ABC-ро ташкил медиҳанд (расми 64), бинобар ин онҳо байни худ бо теоремаи Пифагор алоқамананд:

$AC^2=BC^2+AB^2$; $AC_1^2=BC_1^2+AB^2$; $AC_2^2=BC_2^2+AB^2$.

Аз ин ҷо, агар $BC=BC_1$ бошад, пас $AC=AC_1$.

Баъд, агар $BC=\sqrt{AC^2-AB^2} < BC_2^2=\sqrt{AC_2^2-AB^2}$

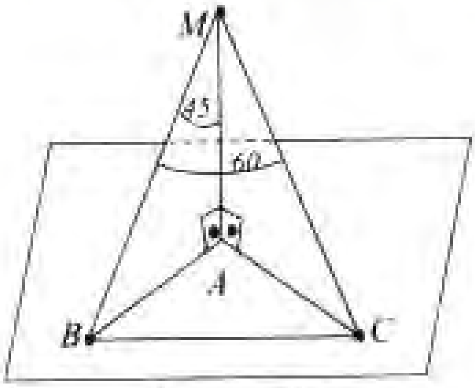
бошад, он гоҳ $AC<AC_2$. Дар охир, аз баробарии $AC^2=BC^2+AB^2$, бармеояд ки $AB<AC$ аст. Теорема исбот шудааст.

Масъалаи 3. Секунҷаи баробарпаҳлуи ABC $(AB=AC)$ дар ҳамвории α ҷойгир аст. Нуқтаи A асоси перпендикуляри аз нуқтаи M ба α гузаронидашуда мебошад. Маълум, ки дарозии перпендикуляр $3\sqrt{2}$ *см* буда, кунҷҳои BMA ва BMC мувофиқан ба 45^0 ва 60^0 баробаранд. Дарозии BC-ро меёбем.

Ҳал. Моилҳои MB ва MC-ро мегузаронем (расми 65). Аз баробарии тарафҳои AB ва AC ва инчунин теоремаи 19 бармеояд, ки ин моилҳо бо ҳам баробаранд. Кунҷи BMC 60^0 аст, пас секунҷаи MBC баробартараф мебошад, яъне $BC=BM=MC$. Аз секунҷаи росткунҷаи ABM дорем

$$\frac{AM}{BM}=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$BM=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot AM=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 3\sqrt{2}=6 \text{ см}.$$



Расми 65

Ҳамин тариқ, $BC=BM=6$*см*.

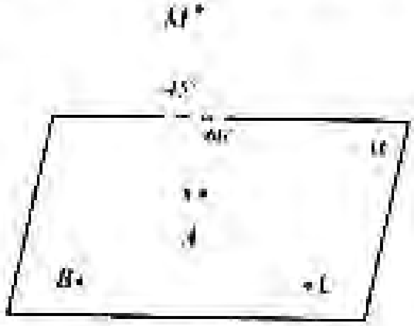
Масъалаи 4. Аз нуқтаи M ба қуллаи кунҷи рости C ва миёнаҷои тарафи AB-и секунҷаи росткунҷаи ABC, ки дар ҳамвории α воқеъ аст, перпендикулярҳо гузаронида шудаанд. Кунҷи A-ро меёбем.

Ҳал. Бигузор N миёнаҷои тарафи AB-и секунҷаи росткунҷаи ABC аст (расми 66). Азбаски $AN=NB$ мебошад, пас мувофиқи теоремаи 19 $MA=MB$. Аз перпендикулярии MC ба α бармеояд, ки MC ба CA ва CB перпендикуляр аст.

Мувофиқи теоремаи Пифагор $CA=\sqrt{MA^2-MC^2}$,

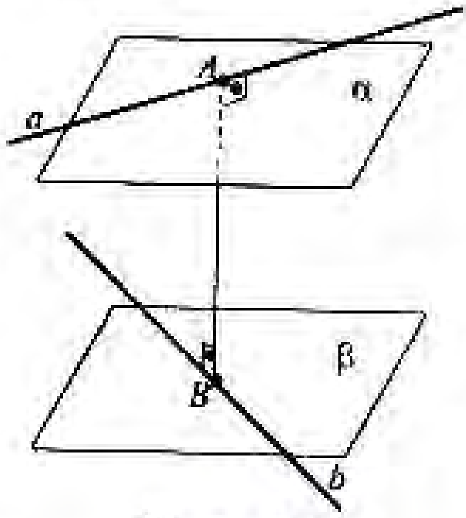
$CB=\sqrt{MB^2-MC^2}$. Вале $MA=MB$, пас $CA=CB$. Инак, ABC секунчаи росткунчаи баробарпаҳлӯ мебошад. Аз ин ҷо $\angle A=45^0$.

IV. Аз мафҳумҳои имконпазири масофаҳо дар фазо (масофа аз нуқта то хати рост ё то ҳамворӣ, масофаи байни хатҳои рости параллел ё ҳамвориҳои параллел) дохил кардани мафҳуми масофаи байни хатҳои чиликӣ монда аст.



Расми 66

Таърифи 3. *Перпендикуляри умумии* ду хати рости параллел гуфта порчаеро меноманд, ки охирҳояш (нӯгҳояш) дар ин ҳамвориҳо ҷойгир буда, ба ҳар кадоми ин ҳамвориҳо перпендикуляр аст. Аз ин ҷо ва аз таърифи масофаи байни ду ҳамвориҳои параллел бармеояд, ки ин масофа ба дарозии перпендикуляри умумии ин ду ҳамворӣ баробар аст.



Расми 67

Бигузор a ва b ду хати рости чиликӣ мебошанд (расми 67). Нишон додан мумкин аст, ки аз рӯи онҳо ягона ҷуфти ҳамвориҳои параллели α ва β-ро гузаронидан мумкин аст (натиҷаҳои пункти 7-ро истифода карда). Масофаи байни ин ду ҳамвории параллел ҳамчун масофаи байни хатҳои рости чиликӣ қабул карда мешавад. Чи тавре ки ҳоло ҳозир гуфта шуд, вай ба дарозии перпендикуляри умумии ин ҳамвориҳо баробар аст. Агар охирҳои перпендикуляри умумии ин ҳамвориҳо дар ин хатҳои рост ҷойгир бошанд, он гоҳ вай *перпендикуляри умумии ду хати рости чиликӣ номида мешавад.*

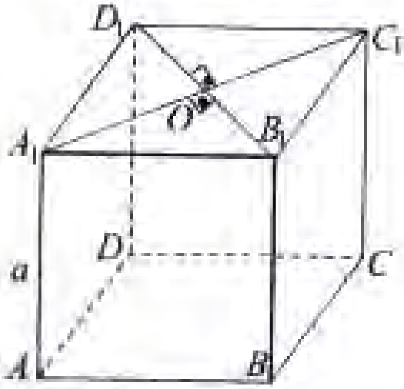
Инак, *масофаи байни ду хати рости чиликӣ* ба дарозии перпендикуляри умумии онҳо баробар аст. Дар расми 67 масофаи байни хатҳои рости чиликии a ва b ба дарозии порчаи AB, ки ба ҳамвориҳои α ва β перпендикуляр буда, охирҳояш дар хатҳои a ва b ҷойгиранд, баробар мебошад.

Исбот кардан мумкин аст, ки ду хати рости чиликӣ перпендикуляри умумӣ доранд ва дар айни ҳол фақат якто. Мо исботи ин тасдиқотро наоварда, фақат ҳаминро қайд мекунем, ки аз он яккимата будани масофаи байни ду хати рости чиликӣ бармеояд.

Масъалаи 5. Теғаи куб ба a баробар аст. Масофаи байни хатҳои рости CC_1 ва B_1D_1-ро меёбем (расми 68).

Ҳал. Диагонали A_1C_1-и рӯяи $A_1B_1C_1D_1$-ро мегузаронем. Хати рости A_1C_1 ба хатҳои рости C_1C ва B_1D_1, ки низ аз рӯи диагонали рӯя мегузарад, перпендикуляр мебошад. Перпендикуляри умумӣ барои ин ду хати рост порчаи C_1O мешавад. Секунчаи OB_1C_1 росткунча ва баробарпаҳлӯ аст. Барои ҳамин кунҷҳои назди асоси B_1C_1 ба 45^0 баробар мебошанд. Пас

$$OC_1 = B_1C_1 \cdot \sin 45^0 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$



Расми 68

1. Теоремаҳоро дар бораи ду перпендикуляр баён кунед. Ҷавоби кадом масъалаҳо дар онҳо мавҷуд аст? 2. Масофа аз нуқта то ҳамворӣ, аз хати рост то ҳамвории ба он параллел, байни ду ҳамвории бо ҳам параллел чӣ тавр муайян карда мешавад? 3. Перпендикуляр ва моил ба ҳамворӣ чӣ аст? Асоси онҳо-чӣ? Проексияи моил-чӣ? 4. Дарозиҳои перпенгдикуляр, моил ва пректсияи он бо ҳамдигар чӣ гуна алоқамандӣ доранд? 5. Байни дарозии ду моил, ки аз як нуқта гузаронида шудаанд ва дарозии проексияи онҳо чӣ хел алоқамандӣ вуҷуд дорад? 6. Перпендикуляри умумии ду хати рости чиликӣ чӣ тавр муайян карда мешавад? Масофаи байни ин хатҳои рост – чӣ?

122. Исбот кунед, ки агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ ҳамаи нуқтаҳои он аз ҳамворӣ дар як хел масофа ҷойгиранд.
123. Исбот кунед, ки масофа аз ҳар як нуқтаи ҳамворӣ то ҳамвории ба он параллел якхела аст.
124. Исбот кунед, ки агар хати рост ва ҳамворӣ параллел бошанд, он гоҳ онҳо перпендикуляри умумӣ доранд.

125. Магар ду тарафи секунча ба як ҳамворӣ перпендикуляр шуда метавонад? Ду тарафи трапетсия чӣ?

126. Охирҳои порчаи додашуда, ки ҳамвориро намебурад, аз ҳамворӣ дар масофаи 0,3*м* ва 0,5*м* чойгиранд. Нуқтае, ки ин порчаро бо нисбати 3:7 мебурад, дар кадом масофа чойгир аст?

127. Аз миёначои порча ҳамворӣ гузаронида шудааст. Исбот кунед, ки охирҳои ин порча аз ин ҳамворӣ дар масофаи якхела чойгиранд.

