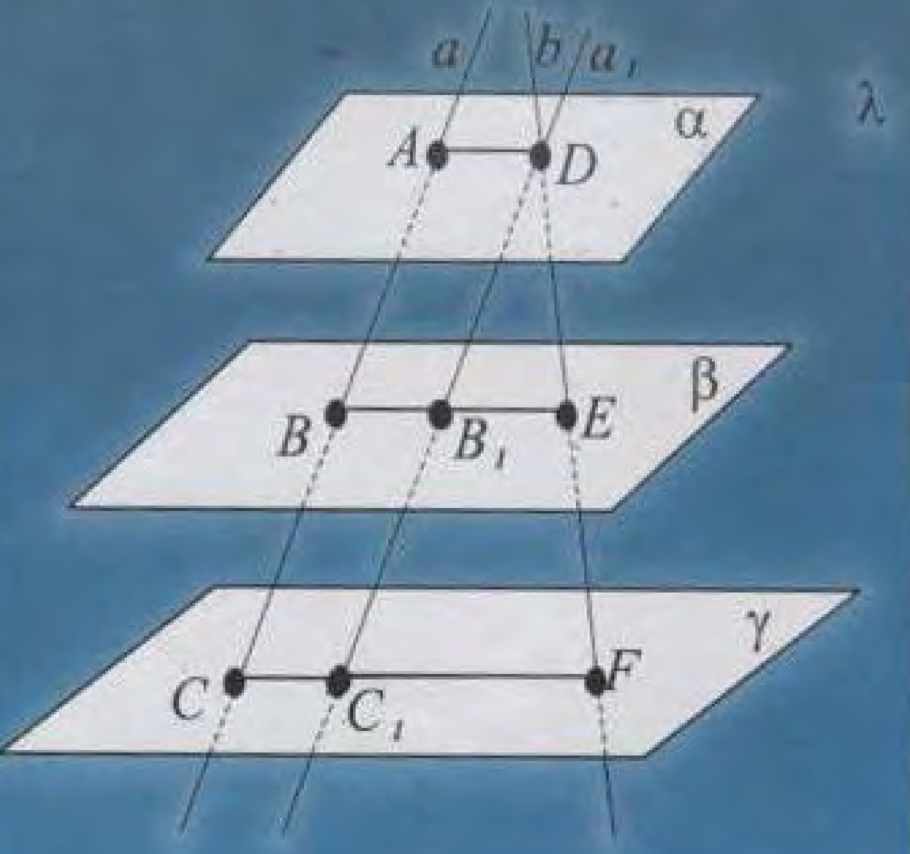
Алиев Б.

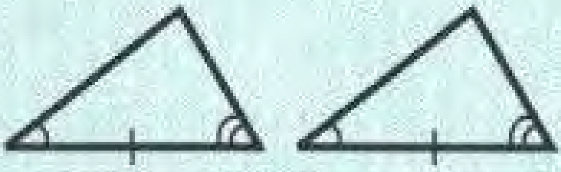
ГеометриЯ

10

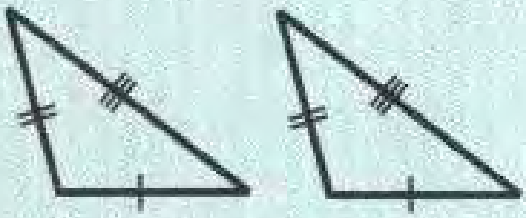


I. НИШОНАҲОИ БАРОБАРИИ СЕКУНҶАҲО

1. Аз рӯи ду тараф ва кунҷи байни онҳо

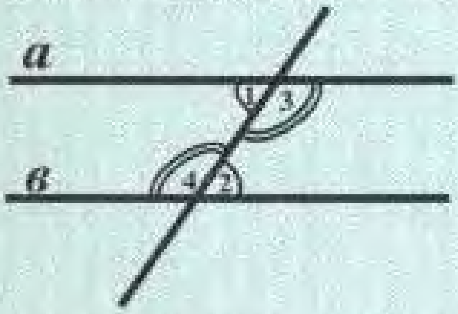


2. Аз рӯи тараф ва кунҷҳои ба он часпида



3. Аз рӯи се тараф

II. НИШОНАҲОИ ПАРАЛЛЕЛИИ ХАТҲОИ РОСТ



а ∥ в, агар:

$\angle 1 = \angle 2 \;\; (\angle 3 = \angle 4)$

ё

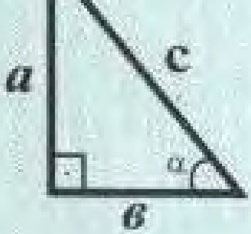
$\angle 1 + \angle 4 = 180^0$

$(\angle 2 + \angle 3 = 180^0)$

III. ҲОСИЛИ ҶАМЪИ КУНҶҲОИ СЕКУНҶА

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

IV. ВОБАСТАГИҲО ДАР СЕКУНҶАИ РОСТКУНҶА

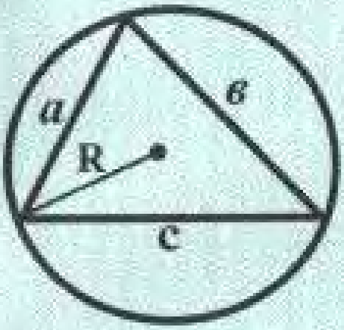


$a^2 + в^2 = c^2$ (Теоремаи Пифагор)

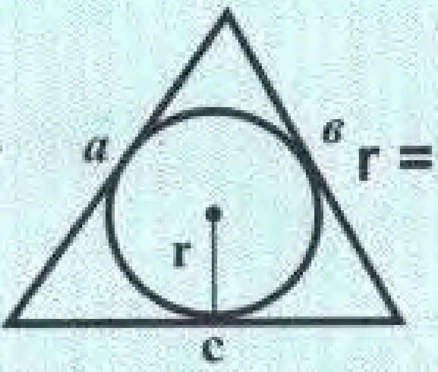
$a = c \sin\alpha$, $a = в \operatorname{tg}\alpha$,

$в = c \cos\alpha$, $в = a \operatorname{ctg}\alpha$.

V. РАДИУСҲОИ ДАВРАҲОИ ДАРУНКАШИДА ВА БЕРУНКАШИДА

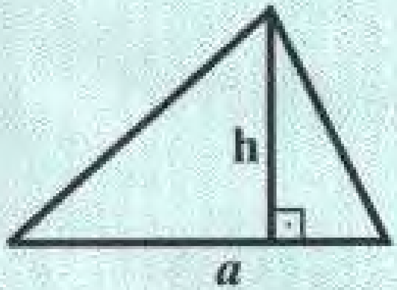


$$R=\frac{aвc}{4S}$$

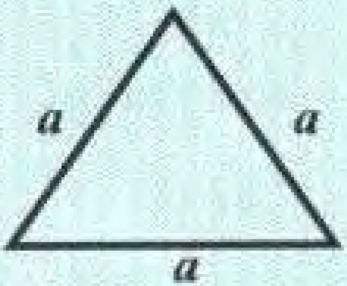


$$r=\frac{2S}{a+в+c}$$

VI. МАСОҲАТИ СЕКУНҶА



$$S=\frac{1}{2}ah$$



$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

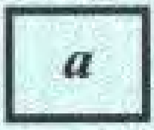
VII. ПЕРИМЕТР ВА МАСОҲАТИ ЧОРКУНҶАҲО

Росткунча

$p=2(a+в)$

$S=aв$

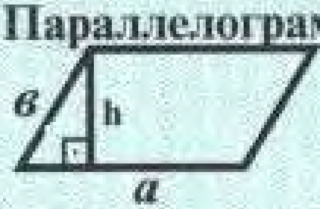
Квадрат



$p=4a$

$S=a^2$

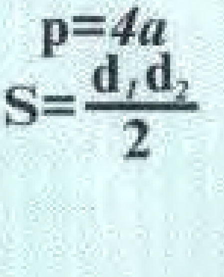
Параллелограмм



$p=2(a+в)$

$S=ah$

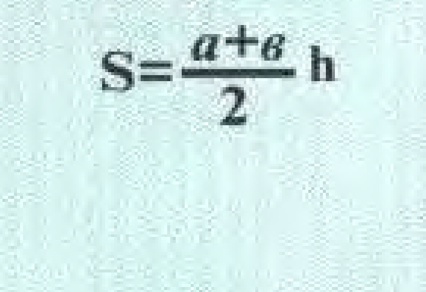
Ромб



$p=4a$

$$S=\frac{d_1 d_2}{2}$$

Трапетсия



$$S=\frac{a+в}{2}h$$

ББК 22.151Я72
А-49
Алиев Б.
Геометрия (ибтидои стереометрия), китоби дарсӣ барои синфи 10. «Студент», Душанбе. Соли 2006, 128 саҳифа.

Китоби мазкур дар доираи Лоиҳаи таҷдиди соҳаи маориф нашр гардидааст.

Ҷадвали истифодаи иҷоравии китоб

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли хониш	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Авали сол	Охири сол
1					
2					
3					
4					
5					

Муаллимони мӯҳтарам

Хоҳишмандем фикру мулоҳизаҳои худро оид ба мазмуни китоби мазкур ба нишонии 734024, ш. Душанбе, кӯчаи Айнӣ, 45, Пажӯҳишгоҳи улуми педагогии Тоҷикистон ирсол намоед.

ISBN 999477010-1

САРСУХАН

Китоби мазкур аз рӯи «Барномаи геометрия барои синфҳои 7-11» (Душанбе, «Матбуот», 2002), ки онро Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон маъқул донистааст, бо назардошти Консепсияи миллии маълумот, талаботи Стандарти давлатии маълумот аз математика, навишта шудааст. Амалан мундариҷаи китоб аз доираи барномаи геометрия васеътар буда, қариб тамоми маводи таълимиро аз фанни геометрия барои синфи 10-уми мактабҳои тамоили табиию риёзӣ дар бар мегирад. Китобро инчунин дар гимназияҳо, литсейҳо ва литсейҳои муштарак ба сифати китоби дарсӣ истифода кардан мумкин аст.

Китоб аз 6 параграф иборат аст. Дар параграфҳои 1-4-и он аксиомаҳои стереометрия ва алоқаи онҳо бо аксиомаҳои планиметрия, ҷойгиршавии байниҳамдигарии нуқтаҳо, хатҳои рост ва ҳамвориҳо, тавсифҳои гуногуни ин ҷойгиршавиҳо ва алоқаи байни онҳо (параллелӣ; перпендикулярӣ; масофаи байни нуқтаҳо, хатҳои рост, ҳамвориҳо; алоқаи байни муносибатҳои параллелӣ ва перпендикулярӣ; кунҷи байни хатҳои рост ва ҳамвориҳо) баён карда шудааст. Ин мавод як қисми ибтидоии стереометрияро ташкил дода, қисми душворфаҳми геометрияи мактабӣ аст. Душвориаш дар он зоҳир мегардад, ки дарки мафҳумҳо, тасвияҳо ва исботи онҳо сатҳи баланди тасаввуроти фазогӣ доштанро талаб карда, масъалаҳояш асосан ҳисобӣ нестанд. Яъне ҳалли масъалаҳо аз сохтанҳо ва исботҳо иборат мебошад.

Мувофиқи методологияи таълими ҳозира, ки дар мактабҳои Тоҷикистон амал мекунад, дар китоб параллелӣ ва перпендикулярии хатҳои рост ва ҳамҷоя, балки дар алоҳидагӣ муоина карда мешавад. Бо ибораи дигар, қисми аффинии ибтидоии стереометрия (геометрияи параллелӣ ва буриши хатҳои рост бо ҳамвориҳо) аз қисми метрикии он (геометрияи перпендикулярӣ, масофаҳо ва кунҷҳо) ҷудо карда шудааст. Ҳангоми чунин ҷудокунӣ методҳои ҳалли масъалаҳои аффинӣ аз метрикӣ фаҳмотар ва дастрас мегарданд. Дигар ин ки ҳангоми баёни масъалаҳои стереометрӣ маводи планиметрие, ки барои дарк кардани он зарур аст хотирнишон карда мешавад. Бар замми ин дар китоб ба монандии (шабоҳати) маводи ҳар ду қисми геометрия диққати махсус дода мешавад.

Дар параграфҳои 5-6 чунин мафҳумҳо ба монанди координатаҳои нуқта, масофаи байни ду нуқта, координатаи буриш ва ҷойгиршавии ду хати рост, табдилдиҳӣ, вектор, дарозии вектор, зарби адад бар вектор, зарби скалярии векторҳо ва ғайраҳо, ки онҳо дар синфи 8 дар ҳамворӣ дохил ва омӯхта шуда буданд, дар фазо паҳн карда мешаванд.

Қисми назариявии ҳар як пункт бо саволҳои назоратӣ ба охир мерасад. Ба мақсади нишон додани татбиқи назария дар ҳар як пункт, ғайр аз пункти 1, ҳалли якчанд масъала оварда мешавад. Масъалаҳои барои ҳалли мустақилона пешбинӣ шуда, дар ҳар як пункт миқдоран каме зиёданд, бинобар ин на ҳар талаба барои ҳалли ҳамаи онҳо фурсат меёбад. Ба ин саъй кардан ҳам лозим нест. Пиндошта мешавад, ки бо назардошти қобилият вазифаи хонагӣ фардӣ хоҳад буд. Масъалаҳое, ки ҳаллашон каме мураккаб аст бо аломати* нишона шудаанд.

Ҳар як пункт бо масъалаҳо барои такрор ба охир мерасад. Масъалаҳои стереометрии ин қисм бо истифодаи назарияи пунктҳои пешина ҳал мешаванд. Масъалаҳои планиметрӣ чун қоида шабоҳати стереометриро надоранд. Ин масъалаҳоро бо мақсади фаромӯш нашудани маводи синфҳои 7-9 ва тайёрӣ ба олимпиадаҳо ва имтиҳонҳои дар пеш буда пешниҳод кардаем.

Яке аз талаботи Стандарти давлатии маълумоти умумӣ дар Тоҷикистон донистани осори илмии ниёгон аст. Бо ҳамин мақсад дар китоб маълумоти мухтасари таърихӣ оварда шудааст, ки дар он б натиҷаҳои чандин нобиғаҳои илми Шарқ, алалхусус Осиёи Марказ доир ба параллелӣ ва перпендикулярӣ дар ҳамворӣ ва фазо диққати асосӣ дода мешавад. Мавҷуд будани чунин мавод ба хонанда аз умумибашарӣ будани натиҷаҳои илмӣ гувоҳӣ дода, боиси дарки ифтихор ва хештаншиносии ӯ мегарданд.

Сохтори китоб айнан сохтори китобҳои дарсии аллакай чопшудаи «Алгебра»-и синфҳои 7-10-ро мемонад. Ягонагии сохтори китобҳои дарсии фанҳои алгебраю геометрия омӯхтани математикаро осонтар мекунад.

Ҳангоми навиштани китоб чунин китобҳои дарсӣ ва методӣ, ба мисли «Геометрия, 7-11» (муал. А.В. Погорелов, 1991), «Геометрия в 9 классе» (муал. А.Н. Земляков, 1988), «Элементарная геометрия» (муал. А.П. Киселев, 1980), «Геометрия для 9-10 классов» (муал. Александров А.Д. ва диг., 1988), «Элементарная геометрия» (муал. А.Г. Болтянский, 1985), «Сборник задач по геометрии для 9-10 классов» (муал. В.А. Гусев ва диг., 1977), «История математики в школе: 9-10 классы» (муал. Г.И. Глейзер, 1983), ки онҳоро нашриёти «Просвещение»-и Маскав чоп кардааст, истифода шудаанд. Баъзе масъалаҳои барои мустақилона ҳал кардан пешниҳод шуда ва чор масъалаи ҳалшуда, ки дар ҳалли онҳо паҳлӯҳои маводи назариявӣ ниҳоят назаррасанд, яъне характерноканд, масалан, масъалаи 2-и пункти 12), аз ҳамин китобҳо гирифта шудаанд. Ин мумкин аст, чунки китоби дарсӣ маводи таълимӣ-методӣ аст, на илмӣ.

Ба сохтор ва мундариҷаи китобҳои дарсӣ мароқ зоҳир кардан боиси беҳтар шудани сифати онҳо мегардад. Барои ҳамин хоҳиш карда мешавад, ки фикру мулоҳизаҳо доир ба ин китоб ба суроғаи: 734024, Душанбе, хиёбони Айнӣ, 45, Пажӯҳишгоҳи улуми педагогии Тоҷикистон ирсол шаванд.

Муаллиф

§1. АКСИОМАҲОИ СТЕРЕОМЕТРИЯ ВА НАТИҶАҲО АЗ ОНҲО

1. Фанни стереометрия. Мафҳумҳои асосии он

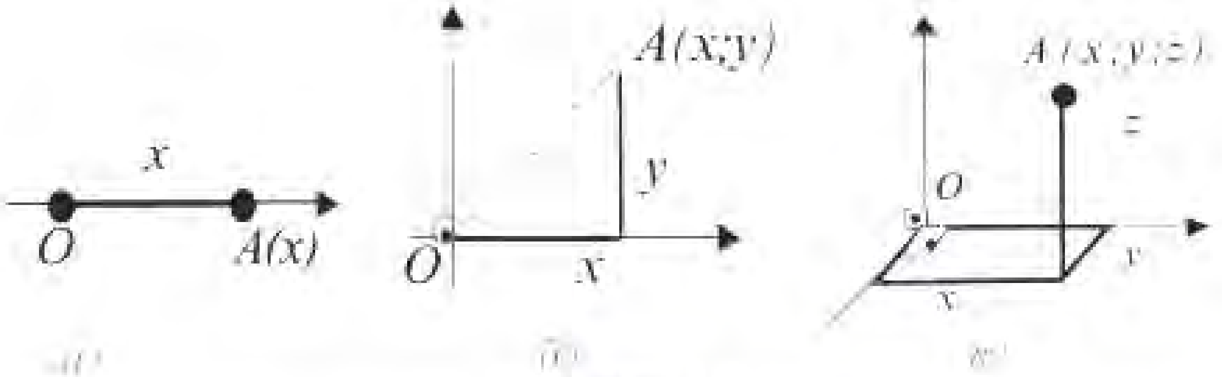
Мо аллакай планиметрия – қисми геометрияро, ки дар он фигураҳо дар ҳамворӣ омӯхта мешаванд, медонем (Калимаи planimetria аз решаи лотинии plenum - сатҳи ҳамвор, ҳамворӣ ва бандаки юнонии metreo – чен мекунам иборат аст). Мафҳумҳои асосии планиметрия – нуқта ва хати рост, инчунин аксиомаҳои онро истифода карда, хосиятҳо ва формулаҳоро барои фигураҳои ҳамвор, ба монанди кунҷ, секунҷа, чоркунҷа (параллелограмм, трапетсия), бисёркунҷа, давра, доира ҳосил карда будем.

Акнун ба омӯхтани қисми дигари геометрия – стереометрия (аз калимаи юнонии stereos-фазогӣ (stereon-ҳаҷм) ва metreo-чен мекунам) шурӯъ менамоем. Дар ин қисм фигураҳои фазогӣ, яъне фигураҳое, ки онҳоро дар як ҳамворӣ ҷойгир кардан мумкин нест, омӯхта мешаванд. Худи ҳамворӣ, ки дар планиметрия ҳамаи фигураҳо дар он ҷойгир буданд, дар стереометрия танҳо яке аз фигураҳои имконпазир мегардаду халос.

Стереометрия шакл, андоза ва ҷойгиршавии (вазъияти) байниҳамдигарии фигураҳои фазогиро меомӯзад. Дар айни ҳол ҳамаи дигар хосиятҳои фигураҳо ба эътибор гирифта намешаванд. Масалан, доир ба кубы тегааш $5см$ ё параллелепипеди сатҳаш $18см^2$ буда мулоҳиза рондан мумкин аст, вале дар геометрия доир ба куби сиёҳ ё параллелепипеди оҳанӣ сухан рондан мумкин нест, чунки ҷисмҳои геометрӣ дорои чунин хосиятҳо нестанд.

Бар хилофи ҳамвории дученака (ё хати рости якченака), фазо, ки дар стереометрия омӯхта мешавад, сеченака мебошад. Ин тасдиқро маънидод менамоем.

Дар хати рост (расми 1, *a*) аз нуқтаи ибтидоии O ба чап ва ба рост қад-қади ин хат ҳаракат кардан мумкин аст. Яъне мавқеъи (ҷои) ҳар гуна нуқтаи A бо як адади мусбат ё манфӣ (вобаста ба самти ҳаракат), ки координатаи ин нуқта ном дорад, муайян карда мешавад.



Расми 1

Дар ҳамворӣ (расми 1, *б*) аз нуқтаи ибтидоӣ қад-қади ду хатҳои рости перпендикуляр ба чапу рост ва ба болою поён ҳаракат кардан мумкин аст. Мавқеъи ҳар гуна нуқта бо ду адад тавсиф (муайян) карда мешавад. Ин ададҳо бузургии ҷойивазшавиро қад-қади ин хатҳо ба рост (чап) ва ба боло (ба поён) ифода менамоянд. Дар фазо бошад (расми 1, *в*) аз нуқтаи *O* се самти ҷуфт-ҷуфт перпендикуляри ҷойивазшавӣ мавҷуд аст: ба чапу рост, ба болою поён, ба пешу қафо.

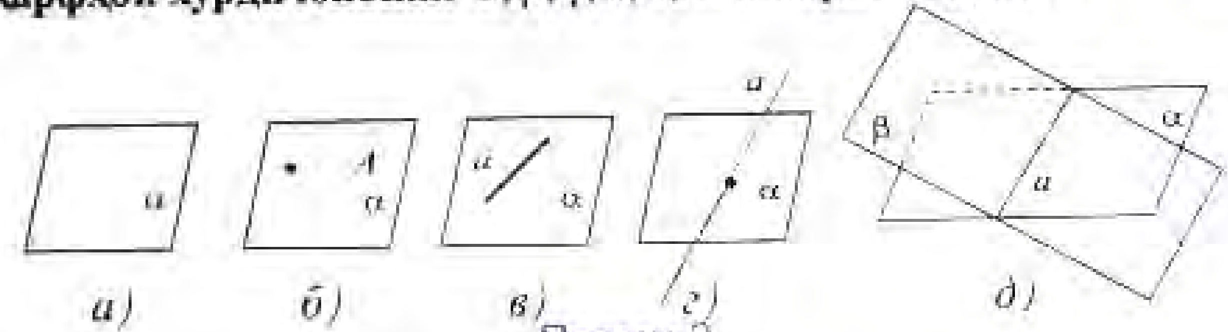
Ҳанӯз ба омӯзиши хосиятҳои фигураҳои геометрӣ шурӯъ накарда бошем ҳам, аммо, масалан, чӣ будани куб ё кураро нағз тасаввур карда метавонем. Вале дар геометрия доир ба фигура танҳо ҳамон вақт сухан рондан мумкин аст, агар таърифи он дода шуда бошад. Моҳияти ҳар гуна таъриф, чӣ тавре маълум аст, аз он иборат мебошад, ки мафҳуми муайяншаванда (масалан, квадрат) бо ёрии мафҳуми аллакай муайян буда (масалан, ромб ё росткунҷа) тавсиф карда мешавад. Дар навбати худ мафҳуми «аллакай муайянбуда» бояд бо ёрии мафҳумҳои аз он пеш муайян кардашуда тавсиф шавад (масалан, ромб бо ёрии параллелограмм) ва ҳоказо. Аммо миқдори фигураҳои геометрӣ беохир нест. Бинобар ин охири охирон мо ба ҳолате дучор меоем, ки фигураи ба он ҳаволашаванда (такяшаванда) вуҷуд надорад.

Барои ҳамин маҷбурем, баъзе фигураҳоро бетаъриф қабул намоем.

Мафҳумҳое, ки ин фигураҳоро ифода мекунанд (чун қоида соддатаринашонро), дар геометрия мафҳумҳои асосӣ меноманд. Ин мафҳумҳо бетаъриф оварда (муоина) мешаванд, вале аз ҳаёти ҳаррӯза ҳамаи мо доир ба онҳо тасаввуроти аниқ дорем.

