ёрии график истифода бурда мешавад.

Дар охир ҳаминро қайд мекунем, ки графики ҳамаи функсияҳо муоина гардида яклухт буданд. Вале ин шарт ҳатми нест. Графики функсияҳои бефосила метавонад аз якчанд камонҳои яклухт тартиб ёфта, дорои нуқтаҳои каниш бошанд (расми 35).

?

1. Ба калимаҳои манбавие, ки дар матн дучор меоянд эътибор диҳед: ҳудуд, бефосилагӣ, каниш.
2. Таърифи функсияи бефосиларо баён кунед.
3. Талаботҳои шарти бефосилагиро номбар кунед.
4. Бефосилагии функсияро бо ёрии афзоиши аргумент ва афзоиши функсия шарҳ диҳед.
5. Аз нуктаи назари геометрӣ бефосила будани функсия чӣ маъно дорад?
6. Бефосила будани функсияро дар фосила шарҳ диҳед.
7. Қоидаҳои гузариши ҳудудиро баён намоед.

Машқҳо

39. Исбот кунед, ки функсияҳои зерин дар соҳаи муайян бефосилаанд:

1) $y = x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = a$.

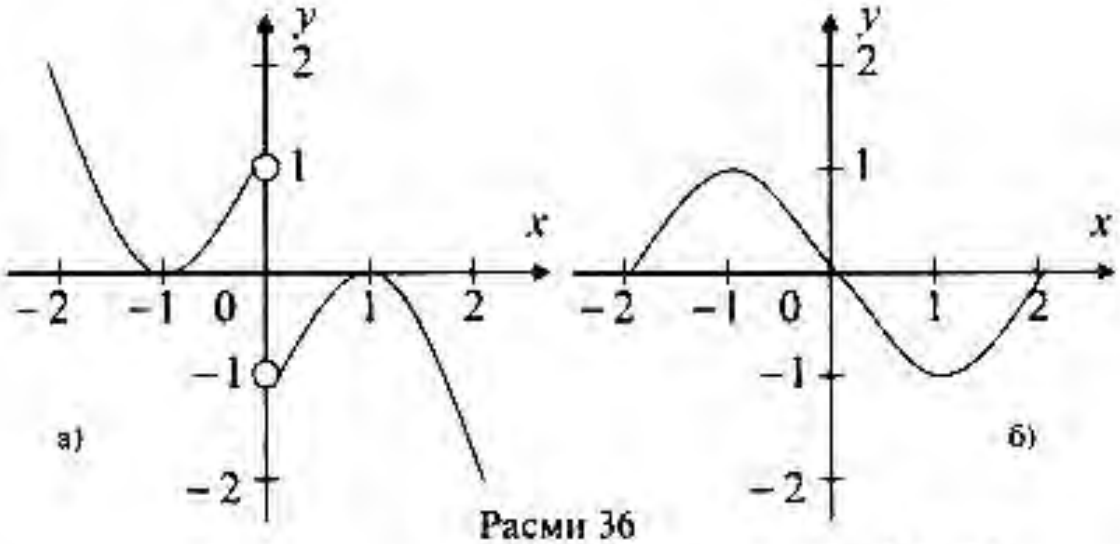
40. Оё функсияҳо дар соҳаи муайянии ҳуд бефосилаанд?

а) $f(x) = \begin{cases} 2, & агар \quad x \in [0;1], \\ 3, & агар \quad x \in (1;2]. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2, & агар \quad x \in [0;1], \\ 3, & агар \quad x \in (2;3]. \end{cases}$

41. Дар расми 36 графики функсияҳо тасвир ёфтаанд. Оё онҳо дар ҳар як нуктаи порчаи $[-2;2]$ бефосила мебошанд?

42. Бефосилагии функсияҳои зеринро дар нуктаҳои зерин нишон диҳед.



Расми 36

а) $f(x)=3x^2-4x+1, \quad x\to 1;$ б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-4}, & x\neq 2\\ \dfrac{1}{4}, & x=2\end{cases}$

43. Оё функсияи f дар ҳар як нуқтаи фосилаи додашуда бефосила аст?

а) $f(x)=x^2-3x+2, \qquad (-\infty;+\infty)$

б) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}, \qquad (0;+\infty)$

Муайян кунед, ки ҳангоми ба ададҳои зерин майл кардани x функсияи $f(x)$ ба кадом ададҳо майл мекунанд (44° – 46*):

44°. $f(x)=2x-3.$ а) $x\to 0$; б) $x\to 1$; в) $x\to 2$; г) $x\to 3$.

45. $f(x)=x^2-5x+6.$ а) $x\to 0$; б) $x\to 1$; в) $x\to 2$; г) $x\to 3$.

46*. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}.$ а) $x\to 0$; б) $x\to 1$; в) $x\to 2$; г) $x\to 3$.

47. Ҳудудҳои зеринро ёбед:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+1);$ б) $\lim\limits_{x\to -1}(\frac{1}{2}x+x^2+\frac{1}{4});$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+2};$ г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1};$

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x};$ е) $\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}.$

48*. Табдилдихиҳои заруриро ичро карда ҳудудҳоро ҳисоб кунед:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x-2}$.

§ 6. Қоидаҳои ҳисоб намудани ҳосила

I. Ҳисоббарории ҳосила

Ҳосилаи функсияи $f(x)$-ро дар асоси алгоритми баён гардида ҳисоб мекунем.

1. Ҳосилаи адади доимӣ $y = c$.