128. Масофаро аз миёначои порчаи AB то ҳамворӣ, ки ин порчаро намебурад ёбед, агар масофа аз нуқтаҳои A ва B то ҳамворӣ ба: 1) 3*м* ва 5*м* ; 2) a ва b баробар бошад.

129. Аз рӯи тарафи параллелограмм ҳамворӣ гузаронида шудааст, ки вай аз тарафи муқобилхобидаи параллелограмм дар масофаи a чойгир аст. Масофаро аз нуқтаи буриши диагоналҳои параллелограмм то ин ҳамворӣ ёбед.

130. Сими телефон, ки дарозиаш 15*м* аст, аз симчӯб то боми хона кашида шудааст. Сим дар симчӯб дар баландии 8*м* ва дар бом дар баландии 20*м* баста шудааст. Масофаи байни симчӯб ва боми хонаро ҳисоб кунед, агар маълум бошад, ки сим хам намезанад.

131. Масофа аз нуқтаи A то қуллаи квадрат ба a баробар аст. Масофаро аз нуқтаи A то ҳамвории квадрат ёбед, агар тарафи квадрат ба b баробар бошад.

132. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил, ки яке аз дигараш 26*см* калон аст, гузаронида шудааст. Проектсияи моилҳо ба 12*см* ва 40*см* баробаранд. Дарозии моилҳо ёфта шавад.

133. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст. Дарозии моилҳоро ёбед, агар онҳо ҳамчун 1:2 нисбат дошта, проектсияи моилҳо 1*см* ва 7*см* бошад.

134. Аз нуқтаи додашуда ба ҳамворӣ ду хати рости моили дарозиашон 2*м* гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқта то ҳамворӣ ёбед, агар моилҳо байни худ кунчи 60^0-ро ташкил дода, проектсияашон бо ҳам перпендикуляр бошанд.

135.* Аз рӯи як тарафи ромб дар масофаи 4*м* аз тарафи муқобил ҳамворӣ гузаронида шудааст. Проектсияи диагоналҳои ромб ба ин ҳамворӣ ба $8м$ ва $2м$ баробар аст. Проектсияи тарафҳоро ёбед.

136.* Дар секунҷаи баробарпаҳлу асос ва баландӣ ба $4м$ баробаранд. Нуқтаи додашуда дар масофаи 6м аз ҳамвории секунҷа ва аз қуллаҳои секунҷа дар масофаҳои баробар ҷойгир аст. Ин масофаҳоро ёбед.

137. Теғаи куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $2м$ аст. Масофаи байни хатҳои рости: 1) AB ва CC_1; 2) CC_1 ва BD-ро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

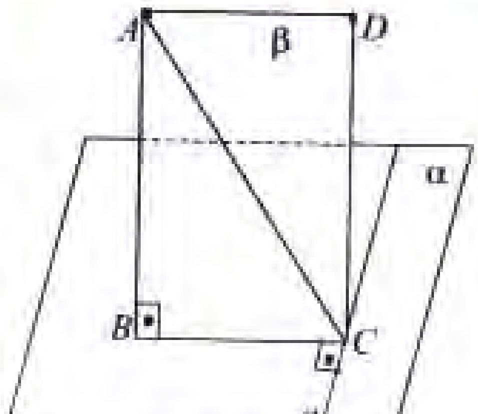
138. Дар тарафҳои $AB=6см$ ва $BC=8см$-и росткунҷаи $ABCD$ нуқтаҳои M ва N тавре гирифта шудаанд, ки порчаи MN ба порчаи AC параллел мебошад. Маълум, ки периметри бисёркунҷаи $AMNCD$ ба периметрии секунҷаи MBN ҳамчун 7:3 нисбат дорад. Дарозии порчаи MN-ро ёбед.

139. Тарафҳои секунҷа a,b,c дода шудаанд. Кунҷҳои онро ёбед.

10. Теорема дар бораи се перпендикуляр

Теоремаи 20. Барои он ки хати рости дар ҳамворӣ ҷойгир ва аз асоси моил мегузаштагӣ ба моил перпендикуляр бошад, зарур ва кифоя аст, ки вай ба проектсияи ҳамин моил перпендикуляр шавад.

Исбот. а) *Шарти кифоягӣ.* Исбот кардан лозим, ки агар хати рост аз асоси моил гузашта ба проектсияи ҳамин моил перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба худи моил низ перпендикуляр мебошад. Яъне, агар AB-перпендикуляр ба ҳамвории α бошад, AC-моил, BC-проектсияи моил ва a хати ростест, ки дар ҳамвории α



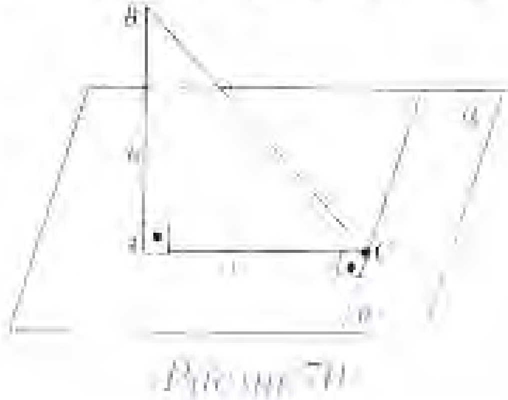
Расми 69

ҷойгир буда, аз асоси моил C мегузарад (расми 69) бошанд, он гоҳ нишон додан лозим аст, ки ҳангоми $a \perp CB$ будан, $a \perp AC$ аст. Аз нуқтаи C-и ҳамвории α хати рости CD-ро, ки ба α перпендикуляр аст мегузаронем (ниг. ба эзоҳи қисми III-и п.8). Мувофиқи теоремаи 18 вай ба хати рости AB параллел аст. Аз рӯи ин ду хати рости параллел ҳамвории β-ро мегузаронем. Хати рости a ба хати рости CD перпендикуляр аст, зеро аз нуқтаи буриши CD бо ҳамвории α гузашта дар он ҷойгир аст. Ҳамин тариқ хати рости a бо ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии ҳамвории β (CB ва CD) перпендикуляр аст. Пас мувофиқи теоремаи 14 хати рости a ба ҳамвории β перпендикуляр аст. Аз сабаби дар ҳамвории β ҷойгир будани моили AC ва хати рости a-ро буриданаш, моил ва ин хат перпендикуляранд. Шарти кифоягӣ исбот шуд.

б) *Шарти зарурӣ.* Исбот кардан лозим, ки агар хати рост аз асоси моил гузашта ба моил перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба проектсияи моил низ перпендикуляр мебошад. Яъне, агар $a \perp AC$ бошад, он гоҳ $a \perp BC$ мешавад. Боз ҳосил мекунем, ки хати рости a ба ду хати рости AC ва CD-и ҳамвории β, ки ҳамдигарро дар нуқтаи C мебуранд, перпендикуляр аст. Яъне мувофиқи теоремаи 14 хати рости a ба ҳамвории β перпендикуляр мебошад. Бинобар ин хати рости a ба проектсияи моил BC, ки дар β ҷойгир аст, перпендикуляр мешавад. Шарти зарурӣ ва бо он теорема пурра исбот карда шуд.

Акнун масъалаеро муоина мекунем, ки дар ҳалли он теорема дар бораи се перпендикуляр истифода мешавад.

Масъала. Аз охири A-и порчаи AB, ки дарозиаш b аст, ҳамворӣ ба порча перпендикуляр ва дар ин ҳамворӣ хати рости a гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқтаи B то хати рост меёбем, агар масофа аз нуқтаи A то хати рост ба c баробар бошад.



Расми 70

Ҳал. Хати рости BC-ро, ки ба a перпендикуляр аст мегузаронем (расми 70). AC- проектсияи моили BC мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр низ ба a перпендикуляр мебошад, барои ҳамин $AC=c$ аст. Баъд, азбаски BA ба ҳамвории α перпен-дикуляр аст, пас кунҷи BAC рост мебошад ва аз рӯи теоре-маи Пифагор

$$BC^2 = AB^2 + CA^2.$$

Ҳамин тариқ, масофаи матлуб ба $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$ баробар аст, чунки $AB=b$ ва $CA=c$ мебошанд.

1. Теоремаро дар бораи се перпендикуляр баён намоед. 2. Дар куҷо ва чӣ тавр дар исботи он теорема дар бораи ду перпендикуляр (теоремаи 18) ва аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ (теоремаи 14) истифода карда мешаванд? Дар айни ҳол теоремаи 14 чанд маротиба истифода мешавад?

140. **Аз маркази давраи дарункашидаи секунча ба ҳамвории секунҷа перпендикуляри дарозиаш 2,4$м$ гузаронида шудааст. Радиуси давра 0,7$м$ аст. Масофаро аз охири ин перпендикуляр то тарафи наздиктарини секунҷа ёбед.**

141. **Аз қуллаи A-и росткунҷаи $ABCD$ ба ҳамвории он перпендикуляри AK барқарор карда шудааст. Масофа аз нуқтаи охири K-и ин перпендикуляр то қуллаҳои дигар ба 6$м$, 7$м$ ва 9$м$ баробаранд. Дарозии AK-ро ёбед.**

142. **Нуқтаи M, ки берун аз ҳамвории кунҷи рости додашуда ҷойгир аст, аз қуллаи кунҷ дар масофаи a ва аз тарафҳои кунҷ дар масофаи b мехобад. Масофаро аз нуқтаи M то ҳамвории кунҷ ёбед.**

143. **Масофа аз нуқтаи додашуда то ҳамвории секунҷа 1,1$м$ ва то ҳар як тарафи он 6,1$м$ аст. Радиуси давраи дарункашидаи ин секунҷаро ёбед.**

144. **Аз қуллаи секунҷаи баробартарафи ABC перпендикуляри AD ба ҳамвории секунҷа барқарор карда шудааст. Масофаро аз нуқтаи D то тарафи BC ёбед, агар AD=13$см$, BC=6$см$ бошад.**

145. **Масофа аз нуқтаи A то ҳар як тарафи квадрат ба a баробар аст. Масофаро аз нуқтаи A то ҳамвории квадрат ёбед, агар диагонали квадрат ба d баробар бошад.**

Масъалаҳо барои такрор

146. **Аз ду нуқтаи гуногуни дар ҳамворӣ ҷойгирнабуда ба ин ҳамворӣ ду моили баробар фароварда шудааст. Магар гуфтан мумкин аст, ки проексияи онҳо низ баробар мешаванд?**

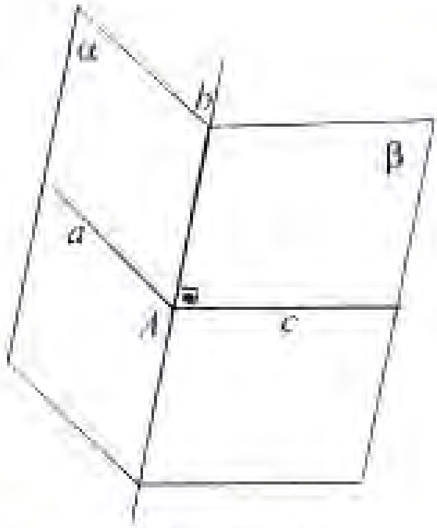
147. Масоҳати секунҷаи росткунҷа ба S, гипотенузааш ба c баробар аст. Радиуси давраи дарункашидаро ёбед.