Мафҳумҳои (фигураҳои) асосии (ибтидоии) стереометрия нуқта, хати рост ва ҳамворӣ мебошанд. Сакочаи ниҳоят хурд доир ба нуқта, риштаи таранг кашидашуда доир ба хати рост, сатҳи миз, деворҳо ё оби кӯл доир ба қисми ҳамворӣ тасаввурот дода метавонанд. Вале ин тасаввурот пурра нест, чунки ҳамаи ҷисмҳои воқеъӣ мумкин андозаҳои хеле калон, вале охирнок доранд. Масалан, ҳар гуна қисми девор сеченака аст: дарозӣ, бар ва баландӣ дорад.

Дар стереометрия хати рост ва ҳамворӣ аз нуқтаҳо иборатанд ва андозаҳои охирнок (дарозӣ ё бар) надоранд. Онҳоро дар ҳамаи самтҳо (хати ростро дар ду самт) ҳамчун беохир тӯл кашида тасаввур кардан мумкин аст. Бар хилофи планиметрия, ки як ҳамворӣ дошт ва ҳамаи фигураҳо дар ҳамин ҳамворӣ ҷойгир буданд, дар стереометрия бо ҳамвориҳои гуногун сару кор доштан лозим меояд. Дар расм мо танҳо қисми ҳамвориро, чун қоида дар шакли параллелограмм (расми 2, *а*) тасвир карда, онро ба ҳама тараф номаҳдуд давом додашуда тасаввур мекунем. Қарор медиҳем, ки нуқтаҳоро бо ҳарфҳои калони лотинии $A, B, C, \ldots$; хатҳои ростро бо ҳарфҳои хурди лотинии $a, b, c, \ldots$ (баъзан бо ду ҳарфи калони лотинӣ, ки нуқтаҳои хати ростанд); ҳамвориҳоро бо ҳарфҳои хурди юнонии $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ ишорат мекунем.



а) б) в) г) д)

Расми 2

Стереометрия хосиятҳои фигураҳоеро, ки аз нуқтаҳо, хатҳои рост ва ҳамвориҳо дар фазо иборатанд омӯхта, чунин калимаҳо ба монанди «параллеланд», «перпендикуляранд», «ҷойгиранд», «мегузаранд», «мебуранд», «баробаранд», ва ғайраро истифода мекунанд. Ин калимаҳо муносибатҳоро дар байни фигураҳо ифода менамоянд.

Фаҳмост, ки ба ҳар муносибат низ бояд таъриф дода шавад. Ваъз дар ин ҷо ҳам айнан мисли ҳолати таърифи фигураҳои геометрӣ мебошад: муносибатҳое пайдо меша-

ванд, ки онхоро таъриф додан номумкин аст ва маҷбурем баъзе муносибатҳоро бе таъриф қабул намоем.

Муносибатҳои «ҷойгир будан», «бурида шудан», «баробар будан», «тааллуқ доштан», низ мафҳумҳои асосии стереометрия ҳисоб мешаванд. Онҳо зоҳиран айнан фаҳмо ҳисоб карда мешаванд, бинобар ин таъриф надоранд, яъне мафҳумҳои ибтидоианд.

Агар нуқтаи A ба ҳамвории α тааллуқ дошта бошад (расми 2, *б*), он гоҳ мегӯянд, ки ҳамвории α аз рӯи нуқтаи A мегузарад ва рамзӣ менависанд: $A \in \alpha$. Навиштаҷоти $A \notin \alpha$ нишон медиҳад, ки нуқтаи A ба ҳамвории α тааллуқ надорад.

Агар ҳар як нуқтаи хати рости a ба ҳамвории α тааллук дошта бошад (расми 2, *в*), он гоҳ мегӯянд, ки хати рост дар ҳамворӣ ҷойгир аст ва $a \subset \alpha$ менависанд. Навиштаҷоти $a \not\subset \alpha$ маънои онро дорад, ки хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир нест, яъне ақаллан як нуқтаи хати рост ба ҳамворӣ тааллуқ надорад.

Агар хати рости a ва ҳамвории α танҳо якто нуқтаи умумӣ дошта бошанд (расми 2, *г*), он гоҳ мегӯянд, ки ин хати рост ҳамвориро мебурад.

Агар хати рости a ба ду ҳамвории гуногун α ва β таалуқ дошта бошад, (расми 2, *д*) он гоҳ мегӯянд, ки ин ҳамвориҳо аз рӯи хати рости a бурида мешавад (ҳамдигарро мебуранд).

Оянда дар расмҳо қисми хати рост ё ҳамворӣ, ки ба чашм аён нест, бо хати рах-рах ифода карда мешавад (ниг. ба расми 2, *г*) ё *д*)).

Саволхо

1. Мафҳумҳои асосии планиметрияро номбар кунед. 2. Мафҳумҳои асосии стереометрияро як-як хотирнишон намоед. 3. Стереометрия чиро меомӯзад? 4. Сеченака будани фазоамонро чӣ тавр фаҳмондан мумкин аст? 5. Муносибатҳои ибтидоии стереометрияро номбар намоед.

1. Кадоме аз ин фигураҳо ё ҷисмҳо дар ҳамворӣ ҷойгир нестанд: секунҷа, миз, порча, давра, параллелепипед, китоб, доира, кура, куб, квадрат, телевизор, трапетсия?

2. Ҳамвории α-и дорои нуқтаи B-ро тасвир кунед. Инро бо истифодаи рамзи тааллуқ доштан нависед.

3. Хати рости b дар ҳамвории β ҷойгир аст. Инро рамзӣ нависед.
4. Хати рост ҳамвориро дар нуқта мебурад. Нақшаи мувофиқро кашида, онро рамзӣ нависед.
5. Маълум, ки ду нуқтаи хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир аст. Доир ба ин хати рост чӣ гуфтан мумкин аст? Нақшаи мувофиқро кашед.
6. Ду ҳамворӣ ду нуқтаи умумӣ доранд. Доир ба хати росте, ки ин нуқтаҳоро пайваст мекунад чӣ гуфтан мумкин аст? Нақшаи мувофиқро кашед.
7. Рӯяи параллелепипед ҳамворӣ шуда метавонад? Қисми ҳамворӣ чӣ?
8. Ҳамворӣ фазоро ба чанд қисм ҷудо мекунад?
9. Ду ҳамворие, ки ҳамдигарро мебуранд, фазоро ба чанд қисм ҷудо менамоянд?

Масъалаҳо барои такрор

10. Нуқтаҳои A, B, C дар як хати рост ҷойгиранд. Дарозии порчаи BC-ро ёбед, агар $AB=3,2м$, $AC=4,4м$ бошад. Масъала чандто ҳал дорад?
11. Чорто хатҳои рости a, b, c, d дода шудаанд. Маълум, ки хатҳои a, b, c дар як нуқта бурида мешаванд. Хатҳои b, c, d низ дар як нуқта бурида мешаванд. Исбот кунед, ки ҳамаи чор хатҳои рости додашуда аз рӯи як нуқта мегузаранд.
12. Кунҷҳои назди асоси секунҷаи баробарпаҳлу α чунинанд, ки $tg\alpha=4$ аст. Масоҳати ин секунҷа $25см^2$ мебошад. Дарозии асоси ин секунҷаро ёбед.
13. Хати миёнаи трапетсияи баробарпаҳлу, ки дар атрофи доира кашида шудааст, ба $68см$ баробар аст. Радиуси ин доираро ёбед, агар асоси поёнии трапетсия аз асоси болоиаш $64см$ зиёд бошад.

2. Аксиомаҳои стереометрия ва алоқаи онҳо бо аксиомаҳои планиметрия.

Натиҷаҳо аз аксиомаҳои стереометрия

I. Мисли планиметрия дар стереометрия ҳам хосиятҳои фигураҳои геометрӣ бо тарзи исбот кардани тасдиқотҳои ба онҳо мувофиқ (теоремаҳо) муқаррар карда мешаванд. Ҳар гуна исбот бошад аз муҳокимаронихое иборат аст, ки онҳо тасдиқоти навро ба тасдиқоти аллакай исботшуда меоранд. Барои ҳамин дар ин ҷо ҳам вазъият айнан ҳолати таърифи мафҳумҳои геометриро мемонад: мо ба тасдиқоти аввалине меоем, ки онҳоро исбот кардан мумкин нест, чунки ҳангоми исботи онҳо чизе нест, ки ба он истинод (такя) намоем.

Чунин тасдиқоти аввалин (чун қоида ниҳоят содда) аксиомаҳо ном доранд ва дурустии онҳо бе исбот қабул карда мешавад. Дар геометрия ба сифати аксиомаҳо тасдиқоте қабул карда мешаванд, ки онҳо ба фигураҳои асосии геометрӣ хосанд ва барои мушоҳидакунанда амалан возеҳанд.

Чи тавре дар пункти 1 қайд кардем, фигураҳои асосӣ дар фазо нуқта, хати рост ва ҳамворӣ мебошанд. Аксиомаҳоеро, ки хосиятҳои асосии нуқта ва хати ростро дар як ҳамворӣ ифода мекарданд, ҳангоми ба омӯзиши планиметрия шурӯъ намудан дохил карда будем. Дар фазо дохил кардани фигураи нави асосӣ – ҳамворӣ васеъ кардани ин аксиомаҳоро талаб мекунад. Ин аксиомаҳо хосиятҳои ҳамвориҳо, алоқамандии онҳоро бо ду фигураи дигари асосии стереометрия – нуқта ва хати рост ифода менамоянд. Ин аксиомаҳо инҳоанд:

$С_1$. Ҳамворӣ чи хеле ки набошад, нуқтаҳое ҳастанд, ки ба ин ҳамворӣ тааллуқ доранд ва нуқтаҳое ҳастанд, ки ба он тааллуқ надоранд (расми 3).

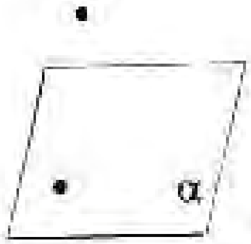
$С_2$. Се нуқтаи дар як хати рост ҷойгир набуда, ҳамвориро яккимата муайян мекунанд (расми 4).

Мазмуни ин аксиома аз он иборат аст, ки агар мо се нуқтаи дар як хати рост ҷойгир набударо дошта бошем, он гоҳ аз рӯи онҳо ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст ва фақат якто. Агар ин нуқтаҳо дар як хати рост ҷойгир бошанд он гоҳ аз болои онҳо миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст. Алалхусус, аз рӯи хати рости додашуда миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст. Ин вазъиятро дар мисоли китоб ё дафтар, ки ҳар як вараҷи онҳо қисми ҳамворӣ аст, мушоҳида кардан мумкин аст.

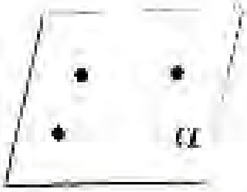
$С_3$. Ҳамвории бо хати рост ду нуқтаи умумӣ дошта, тамоми хати ростро дар бар мегирад (расми 5).

Ин аксиома тасдиқ менамояд, ки агар ду нуқтаи хати рост ба ҳамворӣ тааллуқ дошта бошанд, он гоҳ ҳар як нуқтаи ин хати рост дар ҳамворӣ мехобад. Ҳамин тариқ, барои нишон додани он ки хати рост дар ҳамворӣ ҷойгир аст, кифоя аст, нишон диҳем, ки ду нуқтаи он ба ин ҳамворӣ тааллуқ дорад.

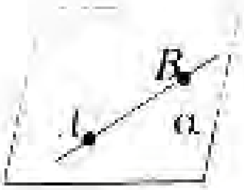
C_4. Буриши ду ҳамвории ҳамдигарро буранда хати рост аст (расми 6).



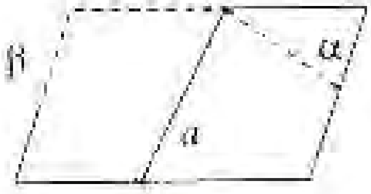
Расми 3



Расми 4



Расми 5



Расми 6

Яъне, агар ду ҳамворӣ якто нуқтаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ онҳо хати рости умумиро доранд ва ҳар гуна нуқтаи ба ҳарду ҳамворӣ тааллуқ дошта дар ин хати рост ҷойгир аст.

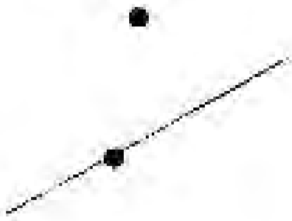
Аксиомаҳои C_1 – C_4 танҳо бо ҳамвориҳо марбутанд. Ба онҳо бояд аксиомаҳо дар бораи хатҳои рост, ки ба аксиомаҳои мувофиқи планиметрия монанданд (шабеҳанд), илова карда шаванд. Аксиомаҳои C_1 – C_4 дар якҷоягӣ бо ин аксиомаҳо *системаи аксиомаҳои* стереометрияро ташкил медиҳанд. Барои пуррагии баён ин аксиомаҳоро ба назардошти он ки хати рост фигураи фазоӣ аст меорем.

P_1. Хати рост чи хеле ки набошад, нуқтаҳое ҳастанд, ки ба ин хати рост тааллуқ доранд ва нуқтаҳое ҳастанд, ки ба он тааллуқ надоранд.

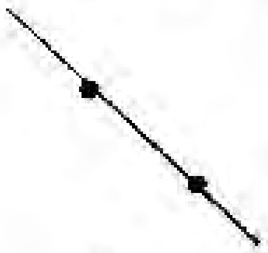
P_2. Аз рӯи ду нуқтаи дилхоҳ хати рост гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.

Дар ин ду аксиома сухан на дар бораи нуқтаҳои ҳамвории мушаххас, чи тавре ки дар планиметрия буд, балки дар бораи хатҳои рост ва нуқтаҳои фазо меравад. Масалан, дар аксиомаи P_2 нуқтаҳо дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгир

шуда метавонанд. Мазмуни ин ду аксиома дар расмҳои 7 ва 8 акс ёфтаанд. Чи тавре дида мешавад аксиомаи C_1 ба аксиомаи P_1 ва C_2 ба P_2 монанд аст. Дар C_1 хати рост ба ҳамворӣ ва дар C_2 ду нуқтаи дар P_2 буда ба се нуқтаи дар як хати рост вокеъ набуда иваз карда шудаанд.



Расми 7

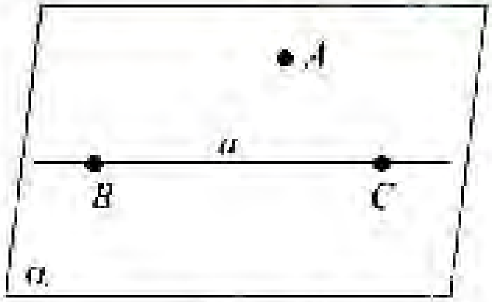


Расми 8

Дар оянда тасвияи дигар аксиомаҳои планиметрия дар ҷои зарурӣ бо назардошти фазо муҳокима шуда, баъд истифодаи онҳо нишон дода хоҳад шуд. Масалан, ниг. ба саҳ. 28 - 29.

II. Аксиомаҳои $C_1 – C_4$ имконият медиҳанд, ки дар фазо *сохтанҳо* иҷро карда шаванд. Ин сохтанҳо аз гузаронидани ҳамвориҳо иборат аст. Аксиомаи C_2 тасдиқ мекунад, ки се нуқтаи дар хати рост нахобида ҳамвориро яккимата муайян мекунад. Пурсида мешавад, боз чӣ тавр (бо ёрии фигураҳои соддатарин – хати рост ва нуқта) ҳамвориро яккимата муайян кардан (додан) мумкин аст? Ҷавобҳоро дар шакли теоремаҳо меорем.

Теоремаи 1. Аз рӯи хати рост ва нуқтаи дар он ҷойгир набуда ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.

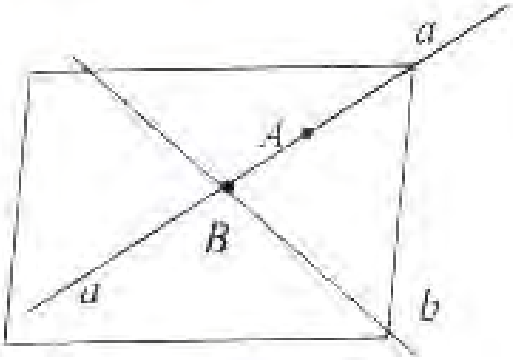


Расми 9

Исбот. Бигзор *a* хати рости додашуда, *A* нуқтаи дар *a* ҷойгир набуда мебошанд. Нуқтаҳои *B* ва *C*-ро, ки ба *a* тааллуқ доранд мегирем (расми 9). Нуқтаҳои *A*, *B*, *C*, ки дар як хати рост намехобанд, мувофиқи аксиомаи C_2 ҳамвории *α*-ро муайян мекунанд. Ин ҳамворӣ нуқтаҳои *B* ва *C*-и хати *a*-ро дар бар мегирад. Пас мувофиқи аксиомаи C_3 хати рости *a* дар ҳамвории *α* ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, хати рости *a* ва нуқтаи дар он нахобидаи *A* ҳамвории *α*-ро муайян мекунанд. Ягона будани ин ҳамворӣ аз аксиомаи C_2 бармеояд. Теорема исбот шуд.

Эзоҳи 1. Аз рӯи ду нуқта ё якчанд нуқтаи дар як хати рост ҷойгир буда ва ё як хати рост миқдори зиёди (беоҳири) ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст (ниг. ба шарҳи аксиомаи C_2). Кифоя аст дурустии ин тасдиқро дар мисоли хати рости a нишон диҳем. Берун аз ин хат нуқтаи A-ро интихоб мекунем (аксиомаи P_1) ва ба хати росту ин нуқта теоремаи 1-ро татбиқ менамоем. Ҳамвории α-ро ҳосил мекунем, ки аз рӯи ин хати рост мегузарад. Барои нишон додани мавҷудияти дигар ҳамвории аз рӯи ин хат мегузаштагӣ, боз берун аз ҳамвории α нуқтаи C-ро мегирем (аксиомаи C_1). Нуқтаи C дар хати рости a ҷойгир нест, бинобар ин мувофиқи теоремаи 1 аз рӯи онҳо ҳамвории β-ро мегузаронем. Ҳамвории α ва β гуногунанд, чунки нуқтаи C-и ҳамвории β дар ҳамвории α ҷойгир нест. Ҳар дуи ин ҳамвориҳо аз рӯи хати рости a мегузаранд. Сабаби беоҳир будани миқдори чунин ҳамвориҳо ихтиёрӣ будани интихоби нуқтаи $C \notin \alpha$ мебошад.

Теоремаи 2. Аз рӯи ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.



Расми 10

Исбот. Бигузор a ва b ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ ва A нуқтаест, ки дар a ҷойгир буда, ба b тааллуқ надорад (расми 10). Мувофиқи теоремаи 1 хати b ва нуқтаи A ҳамвории α-ро яккимата муайян мекунанд.

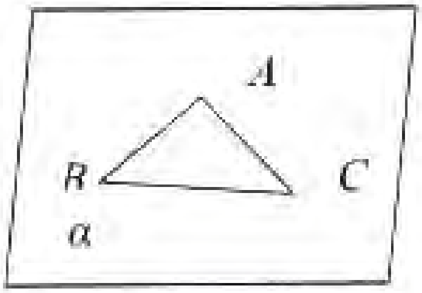
Аз сабаби он ки b дар α ҷойгир аст, нуқтаи буриши ин хатҳо B низ ба α мутааллиқ аст. Нуқтаҳои A ва B-и хати a дар α ҷойгиранд, пас мувофиқи аксиомаи C_3 ҳамвории α ин хатро дар бар мегирад. Инак, α ҳамвории ягонаи матлуб аст. Теорема исбот шудааст.

Мо ба саволи (пеш аз баёни шарти теоремаи 1) гузоштаамон ҷавоб ҳосил кардем. Ҳамвориро бо: 1) се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирнабуда (аксиомаи C_2); 2) хати рост ва нуқтаи дар он ҷойгирнабуда (теоремаи 1); 3) бо ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ (теоремаи 2)

яккимата муайян кардан мумкин аст. Аз рӯи хати рост ё се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирбуда миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст.

Эзоҳи 2. Ҳангоми исботи теоремаҳои 1 ва 2 аксиомаи C_1 истифода нашудааст. Пурсида мешавад, ки мумкин ин аксиома лозим нест? Амалан, аксиомаи C_1 қатъиян муҳимтарин аксиомаи фазогӣ мебошад: маҳз аз он дар фазо мавҷудияти ҳамвориҳо ва хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагӣ, инчунин дигар фигураҳои дар як ҳамворӣ ҷойгир набудагӣ бармеоянд. Аксиомаи C_1-ро мо барои нишон додани дурустии тасдиқоти дар эзоҳи 1 буда истифода кардаем.

Масъалаи 1. Нишон медиҳем, ки тарафҳои секунҷа дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.



Расми 11

Ҳал. Бигузор секунҷаи ABC дода шудааст (расми 11). Тарафҳои AB ва AC хатҳои ҳамдигарро мебуридагианд. Пас мувофиқи теоремаи 2 аз рӯи онҳо якто ҳамвории α-ро гузаронидан мумкин аст.

Ду нуқтаи тарафи BC дар ҳамвории α ҷойгир аст. Пас мувофиқи аксиомаи C_3 тарафи BC дар α ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, ҳар се тарафи секунҷа дар як ҳамворӣ мехобанд.

Масъалаи 2. Маълум, ки чор нуқта дар як ҳамворӣ намехобанд. Муайян мекунем, ки сетои дилхоҳи онҳо дар як хати рост ҷойгир шуда метавонанд ё на?

Ҳал. Фарз мекунем, ки сетои онҳо дар як хати рост ҷойгиранд. Агар нуқтаи чорум низ дар ин хати рост хобад, он гоҳ аз рӯи онҳо миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст. Ин бошад ба шарти масъала зид аст. Рафту нуқтаи чорум дар ин хати рост нахобад, он гоҳ мувофиқи теоремаи 1 ягона ҳамворие гузаронидан мумкин, ки ин хати рост ва ин нуқтаро, яъне ҳар чор нуқтаро, дар бар мегирад. Боз зиддият ба шарти масъала ҳосил шуд.

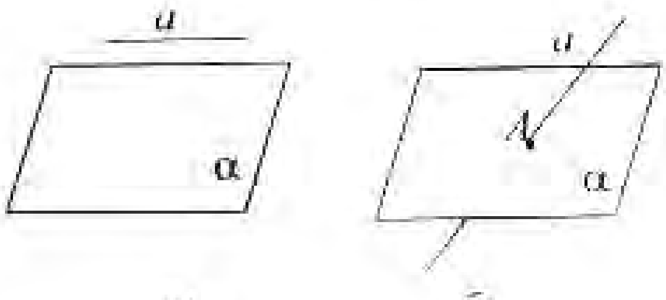
Ҷавоб. На.

Масъалаи 3. Нишон медиҳем, ки агар хатҳои рости AB ва CD дар як ҳамворӣ ҷойгир набошанд, он гоҳ хатҳои рости AC ва BD низ дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

Ҳал. Фарз мекунем, ки тасдиқ нодуруст аст ва хатҳои рости AC ва BD дар як ҳамвории α ҷойгиранд. Аз ин бармеояд, ки нуқтаҳои A, B, C, D дар α ҷойгиранд. Ба хатҳои рости AB ва CD аксиомаи C_3-ро татбиқ намуда ҳосил мекунем, ки онҳо дар ҳамвории α, яъне дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Ин бошад ба шарти масъала зид аст.

III. Акнун маълумоти аввалиро нисбати ҷойгиршавии байниҳамдигарии фигураҳои асосии (ибтидоии) стереометрия – нуқта, хати рост ва ҳамворӣ меорем (Дар ин бора дар дарсҳои оянда маълумоти муфассал оварда мешавад). Чи тавре аллакай қайд шуд, ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду ҳамвориҳои гуногун бо аксиомаи C_4 муайян карда мешавад: агар ин ҳамвориҳо нуқтаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ аз рӯи хати росте, ки ин нуқтаро дар бар мегирад, бурида мешаванд. Дар ин ҳолат онҳо бо ҳамдигар буридашаванда (ё кӯтоҳ буридашаванда) номида мешаванд. Мисоли чунин ҳамвориҳо ҳамвориҳое, ки онҳоро ҳангоми асоснок кардани тасдиқи дар эзоҳи 1 буда сохтем, шуда метавонанд. Баъд, аз аксиомаҳои P_1 ва P_2 бармеояд, ки барои ҳар гуна хати рост дар фазо хати рости онро мебуридагӣ вуҷуд дорад.