Адади доимиро ҳамчун функсия дида мебароем, ки барои ҳамаи қиматҳои аргумент қиматҳои якхела қабул мекунад. Одатан онро бо ҳарфи c (лотини "const" – доимӣ) ишорат мекунанд: $y = f(x) = c$. Он гоҳ:

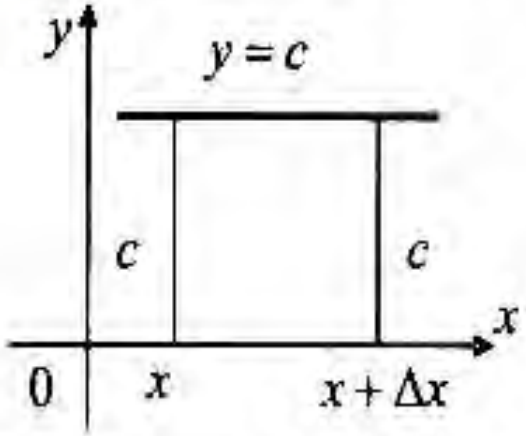
1) Дар фосилаи $[x; x+\Delta x]$ ба қиматҳои аргумент ҳамон як қимати функсия c рост меояд (расми 37): $y + \Delta y = c$;

2) $\Delta y = c - c = 0$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$;

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

$y' = (c)' = 0$



Расми 37

Аз расм айён аст, ки графики функсияи $y = c$ хати рост буда, ба тири OX параллел мебошад; расанда дар нуктаи дилхоҳи он ба худи хати рост ҳамчоя мешавад. Аз ин чо, коэффитсиенти кунчи $k = tg\alpha = 0$ ва $\varphi = 0^\circ$ аст.

Мисолҳо: а) $(5)' = 0$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)' = 0$;

в) $(2\sqrt{3})' = 0$; г) $(-2{,}113)' = 0$

2. Ҳосилаи функсияи $y = x$.

1. $[x; x+\Delta x]$, $y + \Delta y = x + \Delta x$; 2. $\Delta y = \Delta x$;

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$; 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x' = 1$.

$$(x)' = 1$$

Ин натиҷа ба маъноӣ геометрии ҳосила мувофиқ аст. Графики $y = x$ биссектрисаи кунҷи якуми координатиро тасвир мекунад (онро кашед!). Азбаски расанда ба ҳар як нуқтаи хати рост ба худи хати рост мувофиқ меояд, бинобар ин коэффитсиенти кунҷи расанда ба графики функсия дар ҳар як нуқта ба 1 баробар мебошад.

3. Ҳосилаи функсияи хаттӣ $y = ax + b$.

1. $[x; x+\Delta x]$, $y + \Delta y = a(x+\Delta x) + b$;

2. $\Delta y = a(x+\Delta x) + b - (ax+b) = a\Delta x$;

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$; 4. $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = a$.

$$\boxed{(ax+b)' = a}$$

Мисолҳо:

а) $y' = (3x+5)' = 3$; б) $y' = (\sqrt{2}x - 7)' = \sqrt{2}$;

в) $y' = (0{,}2x+1)' = -0{,}2$.

4. Ҳосилаи функсияи $y = ax^2$.

1. $[x; x+\Delta x]$, $y + \Delta y = a(x+\Delta x)^2 = ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2$;

2. $\Delta y = ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 - ax^2 = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2$;

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x$; 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax$.

$$\boxed{(ax^2)' = 2ax}$$

Мисолҳо:

а) $y' = (3x^2)' = 2 \cdot 3x = 6x;$ б) $y' = (\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x.$

5. Ҳосилаи функсияи $y = x^3$.

1. $[x; x + \Delta x]$, $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$

2. $\Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2;$ 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2.$

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2}$$

6. Ҳосилаи функсияи $y = \frac{1}{x}$

1. $[x; x + \Delta x]$, $y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x};$

2. $\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x} = -\frac{\Delta x}{(x + \Delta x)x};$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{(x + \Delta x)x};$ 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Дар ҳамаи мисолҳои боло мо ҳосилаи функсияҳои ратсионалӣ (яъне радикал надошта)-ро маълум намудем. Аз ин рӯ, касри $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -ро ҳамеша ихтисор кардан мумкин буд. Барои функсияҳои ирратсионалӣ ин ҳолат на ҳама вакт ҷой дорад.

7. Ҳосилаи функсияи $y = \sqrt{x}$.

1. $[x; x+\Delta x]$, $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$;

2. $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$;

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$ (ба Δx ихтисор карда наметавонем, бинобар ин касрро табдил медихем) $=\dfrac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$

$$=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

II. Ҳосилаи сумма, ҳосили зарб ва таксими ду функсия

Қоидаҳои ҳосилагирие, ки дар банди 1 баён намудем аз худи таърифи ҳосила бармеоянд. Барои ифодаҳои начандон мураккаб истифодаи **алгоритми** ҳосила душворие намеоварад, вале барои ифодаҳои мураккаб, ки онҳо аз сумма, ҳосили зарб ва ё таксими функсияҳо иборатанд, ҳисоб намудани ҳосилаҳои онҳо аз рӯи қоидаи умумӣ кори осон нест.

Бинобар ин, формулаҳо ва қоидаҳои дифференсиониеро маълум мекунем, ки онҳо минбаъд кори моро ҳангоми ҳисоббарории ҳосилаҳо осон мегардонанд.

Т е о р е м а. **Ҳосилаи суммаи ду функсия ба сумма ҳосилаҳои онҳо баробар аст:**

$$(u+v)'=u'+v' \qquad (1)$$

И с б о т. Фарз мекунем, ки суммаи ду функсия $y=u+v$ дода шудааст; дар ин ҷо $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ - функсияҳои дифференсиронидашаванда аз рӯи x мебошанд.

Мувофиқи алгоритми ҳисоббарории ҳосила амал мекунем:

1. Дар порчаи $[x; x+\Delta x]$, $y+\Delta y = u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)$;

2. $\Delta y = u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-(u(x)+v(x)) =$

$= (u(x+\Delta x)-u(x))+(v(x+\Delta x)-v(x)) = \Delta u + \Delta v$;

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Акнун ҳангоми $\Delta x \to 0$ ба ҳудуд мегузарем. Агар $\Delta x \to 0$, онгоҳ мувофиқи таърифи ҳосила $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$ ва суммаи онҳо бошад ба суммаи $u'+v'$ наздик мешавад, яъне

$y' = u' + v'$ ё ки $(u+v)' = u' + v'$

Теорема исбот шуд.

Ин қоидаро барои ёфтани ҳосилаи сумма (ва фарқ)-и якчанд функсия истифода бурда метавонем.