148*. Дар девори амудӣ дар баландии $5м$ плакат овехта шудааст, ки дарозиаш $2м$ аст. Мушоҳидачӣ аз девор дар кадом масофа бояд истад, то ки кунҷе, ки зери он плакат дида мешавад, калонтарин шавад?

11. Перпендикулярии ду ҳамворӣ

I. Мафҳуми перпендикулярии ду ҳамвориро дида мебароем.

Таъриф. Агар ҳамворӣ хати рости ба дигар ҳамворӣ перпендикулярро дошта бошад, он гоҳ вай ба дигарӣ *перпендикуляр* номида мешавад.



Расми 71

Фарз мекунем, ки ҳамвории α ба ҳамвории β перпендикуляр аст, яъне хати рости a-и он ба β перпендикуляр мебошад (расми 71). Мувофиқи таърифи перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ (пункти 8) хати рости a ҳамвории β-ро мебурад. Бигузор нуқтаи буриши ин хат A аст. Аз сабаби нуқтаи умумӣ доштан ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро аз рӯи хати рости b мебуранд ва нуқтаи A ба b тааллуқ дорад. Аз нуқтаи A дар ҳамвории β хати рости c-ро, ки ба хати b перпендикуляр аст мегузаронем. Дар натиҷа хати рости c ба ду хати рости ҳамдигарро мебуридагии a ва b, ки перпендикуляранд ва дар ҳамвории α ҷойгиранд, перпендикуляр мешавад (теоремаи 14). Натиҷаи зерин ҳосил шудааст, ки онро дар шакли теорема меорем.

Теоремаи 21. Агар яке аз ҳамвориҳо ба дигараш перпендикуляр бошад, он гоҳ дигарӣ ҳам ба аввалааш перпендикуляр аст.

Акнун бо созишҳо, ки бо ҳамвориҳои перпендикуяр алоқамананд, машғул мешавем.

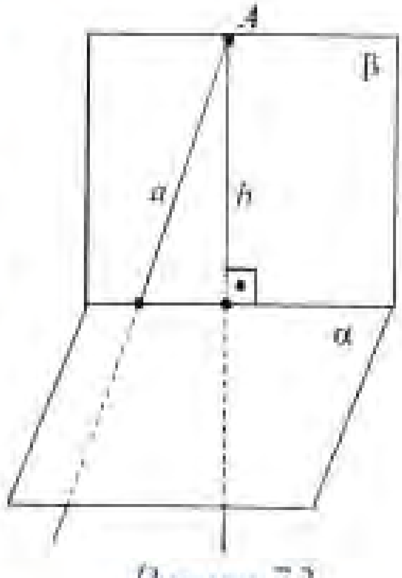
Масъалаи 1. Бигузор ҳамвориҳои α ва β перпендикуляранд. Нишон медиҳем, ки аз рӯи нуқтаи дилхоҳи яке онҳо ба дигарӣ хати рости перпендикулярро гузаронидан мумкин аст.

Ҳал. Фарз мекунем, ки хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир буда, ба ҳамвории β перпендикуляр аст. Хати рости a ба хати буриши онҳо b перпендикуляр аст. Аз нуқтаи дилхоҳи ҳамвории α хати рости ба a параллелро гузаронида, мебинем, ки мувофиқи теоремаи 12 ин хат низ ба хати буриш b перпендикуляр аст. Боз аз нуқтаи буриши ин хат дар ҳамвории β хати рости ба b перпендикулярро сохта, мисли исботи теоремаи 21 мулоҳиза ронда, перпендикулярии хати ба a параллел бударо бо ҳамвории β нишон медиҳем. Масъала ҳал шуд.

Масъалаи 2. Хати рости a ва ҳамвории α дода шудаанд. Аз рӯи хати рости a ҳамвории ба ҳамвории α перпендикуляр месозем.

Ҳал. Аз рӯи нуқтаи дилхоҳи хати рости a хати рости b-ро мегузаронем (расми 72), ки ба ҳамвории α перпендикуляр аст (ниг. ба эзоҳи қисми III-и пункти 8).

Аз рӯи хатҳои рости a ва b ҳамвории β-ро мегузаронем. Мувофиқи таъриф ҳамвории β ба ҳамвории α перпендикуляр мебошад.



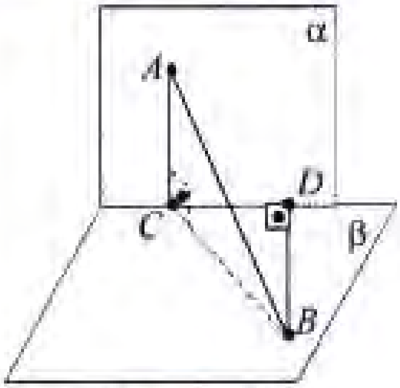
Расми 72

Аз созишҳои дар исботи теоремаи 21 ва ҳалли масъалаи 1 иҷро кардаамон дурустии ҷумлаи зерин бармеояд, ки он ҳангоми ҳалли масъалаҳо бисёртар (нисбати таърифи ҳамин пункт) истифода карда мешавад.

Теоремаи 22. Агар хати рост дар яке аз ду ҳамвориҳои перпендикуляр ҷойгир буда, ба хати буриши онҳо перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба дигар ҳамворӣ ҳам перпендикуляр аст.

Ин натиҷа як аломати дигари перпендикулярии хати рост ба ҳамворӣ мебошад. Истифодаи онро дар ҳалли масъалаи зерин муоина мекунем.

Масъалаи 3. Аз нуқтаҳои A ва B, ки дар ду ҳамвориҳои бо ҳам перпендикуляр ҷойгиранд, ба хати рости буриши ҳамвориҳо перпендикулярҳои AC ва BD гузаронида шудааст. Дарозии порчаи CD-ро меёбем, агар $AB=11м$, $AC=6м$, $BD=7м$ бошад.



Расми 73

Ҳал. Азбаски хатҳои рости AC ва CD, инчунин ҳамвориҳои α ва β бо ҳам перпендикуляранд (расми 73), пас мувофиқи теоремаи 22 хати рости AC ба ҳамвории β ва ба хати рости CB перпендикуляр мебошад. Яъне, секунҷаи ABC росткунҷа аст. Аз он мувофиқи теоремаи Пифагор дорем $AB^2=AC^2+CB^2$. Секунҷаи CBD низ росткунҷа аст. Аз он $CB^2=BD^2+CD^2$ ва $AB^2=AC^2+BD^2+CD^2$, ё ки $CD^2=AB^2-BD^2-AC^2=11^2-7^2-6^2=121-49-36=36$. Инак, $CD=6м$.

Эзоҳи 1. Аз исботи теоремаи 21 ва сохтани ҳо бармеояд, ки таърифи перпендикулярии ду ҳамворӣ ба *таърифи зерин баробарқувва* аст:

Ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагӣ *перпендикуляр* номида мешаванд, агар ҳамвории ба хати рости буриши ин ҳамвориҳо перпендикуляр буда, онҳоро аз рӯи хатҳои рости бо ҳам перпендикуляр бурад.

Дар ҳақиқат, агар ҳамвории γ ба хати рости b – хати буриши ҳамвориҳои α ва β перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ҳамвориҳои α ва β-ро аз рӯи хатҳои рости бо ҳам перпендикуляри a ва c мебурад (расми 71). Аз перпендикулярии a бар b ва c, перпендикулярии α бар β бармеояд. Баръакс, агар α бар β перпендикуляр бошад, он гоҳ созишҳои дар нақшаи 71 ичро кардаамонро гузаронида, аз болои хатҳои a ва c ҳамвории γ-ро мегузаронем. Вай ба хати буриш b перпендикуляр мебошад (теоремаи 14).

Эзоҳи 2. Пурсида мешавад, ки чӣ тавр перпендикуляр будани ҳамвории β-ро ба ҳамвории додашудаи α санҷидан мумкин аст? Бо ибораи дигар, барои ҳамвории α чӣ тавр ҳамвории ба он перпендикуляри β-ро сохтан мумкин аст? Дар амалия бо ёрии шоқул амудӣ будани девор муайян кар-

да мешавад. Таърифи дар аввали пункт овардашуда дарки ҳамин чиз аст (ниг. инчунин ба масъалаи 2).

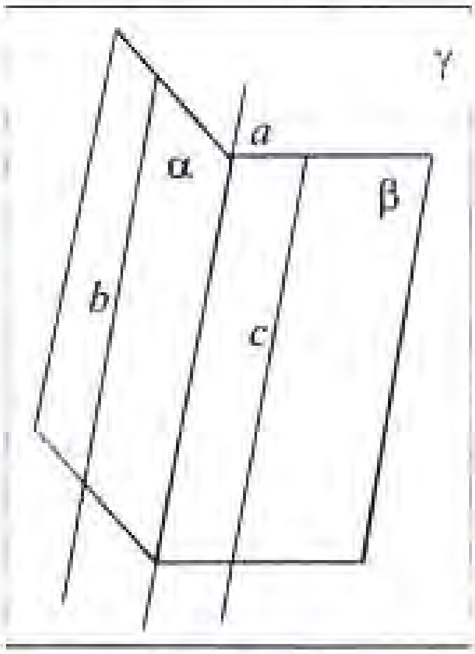
II. Алоқамандии перпендикулярии ҳамвориро бо ҳамвориҳои параллел муқаррар менамоем.