Ҳамин тариқ, ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост (ду ҳамворӣ) чунин аст: Ду хати рости (ҳамвории) гуногун ё нуқтаи умумӣ надоранд, ё дар як нуқта (аз рӯи як хати рост) ҳамдигарро мебуранд.



а) б)

Расми 12

Нисбати ҷойгиршавии байниҳамдигарии нуқта ва хати рост бошад, ду имконият вуҷуд дорад: Ё нуқта ба хати рост тааллуқ дорад, ё ба он тааллуқ надорад. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии нуқта ва ҳамворӣ ҳам айнан ҳамин тавр аст. Ба масъалаи ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамворӣ дар фазо аксиомаи C_3 ҷавоби пурра медиҳад: Ҳамворӣ ва хати рости дар он ҷойгир набуда ё ҳамдигарро намебуранд, ё дар як нуқта бурида мешаванд (расми 12).

1. Аксиомаҳои стереометриро баён карда, онҳоро шарҳ диҳед. 2. Теоремаро доир ба хати рост ва нуқта баён кунед (теоремаи 1). Ҳангоми исботи ин теорема кадом аксиомаҳо истифода мешаванд? 3. Аз рӯи ду нуқта ё якчанд нуқтаи дар як хати рост ҷойгирбуда ва ё як хати рост чандто ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст? 4. Исбот кунед, ки ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ ҳамвориро яккимата муайян мекунанд (теоремаи 2). Боз бо кадом тарзҳо ҳамвориро яккимата муайян кардан мумкин аст? 5. Вазъияти ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост ва ду ҳамворӣ чӣ гуна аст? 6. Кадом аксиома доир ба ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамворӣ ҷавоб медиҳад?

14. Исбот кунед, ки аз рӯи нуктаи додашуда хамворӣ гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол на якто.

15. Исбот намоед, ки барои хар гуна хати рост дар фазо хати рости онро мебуридагӣ мавчуд аст.

16. Барои хар гуна ҳамворӣ дар фазо хати рости онро мебуридагӣ мавчуд аст. Инро исбот намоед.

17. Барои ҳар гуна хати рост дар фазо ҳамвории онро мебуридагӣ мавчуд аст. Инро исбот кунед.

18. Исбот кунед, ки барои хар гуна хамворӣ дар фазо ҳамвории онро мебуридагӣ мавчуд мебошад.

19. Дар фазо нуктаҳои A ва B дода шудаанд. Хати ростеро, ки аз рӯи онҳо мегузарад созед.

20. Маълум, ки хамвориҳои α ва β хамдигарро мебуранд. Хати буриши онҳоро созед.

21. Нуктаҳои A. B. C дар хар як ду хамвории гуногун ҷойгиранд. Исбот кунед, ки ин нуқтаҳо дар як хати рост ҷойгиранд.

22. Тарафи BC-и секунчаи ABC дар хамвории α ҷойгир аст. M ва N мувофикан нуқтаҳои тарафҳои AB ва AC мебошанд. Нишон дихед, ки агар M дар α ҷойгир набошад, он гох N низ дар α ҷойгир нест.

23. Исбот кунед, ки аз рӯи нуктаи буриши ду хати рости додашуда, хати рости сеюмро гузаронидан мумкин аст, ки бо онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

24. Се хамвории чуфт-чуфти бо ҳамдигар буридашаванда дода шудааст. Исбот кунед, ки агар ду хати буриши ин ҳамвориҳо бурида шаванд, он гоҳ хати сеюми буриш аз нуқтаи буриши онҳо мегузарад.

25. Нуқтаҳои A, B, C ва D, ки дар як ҳамворӣ воқеъ нестанд, дода шудаанд. Чандто ҳамвориҳои гуногунро, ки аз рӯи сетои ин нуқтаҳо мегузаранд, сохтан мумкин аст?

26. Чор нуқта дода шудааст. Исбот кунед, ки хати рости аз рӯи ду нуқтаи дилхоҳи онҳо мегузаштагӣ бо хати росте, ки аз рӯи ду нуқтаи дигараш мегузарад, буриш надорад.

27. Исбот намоед, ки дар фазо се нуқтае вуҷуд дорад, ки онҳо дар як хати рост ҷойгир нестанд.

28.* Исбот кунед, ки дар фазо чор нуқтае мавҷуд ҳаст, ки онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

29. Порчаҳои AB, BC, CD, DA дода шудаанд. Дар айни ҳол M нуқтаи буриши порчаҳои AC ва BD аст. Нишон диҳед, ки порчаҳои додашуда дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

30. Нуқтаҳои A, B, C дар як хати рост ҷойгир нестанд. Нуқтаҳои D ва E мувофиқан миёнаҷои порчаҳои AC ва BC мебошанд. Исбот кунед, ки нуқтаҳои: 1) A, B, D; 2) C, D, E; 3) A, D, E дар як хати рост ҷойгир нестанд.

31. Маълум, ки нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Исбот кунед, ки хатҳои рости AB ва CD ҳамдигарро намебуранд.

32.* Нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Нуқтаҳои K ва M мувофиқан миёнаҷои порчаҳои AC ва BC мебошанд. Исбот кунед, ки хатҳои рости: 1) AC ва DK; 2) BD ва KM; 3) AD ва KM ҳамдигарро намебуранд.

33. Исбот кунед, ки дар фазо ду хати росте мавҷуданд, ки онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

34.* Хати рост дар ҳамворӣ ҷойгир аст. Исбот кунед, ки чунин нуқтаҳои ҳамворӣ мавҷуданд, ки онҳо ба хати рост тааллуқ надоранд.

35. Ҳамвории α фазоро ба ду нимфазо ин тавр ҷудо мекунад: нуқтаи $A\notin\alpha$-ро интихоб мекунем. Ҳамаи нуқтаҳои X-и фазоро, ки барояшон хати рости AX ҳамвориро намебу-рад, ба нимфазои якум мансуб ҳисоб менамоем. Рафту агар хати рости AX α-ро бурад, он гоҳ ба нимфазои ду-юм. Исбот кунед, ки агар ду нуқта ба як зерфазо тааллуқ дошта бошад, он гоҳ порчаи онҳоро пайвасткунанда

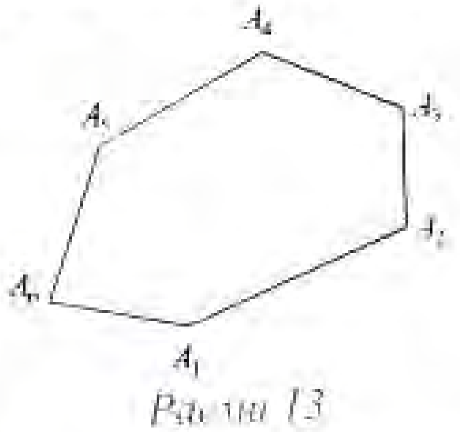
ҳамвории α-ро намебурад. Рафту агар нуқтаҳо ба зерфазоҳои гуногун тааллуқ дошта бошанд, он гоҳ ин порча ҳамвории α-ро мебурад.

Масъалаҳо барои такрор

36. Магар дар секунҷа медиана аз маркази давраи берункашидаи секунҷа мегузарад?
37. Исбот кунед, ки баландиҳои секунҷа h_a, h_b, h_c ва радиуси давраи дарункашидаи он r нобаробарии $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ – ро қаноат мекунонанд.
38. Исбот кунед, ки агар A, B кунҷҳои тези $\triangle ABC$ ва $\sin A \sin B > \frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ кунҷи C ҳам тез аст.
39. Яке аз кунҷҳои секунҷаи росткунҷа ба миёнаи арифметикии ду кунҷи дигар баробар аст. Катетҳои секунҷаро ёбед, агар гипотенузаи он c бошад.
40. Магар дар секунҷа ҳамеша дуто: а) баландӣ; б) медиана; в) биссектриса ҳамдигарро мебуранд?

3. Мисолҳои фигураҳои фазогӣ. Буришҳо

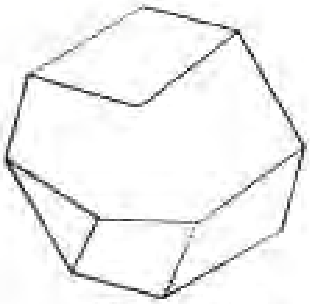
Чи тавре медонем бисёркунҷаҳо, ки қисми ҳамвории бо порчаҳои хатҳои рост маҳдудгашта мебошанд, фигураҳои оддитарини планиметрия ҳастанд. Дар ин ҷо талаб карда мешавад, ки ин порчаҳои хатҳои рост ҳамдигарро намебуранд (расми 13). Масалан, секунҷа ва параллелограмм бисёркунҷа мебошанд.



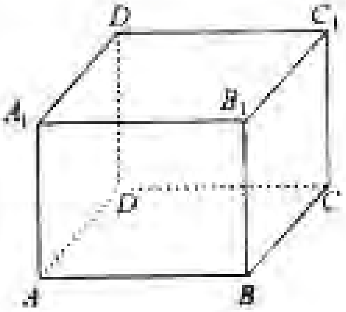
Расми 13

Дар стереометрия фигураҳо дар фазо омӯхта мешаванд, ки онҳо ҷисмҳо ном доранд. Айёнӣ ҷисми геометриро ҳамчун қисми фазои бо ҷисми физикавӣ ҷудо карда шуда ва сатҳи маҳдуд дошта тасаввур кардан мумкин аст. Мисли бисёркунҷаҳо дар ҳамворӣ фигураҳои оддитарин дар фазо бисёррӯяҳо мебошанд, ки сатҳи онҳо аз миқдори охирноки бисёркунҷаҳо иборат аст (расми 14). Шаклҳои бисёррӯя доштаро мо ҳар замон дида меистем: қуттии гугирд, хона, китоб, бинои бисёрошёна мисоли бисёррӯяҳоанд. Пирамидаҳои Миср ё бурҷҳои Кремли Маскав низ мисоли бисёррӯяҳо мебошанд.

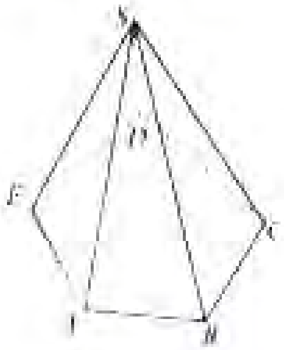
Аз миқдори зиёди бисёррӯяҳои гуногуншакл ҳоло танҳо бо мақсади васеъ кардани доираи масъалаҳое, ки мо дар оянда бо онҳо сару кор хоҳем дошт, баъзе маълумотҳои ибтидоиро нисбати параллелепипед (расми 15) ва пирамида (расми 16) меорем.



Расми 14



Расми 15



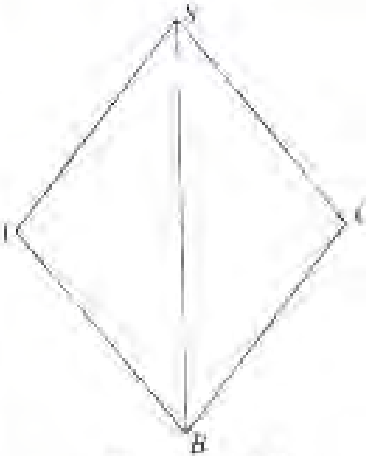
Расми 16

(Дар ин ҷо қайд кардан зарур медонем, ки ҷисмҳои геометрӣ, ки мо онҳоро дар синфи 11 муфассал хоҳем омӯхт, танҳо бо бисёррӯяҳо маҳдуд намегарданд, балки ҷисмҳои чархзаниро низ дар бар мегиранд).

Ҳамин тариқ, бисёррӯя ҷисмест, ки сатҳи он аз шумораи охирноки бисёркунҷаҳо иборат аст. Агар бисёррӯя дар як тарафи ҳамвории ҳар як бисёркунҷаи ҳамвори дар сатҳи он буда ҷойгир бошад, вай барҷаста ном дорад. Қисми умумии ин ҳамворӣ ва сатҳи бисёррӯяи барҷаста рӯя номида мешавад. Тарафи рӯяҳо теғаҳо, қуллаи рӯяҳо қуллаҳои бисёррӯя ном доранд.

Параллелепипед бисёррӯяест, ки рӯяҳоаш аз параллелограммҳо иборат аст (расми 15). Параллелепипед 6 рӯя, 12 теға ва 8 қулла дорад. Агар ҳамаи рӯяҳо росткунҷа бошанд, он гоҳ параллелепипед параллелепипеди росткунҷа номида мешавад. Агар дар параллелепипеди росткунҷа ҳамаи теғаҳои паҳлуӣ баробар бошанд, вай куб ном дорад. Дар расми 15 параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ оварда шудааст ($ABB_1A_1, ADD_1A_1,...$- рӯяҳо: $AA_1, BB_1,...$-теғаҳо; $A.A_1,...$-қуллаҳо). Қуттиҳои ҳархела, хонаҳо, биноҳо ва ғайра мисолҳои параллелепипеди росткунҷаанд.

Бисёррӯяе, ки дар натиҷаи нуқтаи додашударо бо нуқтаҳои бисёркунҷаи ҳамвор пайваст кардан ҳосил мешавад, пирамида ном дорад. Нуқтаи додашуда қуллаи пирамида, бисёркунҷаи ҳамвор асоси пирамида номида мешавад. Сатҳи пирамида аз асос ва рӯяҳои паҳлуӣ, ки секунҷаҳоанд, иборат аст. Хатҳое, ки қуллаи пирамидаро бо қуллаҳои асос пайваст мекунанд, тегаҳои паҳлуӣ ном доранд. Агар асоси пирамида *n*-кунҷа бошад, пирамидаро пирамидаи *n*-кунҷа меноманд. Дар расми 16 пирамидаи 5-кунҷа тасвир шудааст. Панҷкунҷаи $ABCDE$ асос, S қулла, SA, $SB,\dots,SE$ тегаҳои паҳлуии он аст. Рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои ASB, $BSC,\dots$, ESA мебошанд. Агар асоси пирамида секунҷа бошад, онро тетраэдр мегӯянд (аз ду калимаи юнонии *tetra* – чор ва *hedra* – асос, рӯя тартиб дода шуда, маъноаш чоррӯя аст). Тетраэдр дорои 4 рӯя ва 6 тегаю 4 қулла мебошад (расми 17). Агар ҳамаи тегаҳо баробар бошанд, он гоҳ тетраэдрро тетраэдри мунтазам меноманд.



Расми 17

Акнун мафҳуми буриши бисёррӯяро бо ҳамворӣ дар фазо муайян мекунем. Бигузор ҳамвории α дода шудаст. Ин ҳамворӣ фазоро ба ду нимфазо, бо ҳамон маъное, ки дар шарти масъалаи 35 оварда шудааст, ҷудо менамояд.

Таъриф. Агар ақаллан ду нуқтаҳои бисёррӯя дар нимфазоҳои гуногун ҷойгир бошанд, он гоҳ мегӯянд, ки ҳамвории α бисёррӯяро мебурад. Дар ин ҳолат α ҳамвории буранда ном дорад. Фигурае, ки ҳар як нуқтаи он ба бисёррӯя ва ҳамвории буранда тааллуқ дорад, буриши бисёррӯя бо ҳамвории α ё кӯтоҳ буриш номида мешавад.

Ду масъалаи бо буришҳо алоқаманд бударо ҳал мекунем.

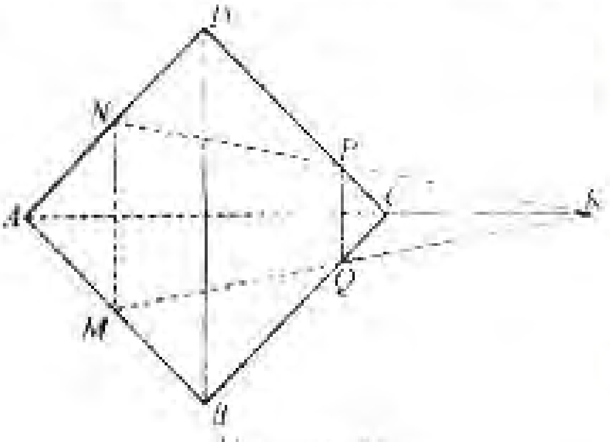
Масъалаи 1. Буриши параллелепипеди $ABCDA\,B\,C\,D$-ро бо ҳамворӣ, ки аз миёначои тегаҳои AB, BC ва DD мегузарад месозем.

Ҳал. Миёначои тегаҳоро бо E,U,G ишорат менамоем. Ин нуқтаҳо дар як хати рост ҷойгир нестанд. Мувофиқи теоремаи 2 аз рӯи онҳо якто ҳамвории α мегузарад (расми 18). Нуқтаҳои E,U ба ҳамвории ABC ва ҳамвории бурандаи α

тааллуқ доранд. Пас, тамоми хати рости EU ба α тааллуқ дорад, яъне EU хати буриши α бо ҳамвории ABC аст. Баъд, ҳамвории аз рӯи нуқтаҳои G, D, E мегузаштагиро дида мебароем. Ин ҳамворӣ ҳамвории α-ро аз рӯи хати рости GE мебурад. Порчаи GE қисми умумии ин ду ҳамворӣ ва параллелепипед мебошад. Нисбати нуқтаҳои D, G, U низ ҳамин тавр мулоҳиза ронда, ҳосил мекунем, ки секунҷаи EUG буриши матлуб аст. Масъала ҳал шуд.

Масъалаи 2. Дар тегаҳои AB, AD, CD-и тетраэдри $ABCD$ мувофиқан нуқтаҳои M, N, P чунон гирифта шудаанд, ки хатҳои рости NP ва AC параллел нестанд (расми 19). Буриши ин тетраэдрро бо ҳамворие, ки аз рӯи ин се нуқта мегузарад месозем.

Ҳал. Ҳамвории аз рӯи нуқтаҳои M, N ва P мегузаштагиро бо α ишорат мекунем. Ин ҳамворӣ бо ҳамворӣи DAC нуқтаҳои умумии N ва P-ро дорост, барои ҳамин мувофиқи аксиомаи C_1 хати рости NP буриши онҳост.



Расми 19

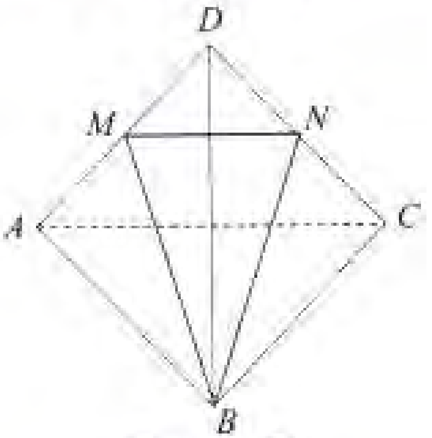
Айнан ҳамин тавр муқарар мекунем, ки порчаи NM буриши α бо рӯяи ADB аст. Нуқтаи M ба ҳамворӣи α ва ҳамворӣи ABC тааллуқ дорад. Барои сохтани хати буриши ин ду ҳамворӣ бояд боз як нуқтаи умумии онҳоро ёбем. Бигузор K нуқтаи буриши хати рости NP ва AC аст.

Хати рости MK-ро сохта мебинем, ки он тегаи BC-ро дар нуқтаи Q мебурад. Фаҳмост, ки нуқтаи Q ҳам ба α ва ҳам ба ҳамворӣи ABC тааллуқ дорад, яъне MQ хати буриши α ва рӯяи ABC аст. Буриши матлуб чоркунҷаи $MNPQ$ мебошад.

Баъзан дар масъалаҳо ғайри ёфтани буриш боз ҳисоби масоҳат ё периметри он талаб карда мешавад.

Масъалаи 3. Тетраэдри мунтазами $ABCD$, ки теғааш a аст, дода шудааст. Аз қуллаи B ва миёначои теғаҳои AD, DC ҳамвории гузаронида шудааст. Периметри фигураеро, ки дар буриш хосил мешавад меёбем.

Ҳал. Ба осонӣ дида мешавад, ки буриши матлуб секунҷаи MNB аст (Расми 20). Мувофиқи шарти масъла:



Расми 20

1) $AD = DC = AB = AC = BC = a$;

2) $AM = MD = DN = NC = \frac{1}{2}$.

Ёфтани $p = MN + MB + BN$ **талаб карда мешавад.** MN **хати миёнаи** $\triangle ADC$ **аст. Дар асоси хосияти хати миёна** $MN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Дар тетраэдри мунтазам рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои баробартарафанд, барои ҳамин медианаи BM**-и** ? ADB **баландӣ аст, яъне** ? AMB **росткунҷа мебошад.**

Пас мувофиқи теоремаи Пифагор

$$AB^2 = AM^2 + MB^2,\ a^2 = \frac{a^2}{4} + MB^2.$$

Аз ин ҷо $MB^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ **ва** $MB = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Вале** $BM=NB$**, чунки** ? MBN **баробарпаҳлӯ аст. Ҳамин тариқ,**

$$p = MN + 2BM = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = a\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right).$$

---

1. Бисёррӯя чист? Рӯя, теға ва қуллаи бисёррӯя чиҳоянд? 2. Таърифи параллелепипеди росткунҷа (куб) ва пирамидаро (тетраэдро) оред. 3. Чӣ гуна ҳамворӣ буранда номида мешавад? 4. Кадом фигура буриш ном дорад? Оё вай ҳамвор набуда метавонад?

---

41. Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **параллелепипеди росткунҷа аст. Исбот кунед, ки:**

а) нуқтаи A_1 **ба ҳамвории рӯяи** $ABCD$ **тааллуқ надорад;**

б) хатҳои рости AB_1 ва AC_1 ҳамвории рӯяи $ABCD$-ро мебуранд;

в) ҳамвориҳои $ABCD$, ABB_1A_1, BCC_1B_1 ҷуфт-ҷуфт ҳамдигарро мебуранд;

г) хати рости A_1B_1 ҳамвории $ABCD$- ро намебурад;

д) ҳамвориҳои $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ ҳамдигарро намебуранд;

е) хати рости A_1C_1 ҳамвории $ABCD$ – ро намебурад;

ж) нуқтаҳои: 1) A,B,C_1; 2) A_1,B_1,C дар як хати рост ҷойгир нестанд;

з) нуқтаҳои: 1) A,B,C,C_1; 2) A,B,C,D_1 дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд;

и) агар K ва M миёнаҷои теғаҳои AB ва BC бошанд, он гоҳ нуқтаҳои K,M,A_1,C_1 дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

42. Буриши параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ро бо ҳамворие, ки аз рӯи нуқтаҳои: 1) A,B_1,D_1; 2) A,C ва миёнаҷои теғаи DD_1 мегузарад, созед.

43. Буриши параллелепипеди росткунҷаро бо ҳамворие, ки аз рӯи ду теғаи паҳлуии ба як рӯя тааллуқ надошта мегузарад созед.

44. Нуқтаи E дар ҳамвории $A_1B_1C_1D_1$, хати рости a дар ҳамвории $ABCD$ ҷойгиранд. Буриши параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ро бо ҳамворие, ки аз рӯи хати рости a ва нуқтаи E мегузарад созед.

45. Нишон диҳед, ки буриши пирамида бо ҳамвориҳое, ки аз қуллаи он мегузаранд, секунҷаҳо мебошанд.

46. Буриши пирамидаро бо ҳамворие, ки аз қуллаи он ва ду нуқтаи додашудаи асос мегузарад созед.

47. Буриши пирамидаи секунҷаро бо ҳамворие, ки аз рӯи тарафи асоси пирамида ва нуқтаи додашудаи теғаи муқобили ин тараф мегузарад созед.

48. Буриши пирамидаи чоркунҷаро бо ҳамворие, ки аз рӯи тарафи асос ва нуқтаи яке аз теғаҳои паҳлуӣ мегузарад созед.

49. Дарозии теғаи куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ба a баробар аст. Масоҳати буриши кубро бо ҳамворие, ки аз миёнаҷои теғаҳои AB, BB_1 ва BC мегузарад ёбед.