М и с о л ҳ о:

а) $y' = (3x)' = (x+x+x)' = x'+x'+x' = 1+1+1 = 3$;

б) $y' = (x^2+3x)' = (x^2)'+(3x)' = 2x+3$.

Ба ҳамин монанд **формулаи ҳосили зарб** исбот карда мешавад (мустақилона нишон диҳед!):

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'} \qquad (2)$$

Ба сухан ифода намудани формуларо фаромӯш накунед!

Н а т и ҷ а. Агар дар ин формула $u = c$ бошад, онгоҳ ҳосил мекунем:

$$(cv)' = c'v + cv' = cv' \qquad (3)$$

яъне, ҳангоми зарб кардани функсия ба адад он аз зери аломати ҳосила бароварда мешавад.

М и с о л ҳ о:

1. $y' = (x^2)' = (x\cdot x)' = x'\cdot x + x\cdot x' = x + x = 2x$;

2. $y' = (3x)' = 3(x)' = 3\cdot 1 = 3$;

3. $y' = (x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$;

4. $y' = (x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^3 + x^3 = 4x^3$;

5. $y' = ((x+5)(3x-4))' = (x+5)'(3x-4) + (x+5)(3x-4)' =$

$= 1 \cdot (3x-4) + 3(x+5) = 6x + 11.$

Дар баъзе ҳолатҳо лозим меояд, ки кимати ҳосила дар нуктаи додашуда ҳисоб карда шавад.

Чунончӣ, дода шудааст: $y = (x-1)(\frac{3}{4}x+2)$. $f'(1)$ -ро ёбед.

Ҳ а л. $y' = ((x-1)(\frac{3}{4}x+2))' = (x-1)'(\frac{3}{4}x+2) + (x-1)(\frac{3}{4}x+2)' =$

$= 1 \cdot (\frac{3}{4}x+2) + \frac{3}{4}(x-1) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}.$

Ба чои x адади 1-ро гузошта ҳосил мекунем:

$$y'(1) = f'(1) = \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}.$$

(!) ***Т е о р е м а.*** **Агар $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ бошад, онгоҳ ҳосилаи ҳосили таксими ду функсия намуди зайл дорад:**

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}} \qquad (4)$$

Исботи он ба сифати машқ ба Шумо супориш дода мешавад.

Аз формулаи (4) **натичаҳои** зерин мебарояд:

1. Ҳангоми $v = c$ будан,

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c} \qquad (5)$$

мешавад (санчед!).

2. Дар мавриди $u = c$ будан,

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2} \qquad (6)$$

пайдо мегардад (нишон диҳед!). Дар бисёр ҳолатҳо бо формулаҳои (5) ва (6) ҳисоб кардани ҳосилаи ҳосили тақсими функсияҳо хеле қулай мебошад.

Мисолҳо. Ҳосилаи функсияҳо ёфта шавад:

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{1-x}{1+x}$; 3) $y = \frac{5x-2}{9}$.

Ҳал. 1) $y = \frac{1}{x}$; мувофиқи формулаи (6) $c = 1$ аст, пас:

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

2) $y = \frac{1-x}{1+x}$; дар ин ҷо: $u = 1-x$ ва $v = 1+x$.

$$y' = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{(1+x)\cdot(-1)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}.$$

3. $y = \frac{5x-2}{9}$; мувофиқи формулаи (5) $c = \frac{1}{9}$ аст, пас:

$$y' = \left(\frac{5x-2}{9}\right)' = \frac{1}{9}(5x-2)' = \frac{1}{9}(5\cdot 1-0) = \frac{5}{9}.$$

III. Ҳосилаи дарача

Ҳосилаи дарача бо нишондиҳандаи натуралиро аз рӯи қоидаи дифференсиронии ҳосили зарб ҳосил карда метавонем. Ба ин мақсад натиҷаҳои ҳосилгардидаро паи ҳам менависем:

$$(x)' = 1 = x^0,$$

$$(x^2)' = 2x^1,$$

$$(x^3)' = 3x^2,$$

$$(x^4)' = 4x^3.$$

Дидан душвор нест, ки хосилаи хар яке аз ин дарачаҳо x^1, x^2, x^3, x^4, ба ҳосили зарби нишондиҳандаи дарачаи аргумент x ба дарачае, ки нишондиҳандааш ба як воҳид кам аст, баробар мебошад.

Аз ин ҷо, **конунияти умумии** зерин бармеояд:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in Z} \qquad (7)$$

Ин конуниятро бе исбот қабул карда, нишон медиҳем, ки он ҳангоми $n \in Q$ будан низ дуруст аст.

Ҳосилаи функсияи $y = \frac{1}{x^n}$-ро меёбем. Ба ин максад касри $y = \frac{1}{x^n}$-ро дар намуди $y = x^k$, $k = -n$ менависем:

$$y' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = (x^k)' = kx^{k-1},\quad k \in Z\ (k \neq 0).$$

Формулаи (7) барои нишондиҳандаи касрӣ ҳам ҷой дорад. Онро барои ёфтани ҳосилаи функсияи $y = \sqrt{x}$ татбик мекунем.

$$y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0).$$

Мисолҳо:

1) $y = x,\ \ y' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1;$

2) $y = x^7;\ \ y' = (x^7)' = 7x^6;$

3) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}};\ \ y' = \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (3 \cdot x^{-\frac{1}{3}})' = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{1}{3}-1} = -x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{x\sqrt[3]{x}};$

13) $y=\frac{1}{x^4}+5$; 14) $y=x^2(3x+2)$; 15) $y=\frac{1}{x^3+1}$.

50. 1) $y=\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{2}x^8$; 2) $y=x^2-3\sqrt[3]{x}$;

3) $y=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-4$; 4) $y=\frac{x^5-2x^3+x^2+2x+1}{x^2}$;

5) $y=6\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}$; 6) $y=\frac{3-4x}{\sqrt[3]{x}}$;

7) $y=\sqrt{x}(x^2-2x)$; 8) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $y=\frac{x^2-2}{\sqrt{x}}$;

10) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$; 11) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}+x^2$; 12) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$;

13) $y=\frac{2x^2+3x-1}{x-1}$; 14) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 15) $y=\frac{2x}{1+x}+\frac{1}{x}$;

16) $y=\frac{2\sqrt{x}}{x^3}$; 17) $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{x^2}$; 18) $y=(x+5)(x^2-1)$.