Теоремаи 23. Агар ҳамворӣ ба яке аз ҳамвориҳои параллел перпендикуляр бошад, он гоҳ ба дигараш ҳам перпендикуляр мебошад.

Исбот. Бигузор ҳамвориҳои α ва β параллеланд ва ҳамвории γ ба α перпендикуляр мебошад. Мувофиқи таъриф дар γ хати росте мавҷуд аст, ки он ба α перпендикуляр аст. Мувофиқи теоремаи 16 ин хат ба ҳамвории β ҳам перпендикуляр мебошад. Ин бошад ба перпендикулярии γ бар β меорад.

Теоремаи 24. Агар хати рост ба яке аз ҳамвориҳо перпендикуляр ва ба ҳамвории дигар параллел бошад, он гоҳ ин ҳамвориҳо перпендикуляранд.

Исбот. Дар ҳамвории ба хати рост параллел мувофиқи теоремаи 5 хати рости ба вай параллел вуҷуд дорад. Аз рӯи теоремаи 17 ин хати рост ба ҳамвории ба хати рост перпендикуляр буда, перпендикуляр аст. Барои ҳамин ҳамвориҳо мувофиқи таъриф перпендикуляранд.



Расми 74

Масъалаи 4. Маълум, ки ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагии α ва β ба ҳамвории додашудаи γ перпендикуляранд. Нишон медиҳем, ки хати рости буриши α ва β ба γ перпендикуляр аст.

Ҳал. Фарз мекунем, ки хати рости буриши ҳамвориҳо a мебошад. Аз сабаби перпендикулярии α бар γ, дар α хати рости b-ро ёфтан мумкин аст, ки вай ба γ перпендикуляр аст. Мувофиқан, аз сабаби перпендикулярии β ва γ, дар β хати рости c мавҷуд аст, ки вай ба γ перпендикуляр мебошад (расми 74). Аз рӯи теоремаи 18 ду хати рости b ва c-и ба ҳамвории γ перпендикуляр байни худ параллел мешаванд, яъне

хатҳои b ва c параллел мебошанд. Аз ин сабаб ва аз сабаби он ки онҳо дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгиранд, бармеояд, ки ин хатҳои рост ба хати рости буриши ин ҳамвориҳо a параллеланд. Аз ин ҷо ва аз перпендикулярии хатҳои рости b ва c бар γ, мувофиқи теоремаи 17, бармеояд, ки хати рости a ба ҳамвории γ перпендикуляр мебошад.

1. Дар кадом ҳолат ду ҳамворӣ дар фазо перпендикуляр номида мешаванд. 2. Нишон диҳед, ки агар як ҳамворӣ ба дигараш перпендикуляр бошад, он гоҳ дигарӣ ҳам ба ҳамвории аввала перпендикуляр аст. 3. Аломати перпен-дикулярии хати рост ба ҳамворӣ (теоремаи 22) аз аломатҳои пешовардашуда чӣ фарқият дорад? 4. Доир ба алоқамандии перпендикулярии ҳамворӣ бо ҳамвориҳои параллел чӣ гуфтан мумкин аст?

149. Ҳамвориҳои бо ҳам перпендикуляри α ва β дода шудаанд. Аз рӯи нуқтаи A-и ҳамвории α хати рости a гузаронида шудааст, ки ба ҳамвории α перпендикуляр мебошад. Исбот кунед, ки хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир аст.

150. Ҳамвориҳои α ва β перпендикуляранд. Дар ҳамвории α нуқтаи A гирифта шудааст, ки масофа аз он то хати рости c (хати рости буриши ҳамвориҳо) ба 0,5$м$ баробар аст. Дар ҳамвории β хати рости b, ки ба хати рости c параллел аст ва аз он дар масофаи 1,2$м$ меистад, гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқтаи A то хати рости b ёбед.

151. Ҳамвории α ва хати рости a дода шудаанд. Исбот кунед, ки ҳамаи хатҳои росте, ки ба ҳамвории α перпендикуляранд ва хати рости a-ро мебуранд, дар ҳамвории ба ҳамвории α перпендикуляр ҷойгиранд.

152. Аз нуқтаҳои A ва B, ки дар ду ҳамвориҳои перпендикуляр ҷойгиранд, перпендикулярҳои AC ва BD ба хати рости ин ҳамвориҳо фароварда шудааст. Дарозии порчаи AB-ро ёбед, агар: 1) $AC=a$, $BD=b$, $CD=c$; 2) $AD=a$, $BC=b$, $CD=c$ бошад.

153. Нуқта аз ду ҳамвории перпендикуляр мувофиқан дар масофаи a ва b ҷойгир аст. Масофаро аз ин нуқта то хати рости буриши ин ҳамвориҳо ёбед.

154. Ҳамвориҳои перпендикуляри α ва β аз рӯи хати рости c бурида мешаванд. Дар ҳамвории α хати рости a, дар ҳамвории β хати рости b, ки ба хати рости c ҳар ду параллеланд, гузаронида шудаанд. Масофаи байни хатҳои рости a ва b-ро ёбед, агар масофаи байни хатҳои рости a ва c ба 1,5*м* ва масофаи байни хатҳои рости b ва c ба 0,8*м* баробар бошад.

Масъалаҳо барои такрор

155. Аз қуллаи кунҷи рости C-и секунҷаи ABC ба ҳамвории секунҷа перпендикуляри CD гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқтаи D то гипотенузаи секунҷа ёбед, агар AB=5*см*, BC=4*см*, CD=6*см* бошад.

156. Аз охирҳои порчаи AB, ки ба ҳамворӣ параллел аст, перпендикуляри AC ва моили BD-и ба порчаи AB перпендикуляр гузаронида шудааст. Масофаи байни нуқтаҳои C ва D ба чӣ баробар аст, агар $AB=a$, $AC=b$ ва $DC=c$ бошад?

157. Дар давраи радиусаш R=5*см* трапетсия кашида шудааст, ки тарафи паҳлуӣ ва диагоналаш мувофиқан ба 6*см* ва 9*см* баробаранд. Масоҳати трапетсияро муайян намоед.

158. Бигузор α ва β кунҷҳои секунҷаи ABC мебошанд. Исбот кунед, ки агар $\sin 2\beta = \sin\alpha$ бошад, он гоҳ секунҷаи ABC баробарпаҳлӯ аст.

§4. КУНҶИ БАЙНИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

12. Кунҷи байни ду хати рост дар фазо. Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ

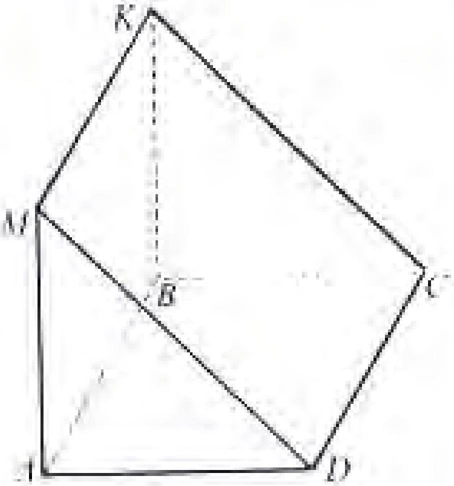
I. Ҳангоми ҳамдигарро буридани ду хати рост 4 кунҷ ҳосил мешавад. Дар айни ҳол кунҷҳои амудӣ ба ҳам баробаранд, кунҷҳои ҳамсоя ҳамдигарро то 180^0 пурра менамоянд.

Таърифи 1. Кунҷи байни хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагӣ гуфта *ченаки кунҷии* кунҷи хурдтаринро, ки ҳангоми буриш ҳосил мешавад меноманд.

Кунҷи байни хатҳои рости перпендикуляр мувофиқи таъриф ба 90^0 аст, кунҷи байни хатҳои рости параллел бошад ба нул баробар ҳисоб карда мешавад.

Ҳамин тариқ, кунҷи байни ду хати рост, ки дар як ҳамворӣ ҷойгиранд, фигураи геометрӣ набуда *ченак (андоза)* мебошад, яъне бузургиест, ки дар байни 0^0 ва 90^0 ҷойгир аст.

Барои дохил кардани мафҳуми кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ ба мо теоремаи дар поён овардашуда лозим мешавад. Исботи ин теорема ба леммаи зерин, ки ҳамчун лемма дар бораи се параллелограмм маъмул аст, такя мекунад.



Расми 75

Лемма. Агар $ABCD$ ва $ABKM$ параллелограммҳои дар як ҳамворӣ ҷойгирнабуда бошанд (расми 75), он гоҳ чоркунҷаи $CDMK$ ҳам параллелограмм мебошад.

Исбот. Мувофиқи шарти лемма $MK=AB$ ва $CD=AB$ аст, бинобар ин $MK=CD$ аст. Инчунин MK ва CD ба AB параллеланд, пас мувофиқи теоремаи 4 MK ба CD параллел мебошад. Ҳамин тариқ, дар чоркунҷаи $CDMK$ ду тарафи муқобил параллел ва баробаранд. Барои ҳамин ҳам вай параллелограмм мебошад.

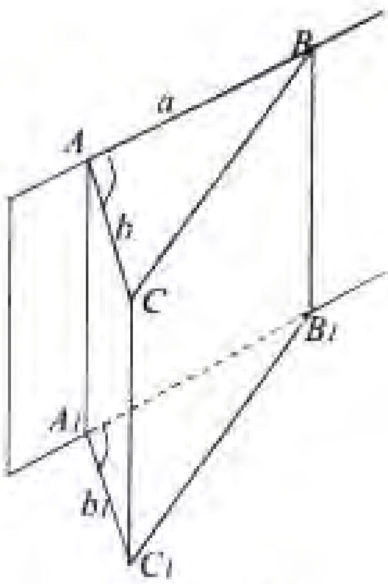
Хотиррасон мекунем, ки бо исботи лемма мо масъалаи 76-ро (ниг.ба пункти 5) ҳал кардаем.

Теоремаи 25. Агар ду хати ҳамдигарро мебуридагӣ ба дуто хати рости дигари ҳамдигарро низ мебуридагӣ параллел бошанд, он гоҳ кунҷҳои байни онҳо бо ҳам баробаранд.