50. Дарозии теғаи тетраэдри мунтазам ба a баробар аст. Буриши тетраэдрро бо ҳамворие, ки аз миёнаҷои се

тетеғаи аз як қулла фаровардашуда мегузарад созед. Периметр ва масоҳати буришро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

51. Порчаҳои AB ва AC ҳамвории α-ро мебуранд. Порчаи BC ҳамвории α-ро мебурад?
52. Дар давраи радиусаш $8см$ хордаҳои ба ҳам перпендикуляри AB ва CD гузаронида шудаанд. Диаметрҳое, ки аз охирҳои хордаи AB гузаронида шудаанд, CD-ро ба се ҳиссаи баробар ҷудо менамоянд. Маълум, ки $AB=12см$ аст. Дарозии хордаи CD-ро ёбед.
53. Маълум, ки диагоналҳои ду квадрат ба ҳамдигар баробаранд. Магар ин квадратҳо бо ҳам баробаранд?

§2. ҶОЙГИРШАВИИ БАЙНИҲАМДИГАРИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО

4. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост. Хатҳои рости чиликӣ

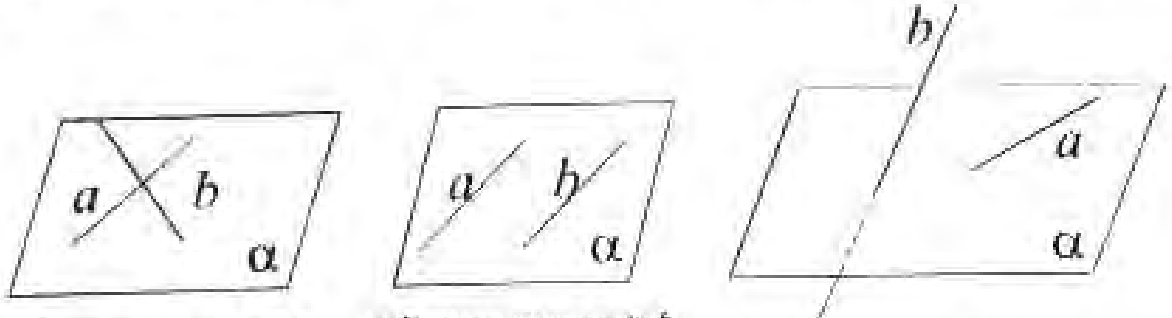
Дар зерпункти II-и пункти 2 ҳамчун натиҷаҳои аксиомаҳо мо муқаррар намудем, ки дар фазо ду хати рости гуногуни a ва b ё ҳамдигарро мебуранд (дар як нуқта) ё нуқтаҳои умумӣ надоранд. Дар стереометрия ҳолати дуюм, бар хилофи планиметрия, ки дар он хатҳои рост параллел номида шуда буданд, ба ду зерҳолат ҷудо мешавад: хатҳои рост дар як ҳамворӣ ҷойгиранд ва хатҳои рост дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

Дар алоқамандӣ бо ҳамин таърифи зеринро дохил мекунем.

Таъриф. Ду хати рост дар фазо параллел номида мешаванд, агар онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир буда, ҳамдигарро набуранд. Хатҳои росте, ки ҳамдигарро намебуранд ва дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд, чиликӣ ном доранд. Ҳар се ҳолати ҷойгиршавии хатҳои рост дар расми 21 нишон дода шудааст.

Дар муҳити моро иҳота карда мисолҳои бисёре овардан мумкин аст, ки ҳамаи ин ҳолатҳоро онҳо акс мекунанд. Масалан, хатҳои буриши фарш ва шифти хона бо девор доир ба хатҳои параллел тасаввурот медиҳанд. Роҳи аз зери купрук мегузаштагӣ ва роҳи болои купрук тарҳи (шабеҳи) хатҳои чиликианд.

Хатҳои рости параллелро алоҳида дида мебароем. Ҳозир бо хатҳои рости чиликӣ машғул мешавем. Мувофиқи теоремаи



а) Хатҳои рости a ва b ҳамдигарро мебуранд

б) Хатҳои рости a ва b параллел мебошанд

в) Хатҳои рости a ва b чиликӣ мебошанд

Расми 21

2 мебинем, ки хатҳои рости a ва b чиликӣ мешаванд, агар онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир набошанд (Дар таърифи хатҳои чиликӣ талаби ҳамдигарро набуридани онҳо зиёдатӣ аст!). Тасдиқи «хатҳои рости a ва b дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд» маънои онро дорад, ки ҳаморие мавҷуд нест, ки дар он ҳам a ва ҳам b ҷойгир бошанд.

Дар айни ҳол шумораи беохири ҳамвориҳо мавҷуданд, ки дар алоҳидагӣ ҳар кадоми ин хатҳои рост дар онҳо ҷойгир мебошанд (ниг. ба эзоҳи 1-и қисми II-и пункти 2).

Барои мустаҳкам кардани таърифи хатҳои рости чиликӣ масъалаи соддаи зеринро ҳал мекунем:

Масъалаи 1. Исбот мекунем, ки агар хатҳои рости a ва b ҳамдигарро буранд, он гоҳ ҳар гуна ду хати рости онҳоро мебуридагӣ чиликӣ шуда наметавонанд.

Ҳал. Бигузор A, B аз a ва C, D аз b нуқтаҳои буриши хатҳои ростанд. Мувофиқи теоремаи 2 якто ҳамвории α мавҷуд аст, ки дар он a ва b ҷойгиранд. Пас нуқтаҳои A, B, C, D дар ҳамвории α ҷойгиранд. Аз рӯи аксиомаи C_3 хатҳои рости AC ва BD дар ҳамвории α ҷойгиранд, яъне чиликӣ нестанд.

Эзоҳ. Агар яке аз хатҳои рост аз нуқтаи буриши хатҳои рости a ва b гузарад, он гоҳ тасдиқи масъалаи 1 нодуруст аст (инро мустақилона исбот кунед).

Акнун аломатҳои чиликӣ будани хатҳои ростро дар фазо меорем.

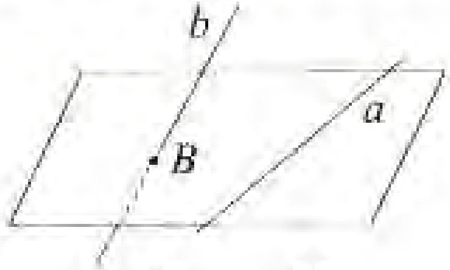
Аломати якум. Агар нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир набошанд, он гоҳ хатҳои рости AB ва CD чиликианд.

Дар ҳақиқат, агар хатҳои рост чиликӣ набошанд, он гоҳ онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир мешаванд. Пас нуқтаҳои A, B, C, D низ дар як ҳамворӣ ҷойгир мешуданд, ки ин ба шарт зид аст.

Натиҷаи 1. Барои он ки чор нуқта – A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир бошанд, зарур ва кифоя аст, ки хатҳои рости AB ва CD ё ҳамдигарро буранд, ё ки параллел бошанд ва ё ҳамҷоя шаванд.

Аломати дуюм. Агар яке аз ду хатҳои рост дар ҳамворӣ ҷойгир бошаду дигарӣ ҳамвориро дар нуқтае бурад, ки он ба хати рости якум тааллуқ надошта бошад, он гоҳ ин хатҳо чиликианд.

Бугузор a хати рости дар ҳамвории α ҷойгир буда, B нуқтаи буриши хати рости b бо ин ҳамворӣ аст ва B ба a тааллуқ надорад (расми 22).



Расми 22

Фарз мекунем, ки хатҳои рости a ва b чиликӣ нестанд, яъне ҳамвории дигар β вуҷуд дорад, ки ин хатҳоро дар бар мегирад. Пас a ва B дар β ҷойгиранд. Мувофиқи теоремаи 1 ҳамвориҳои α ва β ҳамҷояанд. Вале α хати b-ро дар бар намегирад, пас β низ ин хатро дар бар гирифта наметавонад. Инак, ҳамворие мавҷуд нест, ки ҳарду хатҳоро дар бар гирад. Ин аз чиликӣ будани онҳо шаҳодат медиҳат.

Натиҷаи 2. Барои ҳар гуна хати рост дар фазо хати рости ба он чиликӣ вуҷуд дорад.

Барои исботи ин натиҷа нуқтаи B-ро берун аз хати рости a мегирем ва аз рӯи a ва B мувофиқи теоремаи 1 ҳамвории α мегузаронем. Баъд, берун аз α ягон нуқтаи C-ро интихоб намуда, хати рости b-ро аз рӯи нуқтаҳои B ва C мегузаронем. Мулоҳизарониҳои минбаъда мутлақо мисли асосноккунии аломати дуюми хатҳои чиликӣ, ки дар боло оварда шудааст мебошанд.

1. Ду хати рост дар фазо байниҳамдигар чӣ тавр ҷойгир шуда метавонанд? 2. Дар кадом ҳолат хатҳои рост дар фазо параллел номида мешаванд? Чиликӣ- чӣ? 3. Аломатҳои чиликӣ будани хатҳои ростро дар фазо оред ва онҳоро соснок намоед. 4. Барои хати рости додашуда хати рости ба он чиликӣ бударо созед.

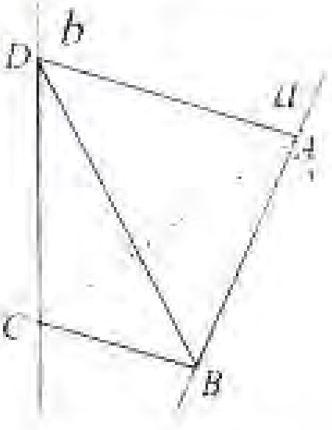
54. Исбот кунед, ки агар хатҳои рости AB ва CD чиликӣ бошанд, он гоҳ хатҳои рости AC ва BD низ чиликианд.

55. Магар аз рӯи нуктаи C, ки ба хатҳои рости чиликии a ва b тааллуқ надорад, ду хати рости гуногун гузаронидан мумкин аст, ки ҳар кадоми онҳо хатҳои рости a ва b-ро буранд?

56. Ду хати рости чиликии a ва b ва нуктаи C, ки дар ягонтои ин хатҳо чойгир нест, дода шудаанд. Оё аз нуктаи C хати ростеро гузаронидан мумкин аст, ки вай ҳар дуи ин хатҳои рости a ва b-ро бурад?

57. Исбот кунед, ки хатҳои рости теғаҳои мукобилро дар бар гиранда, масалан, AB ва CD-и ҳар гуна тетраэдр чиликианд (расми 23). Боз кадом хатҳои рости чиликиро дар расми 23 нишон додан мумкин аст?

58. Бигузор K ва M миёначои теғаҳои AB ва CD-и тетраэдри $ABCD$ мебошанд. Исбот кунед, ки хатҳои рости AC ва KM чиликианд.



Расми 23

59. Нуктаҳои K, M, P миёначои теғаҳои AB, BC, CA-и тетраэдри $ABCD$-анд. Исбот кунед, ки хатҳои рости KP ва DM чиликӣ мебошанд.

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипеди росткунча. Исбот кунед, ки хатҳои рости: 1) AB ва CC_1 ; 2) AB ва B_1C_1; 3) AC ва BB_1; 4) AC ва BD_1; 5) AC ва BC_1; 6) AB_1 ва BC_1 чиликианд.

61. Исбот намоед, ки барои ҳар гуна ду хати рости чиликии a ва b дар фазо хати рости сеюм c вучуд дорад, ки ҳам бо a ва ҳам бо b чиликӣ мебошад.

62. Исбот кунед, ки барои ҳар гуна ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии a ва b дар фазо хати росте вучуд дорад, ки ҳам бо a ва ҳам бо b чиликӣ аст.

Масъалаҳо барои такрор

63. Нишон диҳед, ки ҳар гуна буриши бисёррӯя бо ҳамворӣ бисёркунча мебошад.

64. Ду ҳамвории ҳамдигарро намебуридагӣ дода шудаанд. Исбот кунед, ки агар хати рост яке аз ин ҳамвориҳоро бурад, он гоҳ дигариро низ мебурад.

65. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва сатҳи пурраи кубе, ки теғааш *4см* аст, ба чӣ баробар аст?

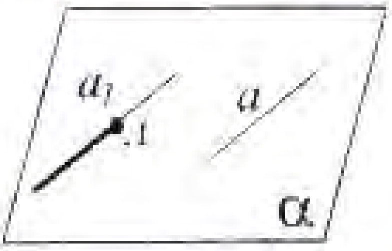
66. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурраи параллелепипеди росткунҷаи асосаш квадратро ёбед, агар тарафи квадрати асос *5см* ва баландӣ *10см* бошад.

67. Кунҷҳои α, β ва масоҳати секунҷаи ABC, ки S аст, дода шудаанд. Тарафҳои секунҷаро ёбед.

5. Параллелии хатҳои рост дар фазо

I. Чи тавре дар пункти пешина таъриф дода будем, ду хати рост дар фазо параллел номида мешаванд, агар онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир буда, ҳамдигарро набуранд. Натиҷаҳои заруриро аз планиметрия хотирнишон намуда, теоремаи фазогиро доир ба параллелҳо меорем. Дар натиҷа боз як тарзи ҳосил кардани ҳамвориро доро мешавем. Аз планиметрия мо медонем, ки ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост дар ҳамворӣ чунин аст: ё хатҳои рост ҳамдигарро мебуранд, яъне якто нуктаи умумӣ доранд (аксиомаи P_1), ё онҳо параллеланд, яъне ҳамдигарро намебуранд. Баъд, мувофиқи аксиомаи паралелӣ (хосияти асосии хатҳои рости параллел): аз нуқтае, ки дар хати рости додашуда ҷойгир нест на зиёда аз як хати рости ба хати рости додашуда параллел гузаронидан мумкин аст. Дар планиметрия ин аксиомаро истифода карда мо теоремаро доир ба параллелҳо исбот карда будем: Аз нуқтаи A, ки дар хати рости a ҷойгир нест, хати рости ба a параллел гузаронидан мумкин аст ва фақат якто. Дар стереометрия аксиомаи параллелӣ дар ҳар як ҳамворӣ ҷой дорад, бинобар ин теоремаи фазогӣ доир ба параллелҳо дуруст аст. Ин теорема қиёси теоремаи планиметрии дар боло оварда шуда мебошад.

Теоремаи 3. Аз нуқтаи беруни хати рости додашуда, хати рости ба ин хати рост параллелро гузаронидан мумкин аст ва дар ин ҳол фақат якто.



Расми 24

Исбот. Бигузор a хати рости додашуда ва A нуқтаи дар он ҷойгир набуда аст (расми 24). Аз рӯи хати рости a ва нуқтаи A ҳамвории α-ро мегузаронем (теоремаи 1). Дар ҳамвории α аз нуқтаи A хати рости a_1-ро, ки ба a параллел аст, мегузаронем. Мувофиқи теоремаи планиметрия доир ба хатҳои рости параллел чунин хати рости a_1 ягона мебошад. Теорема исбот шудааст.

Эзоҳ. То ҳол ба мо се тарзи дода шудани ҳамворӣ маълум буд: бо се нуқтаи дар як хати рост ҷойгир набуда (аксиомаи C_2); бо хати рост ва нуқтаи дар он ҷойгир набуда (теоремаи 1); бо ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ (теоремаи 2). Мо ҳозир тарзи чоруми дода шудани ҳамвориро ҳосил кардаем: ду хати рости параллел ҳамвориро яккимата муайян менамоянд. Ин бевосита аз таърифи параллелӣ дар фазо бармеояд. Ин эзоҳро баъди таърифи параллелии хатҳои рост дар фазо дар пункти 4 ҳам овардан мумкин буд.

Масъалаи 1. Ду хати рости параллел дода шудаанд. Маълум, ки хати рости сеюм онҳоро мебурад. Нишон медиҳем, ки ҳар се хатҳои рост дар як ҳамворӣ мехобанд.

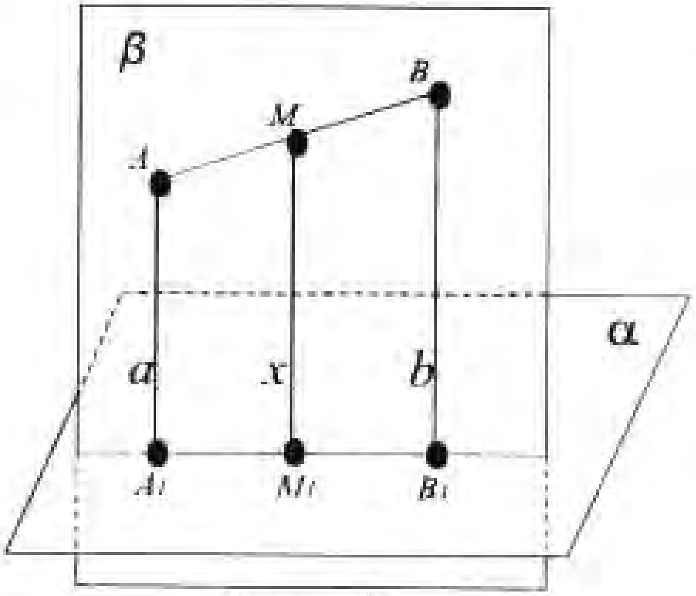
Ҳал. Бигзор α ҳамвориест, ки ин ду хати рости параллел яккимата муайян мекунанд. Хати рости ин хатҳоро мебуридагӣ бо α ду нуқтаи умумӣ дорад, ки онҳо нуқтаҳои буришанд. Пас мувофиқи аксиомаи C_3 ҳамвории α ин хати ростро дар бар мегирад.

Хулоса. Агар хатҳои рости a ва b якдигарро буранд, он гоҳ ҳамаи хатҳои росте, ки ба хати рости b параллеланд ва хати рости a-ро мебуранд, дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

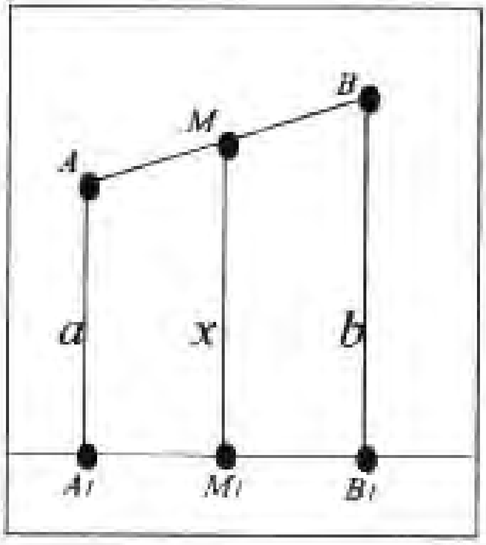
Акнун ду масъаларо ҳал мекунем, ки дар онҳо услуби умдаи ҳалли масъалаҳои стереометрӣ – ба масъалаҳои планиметрӣ овардани онҳо истифода карда мешавад.

Масъалаи 2. Аз охирҳои порчаи AB ва миёначои он M хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории α-ро дар нуқтаҳои A_1, B_1 ва M_1 мебуранд. Дарозии порчаи MM_1-ро меёбем, агар маълум бошад, ки порчаи AB ҳамвории α-ро намебурад ва $AA_1=4a$ ва $BB_1=6a$ мебошад.

Ҳал. Мувофиқи хулосаи масъалаи 1 хатҳои рости AA_1, BB_1 ва MM_1 дар як ҳамвории β ҷойгиранд. Бароӣ ҳамин нуқтаҳои A_1, B_1 ва M_1 дар хати рости A_1B_1, ки хати буриши ҳамвориҳои α ва β аст, ҷойгиранд (расми 25).



Расми 25



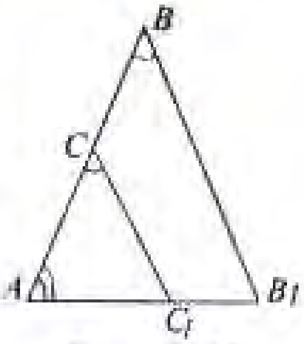
Расми 26

Пас муоинаи нақша дар ҳамвории β кифоя аст (расми 26). Мувофиқи теоремаи Фалес M_1 миёначои порчаи A_1B_1 аст. Яъне, MM_1 хати миёнаи трапетсияи AA_1B_1B мебошад. Пас, дар асоси теорема дар бораи хати миёна, ҳосил мекунем:

$$MM_1 = x = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(4+6) = 5\,\text{м}.$$

Масъалаи 3. Аз охири A-и порчаи AB ҳамвории α гузаронида шудааст. Аз охири B ва нуқтаи C-и ҳамин порча хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвориро дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебуранд. Дарозии порчаи BB_1-ро меёбем, агар $CC_1 = 6$ см, $AB:BC=7:4$ бошад.

Ҳал. Ҳамвории β, ки аз рӯи хатҳои рости параллели BB_1 ва CC_1 мегузарад, хати рости AB-ро дар бар мегирад (хулосаи масъалаи 1) ва ҳамвории α-ро аз рӯи хати рости AB_1 мебурад (расми 27).



Расми 27

Дар ҳамвории β ду секунҷаи ACC_1 ва ABB_1-и монанд ҳосил мешавад (кунҷи A умумӣ буда, баробарии кунҷҳои C ва B аз параллели хатҳои рости CC_1 ва BB_1 бармеоянд).

Пас $\dfrac{BB_1}{CC_1} = \dfrac{AB}{AC}$, яъне $BB_1 = CC_1 \cdot \dfrac{AB}{AC} = 6 \cdot \dfrac{7}{4} = 10{,}5\,\text{см}.$

II. Аломати параллелии хатҳои ростро дар фазо дида мебароем.

Масъалаи чӣ тавр муқаррар кардани параллелии ду хати ростро дар фазо мегузорем. Албатта дар ин кор таърифро ба асос гирифтан мумкин аст: исбот кардан лозим аст, ки хатҳои рост дар як ҳамворӣ ҷойгиранд ва ҳамдигарро намебуранд. Вале ин тарзи кӯтохтарини ҳалли масъала нест.

Масъалаи ҳамдигарро набуридани ду хати рост дар ҳамворӣ дар асоси аломатҳои параллелӣ, яъне теоремаҳое, ки шартҳои кифоягии параллелиро муайян мекарданд, ҳал карда шуда буд. Дар планиметрия мо се аломати параллелии хатҳои ростро дар ҳамворӣ доштем: аз рӯи баробарии кунҷҳои дарунии чилиции байни хатҳои рост ва хати рости онҳоро мебуридагӣ; аз рӯи ба 180^0 баробар будани суммаи кунҷҳои дарунии яктарафа; аз рӯи параллелӣ ба хати рости сеюм. Ду аломати параллелии аввала дар фазо ба худ монандро надоранд. Аломати охирин бошад дар фазо ҳам дуруст аст.

Теоремаи 4. Ду хати росте, ки ба хати рости сеюм параллел мебошанд, параллеланд,

Ҳангоми дар як ҳамворӣ ҷойгир будани ҳар сеи ин хатҳои рост ин теорема дар планиметрия исбот карда шуда буд.

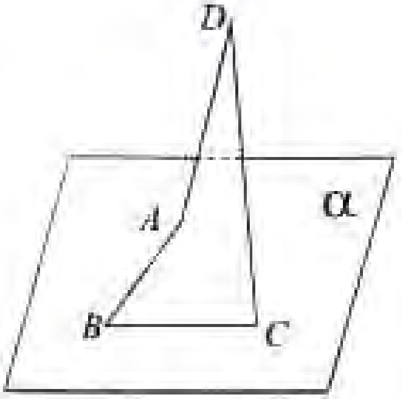
Исботро ҳангоми дар як ҳамворӣ ҷойгир набудани ин хатҳо мувaққатан мавқуф мегузорем (бо мақсади содда карданаш).

Акнун ду масъалаи соддаро меорем, ки дар ҳалли онҳо теоремаи 4 истифода мешавад.

Масъалаи 4. Исбот мекунем, ки ба ду хати рости дар як ҳамворӣ ҷойгир набуда, хати рости ба онҳо параллел гузаронидан мумкин нест.