51*. 1) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{3}{x^2}-5x^3+4$; 2) $y=\frac{1+2x}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}$;

3) $y=\frac{1-x}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x}$; 4) $y=(x^3-1)(x^2+x+1)$;

5) $y=6\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}-\sqrt{2}$; 6) $y=\sqrt{x}\cdot(x^2-x)$;

7) $y=x^2-\frac{3}{x^3}+2$; 8) $y=\sqrt{x}(x+1)$;

9) $y=x^7-3x^5+\frac{1}{\sqrt{x}}$; 10) $y=(3+x^3)\cdot\sqrt{x}$;

11) $y=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$; 12) $y=\left(\frac{1}{x}+x\right)(x+1)$;

13) $y=\frac{1}{x^4}+5$; 14) $y=x^2(3x+2)$; 15) $y=\frac{1}{x^3+1}$.

50. 1) $y=\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{2}x^8$; 2) $y=x^2-3\sqrt[3]{x}$;

3) $y=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-4$; 4) $y=\frac{x^5-2x^3+x^2+2x+1}{x^2}$;

5) $y=6\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}$; 6) $y=\frac{3-4x}{\sqrt[3]{x}}$;

7) $y=\sqrt{x}(x^2-2x)$; 8) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $y=\frac{x^2-2}{\sqrt{x}}$;

10) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$; 11) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}+x^2$; 12) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$;

13) $y=\frac{2x^2+3x-1}{x-1}$; 14) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 15) $y=\frac{2x}{1+x}+\frac{1}{x}$;

16) $y=\frac{2\sqrt{x}}{x^3}$; 17) $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{x^2}$; 18) $y=(x+5)(x^2-1)$.

51*. 1) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{3}{x^2}-5x^3+4$; 2) $y=\frac{1+2x}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}$;

3) $y=\frac{1-x}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x}$; 4) $y=(x^3-1)(x^2+x+1)$;

5) $y=6\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}-\sqrt{2}$; 6) $y=\sqrt{x}\cdot(x^2-x)$;

7) $y=x^2-\frac{3}{x^3}+2$; 8) $y=\sqrt{x}(x+1)$;

9) $y=x^7-3x^5+\frac{1}{\sqrt{x}}$; 10) $y=(3+x^3)\cdot\sqrt{x}$;

11) $y=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$; 12) $y=\left(\frac{1}{x}+x\right)(x+1)$;

13) $y=\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{x}$; 14) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x^2}}$;

15) $y=x\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$; 16) $y=2\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2+1}$;

17) $y=\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+1)$; 18) $y=\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x})$.

§ 7. Функсияи мураккаб ва ҳосилаи он

1. Мафҳуми функсияи мураккаб. Чӣ тавре ки дар боло қайд кардем функсияҳо бештар бо ёрии формулаҳо дода мешаванд. Формулаҳо бошанд дар натиҷаи пай дар пай ичро намудани амалҳо бо аргументҳо ва ададҳои доимӣ ба амал меоянд. Мувофиқи ҳамин тартибот функсияи мураккаб ҳосил мешавад.

Фарз мекунем, ки ду функсия $-y=f(x)$ ва $x=g(t)$ дода шудааст.

Функсияи мураккаб (ё ин ки композитсия (лотинӣ – пайвастан)-и функсияҳои f ва g гуфта функсияеро меноманд, ки он аз рӯи қоидаи $y=f(g(x))$ ҳисоб карда мешавад.

Ҳангоми тартиб додани функсияҳои мураккаб ду масъалаи асосӣ ба миён меояд.

Масъалаи якум ба истифодаи номаълумҳо вобаста аст.

Чуноне ки дидем дар таърифи боло се номаълум: y, x, ва t-ро истифода намудем. Дар ибтидо функсияи y аз аргумент x, ҳамчун функсия аз t вобастагӣ дошта бошанд, дар охир функсияи y аз t вобаста шуда мемонад.

Аммо дар бисёр ҳолатҳо функсияи мураккаб аз ду функсияе тартиб дода мешавад, ки онҳо аз ҳамон як тағйирёбанда вобастагӣ доранд. Дар ин маврид нишон додани тартиби ҳисоббарории функсия хеле муҳим аст.

М и с о л. Агар $y=f(x)$ ва $f(x)=1-x$, $y=g(x)$ ва $g(x)=\frac{x}{x-1}$ бошанд, он гоҳ ду ҳолати гуногун ҳосил мешавад:

а) $y = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 - \frac{x}{x-1} = -\frac{1}{x-1}$

б) $y = g(f(x)) = g(1-x) = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$

Аз ин ҷо мебарояд, ки барои функсияҳои мураккаб **қонуни ҷойивазкунӣ** ҷой надорад, яъне $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Масъалаи дуюм ва аз ҳама муҳим муайян кардани соҳаи муайянии функсияи $y = f(g(x))$ ҳисоб мешавад.

Маълум, ки агар t ба соҳаи муайянии функсияи g тааллуқ надошта бошад, онгоҳ ифодаи $f(g(t))$ номуайян аст, зеро барои ҳисоб кардани он лозим меояд, ки аввал $g(t)$-ро ёбем. Дар мавриди t ба соҳаи муайянии $g(t)$ тааллуқ доштан ҳам, ифодаи $f(g(t))$ метавонад маъно надошта бошад. Ин ҳолат ҳамон вақт ҷой дорад, ки агар қиматҳои $x = g(t)$ ба соҳаи муайянии $f(x)$ тааллуқ надошта бошад.

Ба ҳамин тариқ, соҳаи муайянии $y = f(g(x))$ дохили соҳаи муайянии $g(t)$ аст, вале метавонад ба он мувофиқ наояд.