Исбот. Фарз мекунем, ки хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагии a ва b мувофиқан ба хатҳои рости a_1 ва b_1 параллеланд. Ҳисоб мекунем, ки хатҳои рост дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгиранд. Аз рӯи нуқтаҳои буриши онҳо A ва A_1 хати рости AA_1-ро мегузаронем. Баъд, дар хати рости a нуқтаи B ва дар хати рости b нуқтаи C-ро гирифта аз рӯи онҳо хати рости ба хати рости AA_1 параллелро мегузаронем. Бигузор нуқтаҳои буриши ин хатҳои рост бо хатҳои рости a_1 ва b_1 нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебошанд (расми 76). Чоркунҷаҳои AA_1B_1B ва AA_1C_1C

параллелограмманд. Нуктаҳои B-ро бо нуқтаи C ва нуқтаи B_1-ро бо нуқтаи C_1 пайваст намуда чоркунҷаи дигари BCC_1B_1-ро ҳосил мекунем. Мувофиқи лемма вай параллелограмм мебошад. Пас $BC=B_1C_1$ аст.

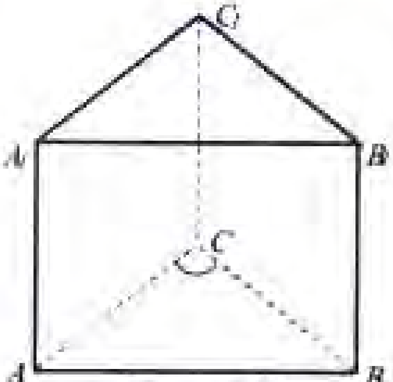
Секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$-ро дида мебароем. Аз баробарии тарафҳои муқобили параллелограммҳо бармеояд, ки $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$ ва $AB=A_1B_1$ аст. Аз ин ҷо, мувофиқи аломати сеюми баробарии секунҷаҳо $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. Пас $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$. Теорема исбот шуд.



Расми 76

Масъалаи 1. Тарафҳои секунҷаи ABC ба тарафҳои секунҷаи $A_1B_1C_1$ ҷуфт-ҷуфт параллеланд. Тарафҳои секунҷаи $A_1B_1C_1$ дода шудаанд: $A_1C_1 = 4\sqrt{2}$ *см*, $A_1B_1 = \sqrt{137}$ *см*, $B_1C_1=7$ *см*. Кунҷи ACB-ро (кунҷи байни тарафҳои AC ва CB) меёбем (расми 77).

Ҳал. Кунҷи ACB мувофиқи теорема ба кунҷи $A_1C_1B_1$ баробар аст. Дар секунҷаи $A_1B_1C_1$ мувофиқи теоремаи косинусҳо дорем $A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2 \quad -2A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cdot \cos C_1$. Қиматҳои тарафҳоро гузошта ҳосил мекунем:



Расми 77

$$\left(\sqrt{137}\right) = \left(4 \cdot \sqrt{2}\right) + 7^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7\cos C_1$$

ё $137 = 32 + 49 - 56\sqrt{2}\cos C_1$. Аз ин ҷо

$\cos C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, яъне $\angle C_1=45^0$.

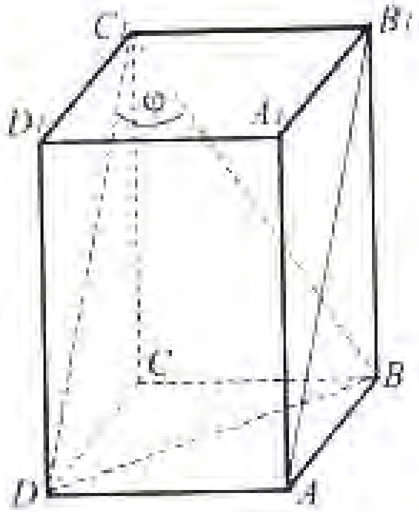
II. Акнун мафҳуми кунҷи байни хатҳои рости чиликиро дохил мекунем.

Таърифи 2. *Кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ* гуфта кунҷеро меноманд, ки он ба кунҷи байни хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагии ба хатҳои рости чиликӣ ҷуфт-ҷуфт параллел баробар аст.

Аз теоремаи 25 бармеояд, ки кунҷи (бузургӣ аст!) ҳамин тавр дохил карда шуда, аз он ки кадом хатҳои ҳамдигарро мебуридагии ба хатҳои рости чиликӣ параллел буда, гирифта шудаанд, вобаста нест. Аз ин теорема инчунин бармеояд, ки барои ёфтани кунҷи байни хатҳои рости чиликии a ва b, масалан, агар аз рӯи ягон нуқтаи A-и хати рости a ба хати рости b хати рости b_1-ро параллел гузаронем, он гоҳ кунҷи байни хатҳои рости a ва b ба кунҷи байни хатҳои рости a ва b_1-ро баробар мешавад.

Пеш мо ду хати ростро перпендикуляр номида будем, агар онҳо дар зери кунҷи рост ҳамдигарро мебуриданд. Айнан мисли ҳамин, *хатҳои рости чиликӣ перпендикуляр* номида мешаванд, агар кунҷи байни онҳо 90^0 бошад. Савол ба миён меояд, ки чаро кунҷи байни ду хати рост дар фазо на ҳамчун фигура, балки ҳамчун бузургӣ муайян карда мешавад. Гап дар сари он аст, ки ҳангоми дода шудани ду хати рост, масалан, хатҳои рости чиликӣ на ҳамеша ошкоро ба кунҷи байни онҳо ҳамчун фигураи геометрӣ ишора кардан мумкин аст.

Масъалаи 2. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст (расми 78). Кунҷи байни хатҳои рости AB_1 ва BC_1-ро меёбем.



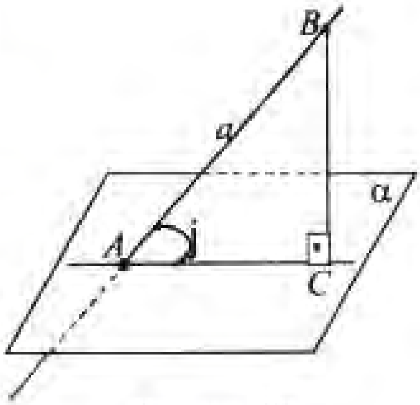
Расми 78

Ҳал. Ҳалли масъала ба гузаронидани хати рости параллел ба якеи ин хатҳои рост аз нуқтаи дигариаш асос карда мешавад. Аз нуқтаи C_1 диагонали C_1D-ро, ки ба хати рости AB_1 параллел аст мегузаронем. Кунҷи матлуб ба кунҷи BC_1D баробар аст. Секунҷаи BC_1D-ро дида мебароем. Тарафҳои ин секунҷа диагоналҳои рӯяҳои кубанд, яъне ин секунҷа баробартараф аст. Пас $\varphi=\angle BC_1D=60^0$.

III. Дигар мафҳуми муҳиме ҳаст, ки бо ёрии мафҳуми перпендикуляр дохил карда мешавад. Ин мафҳуми *кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ* мебошад. Бигузор дар нуқтаи A хати рости a бо ҳамвории α бурида мешавад (расми 79). Дар хати рости a нуқтаи дилхоҳи B-ро гирифта, аз он ба

ҳамвории α **перпендикуляри** BC**-ро мегузаронем. Дар ҳамвории** α **хати рости** AC**-ро месозем. Ин хати рост** *проектсияи хати рости a дар ҳамвории* α **номида мешавад.**

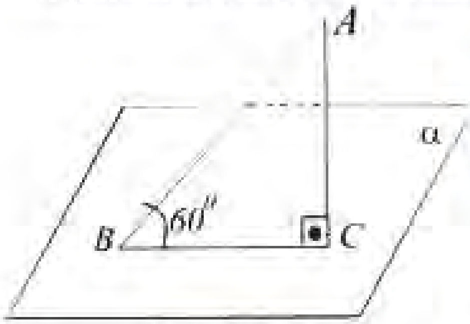
Таърифи 3. Кунҷи байни хати рости a **ва ҳамвории** α **гуфта** *кунҷи байни хати рости a ва проектсияи онро* **дар ҳамвории** α **меноманд.**



Расми 79

Дар расми 79 кунҷи φ **кунҷи байни хати рости** a **ва ҳамвории** α **аст. Агар хати рости** a **ҳамвориро бурад ва ба он перпендикуляр набошад, он гоҳ** $0^0<\varphi<90^0$ **аст. Агар хати рости** a **ба ҳамвории** α **параллел бошад ё дар он ҷойгир бошад, он гоҳ кунҷи** φ **ба нул баробар ҳисоб карда мешавад. Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ, ки бо ҳам перпендикуляранд,** 90^0 **ҳисоб карда мешавад.**

Азбаски хати рости a**, проектсияи вай дар ҳамвории** α **ва перпендикуляр ба** α **дар нуқтаи** A**-и буриши он бо хати рости** a **дар як ҳамворӣ ҷойгиранд, пас** *кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ кунҷи байни ин хати рост ва перпендикулярро бо ҳамворӣ то* 90^0 *пурра мекунад.*



Расми 80

Масъалаи 2. Масофаи байни нуқтаи A **ва ҳамворӣ ба** $3см$ **баробар аст. Дарозии моилро, ки аз ин нуқта ба ҳамворӣ дар зери кунҷи** 60^0 **фароварда шудааст, меёбем.**

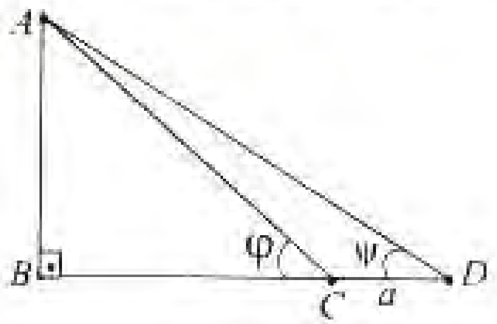
Ҳал. Ба ҳамворӣ аз нуқтаи A **перпендикуляри** AC**-ро мегузаронем (расми 80). Секунҷаи** ABC **росткунҷа аст. Кунҷи росташ дар қуллаи** C **ҷойгир мебошад. Кунҷи тези ин секунҷа, ки муқобили катети** AC **воқеъ аст, ба** 60^0 **баробар мебошад.**

Бинобар ин $AC:AB=\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Аз ин ҷо**

$$AB=\frac{2}{\sqrt{3}}AC=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 3=2\sqrt{3}\text{ см.}$$

Масъалаи 3. Порчаи AB ба ҳамворӣ перпендикуляр буда, аз нуқтаҳои C ва D-и ҳамворӣ мувофиқан нӯги A-и он дар зери кунҷҳои φ ва ψ дида мешавад. Маълум, ки масофаи нуқтаҳои C ва D ба a баробар аст. Дарозии порчаи AB-ро меёбем.