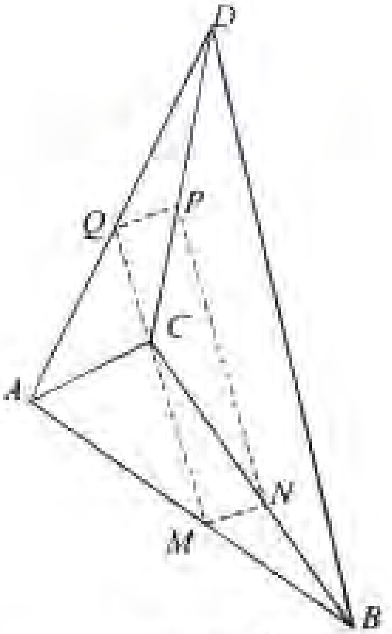
Ҳал. Агар мумкин мебуд, он гоҳ мувофиқи теоремаи 4 ин ду хати рост ба ҳам параллел мебуданд. Пас онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир мешуданд, ки ин ба шарти масъала зид аст.

Пеш аз овардани шартҳои масъалаи навбатӣ мафҳуми чоркунҷаи фазогӣ ё чиликиро дохил мекунем. Бигузор A, B, C се нуқтаи дар як хати рост ҷойгир набуда мебошанд. Онҳо мувофиқи аксиомаи C_2 ҳамвории α-ро муайян мекунанд. Бигузор D нуқтаи дар α ҷойгир набуда аст (аксиомаи C_1) (расми 28). Ин чор нуқта дар як ҳамворӣ намехобанд. Фигураи сарбастае, ки порчаҳои AB, BC, CD ва DA тарафҳои он мебошанд, чоркунҷаи фазогӣ ё чиликӣ номида мешавад.



Расми 28

Масъалаи 5. Чоркунҷаи фазогии $ABCD$ дода шудааст (расми 29). Нишон медиҳем, ки миёнаҷои тарафҳои он қуллаҳои параллелограмм мебошанд.



Расми 29

Ҳал. Бигузор нуқтаҳои M, N, P, Q мувофиқан миёнаҷои тарафҳои AB, BC, CD ва DA ҳастанд. Дар секунҷаҳои DAC ва BAC, QP ва MN ҳамчун хатҳои миёнаи ин секунҷаҳо ба тарафи AC параллеланд. Пас мувофиқи теоремаи 4 QP ба MN параллел мебошад. Инчунин $QP = \frac{AC}{2}$ ва $MN = \frac{AC}{2}$, яъне $QP = MN$ аст. Агар чунин мулоҳизаронихоро нисбати секунҷаҳои ABD ва BCD гузаронем, он гоҳ ҳосил мекунем, ки QM ба PN параллел буда, $QP = MN$ мебошад. Параллелограмм будани чоркунҷаи $QPMN$ нишон дода шудааст.

1. Аксиомаро доир ба хатҳои рости параллел ва теоремаро доир ба хатҳои рости параллел дар ҳамворӣ баён кунед. Байни онҳо чӣ гуна фарқият ҳаст? 2. Теоремаро доир ба хатҳои рости параллел дар фазо баён кунед. Кадом аксиома ва теоремаҳо барои исботи он истифода карда мешаванд? 3. Параллелии хатҳои рост дар фазо чӣ хел дохил карда мешавад? 4. Аломати параллелии хатҳои ростро дар фазо баён кунед.

68. Ҳамаи хатҳои рост, ки ду хати рости додашудаи параллелро мебуранд, дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Инро исбот кунед.

69. Агар ҳамворӣ яке аз хатҳои рости параллелро бурад, он гоҳ вай хати рости дигариро ҳам мебурад. Инро исбот кунед.

70. Нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Оё хатҳои рости AB ва CD ҳамдигарро бурида метавонанд?

71. Нуқтаи E дар ҳамворин трапетсияи $ABCD$-и асосҳояш AD ва BC ҷойгир нест. Исбот кунед, ки хати рости аз миёначои порчаҳои EB ва EC гузаронидашуда ба хати миёнаи трапетсия параллел аст.

72. Нуқтаи E дар ҳамворин параллелограмми $ABCD$ ҷойгир нест. Исбот кунед, ки хати рости аз миёначои порчаҳои EA ва EB гузаронидашуда ба тарафи CD-и параллелограмм параллел аст.

73. Масъалаи 2-ро (нигба саҳ.29) бо шарти он, ки порчаи AB ҳамворин α-ро мебурад ва $AA_1=a$, $BB_1=b$ аст, ҳал кунед.

74. Аз охири A-и порчаи AB ҳамворӣ гузаронида шудааст. Аз охири B ва нуқтаи C-и ҳамин порча хатҳои рости параллел гузаронида шудааст, ки онҳо ҳамвориро дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебуранд. Дарозии порчаи BB_1-ро ёбед, агар: 1) $CC_1 = 10км$, $AC:BC=2:3$; 2) $AC=a$, $DC=b$, $CC_1=c$ бошад.

75. Нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Исбот кунед, ки хатҳои аз миёначои порчаҳои AB ва BC, AD ва CD мегузаштагӣ бо ҳам параллеланд.

76. Параллелограммҳои $ABCD$ ва ABC_1D_1 дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгиранд. Исбот кунед, ки чоркунҷаи CDD_1C_1 низ параллелограмм мебошад.

77. Параллелограмми $ABCD$ ва ҳамворин онро намебуридагӣ дода шудаанд. Аз қуллаҳои параллелограмм хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамворин додашударо дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1, D_1, мебуранд. Дарозии порчаи DD_1-ро ёбед, агар: 1) $AA_1=2м$, $BB_1=3м$, $CC_1=8м$; 2) $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$ бошад.

Масъалаҳо барои такрор

78. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст. Дар кадом рӯяҳои он хатҳои рости ғайрипараллел ва бо хати рости AA_1 бурида намешудагӣ ҷойгир шуда наметавонанд?

79. **Хати рости a дар ҳамворӣ ҷойгир аст. Аз нуқтаи дар ин ҳамворӣ гирифташуда чанд дона хатҳои рост, ки бо a чиликианд мегузаранд?**

80. **Дар ромб яке аз диагоналҳо ба тарафаш баробар аст. Кунҷҳои ромбро ёбед.**

81. **Асосҳои трапетсия ҳамчун 2:3 нисбат доранд. Хати миёнааш *5см* аст. Асосҳои трапетсияро ёбед.**

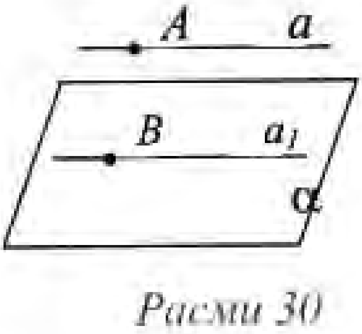
82. **Дар секунҷаи баробарпаҳлуи ABC ($AB=BC$) медианаи AD ва биссектрисаи CE перпендикуляранд. Кунҷи ADB-ро ёбед.**

6. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамворӣ. Параллелии онҳо

Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамвориҳоро дар фазо дида мебароем. Мувофиқи натиҷаи пункти 2 ҳамворӣ ва хати рости дар он ҷойгирнабуда ё дар як нуқта бурида мешаванд, ё бурида намешаванд (ба расми 12 нигар.). Ҳамин тариқ, барои хати рости a ва ҳамвории α се имконият мавҷуд аст: 1) a дар α ҷойгир аст (ки дар планиметрия ҳамеша ҷой дошт); 2) a бо α буриш дорад (расо дар як нуқта); 3) a бо α буриш надорад (яъне a ва α нуқтаҳои умумӣ надоранд). Чи тавре аллакай мо дидем ду имконияти аввала амалишавандаанд. Пурсида мешавад, имконияти сеюм ҳам амалӣ мешавад ё не?

Исбот мекунем, ки барои ҳар гуна ҳамвории α хати рости a мавҷуд аст, ки бо α нуқтаҳои умумӣ надорад.

Дар ҳамвории α ду нуқтаро интихоб карда хати рости a_1-ро мегузаронем. Баъд, берун аз α нуқтаи A-ро гирифта, аз рӯи он хати рости a-ро, ки ба хати рости a_1 параллел аст мегузаронем (расми 30). Мувофиқи теоремаи 3 ин мумкин аст. Нишон медиҳем, ки хати рости a ҳамвории α-ро намебурад. Дар ҳақиқат, хатҳои рости a ва a_1 дар як ҳамвории β ҷойгиранд ва дар айни ҳол α ва β гуногунанд ва аз рӯи хати рости a_1 бурида мешаванд. Агар дар хати рости a нуқтаи B, ки дар α ҷойгир аст, мавҷуд



Расми 30

мебуд, он гоҳ B ба a_1 тааллуқ медошт, чунки нуқтаи B ба ҳар ду ҳамворӣ тааллуқ дорад. Пас хатҳои рости a ва a_1 ҳамдигарро мебуранд, ки ин ба созиш зид аст ($a\|a_1$).

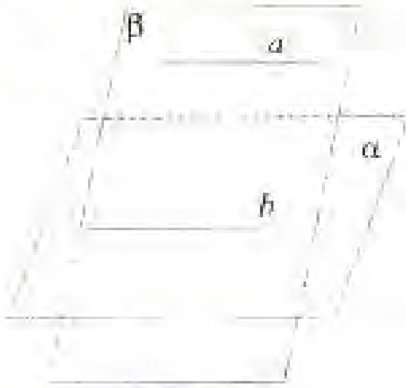
Монанди хатҳои рост дар ҳамворӣ вазъ дар ҳолати сеюм параллелии хати рост ва ҳамворӣ ном дорад. Инак, дорем:

Таъриф. Хати рост ва ҳамворӣ параллел номида мешаванд, агар онҳо ҳамдигарро набуранд.

Эзоҳ. Хати росте, ки дар ҳамворӣ ҷойгир аст ба ҳамворӣ параллел ҳисоб карда намешавад.

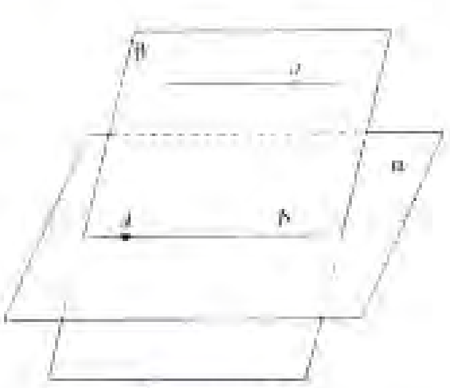
Дар боло мо мавҷудияти хатҳои рост ва ҳамвориҳои параллелро исбот намудем. Акнун ба муайян кардани аломати параллелии онҳо машғул мешавем.

Теоремаи 5. Агар хати рости дар ҳамворӣ ҷойгир набуда, бо ягон хати рости ин ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ вай ба худи ҳамворӣ ҳам параллел мешавад.



Расми 31

Исбот. Бигузор a хати ростест, ки ба хати рости дигари b, ки дар ҳамвории α ҷойгир аст, параллел мебошад. Аз сабаби параллелӣ хатҳои a ва b дар як ҳамворӣ воқеъанд. Бигузор ин ҳамворӣ β аст (расми 31). Ҳамвориҳои α ва β аз рӯи хати рости b бурида мешаванд. Биноан агар a ва α ҳамдигарро буранд, нуқтаи буриш дар хати b ҷойгир аст. Ин номумкин аст, чунки хатҳои a ва b мувофиқи шарти теорема параллеланд. Инак, хати рости a ва ҳамвории α нуқтаи умумӣ надоранд, яъне параллеланд. Теорема исбот шуд.



Расми 32

Теоремаи баръакс ҳам дуруст аст: Агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ дар ҳамворӣ хати росте вуҷуд дорад, ки ба хати рости додашуда параллел аст.

Исбот. Бигузор a хати ростест, ки ба ҳамвории додашудаи α параллел аст ва A нуқтаи дилхоҳест дар α. Хати рости a ва нуқтаи A

ҳамвории β-ро муайян мекунанд (рами 32). Ҳамвориҳои α ва β дорои нуқтаи умумии A мебошанд. Пас мувофиқи аксиомаи C_4 онҳо аз рӯи хати рост бурида мешаванд. Агар ин хати рост b бошад, он гоҳ хатҳои a ва b дар як ҳамвории β ҷойгиранд. Хати рости a бо α нуқтаи умумӣ надорад, бинобар ин вай хати рости b-ро бурида наметавонад. Инак, хатҳои рости a ва b дар як ҳамворӣ ҷойгир буда, нуқтаи умумӣ надоранд, яъне параллеланд.

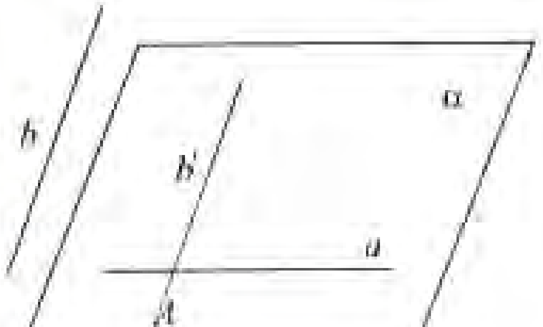
Аз теоремаи 5 ва теоремаи баръакси он чунин аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ бармеояд: Хати рост ба ҳамворӣ ҳамон вақт ва фақат ҳамон вақт параллел аст, агар вай дар ҳамворӣ ҷойгир набошад ва ба ягон хате, ки дар ҳамворӣ ҷойгир аст, параллел бошад.

Хулоса. Агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ дар ин ҳамворӣ миқдори беохири (беҳад зиёди) хатҳои рост мавҷуданд, ки ҳам ба хати рости додашуда ва ҳам байни худ параллеланд.

Дурустии ин хулоса аз аломати параллелӣ ва теоремаи 4 бармеояд.

Акнун се масъаларо меорем, ки ҳалли онҳо ба истифодаи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ асос карда шудааст.

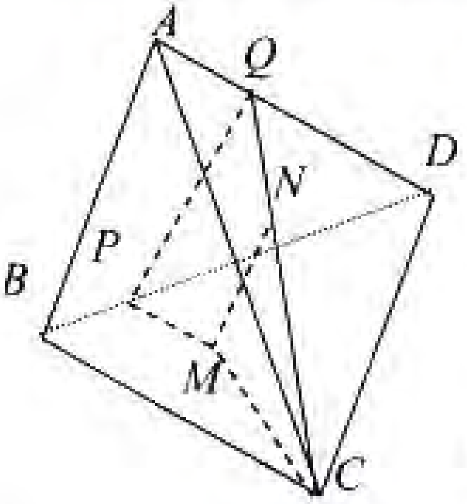
Масъалаи 1. Хатҳои рости чиликӣ дода шудаанд. Исбот мекунем, ки аз рӯи якеи онҳо ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст, ки он ба хати рости дигарӣ параллел аст.



Расми 33

Ҳал. Бигузор хати рости a ва b чиликианд ва нуқтаи A дар хати a вокеъ аст (расми 33). Аз болои нуқтаи A хати рости b'-ро, ки ба b параллел аст мегузаронем. Мувофиқи аксиомаи C_4 хати b' ва a ҳамвории α-ро муайян мекунанд. Мувофиқи теоремаи 5 ҳамвории α ба хати рости b параллел аст.

Масъалаи 2. Дар тетраэдри $ABCD$ нуктаҳои M ва N маркази вазнинии секунҷаҳои BCD ва ACD мебошанд. Муайян мекунем, ки магар хати рости MN ба ҳамвории ABD параллел аст ё на.



Расми 34

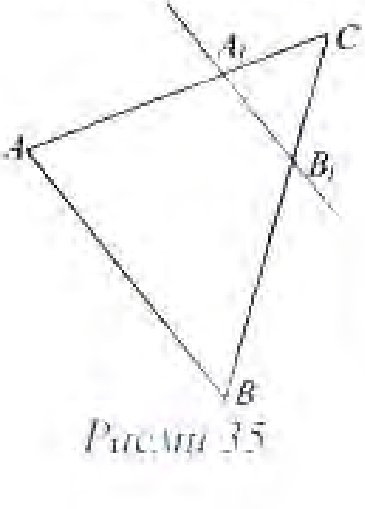
Ҳал. Бигузор P нуктаи буриши хатҳои CM ва BD, Q нуктаи буриши хатҳои CN ва AD аст (расми 34). Аз сабаби маркази вазнинӣ будани нуктаҳои M ва N дорем

$$\frac{CM}{CP}=\frac{CN}{CQ}=\frac{2}{3}.$$

Барои ҳамин секунҷаи CMN ба секунҷаи CPQ монанд аст ва MN ба PQ параллел аст. Азбаски PQ дар ҳамвории ABD ҷойгир аст, пас мувофиқи аломати параллелӣ хати рости MN ба ҳамвории ABC параллел аст.

Масъалаи 3. Секунҷаи ABC дода шудааст. Ҳамвории ба хати рости AB параллел буда, тарафи AC-и секунҷаро дар нуктаи A_1, тарафи BC-ро дар нуктаи B_1 мебурад. Дарозии порчаи BC-ро меёбем, агар AB =18см. AA_1:AC=4:5 бошад.

Ҳал. Услуби ба масъалаи планиметрӣ оварданро татбиқ намуда хати буриши ҳамвориро, хати A_1B_1 -ро тасвир мекунем (расми 35). Мувофиқи аломати параллелӣ хати рости A_1B_1 ба хати рости AB параллел аст ва дар ҳамвории ABC секунҷаҳои монанди ABC ва $A_1B_1C_1$-ро ҳосил мекунем. Мувофики монандии секунҷаҳо



Расми 35

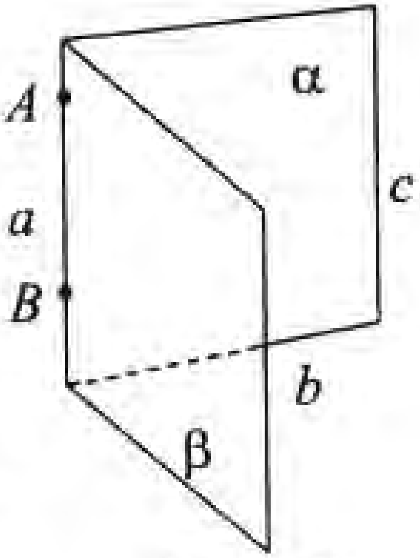
$$\frac{A_1C}{AC}=\frac{A_1B_1}{AB}$$ **. Вале**

$$\frac{A_1C}{AC}=\frac{AC-AA_1}{AC}=1-\frac{AA_1}{AC}=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5},$$

бинобар ин

$$A_1B_1=AB\cdot\frac{A_1C}{AC}=18\cdot\frac{1}{5}=3{,}6\,\text{см}.$$

II. Исботи теоремаи 4-ро, ки аломати параллелии хатҳои ростро дар фазо медод, бо мақсади содда карданаш мавкуф гузашта будем. Акнун бо истифодаи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ исботи онро меорем.



Расми 36

Ин теорема тасдиқ мекард, ки ду хати рости ба хати рости сеюм параллел байни худ параллеланд (ниг.ба саҳ.31). Ҳолатеро дида мебароем, ки ҳар се хати рост дар як ҳамворӣ ҷойгир намебошанд. Барои исбот фарз мекунем, ки хатҳои рости a ва b ба хати рости c параллеланд (расми 36).

Нишон медиҳем, ки a ва b параллел мебошанд. Дар хати рости a нуқтаи дилхоҳи A-ро мегирем ва аз рӯи A ва хати рости c ҳамвории α, баъд аз рӯи A ва хати рости b ҳамвории β-ро мегузаронем. A нуқтаи умумии ин ҳамвориҳост, пас онҳо ҳамдигарро аз рӯи хати рост мебуранд (аксиомаи С4).

Нишон медиҳем, ки ин хати буриш ба хати рости b параллел аст. Мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ хати рости b ба ҳамвории α параллел аст. Хати буриш ва хати рости b дар ҳамвории β ҷойгиранд. Онҳо ҳамдигарро бурида наметавонанд, вагарна хати рости b ҳамвории α-ро мебурид. Яъне, хати буриш ба хати рости b параллел аст. Аз рӯи нуқтаи додашудаи A ду хати рости гуногуни ба b параллелро гузаронидан мумкин нест. Барои ҳамин хати буриш хати a аст. Ба хати рости b параллел будани хати a нишон дода шудааст.

Теоремаи 6. Агар яке аз хатҳои рости параллел ҳамвориро бурад, он гоҳ дигарӣ низ ин ҳамвориро мебурад.

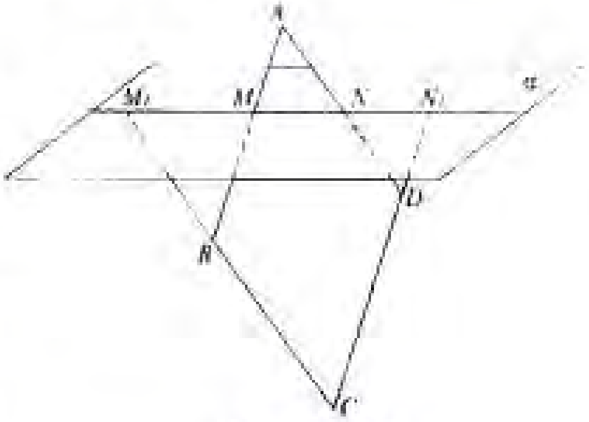
Исбот. Бигузор a ва b ду хати рости параллел буда, хати рости a ҳамвории α-ро мебурад. Барои хати рости b се ҳолат имконпазир аст: 1) вай дар α ҷойгир аст; 2) вай ба α параллел аст; 3) вай α-ро мебурад. Агар b дар α ҷойгир бошад, он гоҳ мувофиқи аломати параллелии хати рост ва

ҳамворӣ хати a ба α параллел аст, ки ин номумкин мебошад. Рафту агар b ба α параллел бошад, он гоҳ дар α хати росте, вуҷуд дорад, ки ба b параллел мебошад, масалан, хати рости c. Аз параллели a бар b ва b бар c бармеояд, ки a бар c параллел аст (теоремаи 4). Аз ин ҷо, боз мувофиқи аломати параллелӣ параллелии a ба α бармеояд, ки ин номумкин аст. Пас танҳо ҳолати 3)-ум имконпазир асту халос. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 4. Тарафи ромби $ABCD$ $4см$ аст. Тарафҳои AB ва AD ҳамвории α-ро мувофиқан дар нуқтаҳои M ва N мебуранд. Маълум, ки $AM=1см$, $AN=3см$ аст. а) Нишон медиҳем, ки хатҳои рости CB ва CD ҳамвории α-ро мебуранд. б) Дарозии порчаҳои CM_1 ва CN_1-ро меёбем, ки дар ин ҷо мувофиқан M_1 ва N_1 нуқтаҳои буриши хатҳои CB ва CD бо ҳамвории α мебошанд.

Ҳал. а) Дар ромб тарафҳои муқобил параллеланд, яъне $AB||CD$ ва $AD||BC$ аст (расми 37). Мувофиқи шарти масъала AB ва AD ҳамвориро мебуранд. Мувофиқи теоремаи 6 хатҳои ба онҳо параллели CD ва BC низ ҳамвории α-ро мебуранд.

б) Нуқтаҳои M_1, N_1, M ва N нуқтаҳои буриши ҳамвории α бо ҳамвории ABC мебошанд. Барои ҳамин онҳо дар як хати рост меҳобанд. Аз сабаби параллелии хатҳои рости AN ба M_1B секунҷаҳои AMN ва BMM_1 монанданд.



Расми 37

Барои ҳамин $\frac{BM_1}{BM} = \frac{AN}{AM}$ **ё**

$$BM_1 = AN \cdot BM\ ,\ BM_1 = \frac{3}{1} \cdot 3 = 9см$$ **.Пас**

$CM_1=CB+BM_1$**=4+9=13**$см$.

Аз тарафи дигар, аз сабаби параллелии хатҳои рости AM ва DN_1 секунҷаҳои AMN ва DN_1N монанданд. Пас

$\frac{DN_1}{DN} = \frac{AM}{AN}$, $DN_1 = \frac{AM}{AN} \cdot DN$, $DN_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ **см. Ҳамин тарик,** $CN_1 = CD = DN_1 = 4 + \frac{1}{3} = 4\frac{1}{3}$ **см.**

---

1. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамвориро дар фазо тасвир намоед. 2. Дар кадом ҳолат хати рост ва ҳамворӣ параллел номида мешаванд? Дар кадом ҳолат онҳо ҳамдигарро мебуранд. 3. Чӣ тавр аз нуқтаи додашуда хати рости ба ҳамвории додашуда параллелро гузаронидан мумкин аст? 4. Аломати параллелии хати рост ва ҳамвориро дар фазо баён карда онро шарҳ диҳед. 5. Яке аз хатҳои рости параллел ҳамвориро мебурад. Нисбати хати рости дуюм ва ҳамворӣ чӣ гуфтан мумкин аст?