Мисолҳо.

1. Аз функсияи $y = f(x) = x^2 + 2$ ва $z = \sqrt{1-y^2}$ функсияи мураккаб тартиб додан мумкин нест. Агар ба соҳаи муайянии функсияи z ададҳои $-1 \leq y \leq 1$ $(1 - y^2 \geq 0)$ тааллуқ дошта бошанд, соҳаи қиматҳои функсия $y = x^2 + 2$ маҷмӯи ададҳои ҳақиқие мебошанд, ки аз 2 хурд нестанд $(y \geq 2)$.

Пас, функсияи $z = \sqrt{1-(x^2+2)^2}$ дар маҷмӯи R вуҷуд надорад.

2. Функсияи $y = f(x) = 2x$ ва функсияи $y = g(x) = x + 1$ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқи R муайян мебошанд. Аз онҳо функсияи мураккаб тартиб медиҳем:

$y = f(g(x)) = 2(x+1) = 2x + 2.$

Барои $g(f(x))$ бошад ҳосил мекунем: $g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1$. Функсияҳои пайдошуда дар маҷмӯи R муайян мебошанд.

2. <u>Функсияи ноошкор</u>. Дар ҳамаи мисолҳое, ки дар боло муоина гардиданд ва функсияҳо намуди аналитикӣ доштанд, дар қисми чапи баробарӣ y ва дар кисми росташон ифодаи танҳо аз x вобаста буда иштирок доштанд. Мисоли ин гуна функсияҳо:

1) $y = x^2$; 2) $y = \frac{x+1}{x}$.

Вобастагии байни ду тағйирёбандаро бо муодила низ додан мумкин аст, ки он нисбат ба тағйирёбандаи y ҳал нашуда бошад. Дар он сурат ингуна функсияро ноошкор меґўянд.

Мисолҳо.

1. $ax + by + c = 0$ - функсияи y ноошкор аст.

Агар онро нисбат ба y ҳал кунем, функсия y ошкор мегардад:

$$y = -\frac{ax+c}{b}$$

2. Муодилаи $xy - x + 1 = 0$-ро ҳал карда y-ро меёбем:

$$x(y-1)+1=0 \qquad \text{ва} \qquad y = 1 - \frac{1}{x}$$

3. <u>Ҳосилаи функсияи мураккаб</u>. Акнун ба ёфтани ҳосилаи функсияи мураккаб шурўъ мекунем.

Фарз мекунем, ки функсияи $y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ дода шудааст. Аз рўи кадом қоида ҳосилаи ин функсияро бояд ёфт? Формулаи ҳосилаи дарача $(x^n)'$-ро истифода бурда наметавонем, зеро он ба функсияҳое тааллуқ дорад, ки асосашон худи аргумент x аст. Ба сифати асоси функсияи додашуда бошад, функсияи $(1-x^2)$ хизмат мекунад, ки он ба ҷои аргумет x омадааст. Ва он ҳам функсияи дарачагӣ аст. Аз ин рў, зарурияти ба вуҷуд овардани қоидаи умумии нав – коидаи дифференсиронии функсияи мураккаб ба миён меояд.

Бигузор функсияи

$$y = f(\varphi(x)) \qquad (1)$$

дода шуда бошад; дар ин ҷо y аз x вобастагӣ дорад.

Тагйирёбандаи нав дохил мекунем: $u = \varphi(x)$ ва $y = f(u)$. Дар ин маврид y аз u ва u аз x вобастагӣ доранд.

Функсияхои φ ва f - дар соҳаи муайянии функсияи дода шуда дифференсиронидашавандаанд, яъне: $u' = \varphi'(x)$ ва $y' = f'(u)$.

Теорема. **Ҳосилаи функсияи мураккаби $y = f(\varphi(x))$ аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:**

$$y' = f'(\varphi(x))\varphi'(x) \qquad (2)$$

Исбот. Барои ҳосил намудани формулаи матлуб аз **алгоритми** асосӣ истифода мебарем.

1. Фарз мекунем, ки аргумент x дар порчаи $[x; x+\Delta x]$ афзоиш ёфт, он гоҳ:

$$y + \Delta y = f(\varphi(x + \Delta x));$$

2. $\Delta y = f(\varphi(x + \Delta x)) - f(\varphi(x));$

дар ин ҷо, $u = \varphi(x)$ ҳам бо Δu афзоиш меёбад:

$\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \Delta\varphi(x)$, онгоҳ: $\varphi(x + \Delta x) = u + \Delta u$.

пас, $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u), \quad \Delta u \neq 0.$

Азбаски $u = \varphi(x)$ - функсияи дифференсиронидашаванда аст, пас ҳангоми $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$ ба сифр майл мекунад.

Барои ёфтани ҳосилаи y аз рӯи x нисбат тартиб медиҳем:

3. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} =$$

Чӣ тавре, ки мебинем афзоиши функсия Δy на аз рӯи афзоиши аргумент Δx, балки ба воситаи афзоиши Δu ифода ёфтааст. Бинобар ин, барои ёфтани ҳудуди ин нисбат ҳангоми $\Delta x \to 0$, сурат ва махрачро ба Δu зарб мекунем:

$$= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Мувофиқи принсипи бефосилагӣ, агар $\Delta x \to 0$, бояд $\Delta y \to 0$.

Агар $\Delta u \to 0$, касри якум $\frac{\Delta y}{\Delta u} \to y'(u)$ ё ин ки $f'(\varphi(x))$ ва касри дуюм бошад $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to u'$, яъне ба ҳосилаи $u' = \varphi'(x)$ наздик мешавад.

Гузариши ҳудудиро ба амал оварда ҳосил мекунем.

$$y' = f'(u) \cdot u' = f'(u(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Теорема исбот шуд.

М и с о л ҳ о. Ҳосилаи функсияҳоро ёбед:

1) $y = \sqrt{1 - x^2}$; **2)** $y = (3x - 5)^{20}$.