Ҳал. Усули ба масъалаи планиметрӣ овардани масъалаи стереометриро татбиқ менамоем (ниг. ба пункти 5). Аз рӯи хати рости CD ва нуқтаи A ҳамворӣ гузаронида дар он масъаларо ҳал мекунем (расми 81). Ба секунҷаи ACD теоремаи синусҳоро татбиқ намуда ҳосил мекунем:



Расми 81

$$\frac{AC}{\sin\psi}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}.$$

Вале $CD=a$, $\angle CAD=180^0-(180^0-\varphi)-\psi=\varphi-\psi$, **пас** $AC=\dfrac{a\cdot\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}$. **Аз секунҷаи росткунҷаи** ABC **дорем**

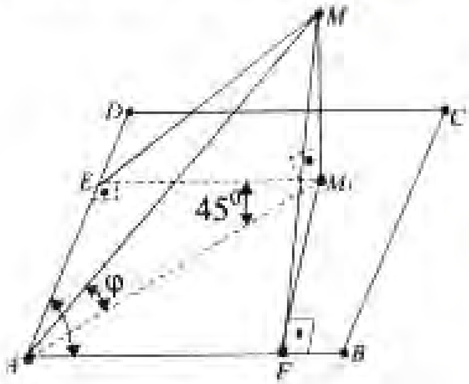
$$AB=AC\cdot\sin\varphi=\frac{a\cdot\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Эзоҳ. Дар амалия ҳалли ин масъала барои ёфтани дарозии предметҳое, ки бевосита чен кардани онҳо имконнопазир аст, васеъ истифода карда мешавад. Масалан, барои чен кардани баландии хонаҳо ё қуллаҳо. Барои ин чӣ хеле ки дидем, кифоя аст, аз ду нуқтаи масофаашон муайян нуқтаи баландтарини предметро назорат намуда, кунҷҳои назораро донем.

Масъалаи 4. Аз рӯи қуллаи A-и росткунҷаи $ABCD$ ва нуқтаи M-и дар ҳамвории росткунҷа ҷойгир набуда хати рости AM гузаронида шудааст. Маълум, ки ин хати рост бо тарафҳои AD ва AB-и росткунҷа кунҷи 60^0-ро ташкил медиҳад. Кунҷи байни моили AM ва ҳамвории росткунҷаро меёбем.

Ҳал. Перпендикуляри MM_1-ро мегузаронем. Нишон медиҳем, ки нуқтаи M_1 дар биссектрисаи кунҷи A-и ҷойгир аст. Дар ҳақиқат, агар аз нуқтаи M_1 ба тарафҳои AD ва AB перпендикулярҳои M_1E ва M_1F-ро гузаронем (расми 82), он гоҳ мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр (ниг. ба пункти 10) кунҷҳои AEM_1 ва AFM_1 кунҷҳои рост мебошанд.

Мувофиқи шарти масъала $\angle MAD = \angle MAB = 60^0$. Пас секунҷаҳои росткунҷаи AEM ва AFM дорои ду кунҷи баробар мебошанд, яъне онҳо монанданд. Аз сабаби умумӣ будани гипотенузаи AM, онҳо ба ҳамдигар баробаранд. Яъне $ME = MF$. Порчаҳои M_1E ва M_1F проектсияи моилҳои ME ва MF дар ҳамвории росткунҷа мебошанд. Баробарии моилҳо ба баробароии проектсияҳо баробарқувва аст. Пас $EM_1 = M_1F$. Аз ин ҷо ва аз рост будани кунҷҳои M_1EA ва M_1FA бармеояд, ки AFM_1E



Расми 82

квадрат аст, пас AM_1 бисектрисаи кунҷи DAB мебошад, яъне $\angle AM_1D = \angle AM_1F = 45^0$. Кунҷи матлуб $\varphi = \angle MAM_1$ аст. Бигузор $AM = a$. Аз секунҷаи AME: $AE = AM \cdot \cos\angle MAD = AM\cos 60^0 = \frac{a}{2}$. Аз секунҷаи AEM_1 :

$AE = AM_1 \cos\angle AM_1E = AM_1 \cdot \cos 45^0 = AM_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Аз ин ҷо**

$AM_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot AE = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. **Аз секунҷаи** AM_1M **:**

$\cos\varphi = \frac{AM_1}{AM} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Ҳамин тариқ,** $\varphi = \angle MAM_1 = 45^0$.

1. Кунҷи байни хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагӣ дар фазо чӣ тавр муайян карда мешавад? Кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ-чӣ? 2. Барои чӣ кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ аз интихоби хатҳои рости ба онҳо параллел вобаста нест? 3. Барои чӣ кунҷи байни хатҳои рост дар фазо танҳо бузургӣ буда, фигу-раи геометрӣ нест? 4. Дар кадом ҳолат хатҳои рости чиликӣ бо ҳам перпендикуляр номида мешаванд? 5. Кунҷи байни хати рост ва *ҳамворӣ чӣ тавр муайян карда мешавад? Кунҷи байни моил ва ҳамвориро чӣ тавр муайян кардан мумкин аст?*

159. **Хати рости** a **ба ҳамвории** α **перпендикуляр аст. Исбот кунед, ки вай ба ҳар гуна хати рости** b**, ки дар ҳамворӣ ҷойгир аст, перпендикуляр мебошад.**

160. **Бигузор** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **куб аст. Кунҷи байни хатҳои рости: 1)** AB_1 **ва** CC_1**; 2)** AB_1 **ва** CD_1**; 3)** AB_1 **ва** DA_1 **–ро ёбед.**

161. **Нуқтаи** A **аз ҳамворӣ дар масофаи** h **ҷойгир аст. Дарозии моилҳоеро, ки ба ҳамворӣ дар зери кунҷҳои: 1)** 30^0**; 2)** 45^0**; 3)** 60^0 **гузаронида шуданд, ёбед.**

162. **Аз нуқтае, ки аз ҳамворӣ дар масофаи** a **ҷойгир аст ду моили бо ҳамворӣ кунҷҳои** 45^0 **ва** 30^0 **ташкил мекардагӣ гузаронида шудааст. Дар навбати худ ин моилҳо байни худ перпендикуляр мебошанд. Масофаи байни нуқтаҳои охири моилҳоро ёбед.**

163. **Дарозии моил** a **аст. Проектсияи ин моил ба ҳамворӣ ба чӣ баробар аст, агар кунҷи байни моил ва ҳамворӣ ба: 1)** 30^0**; 2)** 45^0**; 3)** 60^0 **баробар бошад?**

164. **Охирҳои порчаи дарозиаш** 10*м* **аз ҳамворӣ дар масофаи** 2*м* **ва** 3*м* **ҷойгиранд. Порча ҳамвориро мебурад. Кунҷи байни порча ва ҳамвориро ёбед.**

165. **Тарафи** AB**-и квадрати** $ABCD$ **дар ҳамвории** α **ҷойгир аст. Тарафи** BC **бо ҳамворӣ кунҷи** 60^0**-ро ташкил медиҳад. Кунҷи байни хати рости** AC **ва ҳамвории** α**-ро ёбед.**

166. **Тарафи** AB**-и секунҷаи мунтазам дар ҳамвории** α **ҷойгир аст. Тарафҳои** AC **ва** BC **ба ҳамворӣ дар зери кунҷи** 45^0 **моиланд. Кунҷҳои байни медианаҳои секунҷаи** ABC **ва ҳамвории** α **-ро ёбед.**

167. **Аз нуқтаи аз ҳамворӣ дар масофаи** a **ҷойгир буда, ду моил ба ҳамворӣ гузаронида шудааст, ки онҳо бо ҳамворӣ кунҷҳои** 45^0**-ро ташкил мекунанд. Кунҷи байни моилҳо** 60^0 **аст. Масофаи байни нуқтаҳои охири моилҳоро ёбед.**

168. **Аз нуқтаи аз ҳамворӣ дар масофаи** a **ҷойгирбуда, ба ҳамворӣ дар зери кунҷи** 30^0 **ду моил гузаронида шудааст. Дар айни ҳол проектсияи ин моилҳо кунҷи** 120^0**-**

ро ташкил медиҳад. Масофаи байни нуқтаҳои охири моилҳоро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

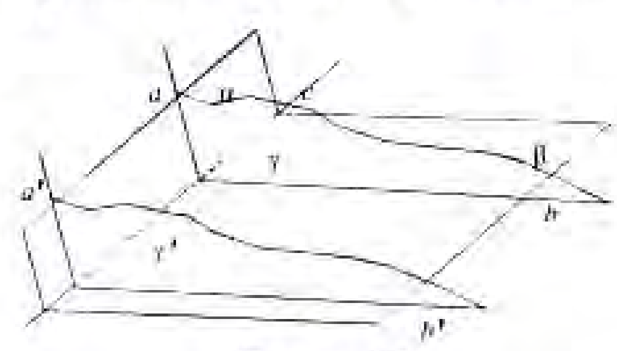
169. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст, ки дарозиашон 17*см* ва 15*см* аст. Проектсияи якеи онҳо аз проектсияи дигараш 4*см* зиёд аст. Проектсияи моилҳоро ёбед.
170. Исбот кунед, ки суммаи квадратҳои диагоналҳои параллелограмм ба суммаи квадратҳои тарафҳои он баробар аст.
172. Медианаҳои секунҷаи ABC дода шудаанд. Тарафҳои он ёфта шавад.

13. Кунҷи байни ду ҳамворӣ. Масоҳати проектсияи перпендикулярии бисёркунҷа

I. Мафҳуми нав – *кунҷи байни ду ҳамвориро* дохил мекунем. Агар ин ҳамвориҳо параллел бошанд, ин кунҷ ба нул баробар ҳисоб карда мешавад.

Бигузор ҳамвориҳои α ва β аз рӯи хати рости c бурида мешаванд.