---

83. Исбот кунед, ки аз рӯи нуқтаи додашуда хати ростеро гузаронидан мумкин аст, ки ба ҳар як ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагӣ параллел аст.

84. Маълум, ки ду ҳамворӣ ҳамдигарро мебуранд. Магар ҳамеша ҳамвории ба онҳо параллелро гузаронидан мумкин аст? Агар мумкин бошад чунин ҳамвориро гузаронед.

85. Маълум, ки ду ҳамворӣ аз рӯи хати рости a **бурида мешаванд ва ҳамвории** α**-ро аз рӯи хатҳои рости параллел мебуранд. Исбот кунед, ки хати рости** a **ба ҳамвории** α **параллел аст.**

86. Исбот намоед, ки агар ҳамворӣ яке аз ду ҳамвориҳои параллелро бурад, он гоҳ дигарашро низ мебурад.

87. Масъалаи 3-ро (ниг.ба саҳ.37) ҳал кунед, агар: 1) $AB=10см$, $AA_1:A_1C=$ **5:3; 2)** $AA_1=a$, $AB=b$, $A_1C=c$ **бошад.**

88. Асоси пирамидаи чоркунҷаи $SABCD$ **параллелограмм мебошад. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати росте, ки буриши ҳамвориҳои рӯяҳои** SAB **ва** SCD **аст, бо ҳамвории асос** $ABCD$ **чӣ гуна аст?**

89. Ду чоркунҷаи ҳамвори $ABCD$ **ва** $CDEF$**, ки ҳамвори ҳояшон бурида мешаванд, дода шудаанд. Аз рӯи хати рости** AB **ҳамворӣ гузаронида шудааст, ки он ҳамвории**

$CDEF$-ро мебурад. Дар кадом ҳолат хати буриши ин ҳамвориҳо ба хати рости AB параллел аст?

90. Исбот кунед, ки агар хати рости a ба хати рости b ва ҳамвории α параллел бошад он гоҳ хати рости b ё ба ҳамвории α параллел аст, ё дар он ҷойгир мебошад.

91. Исбот кунед, ки агар ҳар яке аз ду ҳамвориҳои ҳамдигарро мебуридагӣ ба хати рости додашуда параллел бошанд, он гоҳ хати рости буриши ин ҳамвориҳо низ ба хати рости додашуда параллел аст.

92.* Исбот кунед, ки ҳар гуна буриши тетраэдр бо ҳамвории ба ду тегаи бо ҳам чиликии он параллел буда, параллелограмм мебошад.

93.* Чор нуқтаи A, B, C, D-и дар як ҳамворӣ ҷойгир набуда дода шудааст. Исбот кунед, ки ҳар гуна ҳамвории ба хатҳои рости AB ва CD параллелнабуда хатҳои рости AC, AD, BD, BC-ро дар қуллаҳои параллелограмм мебурад.

Масъалаҳо барои такрор

94. Кадом хусусияти ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ ва ду хати рости параллелбударо ду хати рости чилликӣ надоранд?

95. Чор нуқтаи A,B,C,D-и дар як ҳамворӣ ҷойгир набуда дода шудаанд. Исбот кунед, ки хатҳои росте, ки миёнаҷои порчаҳои AB ва CD, AC ва BD, AD ва BC-ро пайваст мекунанд, дар як нуқта бурида мешаванд.

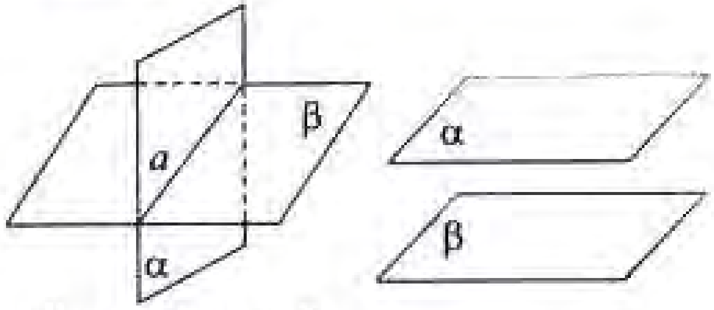
96. Трапетсияи $ABCD$ бо диагонали AC ба ду секунҷаи монанд ҷудо мешавад. Диагонали AC бо асос кунҷи 45^0-ро ташкил мекунад, тарафҳои паҳлуӣ $AD=1$ ва $BC=\sqrt{2}$ мебошанд. Кунҷҳои трапетсияро ёбед.

97. Дар секунҷаи ABC BE - медиана, BD - баландӣ ва $\angle A=30^0$, $\angle C=45^0$ аст. $\angle DBE$-ро ёбед.

7. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду ҳамворӣ. Параллелии онҳо

I. Мувофиқи аксиомаи C_4 (пункти 2) агар ду ҳамвории уногун акаллан як нуқтаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ нҳо аз рӯи хати рост бурида мешаванд. Дар ин ҳолат, чи тавре ки мо аллакай медонем, ин ҳамвориҳоро буридашаванда меноманд. Мантиқан ҳолати дигар низ имконпазир аст, ки мо онро ҳамчун таъриф меорем.

Таъриф. Ду ҳамворӣ параллел номида мешаванд, агар онҳо ҳамдигарро набуранд, яъне нуқтаҳои умумӣ надошта бошанд.



а) Ҳамвориҳои α ва β аз рӯи хати рости а бурида мешаванд

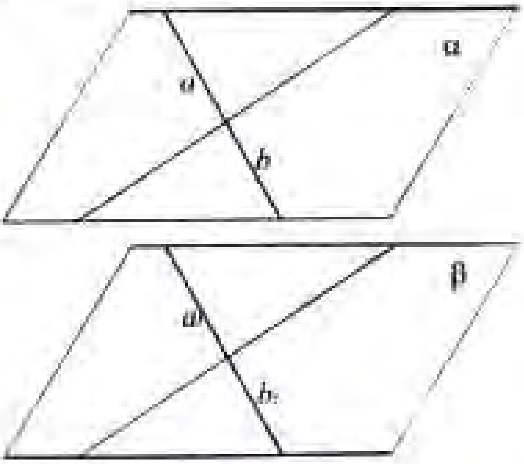
б) Ҳамвориҳои α ва β параллеланд

Расми 38

Ҳар ду имконияти ҷойгиршавии ду ҳамворӣ дар расми 38 нишон дода шудааст. Дар аввал аломати параллелии ҳамвориҳоро дида баромада, баъд ба масъалаи мавҷудияти ҳамвориҳои параллел машғул мешавем.

Теоремаи 7. **(аломати 1-уми параллелии ҳамвориҳо).** Агар ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии як ҳамворӣ мувофиқан ба ду хати рости ҳамвории дигар параллел бошанд, он гоҳ ин ҳамвориҳо параллеланд.

Исбот. Бигузор a ва b хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории α буда, a_1 ва b_1 хатҳои рости ба онҳо параллели ҳамвории β мебошанд (расми 39).



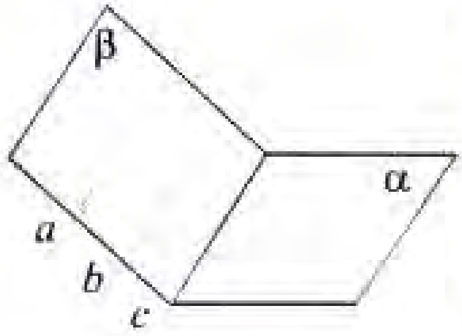
Расми 39

Исбот кардан зарур аст, ки α ва β бо ҳам параллеланд, яъне нуқтаи умумӣ надоранд. Теоремаро аз баръаксаш исбот мекунем, яъне фарз мекунем, ки ҳамвориҳои α ва β параллел нестанд. Дар ин ҳолат онҳо нуқтаҳои умумӣ доранд ва мувофиқи аксиомаи C_4 аз рӯи хати рост бурида мешаванд. Бигузор c хати буриш аст. Азбаски a ва b мувофиқан ба a_1 ва b_1 параллеланду a_1, b_1 дар β ҷойгиранд, пас мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ ҳосил мекунем, ки a ва b ба β параллеланд.

Яъне, на хати a ва на хати b хати рости c-ро мебуранд. Аз ин ҷо ва аз сабаби он ки хатҳои a, b ва c дар як ҳамвории α ҷойгиранд, бармеояд, ки a ва b ба c параллеланд. Ин танҳо дар ҳолате мумкин аст, агар a ва b ҳамҷоя шаванд ё параллел бошанд. Вале мувофиқи шарти теорема ин хатҳо ҳамдигарро мебуранд. Зиддияти ҳосилшуда нишон медиҳад, ки фарзи кардашуда нодуруст аст, яъне ҳамвориҳо параллеланд. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 8. (аломати 2-юми параллелии ҳамвориҳо). Агар ҳамворӣ ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории дигар параллел бошад, он гоҳ ин ду ҳамворӣ параллеланд.

Исбот. Фарз мекунем, ки хатҳои рости a ва b ҳамдигарро мебуранд, онҳо дар ҳамвории α ҷойгиранд ва ба ҳамвории β параллеланд. Нишон медиҳем, ки α ва β параллел мебошанд. Агар ин тавр намебуд, онҳо аз рӯи хати рости c бурида мешуданд. Мувофиқи аксиома доир ба хатҳои рости параллел a ё b бо хати рости c нуқтаи умумӣ дорад. Яъне, a ё b ҳамвории β-ро мебурад, ки ин ба параллел Будани онҳо ба ӯ зид аст. Дурустии тасдиқ нишон дода шудааст.



Расми 40

Эзоҳ. Дар аломатҳои параллелии ҳамвориҳо ҳамдигарро буридани хатҳои рост муҳим аст. Вагарна ду хати рости a ва b-ро, ки ба хати рости c параллеланд (расми 40) гирифта, ҳосил мекунем, ки a ва b ба ҳамвории α параллел буда, вале ҳамвории β ба ҳамвории α параллел нест.

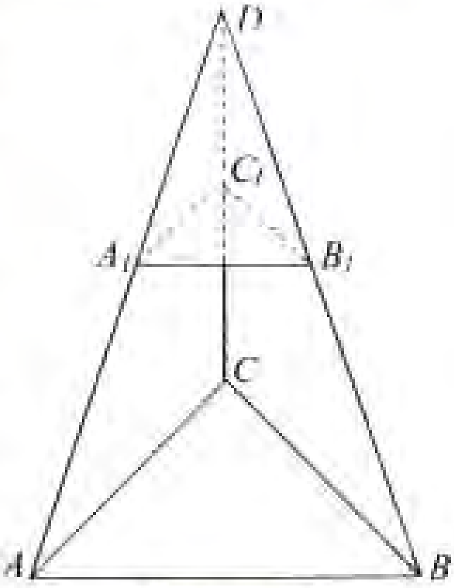
Масъалаи 1. Маълум, ки тарафҳои AB ва BC-и секунҷаи ABC ба ҳамвории α параллеланд. Нишон медиҳем, ки ҳамвории ABC ба α параллел аст.

Ҳал. Дар ҳамвории ABC хатҳои рости AB ва BC ду хати ҳамдигарро мебуридагӣ мебошанд. Онҳо ба ҳамвории α параллеланд. Пас мувофиқи теоремаи 8 ҳамвориҳои ABC ва α параллеланд.

Масъалаи 2. Маълум, ки хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир аст ва α ба ҳамвории β параллел аст. Нишон медиҳем, ки a ба β параллел аст.

Ҳал. Дар ҳақиқат, агар хати рости a ба ҳамвории β параллел набошад, он гоҳ онҳо нуқтаи умумӣ доранд. Ин нуқта нуқтаи умумии α ва β низ ҳаст. Вале онҳо параллеланд. Пас чунин нуқта вуҷуд надорад, яъне a ва β параллел мебошанд.

Масъалаи 3. Дар тетраэдри $ABCD$ $\frac{DB_1}{DB}=\frac{A_1C_1}{AC}$ ва хати рости A_1C_1 ба хати рости AC параллел аст (расми 41). Нишон медиҳем, ки ҳамвориҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ параллеланд.



Расми 41

Ҳал. Аз сабаби параллелии A_1C_1 ва AC секунҷаҳои DA_1C_1 ва DAC монанданд. Барои ҳамин $\frac{DC_1}{DC}=\frac{A_1C_1}{AC}$. Аз ин ҷо ва аз шарти масъала ҳосил мекунем: $\frac{DC_1}{DC}=\frac{DB_1}{DB}$. Ин нишон медиҳад, ки секунҷаҳои DC_1B_1 ва DCB монанданд. Пас C_1B_1 ба CB параллел аст. Инак, ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории ABC (хатҳои AC ва CB) ба ду хати рост ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории $A_1B_1C_1$ параллел мебошанд. Пас мувофиқи теоремаи 7 ин ҳамвориҳо параллеланд.

Масъалаи 4. Маълум, ки хатҳои рости a ва b ҷиликанд. Нишон медиҳем, ки агар ҳар дуи онҳо ба ҳамвориҳои α ва β параллел бошанд, он гоҳ ин ҳамвориҳо параллеланд.

Ҳал. Аз сабаби параллелии a ба α ва ба β мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ, хатҳои рости a_1-ро дар α ва a_2-ро дар β ёфтан мумкин аст, ки онҳо ба a параллеланд. Мувофиқан, аз рӯи параллелии b ба α ва ба β хати рости b_1-ро дар α ва b_2-ро дар β ёфтан мумкин аст, ки онҳо ба b параллелланд. Мувофиқи аломати параллелии хатҳои рост a_1 ба a_2 ва b_1 ба b_2 параллел мебошанд. Мувофиқи шарти масъала хатҳои a ва b чиликианд. Бинобар ин a_1 ва b_1 параллел шуда наметавонанд. Пас онҳо ҳамдигарро мебуранд, чунки дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Айнан ҳамин мулоҳизарониро нисбати хатҳои a_2 ва b_2 такрор карда, ҳосил мекунем, ки ин хатҳо низ ҳамдигарро мебуранд. Аз ин ҷо ва аз параллелии a_1 ба a_2 ва b_1 ба b_2 мувофиқи теоремаи 7 параллелии ҳамвориҳои α ва β бармеояд.

II. Ба масъалаи мавҷудияти ҳамвориҳои параллел бармегардем. Пурсида мешавад, ки оё аз рӯи нуқта, ки дар ҳамвории додашуда ҷойгир нест, ба ин ҳамворӣ ҳамвории парллел гузаронидан мумкин аст ё на. Ба ин савол тасдиқи зерин ҷавоб медиҳад.

Теоремаи 9. Аз нуқтаи аз ҳамвории додашуда берун ҳамвории ба ҳамвории додашуда параллел гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто.

Исбот. Бигузор α ҳамворӣ ва A нуқтаи дар он воқеъ набуда аст. Исботро ба ду қисм ҷудо мекунем:

а) Мавҷудияти ҳамворӣ. Бигузор a ва b ду хати рости дар ҳамвории α ҳамдигарро мебуридагӣ мебошанд. Аз рӯи нуқтаи A хатҳои рости a_1 ва b_1-ро, ки ба хатҳои рости a ва b параллеланд мегузаронем. (Барои ин кифоя аст, масалан, аз рӯи A ва хати a ҳамворӣ гузаронида, дар ин ҳамворӣ хати a_1-ро созем.) Хатҳои рости a_1 ва b_1 ҳамдигарро мебуранд, барои ҳамин онҳо ҳамвории β-ро муайян мекунанд (аксиомаи C_4). Мувофиқи теоремаи 7 ин ҳамвориҳо параллеланд.

б) Ягонагии ҳамворӣ. Фарз мекунем, ки ҳамвории дигари β_1 вуҷуд дорад, ки нуқтаи A-ро дар бар гирифта ба α параллел аст. β_1 ҳам a_1 ва ҳам b_1-ро дар бар гирифта наметавонад. Вагарна бо β ҳамҷоя мешуд. Барои ҳамин ақаллан яке аз онҳо, a_1 ё b_1 ҳамвории β_1-ро мебурад. Бигузор чунин хат хати a_1 аст. Аз параллелии a ва a_1 бармеояд, ки a низ ҳамвории β_1-ро мебурад. Ин бошад ба параллелии α ва β_1 зид аст. Инак, ҳамвории β ба таври ягона муайян карда мешавад.

Аз теорема чунин хулосаҳо бармеоянд:

1. Хатҳои рости ба ҳамвории додашуда параллел, ки аз рӯи нуқтаи додашудаи берун аз ҳамворӣ мегузаранд, дар ҳамворие ҷойгиранд, ки он ба ҳамвории додашуда параллел буда, ин нуқтаро дар бар мегирад.

2. Аз рӯи хати росте, ки ба ҳамвории додашуда параллел аст, ҳамвории ба ин ҳамворӣ параллел гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто.

3. Ҳар гуна хати рости дар яке аз ҳамвориҳои параллел ҷойгирбуда, ба ҳамвории дуюм параллел аст.

4. Ҳар гуна ҳамворие, ки бо яке аз ду ҳамвориҳои параллел буриш дорад, ҳамвории дуюмро низ мебурад.

5. Ҳар гуна ду ҳамворие, ки ба ҳамвории сеюм параллеланд, байни худ параллел мебошанд.

Эзоҳ. Теоремаи 9 ба теоремаи стереометрии доир ба хатҳои рости параллел дар фазо (теоремаи 3) монанд аст.

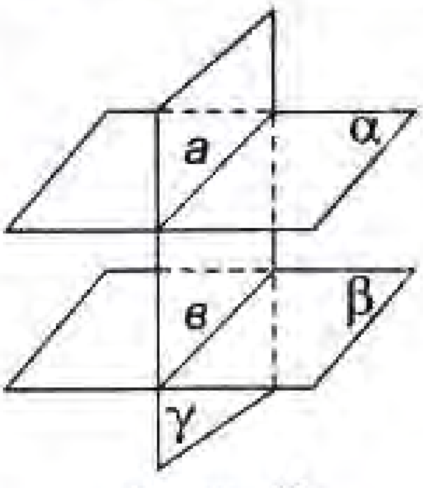
Аз панҷ хосияти дар боло овардашуда танҳо охиринашро исбот мекунем. Фарз мекунем, ки ҳамвориҳои α ва β ба ҳамвории γ параллеланд. Нишон медиҳем, ки α ва β ҳамдигарро намебуранд.

Фарз мекунем, ки ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро мебуранд, яъне онҳо нуқтаи умумӣ доранд. Пас аз рӯи ин нуқта ду ҳамвории гуногуни α ва β-и ба ҳамвории γ параллел мегузарад. Ин бошад ба теоремаи 9 зиддият мекунад. Инак, ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро намебуранд, яъне онҳо байни худ параллел мебошанд.

III. Пурсида мешавад: ҳангоми ду ҳамвории параллелро буридани ҳамвории сеюм чӣ ҳосил мешавад? Албатта, ҷуфти хатҳои рост ҳосил мешавад.

Теоремаи 10. Агар ду ҳамвории параллел бо ҳамвории сеюм бурида шаванд, он гоҳ хатҳои рости буриш параллел мебошанд (расми 42).

Исбот. Бигузор α ва β ҳамвориҳои параллеланд ва ҳамвории γ онҳоро мебурад. Мувофиқан, хатҳои a ва b буриши γ бо α ва бо β мебошанд (расми 42). Хатҳои рости

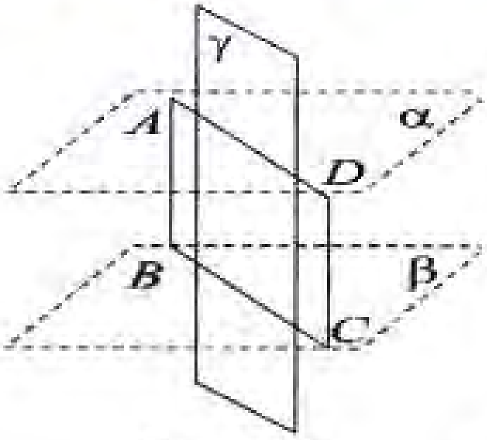


Расми 42

a ва b дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Агар онҳо параллел набошанд, пас нуқтаи умумӣ доранд. Ин нуқта ба ҳар ду ҳамвориҳои α ва β тааллуқ дорад. Ин номумкин аст, чунки онҳо параллеланд. Пас хатҳои рости a ва b параллеланд.

Татбиқи ин теоремаро дар ҳалли ду масъала нишон медиҳем.

Масъалаи 5. Маълум, ки нӯгҳои порчаҳои параллел дар ду ҳамвории бо ҳам параллел ҷойгиранд. Нишон медиҳем, ки онҳо бо ҳам баробаранд.

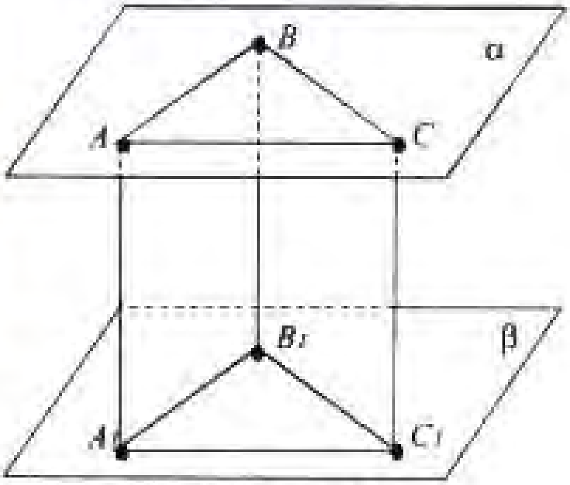


Расми 43

Ҳал. Бигузор α ва β ду ҳамвории параллел мебошанд, AB ва DC ду порчаи параллел, ки нуқтаҳои A, D ба α ва нуқтаҳои B, C ба β мутааллиқанд (расми 43). Хатҳои AB ва DC ҳамчун хатҳои параллел ҳамвории γ-ро муайян мекунанд. A ва D нуқтаҳои умумии ҳамвориҳои α ва γ ҳастанд. Барои ҳамин хати рости AD буриши ин ҳамвориҳост.

Чунин мулоҳизаронихоро нисбати γ ва β такрор карда ҳосил мекунем, ки хати рости BC буриши γ ва β аст. Мувофиқи теоремаи 10 AD ба BC параллел мебошад, чунки α ба β параллел аст. Бар замми ин, мувофиқи шарт AB ба DC параллел аст. Пас $ABCD$ параллелограмм мебошад, яъне $AB=DC$.

Масълаи 6. Аз қуллаи секунҷаи ABC, ки дар яке аз ду ҳамвории бо ҳам параллел ҷойгир аст, хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории дуюмро дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1 мебуранд. Нишон медиҳем, ки секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ баробаранд.



Расми 44

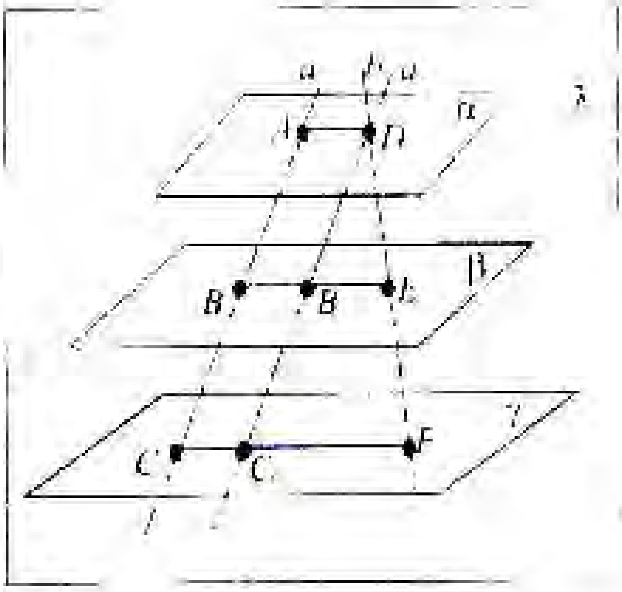
Ҳал. Шарти масъала ва теоремаи 10-ро истифода карда, чи тавре ҳангоми ҳалли масъалаи 5 амал карда будем рафтор намуда, параллелограмм будани чоркунҷаҳои ABB_1A_1 ва ACC_1A_1-ро муқаррар мекунем (расми 44). Барои ҳамин $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$. Баробар будани секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ аз аломати баробарии секунҷаҳо аз рӯи се тараф бармеояд.