Ҳ а л. 1) Функсияи $y = \sqrt{1 - x^2}$ -ро ҳамчун функсияи мураккаб тасвир мекунем; он аз функсия $u = 1 - x^2$ ва $y = f(u) = \sqrt{u}$ ташкил ёфтааст. Онгоҳ:

$$y' = (\sqrt{u})' \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (1 - x^2)' = -\frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

2) $y = (3x - 5)^{20} = u^{20}$; $u = 3x - 5$;

$$y' = (u^{20})' \cdot (3x - 5)' = 20u^{19} \cdot 3 = 60(3x - 5)^{19}.$$

М а с ъ а л а. Агар расанда аз нуқтаи $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-и давраи $x^2 + y^2 = 1$ гузарад коэффитсиенти кунҷии он ба чӣ баробар аст?

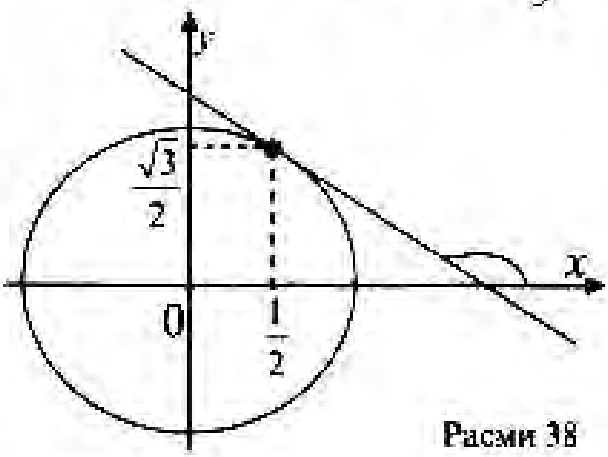
Ҳ а л. **Тарзи 1.** Дар ин ҷо y-**функсияи ноошкор** аст. Онро ба воситаи x ифода намуда, ҳосилаи функсияро меёбем ва баъд коэффитсиенти кунҷиро маълум мекунем (иҷро кунед!).

Тарзи 2. Барои ба мақсад расидан, бехтараш муодилаи давраро функсияи ноошкор ҳисобида, $y = y(x)$ -ро ҳамчун функсияи мураккаб аз рӯи тағйирёбандаи x қабул менамоем ва аз ду тарафи баробарӣ ҳосила мегирем:

$x^2+y^2=1;\ 2x\cdot(x)'+2y\cdot y'(x)=0$ ё ки $x+y\cdot y'=0;\ y'=-\dfrac{x}{y}.$

Координатаҳои нуқтаи A-ро гузошта, коэффитсиенти кунчии расандаро ҳосил мекунем (расми 38):

$$y'=-\frac{x}{y}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Расми 38

?
1. Функсияи мураккабро маънидод кунед.
2. Чаро функсияи ноошкор меґўянд? Мисол оред.
3. Ҳосилаи функсияи мураккаб чӣ тавр ёфта мешавад?

Машқҳо

Аз функсияҳои $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функсияҳои мураккаби $u=f(\varphi(x))$ ва $v=\varphi(f(x))$-ро тартиб диҳед (52° – 54^*), агар:

52°. а) $f(x)=x^2+1$ ва $\varphi(x)=x^2$; б) $f(x)=2x$ ва $\varphi(x)=x+3$.

53. а) $f(x)=\sqrt{x}$ ва $\varphi(x)=x^2+x$; б) $f(x)=x^2-x$ ва $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$.

54^*. а) $f(x)=\varphi(x)=\begin{cases}1+x, & агар\quad x\ge 0,\\ 2x+1, & агар\quad x\le 0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}0, & агар\quad x\ne 0,\\ 1, & агар\quad x>0\end{cases}$ ва $\varphi(x)=x^2+1$.

Муодилаи хатҳо дода шудаанд. Яке аз онҳоро ба воситаи дигараш ифода кунед (55° – 57^*):

55°. а) $x+y-3=0$; б) $2x+y+4=0$;

в) $y-\dfrac{1}{2}x^2+8=0$; г) $s-1{,}5t=4$;

д) $x^2-y^2=0$; е) $|y|-1-x=0$.

56. а) $5+3t=t^2+s$; б) $\dfrac{2t+0{,}75t^2}{10}-\dfrac{5}{2}=0$; в) $s^2=v^3$.

57*. а) $\frac{y}{x-5}-x-4=0$; б) $\frac{s+t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}=\frac{2}{t^2+1}$;

в) $x^2+y^2=1$.

Кадоме аз ин вобастагиҳо y-ро ҳамчун функсия аз x муайян мекунад (58° – 61*):

58°. а) $3y+x=0$; б) $x+y-xy=1$.

59. а) $2x-y=0$; б) $xy-x=1$.

60. а) $x+2y+xy=-7$; б) $\sqrt{xy}+x=1$.

61*. а) $(2x-y)(x+y)=x^2$; б) $y-x=y^2$.

Ҳосилаҳои функсияҳоро ёбед (62° – 64*):

62°. а) $y=(2x+1)^2$; б) $y=3\sqrt{5x-1}$;

в) $y=\sqrt{x^2-4}$; г) $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$.

63. а) $y=\left(x^3-1\right)^6$; б) $y=\frac{1}{(x^2-1)^4}$;

в) $y=x(x^2+1)^3$; г) $y=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

64*. а) $y=(ax^2+bx+c)^k$; б) $y=(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}$;

в) $y=(x^3+2)\sqrt[3]{2x^2-1}$; г) $y=\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$.

Ҳосилаҳои функсияҳоро ёбед (65° – 68*):

65°. а) $y=(x+1)^4$; б) $y=x(3-2x)^8$;

в) $y=(2x-1)^{-3}$; г) $y=\sqrt{3x-7}$.

66. а) $y=\sqrt[3]{2x+1}$; б) $y=\frac{5}{(2x-3)^5}$;

в) $y=\frac{1}{\sqrt{5x+7}}$; г) $y=(x^6-1)^2(x+4)^3$;

67. а) $y=\sqrt[3]{(2x+1)^2}$; б) $y=(3+4x)^3+(6x-1)^2$;

в) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{3x+2}}$; г) $y=(1-2x)^4(x+1)^3$;

68*. а) $y=(ax+b)^n$; б) $y=(a+x)^n$.