Таърифи 1. *Кунҷи байни ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагии α ва β* гуфта, кунҷи байни хатҳои рости a ва b-ро, ки ҳангоми бо ҳамвории дилхоҳи γ бурида шудани α ва β хосил мешавад меноманд. Дар айни ҳол пиндошта мешавад, ки ҳамвории γ ба хати рости c, ки аз рӯи он ҳамвориҳои α ва β бурида мешаванд, перпендикуляр мебошад (расми 83).

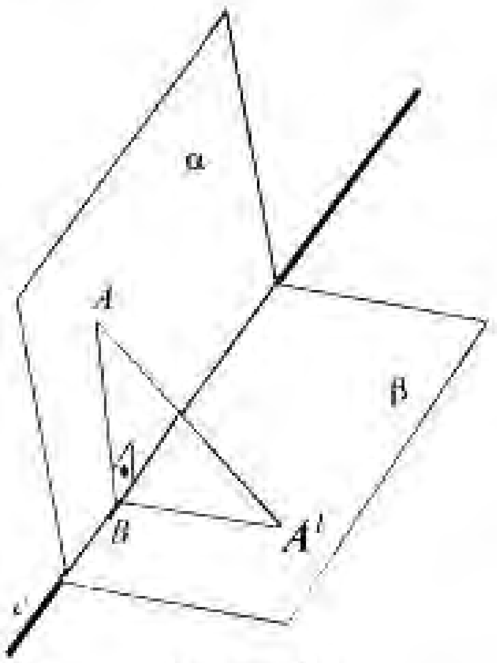


Расми 83

Нишон медиҳем, ки кунҷи ин тавр муайян карда мешудагӣ аз интихоби ҳамвории бурандаи γ вобаста нест. Дар ҳақиқат, бигузор φ_γ ва φ_{γ_1} кунҷҳоеанд, ки ҳангоми интихоби ҳамвориҳои бурандаи γ ва γ^I ҳосил мешаванд.

Азбаски ҳамвориҳои γ ва γ^1 ба хати рости c перпендикуляранд, пас онҳо бо ҳам параллел мебошанд (ниг. ба пункти 9, ба теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр). Барои ҳамин хатҳои рости буриши онҳо бо ҳамвориҳои α ва β хатҳоеанд, ки бо ҳамдигар параллел мебошанд. Пас мувофиқи теоремаи 25 $\varphi_{\gamma}=\varphi_{\gamma^1}$ мебошад.

Инак, бо дода шудани ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагӣ кунҷи байни онҳо яккимата муайян карда мешавад.

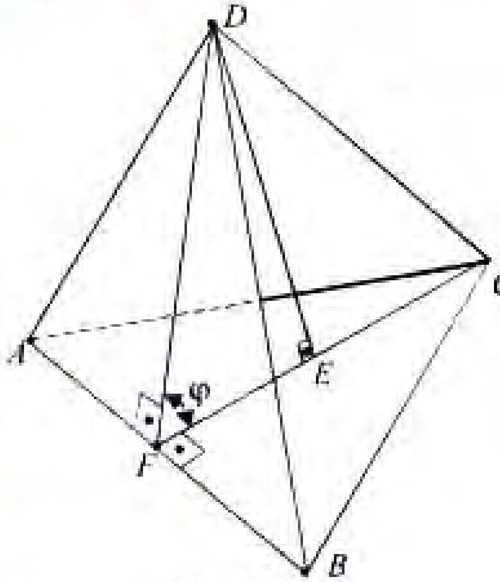


Расми 84

Барои сохтани кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β ин тавр амал мекунанд: 1) Ё нуқтаи C-ро аз хати рости буриши ин ҳамвориҳо c гирифта, аз рӯи нуқтаи C дар ин ҳамвориҳо хатҳои рости a ва b-ро, ки бо хати рости c перпендикуляранд мегузаронанд. Кунҷи байни хатҳои рости a ва b ба кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β баробар аст, чунки аз рӯи аломати перпендикулярии хатҳои рост ва ҳамворӣ (аз рӯи теоремаи 14) ҳамвории аз рӯи хатҳои рости a ва b мегузаштагӣ ба хати рости c перпендикуляр аст. 2) Ё ки созиши бисёр вомехӯрдаи зеринро истифода мекунанд: нуқтаи A-ро аз ҳамвории α, ки ба хати рости c тааллуқ надорад, мегиранд ва аз он ба хати рости c перпендикуляри AB, баъд ба ҳамвории дуюми β перпендикуляри AA^1-ро мегузаронанд (расми 84). Дар ин вақт кунҷи ABA^1 кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β мешавад. Дар ҳақиқат, мувофиқи созиш AB ба c перпендикуляр аст. Аз рӯи теорема дар бораи се перпендикуляр (теоремаи 20) A^1B низ ба c перпендикуляр мебошад. Барои ҳамин ба хатҳои рости BA ва BA^1 мулоҳизарониҳои дар созиши 1) овардаро татбиқ намудан мумкин аст.

Хотирнишон мекунем, ки айнан мисли ҳолати хатҳои рост, кунҷи байни ду ҳамворӣ ин ченаки кунҷии дар байни 0^0 ва 90^0 маҳдудбуда аст, на фигураи геометрӣ.

Масъалаи 1. Секунҷаи баробартарафи ABC, ки тарафаш $8см$ аст, дода шудааст. Аз нуқтаи D-и берун аз ҳамвории секунҷа ба маркази секунҷа E перпендикуляр фароварда шудааст, ки дарозиаш $4см$ аст. Кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABC ва ABD-ро меёбем.



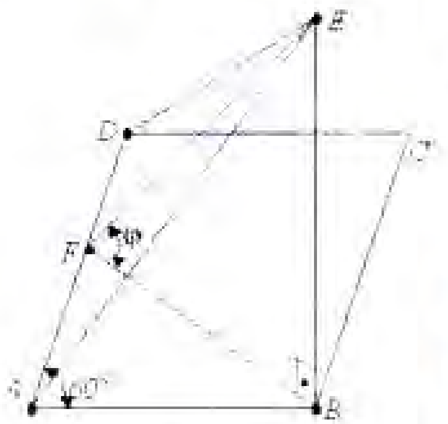
Расми 85

Ҳал. Кунҷи байни ин ҳамвориҳоро, мисли созиши 1) амал карда месозем (расми 85). Маркази секунҷа аз сабаби баробартараф буданаш дар баландии CF ҷойгир аст. Нуқтаи D-ро бо нуқтаҳои A,B ва F пайваст мекунем. Аз рӯи теорема дар бораи се перпендикуляр (теоремаи 20) DF ба AB перпендикуляр мешавад. Ҳамин та-рик, кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABC ва ABD кунҷи DFC аст. Бузургии ин кунҷро меёбем. Аз секунҷаи ACF:

$$CF = AC\cdot\sin\angle A = AC\cdot\sin 60^0 = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}см.$$

Мувофиқи хосияти медиана $EF = \dfrac{1}{3}CF = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ **см. Агар** $\varphi=\angle DFE$ **гузорем, он гоҳ**

$$tg\varphi = \frac{DE}{EF} = \frac{4}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$$ **Инак,** $\varphi=60^0$.



Расми 86

Масъалаи 2. Тарафи ромби $ABCD$ $6см$ ва кунҷи A-и он 60^0 аст. Аз нуқтаи E-и берун аз ҳамвории секунҷаи ABC перпендикуляри BE, ки дарозиаш $3\sqrt{3}$ см аст гузаронида шудааст. Кунчи байни хамворихои секунчахои ABC ва AED-ро меёбем.

Хал. Дар аввал кунчи байни ин хамворихоро сохтан лозим аст. Аз кулаи B **ба тарафи** AD **перпендикуляри** BF**-ро мегузаронем (расми 86). Хати** EF**-ро гузаронида мебинем, ки вай мувофики теорема дар бораи се перпендикуляр ба тарафи** AD **перпендикуляр мешавад. Кунчи** EFB **кунчи матлуб мебошад. Аз секунчаи** AFB: $EF = AB\sin 60^0 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ **см.**

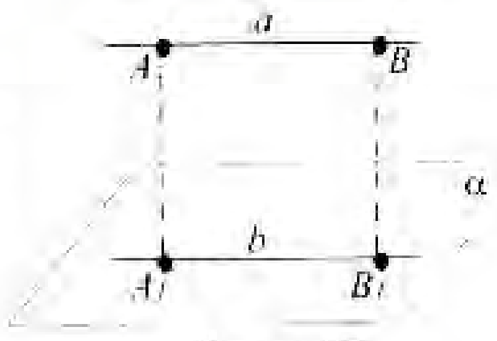
Мувофики шарти масъала EB**=3**$\sqrt{3}$ **см аст, пас** EB**=**BF **мебошад, яъне секунчаи** EFB **секунчаи баробарпахлуи росткунча аст.**

Аз ин чо $\varphi = \angle EFB$**=45⁰.**

II. Дар ин кисм боз якчанд мафхумхои дигарро дохил мекунем. Дар пункти 9 мо чунин мафхумхо ба монанди *моил, асоси моил ва проектсияи (ортогоналии) моилро* **дар хамворӣ дохил карда будем. Дар айни замон мухим аст, ки моил (порчаи хати рост) хамвориро дар зери кунче бурад.**

Фарз мекунем, ки нуктаи берун аз хамворӣ дода шудааст. Асоси перпендикуляре, ки аз ин нукта ба хамворӣ гузаронида шудааст, *проектсияи перпендикулярӣ ё ортогоналии нуқта* **дар хамворӣ ё кӯтох** *проектсияи нуқта* **ном дорад. Агар нукта дар хамворӣ чойгир бошад, он гох проектсияаш худаш аст.**

Бигузор хати рости a **ва хамворӣи** α **дода шудаанд ва хати рост ба хамворӣ перпендикуляр нест. Хар як нуктаи чунин хати ростро дар хамворӣ проектсия карда, хати ростро хосил мекунем, ки онро** *проектсияи перпендикулярии (проектсияи) хати рости* a **дар хамворӣи** α **меноманд.**



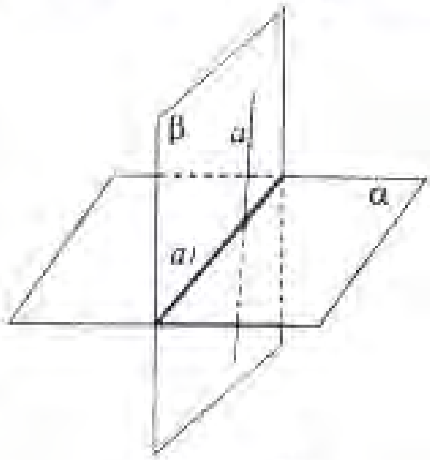
Расми 87

Дурустии ин тасдикро нишон медихем. Яъне нишон медихем, ки проектсияи хати рост дар хамворӣ хати рост аст. Ду холатро дида мебароем: а) хати рост ба хамворӣ

параллел аст (расми 87). Ду нуқтаи дилхоҳи он A ва B-ро ба ҳамвории α проектсия карда (аз онҳо перпендикуляр фароварда), аз рӯи проектсияи онҳо (нуқтаҳои A_1 ва B_1) дар ҳамворӣ хати рости b-ро мегузаронем. Проектсияи ҳар гуна нуқтаи a дар α дар хати рости b ҷойгир аст, чунки масофаи байни нуқта ва проектсияаш ба масофаи байни хати рост ва ҳамворӣ баробар аст, яъне ба бузургии доимӣ. Дар ин ҳолат хати рост ба проектсияаш параллел мебошад.