IV. Дар планиметрия теоремаи Фалесро нисбати хат-ҳои рости параллел ва хатҳои рости онҳоро мебуридагӣ дида баромада будем. Акнун теоремаи ба он монандро нисбати ҳамвориҳои параллел ва хатҳои рости онҳоро мебуридагӣ меорем.

Теоремаи 11. (Теоремаи Фалес дар фазо). Агар ду хати рост бо ҳамвориҳои параллел бурида шаванд, он гоҳ порчаҳои дар байни ҳамвориҳо буда байни худ мутаносибанд.

Исбот. Бигузор α, β, γ се ҳамвории байни худ параллел мебошанд. Хати рости a онҳоро мувофиқан дар нуқтаҳои A, B, C ва хати рости b дар нуқтаҳои D, E, F мебурад (расми 45). Исбот кардан лозим, ки

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF} \qquad (1)$$



Расми 45

мебошад. Аз рӯи нуқтаи D хати рости a_1-ро, ки ба a параллел аст мегузаронем. Хати рости a ҳамвориҳои β ва γ -ро мебурад. Мувофиқи теоремаи 6 хати рости a_1 низ ин ҳамвориҳоро мебурад. Бигузор B_1 ва C_1 нуқтаҳои буришанд. Аз сабаби параллел будани α, β, γ ва инчунин параллелии a ва a_1 дорем (ниг. ба ҳалли масъалаи 5)

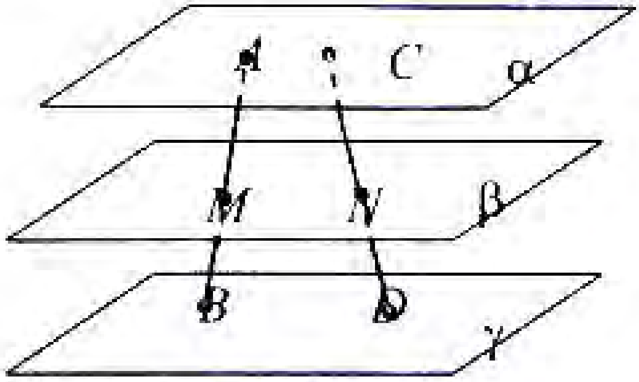
$$AB=DB_1,\ BC=B_1C_1. \qquad (2)$$

Хатҳои рости b ва a_1 ҳамдигарро мебуранд, бинобар онҳо ҳамвории λ -ро муайян мекунанд. Аз сабаби параллелии β ва γ хати буриши λ бо β бо хати буриши λ бо γ параллел

аст (теоремаи 10). Яъне, B_1E ба C_1F параллел буда, секунчаҳои DB_1E ва DC_1F монанданд. Барои ҳамин

$$\frac{DB_1}{B_1C_1}=\frac{DE}{EF}.$$

Аз ин ҷо ва аз (2) баробарии (1) ҳосил мешавад. Теорема исбот шуд.



Расми 46

Масъалаи 8. Ҳамвориҳои α, β ва γ параллеланд. Онҳо бо ду хати ҳамдигарро мебуридагӣ мувофиқан дар нуқтаҳои A, M, B ва C, N, D бурида мешаванд (расми 46). Маълум, ки $AM=3см$, $AB=8см$ ва $ND=12см$ аст. Дарозии CN-ро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи теоремаи Фалес дорем $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$.

Аз ин ҷо

$$CN=\frac{AM}{MB}\cdot ND=\frac{3}{5}\cdot 12=\frac{36}{5}=7{,}2см.$$

1. Дар кадом ҳолат ду ҳамворӣ параллел номида мешаванд? Ҳамдигарро мебуридагӣ – чӣ? 2. Аломатҳои параллелии хатҳои ростро баён кунед. Дар айни ҳол ҳамдигарро буридани хатҳои рост дар онҳо магар муҳим аст? 3. Теоремаро дар бораи мавҷудият ва ягона будани ҳамвориҳои параллел баён кунед. Хулосаҳои онро шарҳ дода, нақшаҳои заруриро кашед. 4. Доир ба буриши ҳамворӣ бо ҳамвориҳои параллел чӣ гуфтан мумкин аст? 5. Теоремаи Фалесро дар фазо шарҳ диҳед.

98. Исбот кунед, ки агар хати рост яке аз ду ҳамвориҳои параллелро бурад, он гоҳ дигарашро ҳам мебурад.

99. Ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро мебуранд. Исбот кунед, ки ҳар гуна ҳамвории γ ақаллан яке аз ин ҳамвориҳоро мебурад.

100. Аз рӯи қуллаҳои параллелограмми $ABCD$, ки дар яке аз ду ҳамвориҳои параллел чойгир аст, хатҳои рости параллел гузаронида шудааст. Ин хатҳои рост ҳамвории дуюмро дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1, D_1 мебуранд. Исбот кунед, ки чоркунчаи $A_1B_1C_1D_1$ низ параллелограмм мебошад.

101. Исбот кунед, ки агар чор хати рост, ки аз рӯи нуқтаи A мегузаранд, ҳамвории α-ро дар қуллаҳои параллелограмм буранд, он гоҳ онҳо ҳар гуна ҳамвории ба α параллел буда ва аз нуқтаи A намегузаштагиро низ дар қуллаҳои параллелограмм мебуранд.

102. Ду ҳамвории параллел дода шудааст. Аз рӯи нуқтаҳои A ва B-и яке аз ин ҳамвориҳои параллел хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории дуюмро дар нуқтаҳои A_1 ва B_1 мебуранд. Дарозии порчаи A_1B_1 чанд аст, агар AB=4*см* бошад?

103. Се хати рост, ки аз рӯи як нуқта мегузаранд, ҳамвории додашударо дар нуқтаҳои A, B, C ва ҳамвории ба он параллелро дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1 мебуранд. Монандии секунчаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$–ро исбот кунед.

104*. Се ҳамвории бо ҳам параллели α_1, α_2, α_3 дода шудаанд. Бигузор X_1, X_2, X_3 нуқтаҳои буриши ин ҳамвориҳо бо хати рости дилхоҳ аст. Исбот кунед, ки нисбати дарозии порчаҳо $X_1X_2:X_2X_3$ аз хати рост вобаста нест, яъне барои ҳар гуна ду хати рост якхела аст.

105. Ду ҳамвории бо ҳам параллел ва нуқтаи P-и дар байни онҳо чойгир буда дода шудаанд. Ду хати рости аз нуқтаи P мегузаштагӣ ҳамвории ба P наздиктар бударо дар нуқтаҳои A_1 ва A_2, ҳамвории дуртар бударо дар нуқтаҳои B_1 ва B_2 мебурад. Дарозии порчаи B_1B_2-ро ёбед, агар: 1) A_1A_2=6*см* ва $PA_1:A_1B_1$=3:2; 2) A_1A_2=10*см* ва $PA_1:A_1B_1$=2:3 бошад.

106. Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеди росткунча аст (расми 47). Исбот намоед, ки нуқтаҳои A, C, B_1, D_1 дар як ҳамворӣ чойгир нестанд.

107. Исбот кунед, ки дар параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ҳамвориҳои A_1BD ва CB_1D_1 бо ҳам параллеланд.

108. Исбот кунед, ки дар параллелепипеди росткунҷа диагонали AC_1 бо ҳамвориҳои A_1BD ва CB_1D_1 ба се порчаи баробар ҷудо карда мешавад.

109*. Бигузор K, L, M, N, O, P миёнаҷои теғаҳои дар расми 47 нишон додашудаи параллелепипед мебошанд. Исбот кунед, ки ин нуқтаҳо дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

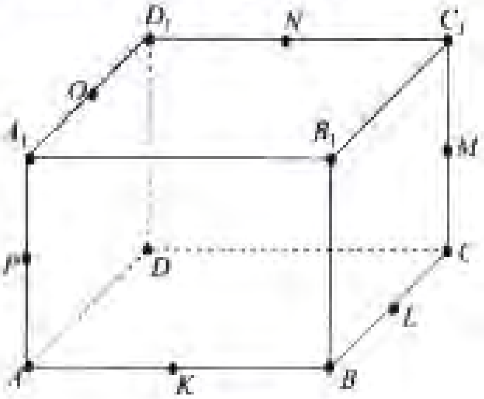
Масъалаҳо барои такрор

110. Исбот кунед, ки хати рости AB ба ҳамвории CDA_1 параллел аст (расми 47).

111. Нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Нуқтаҳои K, M, P миёнаҷои порчаҳои AB, BC, BD мебошанд. Исбот кунед, ки ҳамвории KMP ба хатҳои рости AC ва BD параллел аст.

112. Дар тарафи BC-и квадрати $ABCD$ нуқтаи дилхоҳи M гирифта шудааст. Биссектрисаи кунҷи DAM тарафи CD-ро дар нуқтаи N мебурад. Исбот кунед, ки $AM=BM+DM$ аст.

113. Дар секунҷаи ABC тарафи $BC=a$, $\angle B=\beta$, m_a- медианаи ба тарафи BC фаровардашуда маълуманд. Тарафҳои дигар ва кунҷҳои секунҷа ёфта шаванд.



Расми 47

§3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

8. Перпендикулярии ду хати рост, хати рост ва ҳамворӣ. Перпендикуляр ба ҳамворӣ

Дар қатори муносибати параллелӣ, дар геометрия *муносибати перпендикулярӣ* дорои мавқеи муҳим мебошад. Бар хилофи ҳолати ҳамворӣ, ки танҳо доир ба перпендикулярии ду хати рост сухан рондан мумкин буд, дар фазо се

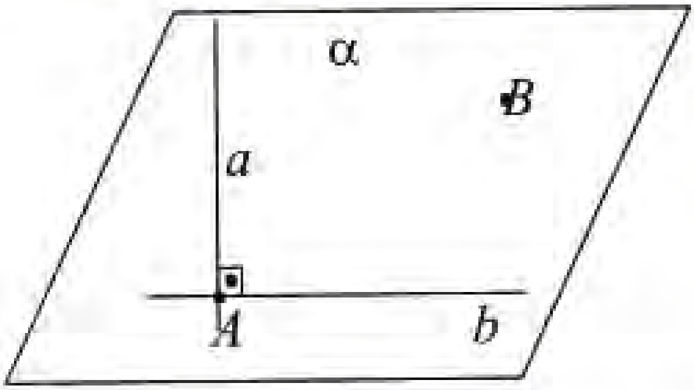
I.имконият ҳаст: перпендикулярии: а) ду хати рост; б) хати рост ва ҳамворӣ; в) ду ҳамворӣ. Инро дар мисоли паралле-лепипеди росткунҷа бараллo пайхас кардан мумкин аст. Мо акнун ин муносибатҳоро пай дар пай, аз перпендикуля-рии ду хати рост сар карда меомӯзем.

Чи тавре медонем, дар ҳамворӣ агар ҳангоми бурида шудани ду хати рост кунҷҳои рост ҳосил шавад, он гоҳ онҳоро перпендикуляр меноманд. Баъд, дар ҳамворӣ аз нуқтаи додашуда, новобаста ба он ки вай дар хати рост ҷойгир аст ё на, ба хати рост перпендикуляр гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто. Чун дар ҳамворӣ таърифи зеринро дохил мекунем.

Таърифи 1. Ду хати рост дар фазо *перпендикуляр* номида мешаванд, агар онҳо дар зери кунҷи рост бурида шаванд.

Қайд мекунем, ки бурида шудани хатҳои рост дар ин таъриф ниҳоят муҳим аст.

Масъалаи мавҷудият ва ягона будани перпендикулярро ба хати рости *a* дар фазо, ки аз рӯи нуқтаи додашудаи *A* мегузарад меомӯзем.



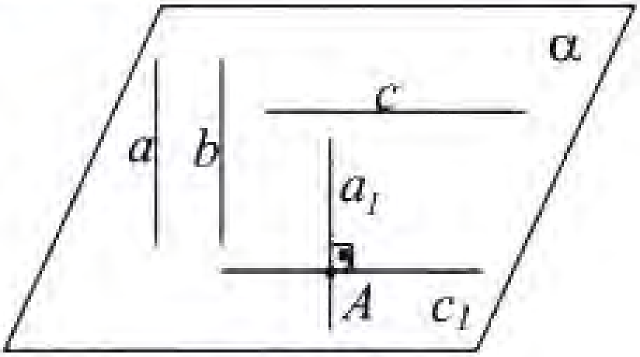
Расми 48

а) Бигузор нуқтаи *A* дар хати рости *a* ҷойгир аст (расми 48). Нуқтаи аз хати рости *a* беруни *B*-ро гирифта аз рӯи ин нуқта ва хати рости *a* ҳамвории α-ро мегузаронем (теоремаи 1). Дар ҳамвории α аз рӯи нуқтаи *A*, мувофиқи теоремаи планиметрӣ хати рости *b*-ро, ки ба *a* перпендикуляр аст, гузаронидан мумкин аст. Мо дида будем, ки аз рӯи як хати рост миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст (ниг. ба пункти 2). Дар ҳар яки ин ҳамвориҳо аз рӯи нуқтаи *A* ба хати рости *a* перпендикулярро гузаронидан мумкин аст. Онҳо гуногунанд, чунки дар ҳолати якхела будани онҳо ҳамвориҳо ҳамҷоя мешуданд, ки вазъ ин тавр нест. Ин перпендикулярҳо хатҳои ростанд, ки аз атрофи нуқтаи *A* мисли сихҳои чархи велосипед ҳамчун марказ сар мешаванд ва миқдорашон беҳисоб (беҳад бисёр) аст. Тавофути ҳолати фазогӣ аз ҳолати ҳаморӣ маҳз дар ҳамин аст.

б) Бигузор нуқтаи A берун аз хати рости a ҷойгир аст. Мувофиқи теоремаи 1 ягона ҳамвории α вуҷуд дорад, ки аз рӯи нуқтаи A ва хати рости a мегузарад. Дар ҳамвории α аз рӯи теоремаи планиметрӣ аз нуқтаи A ба хати рости a якто перпендикуляр гузаронидан мумкин аст. Мебинем, ки вазъ дар ин ҷо айнан бо вазъ дар ҳамворӣ якхела аст. Яъне, дар фазо ҳам аз нуқтаи берун аз хати рост ба он танҳо якто перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.

Тасдиқи зерин хосияти хатҳои рости параллелро нисбати перпендикулярӣ муайян мекунад.

Теоремаи 12. Агар яке аз ду хатҳои рости параллел ба хати рости сеюм перпендикуляр бошад, он гоҳ хати рости дигарӣ ҳам ба ин хат перпендикуляр аст.

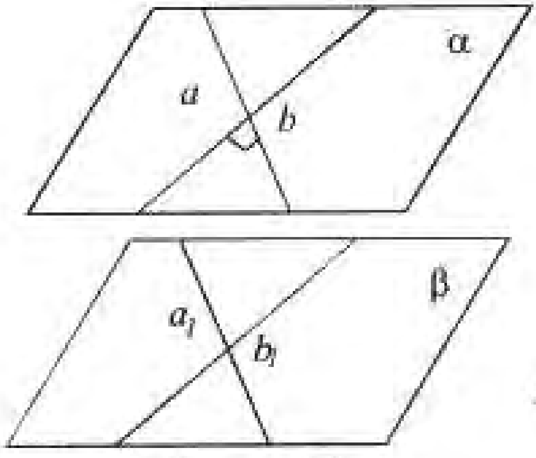


Расми 49

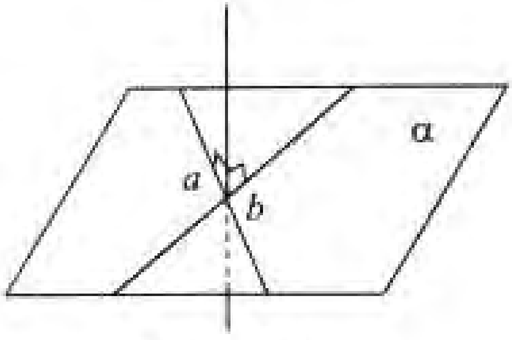
Исбот. Фарз мекунем, ки хатҳои рости a ва b параллеланд ва a ба хати рости c перпендикуляр мебошад (расми 49). Аз нуқтаи дилхоҳи фазо A хатҳои рости a_1 ва c_1-ро мегузаронем, ки онҳо ба a ва c мувофиқан параллеланд. Аз параллелии a_1 ва a, инчунин a ва b мувофиқи теоремаи 4 бармеояд, ки хатҳои рости a_1 ва b параллеланд. Яъне, кунҷи байни b ва c ба кунҷи байни a_1 ва c_1 баробар аст. Перпендикулярии хатҳои рости b ва c нишон дода шудааст.

Хосияти зерини муҳими хатҳои рости перпендикулярро дар фазо беисбот меорем, гарчанде исботаш на он қадар мураккаб аст. Вай хосияти маълумро аз планиметрия дар фазо умумият мебахшад.

Теоремаи 13. Агар ду хати рости ҳамдигарро мебуридагӣ ба ду хати рости перпендикуляр мувофиқан параллел бошанд, он гоҳ онҳо низ перпендикуляранд (расми 50). Яъне, агар $a \perp b$, $a \| a_1$, $b \| b_1$ бошад, он гоҳ $a_1 \perp b_1$ аст.



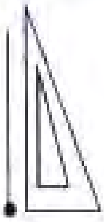
Расми 50



Расми 51

Акнун ба перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ машғул мешавем.

Таърифи 2. Хати росте, ки ҳамвориро мебурад, ба ин ҳамворӣ *перпендикуляр* номида мешавад, агар вай ба ҳар як хати росте, ки дар ин ҳамворӣ ҷойгир аст ва аз нуқтаи буриш мегузарад, перпендикуляр бошад (расми 51).

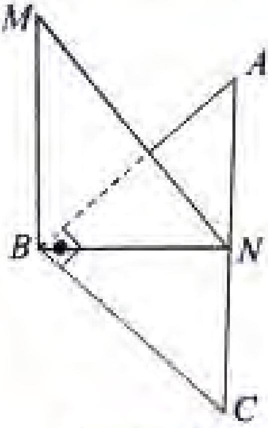


Расми 52

Чунин масъала мегузорем: чӣ тавр дар амалия перпендикулярии хати ростро ба ҳамворӣ муайян кардан мумкин аст? Барои ин ду санҷиш – гузоштани хаткашаки секунҷавӣ, чи тавре, ки дар расми 52 нишон дода шудааст, кифоя аст. Ин тарзи санҷиш ба чунин аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ меорад, ки мо онро бе исбот қабул мекунем:

Теоремаи 14. Агар хати рост ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба ҳамворӣ перпендикуляр аст.

Масъалаи 1. Дар секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлӯи *ABC*, *AB=BC=4см* аст. Нуқтаи *M* дар ҳамвории *ABC* ҷойгир нест ва нуқтаи *N* миёнаҷои тарафи *AC* аст. Маълум, ки порчаи *MB* ба тарафи *AB* ва *BC* перпендикуляр буда, $MB = 2\sqrt{2}$ *см* мебошад (расми 53). Дарозии порчаи *MN*-ро меёбем.



Расми 53

Ҳал. Тарафи *AC* гипотенуза аст. Барои

ҳамин мувофиқи теоремаи Пифагор

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\ см.$$

Аз сабаби он ки BN медиана мебошад дорем

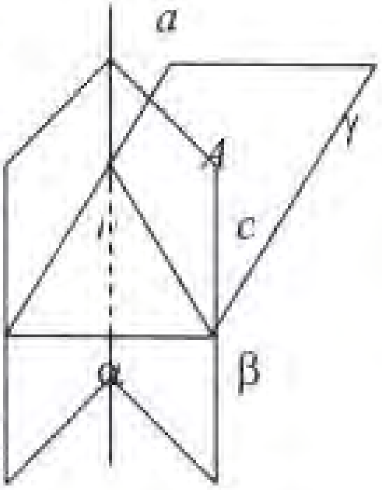
$$BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}\ см.$$

MB ба BC ва AB перпендикуляр мебошад, барои ҳамин мувофиқи теоремаи 14 MB ба ҳамвории ABC перпендикуляр аст, яъне MB ба BN ҳам. Боз аз рӯи теоремаи Пифагор

$MN^2=MB^2+BN^2=8+8=16$. Аз ин ҷо $MN=4см$.

I.Акнун ба сохтани ҳамвории ба хати рост перпендикуляр, ки он аз нуқтаи додашуда мегузарад, машғул мешавем.

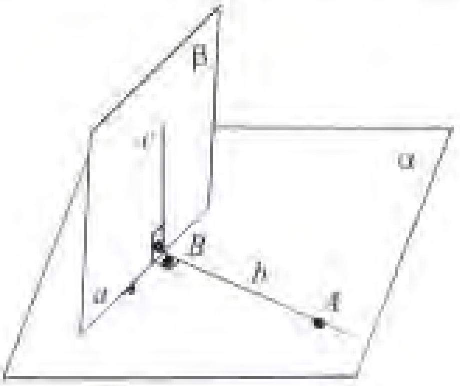
Масъалаи 2. Исбот мекунем, ки аз нуқтаи дилхоҳи фазо ягона ҳамвории ба хати рости додашуда перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.



Расми 54

Ҳал. Мисли қисми I ду ҳолатро дида мебароем.

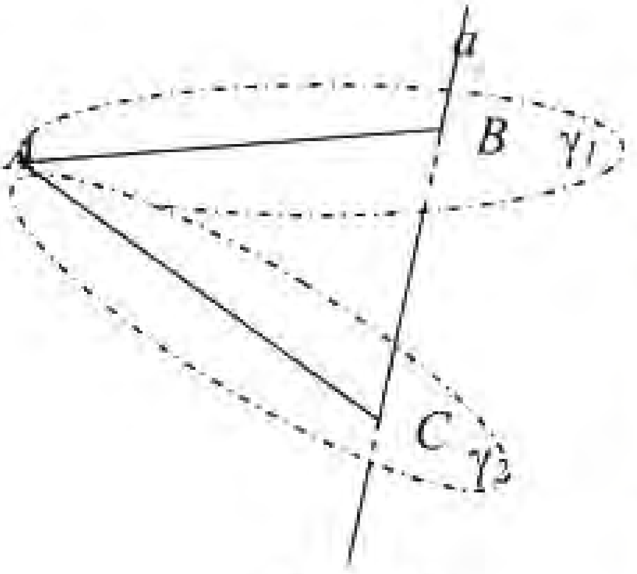
а) *Нуқта дар хати рост ҷойгир аст.* Бигузор хати рости a дода шудааст ва нуқтаи A дар он ҷойгир аст (расми 54). Ду ҳамвории гуногуни α ва β-ро мегирем, ки хати a хати буриши онҳо аст. Мисли қисми I хати рости b-ро дар ҳамвории α месозем, ки низ ба a перпендикуляр буда, аз нуқтаи A мегузарад. Мувофиқан, хати рости c-ро дар β месозем, ки низ ба a перпендикуляр буда, аз нуқтаи A мегузарад. Мувофиқи аксиомаи C_4 аз болои хатҳои рости b ва c ягона ҳамвории γ-ро гузаронидан мумкин аст. Инак, хати рости a ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии b ва c-и ҳамвории γ перпендикуляр аст. Пас мувофиқи теоремаи 14 ҳамвории γ ва хати рости a байни худ перпендикуляранд.