69. а) Ба давраи вохидии $x^2+y^2=1$ дар нуқтаи $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ расанда гузаронида шудааст. Коэффитсиенти кунҷии онро ёбед.

б) Муодилаи расандаро ба давраи $x^2+y^2=25$ дар нуқтаи (3; 4) маълум кунед.

Қимати ҳосилаҳоро дар нуқтаҳои дода шуда ҳисоб кунед (70° – 72^*):

70°. а) $y=x^2-2x$; $x=0, 1, 2$; б) $y=\dfrac{x}{2x-1}$; $x=-2, 0, 3$.

71. а) $y=\dfrac{3-2x}{x+5}$; $x=-4, 8, 0$; б) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; $x=0, 1, -1$.

72*. а) $y=\dfrac{2x+3}{3x-5}$; $x=-3, 6, x^2-1$;

б) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$; $x=0, -3, x+1$.

73. Функсияҳои зерин дода шудаанд:

1) $y=x^3$; 2) $y=x^2-7x+3$;

3) $y=\sqrt{2x+9}$; 4) $y=(x+1)^5$.

Аз байни онҳо ҳамингуна функсияҳоеро интихоб намоед, ки дар нуқтаи $x=0$: а) $f(0)=f'(0)$; б) ҳосила дорои қимати калонтарин бошад; в) ҳосила ба қимати хурдтарин молик бошад.

§ 8. Ҳосилаи функсияи намуди $f(kx+b)$

Ҳосилаи функсияи $f(kx+b)$-ро ҳамчун ҳолати хусусии ҳосилаи функсияи мураккаб дида баромадан мумкин аст.

Инро нишон медиҳем.

Теорема. Ҳосилаи функсияи $y=f(kx+b)$ аз рӯи формулаи

$$y' = kf'(kx+b)$$

ҳисоб карда мешавад.

Исбот. Агар дар функсияи $y=f(kx+b)$ ифодаи зери аломати он $(kx+b)$-ро бо $\varphi(x)$ ишорат кунем, яъне $\varphi(x)=kx+b$, онгоҳ функсияи дода шуда намуди функсияи мураккабро мегирад:

$$y=f(\varphi(x)), \quad \varphi(x)=kx+b$$

Ҳосилаи он ба мо маълум аст:

$$y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

Ҳосилаи $\varphi(x)=kx+b$-ро меёбем:

$$\varphi'(x)=(kx+b)'=k$$

Он гоҳ: $$y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=kf'(kx+b).$$

Теорема исбот шуд.

Мисолҳо:

1) $y=(x-1)^3$; $y'=((x-1)^3)'=3(x-1)^2\cdot(x-1)'=3(x-1)^2$;

2) $y=(3x+5)^5$; $y'=((3x+5)^5)'=5\cdot3(3x+5)^4=15(3x+5)^4$;

3) $y=\dfrac{1}{3x-4}$; $y'=\left(\dfrac{1}{3x-4}\right)'=-\dfrac{3}{(3x-4)^2}$.

1. Ҳосилаи функсияи $f(kx+b)$ ба чӣ баробар аст?
2. Ҳосилаи функсияи $f(kx+b)$ ба ҳосилаи функсияи $kx+b$ чӣ гуна алоқамандӣ дорад?

Машқҳо

Ҳосилаи функсияҳоро ёбед ($74^\circ-76^\circ$):

74°. а) $y = 2x + 3$; б) $y = 7x - \frac{1}{3}$;

в) $y = (2x+3)^3$; г) $y = \sqrt{7x-3}$.

75. а) $y = (2-3x)^5$; б) $y = (x^2+4x-1)^2$;

в) $y = (x^2+4x-1)^{\frac{2}{3}}$; г) $y = (2-1{,}5x)^3$.

76*. а) $y = (3x-2)^2 - (2x-3)^4$; б) $y = \frac{1}{(5x+3)^2}$;

в) $y = \sqrt{4x+5}$; г) $y = (3x-1)^3 + \sqrt{4x-2}$.

77. Қимати ҳосилаи функсияи $y = (3x-2)^{10}$-ро дар нуқтаи $x_0 = 1$ ёбед.

§ 9. Ҳудуди нисбати $\frac{\sin x}{x}$ ҳангоми $x \longrightarrow 0$

Донистани ин ҳудуд барои ёфтани ҳосилаҳои функсияҳои тригонометрӣ зарур аст. Аммо ин ҳудудро бо алгоритми асосии ҳосилагирӣ ёфтан мумкин нест. Лозим меояд, ки ҳалли онро бо ёрии ягон методи дигар ҷустуҷӯ намоем.

Ин методро шарҳ медиҳем.

Агар кунҷи x қиматҳои радианӣ қабул кунад, онгоҳ ифодаи $\frac{\sin x}{x}$ барои ҳамаи қиматҳои x (ғайр аз $x = 0$) муайян аст. Дар § 7, боби II маълум кардем, ки дар мавриди хурд будани қиматҳои x (яъне дар наздикии нуқтаи $x = 0$) $\sin x \approx x$ мешавад. Аз ин ҷо мебарояд, ки ҳангоми $x \to 0$, бояд $\frac{\sin x}{x} \to 1$.

Ин далелро **айёнӣ** нишон медиҳем.

Якчанд қимати радиании x-ро мегирем; фишангчаи «град-рад»-ро ба ҳолати «рад» оварда, нисбати $\frac{\sin x}{x}$-ро дар микрокалкулятор ҳисоб мекунем (ҷадвали 8):

Мо сахехин адад-хоро то панҷ аломати даҳй гирифтем. Ба чалвали 8 нигариста пай бурдан мумкин аст, ки:

Чадвали 8

x (бо рад)	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$ ё ки $x/\sin x$
1	1	0,84 147
0,1	0,1	0,99 833
0,01	0,01	0,99 998

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \text{ агар } x \to 0$$

Бе тирча менависем:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

?