Расми 55

б) *Нуқта дар хати рост ҷойгир нест.* Бигузор a хати додашуда ва A

нуқтаи дар он ҷойгир набуда мебошанд (расми 55). Хати рости a ва нуқтаи A ҳамвории α-ро муайян мекунанд. Дар ҳамвории α хати рости b-ро месозем, ки аз рӯи нуқтаи A гузашта ба хати a перпендикуляр аст ва онро дар нуқтаи B мебурад (қисми I). Бигузор β ҳамвории дигарест, ки хати a-ро дар бар мегирад. Хати рости c-ро дар β месозем, ки a-ро дар нуқтаи B бурида, ба он перпендикуляр аст. Хатҳои рости b ва c ҳамдигарро дар нуқтаи B мебуранд, пас онҳо мувофиқи аксиомаи C_4 ҳамвории γ-ро яккимата муайян мекунанд. Аз сабаби перпендикулярии a ба ду хати b ва c-и ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории γ, мувофиқи теоремаи 14 хати рости a ба ҳамвории γ перпендикуляр аст.



Расми 56

Акнун ягона будани чунин ҳамвориро нишон медиҳем. Баръаксашро фарз мекунем. Яъне фарз мекунем, ки чунин ҳамвориҳо ақаллан дутоанд. Онҳоро бо γ_1 ва γ_2 ишорат менамоем (расми 56). Бигузор B нуқтаи буриши хати рости a бо γ_1 ва C нуқтаи буриши ин хат бо γ_2 аст. Ҳамин тариқ, дар ҳамвории α ба хати рости a ду перпендикуляри гуногуни AB ва AC-ро ҳосил мекунем, ки ин ба теоремаи планиметрии оид ба ягона будани перпендикуляр дар як ҳамворӣ зиддият мекунад.

Масъала пурра ҳал карда шуд. Акнун ҳақ дорем, ки *далели умдаро* баён намоем:

Теоремаи 15. Аз нуқтаи дилхоҳи фазо ҳамворӣ ба хати рости додашуда перпендикулярро гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто.

Эзоҳ. Дар қисми I-и ҳамин пункт чи тавр ба хати рости додашуда сохтани хати рости перпендикулярро, ки аз нуқтаи додашуда мегузарад, нишон дода будем. Айнан

ҳамин тавр масъалаи аз нуқтаи додашуда ба ҳамворӣ сохтани хати рости перпендикуляр ва ягона будани онро муоина кардан мумкин аст. Мо тарзи ин созишро намеорем, вале аз ин натиҷаи умда, яъне аз дурустии он, дар оянда истифода мекунем, масалан, дар қисми II-и пункти баъдина ва дар пункти 10.

1. Байни перпендикулярии хатҳои рост дар фазо ва дар ҳамворӣ чӣ фарқият ҳаст? 2. Теоремаи умумиро доир ба мавҷудият ва ягонагии перпендикуляри ба хати рости додашуда аз нуқтаи додашуда гузаронидашударо баён кунед. Тасдиқот доир ба мавҷудият ва ягонагӣ оё дуруст аст, агар хатҳои рост дар фазо муоина шаванд? 3. Дар теоремаи доир ба хатҳои росте, ки ба хатҳои рости перпендикуляр параллеланд, чӣ тасдиқ карда мешавад? 4. Таъриф ва аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамвориро дар фазо оред. Бартарии аломат (теоремаи 14) нисбати таъриф дар чӣ ҳозир мегардад? 5. Мавҷудият ва ягонагии ҳамвориеро, ки аз нуқтаи додашуда гузашта ба хати рост перпендикуляр аст, исбот намоед.

114. Оё тасдиқ кардан мумкин аст, ки хати росте, ки доираро дар марказ мебурад ва ба: а) диаметр; б) ду диаметр; в) радиус; г) ду радиус перпендикуляр аст, ба ҳамвории доира перпендикуляр мебошад?

115. Аз нуқтаи *A*-и хати рости *a* ҳамвории β ва хати рости *b* гузаронида шудаанд. Исбот кунед, ки хати рости *b* дар ҳамвории β ҷойгир аст.

116. Дар фазо се хати ростеро созед, ки онҳо аз рӯи як нуқта гузашта, ҷуфт-ҷуфт перпендикуляр бошанд.

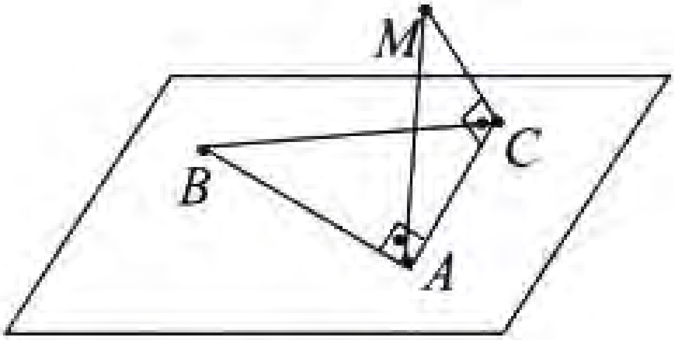
117. Нуқтаҳои *K* ва *M* миёнаҷои теғаҳои *AB* ва *DC*-и тетраэдри рости *ABCD* мебошанд. Исбот кунед, ки хати рости *KM* ба хатҳои рости *AB* ва *CD* перпендикуляр аст.

118. Секунҷаи росткунҷаи *ABC* дода шудааст. Нуқтаи *M* берун аз ҳамвории секунҷа ҳамин тавр ҷойгир аст, ки хати рости *MA* ба *AB* ва хати рости *MC* ба *AC* перпендикуляранд. Исбот кунед, ки ҳамвории секунҷаи *ABC* ба *MC* перпендикуляр аст (расми 57).

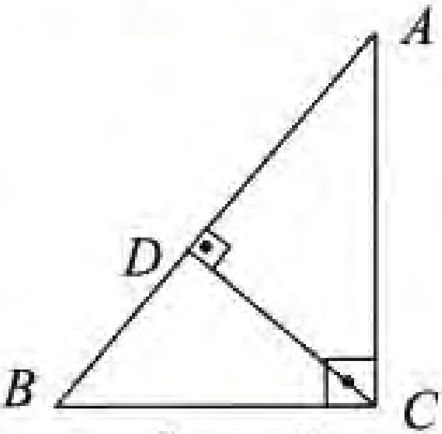
119. Чор хати рости параллел дода шудааст. Исбот кунед, ки агар ягон ҳамворӣ ин хатҳои ростро дар қуллаҳои параллелограмм бурад, он гоҳ ҳамворие, ки ба ин хатҳои рост параллел нест, ин хатҳоро дар нуқтаҳои ягон параллелограмм мебурад.

120. Яке аз катетҳои секунҷаи росткунҷаи ABC ба 15см ва BD - проексияи катети дигар ба гипотенузаи AB ба 16*см* баробар аст (расми 58). Радиуси давраи дарункашидаи секунҷаро ёбед.

121. Баландии ромб ба 10*см*, кунҷи тезаш ба 30^0 баробар аст. Масоҳати ромбро ёбед.



Расми 57



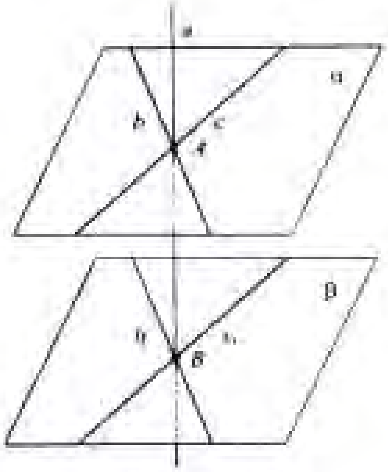
Расми 58

9. Теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр. Перпендикуляр ва моил ба ҳамворӣ

I. Ба ду савол ҷавоб медиҳем: 1) доир ба хати росте, ки ба яке аз ҳамвориҳои параллел перпендикуляр аст, чӣ гуфтан мумкин аст? 2) доир ба перпендикулярҳо ба як ҳамворӣ чӣ гуфтан мумкин аст? Ҷавобҳо ва тарзи асосноккунии онҳо ба ин ду савол дар теоремаҳои зерин омадааст, ки онҳо ҳамчун теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр маъмуланд.

Теоремаи 16. Агар хати рост ба яке аз ду хамворихои бо хам параллел перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба дигараш хам перпендикуляр аст.

Исбот. Фарз мекунем, ки α ва β ду ҳамвории параллел буда, хати рости a ба α перпендикуляр аст (расми 59). Нишон медиҳем, ки a ба β ҳам перпендикуляр мебошад. Аз са-



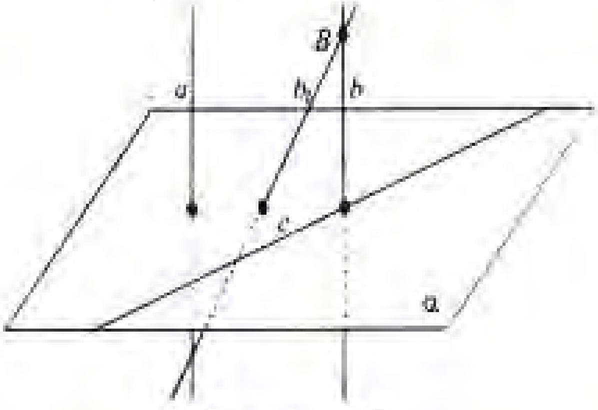
Расми 59

баби перпендикулярии хати рости a ба α вай α-ро дар нуқтаи A мебурад. Мувофиқи хулосаи 4-и теоремаи 9 хати рости a бо ҳамвории параллел β дар нуқтаи B буриш дорад.

Дар ҳамвории α хатҳои рости b ва c-ро, ки дар нуқтаи A ҳамдигарро мебуранд мегирем. Бигузор b_1 хати буриши ҳамвории β бо ҳамворие, ки онро хатҳои a ва b муайян мекунанд мебошад. Мувофиқан, бигузор c_1 хати буриши β бо ҳамворие, ки аз рӯи хатҳои рости a ва c муайян мешавад аст. Мувофиқи теоремаи 10 агар ҳамвориҳои пераллел бо ҳамвории сеюм бурида шаванд, он гоҳ хатҳои буриш параллеланд, яъне b_1 ба b ва c_1 ба c параллел мебошанд. Азбаски хати a ба α перпендикуляр аст, пас мувофиқи таъриф вай ба хатҳои b ва c перпендикуляр мебошад. Аз ин бармеояд, ки хати рости a ба хати рости ба онҳо параллели b_1 ва c_1 низ перпендикуляр аст. Инак, хати рости a ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории β перпендикуляр мебошад. Аз ин ҷо мувофиқи теоремаи 14 a ба β перпенди-куляр аст. Теорема пурра исбот шуд.

Теорема 17. Агар яке аз хатҳои рости паралле́л ба ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он гоҳ хати рости дигарӣ ҳам ба ин ҳамворӣ перпендикуляр аст.

Исбот. Бигузор хатҳои рости a ва b бо ҳам параленд, α ҳамвориест, ки хати рости a ба он перпендикуляр мебошад. Нишон додан даркор, ки хати рости b ба α низ перпендикуляр мебошад.



Расми 60

Аз сабаби он ки a ба α перпендикуляр мебошад, a ба ҳар як хати дар α ҷойгирбуда перпендикуляр мебошад. Мувофиқи теоремаи 12 хати рости b

низ ба ҳар як хати рости дар α ҷойгир буда перпендикуляр аст. Мувофиқи таърифи перпендикулярии хати рост ба ҳамворӣ хати b ба α перпендикуляр мебошад. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 18. Ду хати росте, ки ба ҳамон як ҳамворӣ перпендикуляранд, параллел мебошанд.

Исбот. Бигузор a ва b ду хати росте мебошанд, ки ба ҳамвории α перпендикуляранд (расми 60). Фарз мекунем, ки тасдиқи теорема нодуруст аст, яъне a ва b параллел нестанд. Дар хати b нуқтаи B-ро, ки ба α тааллуқ надорад мегирем ва аз рӯи он хати рости b_1-и ба a параллелро мегузаронем. Агар хатҳои b_1 ва b ҳамҷоя нашаванд, он гоҳ аз рӯи онҳо ягона ҳамвории β-ро гузаронида метавонем. Бигузор хати рости c буриши ҳамвориҳои α ва β мебошад. Азбаски b_1 ба a параллел ва a ба α перпендикуляр аст, пас мувофиқи теоремаи 17 b_1 ба α перпендикуляр аст, яъне b_1 ба c перпендикуляр аст. Вале b ба α перпендикуляр аст, мувофиқи шарт. Ҳамин тариқ, аз нуқтаи B ба ҳамвории α дуто перпендикуляр (b ва b_1) мегузарад, ки ин номумкин аст. Пас b_1 бо b ҳамҷоя мешаванд. Ин параллели a ва b-ро нишон медиҳад. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Нишон медиҳем, ки агар ҳамвориҳои α ва β ба хати рости a перпендикуляр бошанд, он гоҳ онҳо параллеланд.

Ҳал. Аз сабаби перпендикулярии хати a ба α ва β ин хат онҳоро мебурад. Бигузор A ва B нуқтаҳои буришанд. Фарз мекунем, ки α ва β параллел нестанд, яъне нуқтаи умумии M-ро доранд. Хати AM дар α ҷойгир аст, барои ҳамин a ба AM перпендикуляр аст. Мисли ҳамин, BM дар β буда, a ба BM перпендикуляр мебошад. Ҳамин тариқ, секунҷаи ABM дорои ду кунҷи рост аст, ки ин имконнопазир аст. Инак, ҳамвориҳои α ва β нуқтаи умумӣ надоранд, яъне онҳо параллеланд.

Эзоҳ. Амалан бо ҳалли масъалаи 1 нишон додаем, ки теоремаи 18 дуруст аст, агар дар он ба ҷои ду хати рост ду ҳамворӣ ва ба ҷои ҳамворӣ хати рост муоина карда шавад. Ҳаминро нисбати теоремаҳои 16 ва 17 ҳам гуфтан ҷоиз аст.

II. Мафҳуми *масофаро дар фазо* **муайян мекунем. Чи тавре медонем масофа аз нуқтаи A то хати рости a дар**

ҳамворӣ дарозии перпендикуляри *AB*, ки аз нуқтаи *A* ба нуқтаи *B*-и хати рости *a* гузаронида шудааст мебошад. Айнан ҳамин тавр мафҳуми масофа аз нуқта то ҳамворӣ дар фазо дохил карда мешавад.

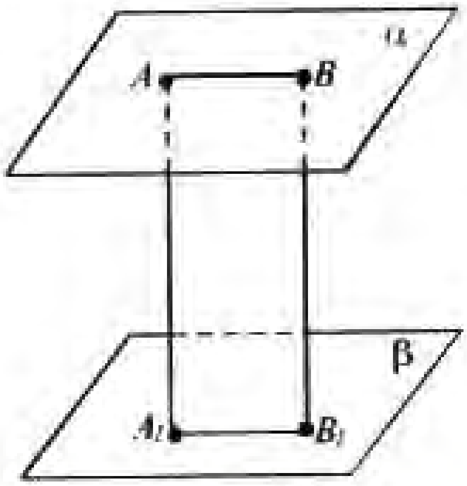
Таърифи 1. *Перпендикуляр* гуфта порчаеро меноманд, ки аз нуқтаи додашуда ба ҳамвории додашуда гузаронида шуда, дар хати росте ҷойгир аст, ки ба ҳамворӣ перпендикуляр мебошад. Охири ин порча, ки дар ҳамворӣ ҷойргир аст, *асоси перпендикуляр* ном дорад. *Масофа аз нуқта то ҳамворӣ* гуфта дарозии перпендикуляри аз ин нуқта ба ҳамворӣ гузаронидашударо меноманд.

Таърифи мазкур ба натиҷаи умдае, ки дар эзоҳи қисми II-и пункти 8 беисбот оварда шудааст, такя менамояд. Аз он ва аз сабаби ягона будани перпендикуляр, бармеояд, ки масофа *яққимата* муайян карда мешавад.

Баъд, аз теоремаи 18 бармеояд, ки масофа аз ду нуқтаи гуногуни хати рост то ҳамвории ба вай параллел аз интихоби нуқтаҳо вобаста набуда якхела аст. Барои ҳамин табиӣ аст, агар *масофаро аз хати рост то ҳамвории ба вай параллел* ҳамчун масофаи нуқтаи дилхоҳи хати ростро то ҳамворӣ қабул намоем. Масалан, вақте мегӯянд, ки симҳои троллейбус аз замин 5 метр аст, ин маънои онро дорад, ки масофаи байни хатҳои рост (сим) ва ҳамворӣ (сатҳи замин), ки ба он параллел аст, 5 метр мебошад.

Масофаи байни ду хати рости параллел ҳам айнан ҳамин хел, ҳамчун масофа аз нуқтаи дилхоҳи як хати рост то хати рости дигар дохил карда мешавад. Дар ин ҷо ҳам масофа аз интихоби нуқта дар яке аз ин хатҳои рост вобастагӣ надорад. Чунки аз рӯи ин ду хати рост мувофиқи аксиомаи C_2 танҳо якто ҳамворӣ мегузарад ва дар ин ҳамворӣ масъалаи ёфтани масофаи ду хати рости параллел масъалаи планиметрӣ аст.

Акнун мафҳуми *масофаи байни ду ҳамвориҳои параллелро* дохил мекунем. Дар ҳамвориҳои бо ҳам па-

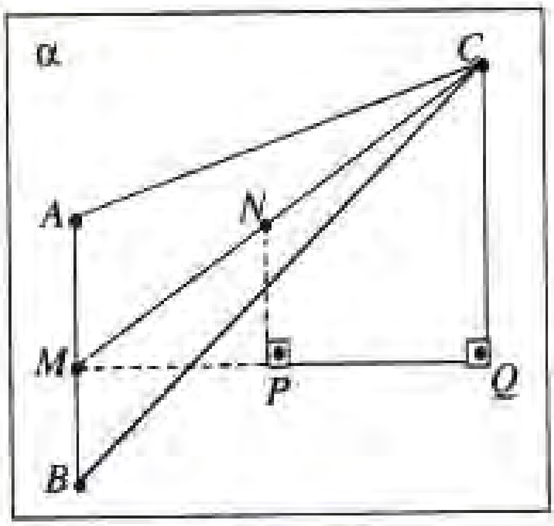


Расми 61

раллели α ва β мувофиқан нуқтаҳои дилхоҳи A,B ва A_1,B_1-ро чунон интихоб мекунем, ки хатҳои AA_1 ва BB_1 ба β перпендикуляр бошанд (расми 61). Мувофиқи теоремаи 18 ин хатҳо параллеланд, пас мувофиқи аксиомаи C_2 аз болои онҳо ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст. Ин ҳамворӣ ҳамвориҳои α ва β-ро аз рӯи хатҳои рости параллели AB ва A_1B_1 мебурад. Яъне ABB_1A_1 росткунҷа аст. Пас $AA_1=BB_1$. Аз сабаби дилхоҳ будани нуқтаҳо аз ин ҷо бармеояд, ки масофа аз ягон нуқтаи α ё β то ҳамвории дигар бузургии доимӣ мебошад. Ин далел имконият медиҳад, ки масофаи байни ду ҳамвории параллел ҳамчун масофаи нуқтаи дилхоҳи якеи онҳо то дигарӣ дохил карда шавад.

Мисоли ҳамвориҳои параллел, масалан, ҳамвориҳои фарш ва шифти хона мебошад. Ҳар як нуқтаи шифт дар масофаи баробар аз фарш ҷойгир аст. Ин масофа баландии хона аст.

Масъалаи 2. Тарафи AB-и секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир аст. Масофаи маркази секунҷа то ҳамвории α 4см аст. Масофаро аз нуқтаи C то ҳамвории α меёбем.



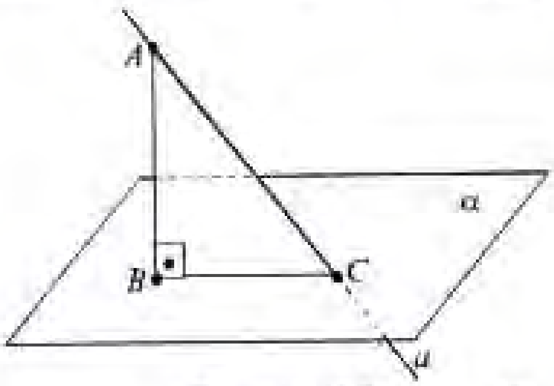
Расми 62

Ҳал. Бо M миёнаҷои тарафи AB, бо N маркази секунҷа, бо P ва Q асоси перпендикулярҳои аз нуқтаҳои N ва C ба α фаровардашударо ишорат мекунем (расми 62). Нуқтаҳои C, M ва N дар як хати рост ҷойгиранд. Хатҳои рости NP ва CQ ҳамчун хатҳои ба α перпендикуляр параллеланд (теоремаи 18), яъне дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Нуқтаҳои C ва N дар ин ҳамворӣ ҷойгиранд, пас нуқтаи M ҳам дар ин ҳамворӣ ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, нуқтаҳои M,P ва Q дар буриши ин ҳамворӣ бо ҳамворӣ α воқеанд. Пас NP ба CQ параллел мебошад. Ин бошад монандии секунҷаҳои MNP ва MCQ-ро нишон медиҳад, яъне $\frac{NP}{CQ}=\frac{MN}{MC}$ ва аз ин ҷо $CQ=\frac{MC}{MN}\cdot NP$

Мувофиқи хосияти медиана $\frac{MN}{MC}=\frac{1}{3}$ **ё** $\frac{MC}{MN}=3$**. Ин ва шар-ти масъаларо истифода карда меёбем** $CQ=3\cdot4=12см$.

III. Якчанд мафҳуми навро дохил мекунем.

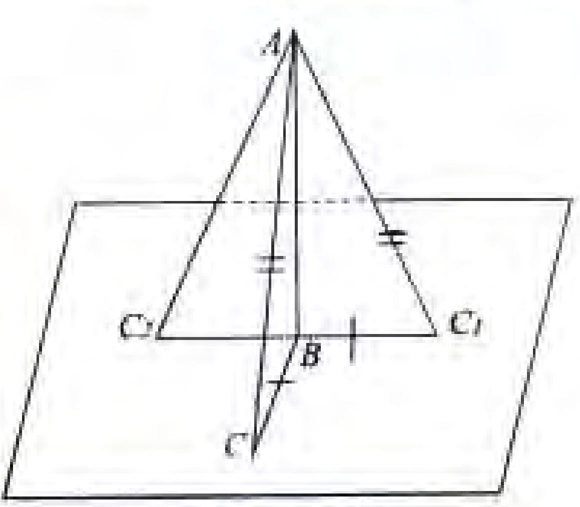
Таърифи 2. Хати росте, ки ҳамвориро бурида ба он перпендикуляр нест, *хати рости моил* **ном дорад. Ҳар гуна порчаи ин хат, ки яке аз охирҳояш (нӯгҳояш) дар ҳамворӣ ҷойгир аст,** *моил* **номида мешавад. Порчае, ки нуқтаҳои асосҳои перпендикуляр ва моили аз худи ҳамон як нуқта гузаронидашударо пайваст мекунад,** *проектсияи моил* **ном дорад. Дар расми 63 аз нуқтаи** A **ба ҳамвории** α **перпендикуляри** AB **ва моили** AC **гузаронида шудааст. Нуқтаи** B **асоси перпендикуляр, нуқтаи** C **асоси моил,** BC **проектсияи моили** AC **дар ҳамвории** α **аст. Баъзан** BC**-ро проек-тсияи** *ортогонолии моил* **ҳам меноманд, чунки ҳар гуна нуқтаи порчаи ВС нуқтаи буриши перпендикуляри аз нуқтаи порчаи** AC **ба ҳамвории** α **гузаронидашудагӣ мебошад.**



Расми 63

Мисли планиметрия дар фазо ҳам теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 19. Бигузор аз нуқтае, ки дар ҳамворӣ ҷойгир нест, перпендикуляр ва моилҳо ба ҳамворӣ гузаронида шудаанд. Он гоҳ: 1) моилҳое, ки проектсияи баробар доранд, баробаранд; 2) аз ду моил ҳамонаш калон аст, ки дорои проектсияи калон аст; 3) перпендикуляр аз ҳар гуна моил хурд аст.



Расми64

Исбот. Аз нуқтаи A**-и берун аз ҳамворӣ перпендикуляри** AB, **моилҳои** AC, AC_1 **ва** AC_2**-ро мегузаронем. Моил, проектсияи он ва перпендикуляр дар як ҳамворӣ ҷойгиранд ва секунҷаи росткунҷаи**