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ -ро бо сухан баён кунед.

2. Нисбати $\frac{\sin x}{x}$ лар кадом нукта номуайян аст?

Машкхо

Хулулхои зеринро хисоб кунед ($78^{*} - 80^{*}$):

78*. а) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x}$;

в) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$; г) $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin x}$.

79. а) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{6x}$; б) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\sin x}$;

в) $\lim_{x \to 0} \frac{2\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$; г) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$.

80*. а) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 11x - 6x}{5x}$; б) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 3x}{x}$;

в) $\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x}$; г) $\lim_{x \to 0} \frac{tgax}{x}$.

§ 10. Ҳосилаи функсияҳои тригонометрӣ

Акун ба масъалаи хеле муҳим – ҳосилаи функсияҳои тригонометрӣ машғул мешавем. Ҳаминро ба назар мегирем, ки ченаки кунҷҳо бо радианҳо дода мешаванд.

I. Ҳосилаи функсияи $y = \sin x$

Алгоритми асосии ҳосилагириро истифода мебарем:

1. $[x; x+\Delta x]$, $y+\Delta y = \sin(x+\Delta x)$;

формулаи фарқи синусро истифода мебарем.

2. $$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{x}\cdot\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

3. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

4. Ҳангоми $\Delta x \to 0$ ба ҳудуд мегузарем, онгоҳ

$$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1, \qquad \cos(x+\frac{\Delta x}{2}) \to \cos x$$

Пас, тарафи рости баробарии охирин ба $\cos x$ майл мекунад, яъне:

$$\boxed{y' = (\sin x)' = \cos x}$$

Мисолҳо.

1) $y = \frac{1}{2} - 4\sin x$; $y' = (\frac{1}{2} - 4\sin x)' = (\frac{1}{2})' - 4(\sin x)' = -4\cos x$;

2) $y = \sin 3x$; $y' = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$.

II. Ҳосилаи функсияи $y = \cos x$

Маълум аст, ки: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Аз $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ ҳамчун функсияи мураккаб аз x ҳосила гирифта пайдо мекунем:

$$(\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2}-x))' = \cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(\frac{\pi}{2}-x)' = \cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(-1) = -\sin x$$

Ҳамин тавр,

$$\boxed{y' = (\cos x)' = -\sin x}$$

Мисолҳо:

1) $y = 2\cos\frac{x}{2}$; $y' = (2\cos\frac{x}{2})' = -2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = -\sin\frac{x}{2}$.

2) $y = \sin x + \cos x$; $y' = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$.

3) $y = 5\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$y' = \left(5\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right)' = -5\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)' = -10\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right);$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -10\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right) = -10\sin\frac{\pi}{6} = -10\cdot\frac{1}{2} = -5.$$

III. Ҳосилан функсияи $y = tg\,x$

Азбаски $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ аст, мувофиқи қоидаи ҳосилаи таксим навишта метавонем:

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Мисол. $y = tgx - x$;

$$y' = (tgx - x)' = (tgx)' - (x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x$$

IV. Ҳосилаи функсияи $y = ctg\,x$

$$(ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\boxed{(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Мисол. $y = \sqrt{ctg2x}$;

$$y' = (\sqrt{ctg2x})' = \frac{1}{2\sqrt{ctg2x}} \cdot (ctg2x)' = -\frac{1 \cdot (2x)'}{2\sin^2 2x \cdot \sqrt{ctg2x}} = -$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 2x \cdot \sqrt{ctg2x}}$$

?

1. Ҳосилаи синус, косинус, тангенс ва котангенс ба чӣ баробар аст?
2. Ҳосилаи синус чӣ тавр исбот карда шудааст?
3. Ҳосилаи функсияҳои тангенс ва котангенс чӣ?

Машқҳо

Ҳосилаҳои функсияҳоро ёбед (81° – 84*):

81°. а) $y = 2\sin\frac{x}{2}$; б) $y = 5\sin^2 x$;

в) $y = -\frac{\cos x}{1+\sin x}$; г) $y = \sqrt{\sin x}$; д) $y = \frac{1}{\sin x}$.

82. а) $y = (1-\cos 2x)^2$; б) $y = \sin(2x-1)$;

в) $y = x\cos 2x$; г) $y = \frac{\cos(2x+1)}{\sin(2x+1)}$; д) $y = 2\sin\sqrt{2x-1}$.

83. а) $y = \sin(2x^2+3)$; б) $y = \sqrt{\cos 4x}$;

в) $y = \frac{1+\sin 2x}{1-\cos 3x}$; г) $y = x \cdot \sin^3 2x$; д) $y = tg^2(2x+1)$.

84*. а) $y = ctg(ax + k)$; б) $y = \sqrt{\cos\sqrt{2x}}$;

в) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{ctgx}}$; г) $y = tgx \cdot \sin^2 x$.

85. Барои функсияҳои зерин суръати тағйирёбии ҳаракати лапиши гармоникиро муайян кунед:

а) $s = 2\sin(\omega t + \dfrac{\pi}{3})$; б) $s = 3\sin(\omega t - \dfrac{5}{12}\pi)$.

§ 11. Ҷадвали ҳосилаҳо ва татбиқи он

Қоидаҳо ва натиҷаҳои ҳосилшудаи ҳосилаи баъзе функсияҳоро дар ҷадвал ворид месозем (ҷадвали 9).

Ҷадвали 9

Қоидаҳо	Формулаҳо
1. $(u+v)' = u' + v'$	1. $(c)' = 0$; 2) $(x)' = 1$
2. $(uv)' = u'v + v'u$	3. $(x^2)' = 2x$; 4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
3. $(cu)' = cu'$	5. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$	6. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$
5. $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = -\dfrac{u'}{c}$	7. $(\sin x)' = \cos x$
6. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$	8. $(\cos x)' = \sin x$
7. Агар $u = \varphi(x)$ ва $y = f(u)$ бошад, $y' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ аст.	9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $y = f(kx + b)$ бошад. $y' = kf'(kx + b)$	10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$