б) хати рост ҳамвориро мебурад (расми 88).

Ҳамаи перпендикулярҳои аз хати рости a ба ҳамвории α гузаронидашуда байни худ параллеланд (теоремаи 18). Бигузор β ҳамвориест, ки аз рӯи ин хат ва яке аз ин перпендикулярҳо гузаронида шудааст. Ҳамаи перпендикулярҳо, ки аз хати рост ба ҳамворӣ гузаронида шудаанд, дар ҳамвории β ҷойгиранд. Барои ҳамин асоси ин перпендикулярҳо дар буриши ҳамвориҳо ҷойгир аст. Ин буриш бошад хати рост аст. Тасдиқ исбот шуд.



Расми 88

Эзоҳи 1. Агар хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он гоҳ проектсияаш дар ҳамворӣ аз нуқта иборат аст (нуқтаи буриши хат бо ҳамворӣ).

Эзоҳи 2. Амалан мафҳуми проектсияи хати рост дар ҳамвориро дар қисми III-и пункти 12 дохил карда будем. Дар ин ҷо бо мақсади асоснок кардани мафҳуми проектсияи фигураи геометрӣ (таърифи 2) онро васеътар муоина намудем.

Бигузор фигураи геометрӣ ва ҳамворӣ дода шудаанд.

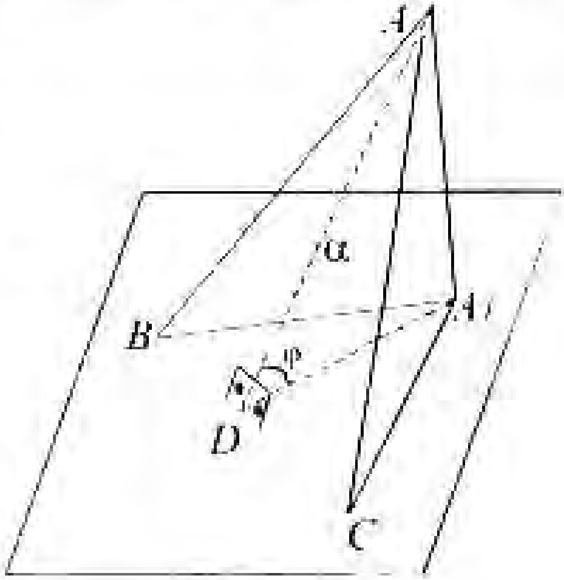
Таърифи 2. Проектсияи перпендикулярии (ортогоналии) фигура дар ҳамворӣ гуфта фигураеро меноманд, ки ҳар як нуқтаи он проектсияи ягон нуқтаи фигураи додашуда мебошад.

Баъзан проектсияи фигура аз худи фигура фарқ карданаш мумкин аст. Масалан, проектсияи давра метавонад порча бошад. Вале аз мулоҳизаронии ҳои боло бар[illegible]яд, ки проектсияи порча ҳамеша порча аст. Бар замми [illegible]ишон додан мумкин аст, ки порчаҳои баробар дорои проектсияҳои баробаранд, проектсияи хатҳои рости параллели ба ҳамворӣ перпендикуляр набуда параллеланд ва ғайра. Далели муҳимаш он аст, ки проектсияи бисёркунҷа дар ҳамворӣ *ҳатман* бисёркунҷа аст, агар бисёркунҷа дар ҳамвории ба ҳамворӣ аввала перпендикуляр ҷойгир набошад (вагарна проектсияаш порча мебошад).

Теоремаи 26. Масоҳати проектсияи перпендикуляри бисёркунҷа дар ҳамворӣ ба ҳосили зарби масоҳати он ба косинуси кунҷи байни ҳамвории бисёркунҷа ва ҳамвории проектсия баробар аст.

Исбот. Исботро танҳо дар ҳалати секунҷа будани бисёркунҷа меорем ва онро ҳам дар ҳолати хусусӣ. Фарз мекунем, ки секунҷаи ABC ва ҳамвории α дода шудаанд. Се ҳолати имконпазир мавҷуд аст: 1) яке аз тарафҳои секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир аст; 2) яке аз тарафҳои секунҷаи ABC ба ҳамвории α параллел аст; 3) секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир набуда, ягон тарафи он ба ҳамвории α параллел нест.

Ҳолати 1)-ро дида мебароем. Фарз мекунем, ки тарафи BC-и секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир аст (расми 89). Проектсияи секунҷаи ABC дар ҳамворӣ аз рӯи тарафҳои BC мегузаштагии ҳамвории α секунҷаи A_1BC аст, ки нуқтаи A_1 асоси перпендикуляри аз нуқтаи A фаровардашуда мебошад.



Расми 89

Аз A ба тарафи BC перпендикуляри AD-ро мегузаронем. Мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр (теоремаи 20) A_1D ба BC перпендикуляр аст. Барои ҳамин $\varphi=\angle ADA_1$ кунҷи байни ҳамвории секунҷаи ABC ва ҳамвории α аст.

Дорем $S_{A_1BC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot A_1D$. **Аз секунчаи** AA_1D: $\cos\varphi=\frac{A_1D}{AD}$,

яъне $A_1D=AD\cdot\cos\varphi$, **ва** $S_{A_1BC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot A_1D\cdot\cos\varphi$. **Вале**

$S_{A_1BC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot A_1D$, **пас** $S_{ABC}=S_{A_1BC}\cdot\cos\varphi$.

Инак, теорема дар ҳолати хусусие, ки мо дида баромадаем, дуруст аст. Ба ин монанд, теоремаро дар ҳолатҳои 2) ва 3) ҳам исбот кардан мумкин мебошад.

Дар ҳолати умумӣ, масоҳати проектсияи бисёркунҷаро дар ҳамворӣ бо тарзи ба секунҷаҳо ҷудо кардани ин бисёркунҷа ва бо роҳи ёфтани суммаи масоҳатҳои проектсияҳои ҳар як секунҷа дар ин ҳамворӣ бо осонӣ ҳисоб кардан мумкин аст. Бо ҳамин мулоҳиза теоремаро исботшуда мешуморем.

Ду масъалаи нисбатан соддаро, ки ҳаллашон бо истифодаи теорема ҳосил мешавад, дида мебароем.

Масъалаи 1. Масоҳати секунҷаи ABC $30 см^2$ аст. Тарафҳои проектсияи ин секунҷа дар ҳамворӣ, ки секунҷаи $A_1B_1C_1$ аст, мувофиқан ба $6 см$, $10 см$ ва $14 см$ баробар мебошад. Кунҷи байни ҳамвориҳои ин секунҷаҳоро меёбем.

Ҳал. Агар кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABC **ва** $A_1B_1C_1$ φ **бошад, он гоҳ мувофиқи теорема** $S_{A_1B_1C_1}=S_{ABC}\cdot\cos\varphi$. **Барои ёфтани** φ **бояд** $S_{A_1B_1C_1}$**-ро донем. Ҳар се тарафи секунҷаи** $A_1B_1C_1$ **дода шудааст, барои ҳамин формулаи Геронро истифода мекунем:**

$$p=\frac{6+10+14}{2}=15 см,\quad S_{A_1B_1C_1}=\sqrt{15(15-6)(15-10)(15-14)}=15\sqrt{3}\ см^2.$$

Пас $\cos\varphi=\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{15\sqrt{3}}{30}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Аз ин ҷо** $\varphi=30^0$.

Масъалаи 2. Ҳамвориҳои α ва β дода шудаанд. Секунҷаи баробартарафи ABC дар ҳамвории α ҷойгир буда, тарафаш $2 см$ аст. Кунҷи байни ҳамвориҳо ба 60^0 баробар мебошад. Масоҳати проектсияи секунҷаи ABC-ро дар ҳамвории β меёбем.

Ҳал. Агар проектсияи ABC дар ҳамвори β секунҷаи $A_1B_1C_1$ бошад, он гоҳ аз рӯи теорема $S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos 60^0 = \frac{S_{ABC}}{2}$. Секунҷаи ABC баробартараф аст, бинобар ин $S_{ABC} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\,см^2$. Пас $S_{A_1B_1C_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,см^2$.

Қайд мекунем, ки теоремаи 26-ро асосан барои ҳисоб кардани масоҳати буришҳои гуногун, ки ҳангоми бо ҳамворӣ буридани ҷисмҳои геометрӣ ҳосил мешаванд, васеъ истифода мебаранд. Дар оянда дар рафти давом додани омӯзиши стереометрия (дар синфи 11) инро мушоҳида хоҳем кард.

---

1. Кунҷи байни ду ҳамворӣ чӣ тавр муайян карда мешавад? Барои чӣ бо таърифи 1 ин кунҷ яккимата муайян карда мешавад? 2. Кунҷи байни ду ҳамвории ҳамдигарро мебуридагӣ чӣ тавр сохта мешавад? Ҳар ду тарзи сохтани ин кунҷро баён намоед. 3. Масоҳати бисёркунҷа ва масоҳати проектсияи перпендикуляриии он дар ягон ҳамворӣ чӣ гуна алоқамандӣ доранд?

---

172. Ду секунҷаи баробарпаҳлу асоси умумӣ доранд. Ҳамвориҳои онҳо байни худ кунҷи 60^0 ташкил медиҳанд. Асоси умумӣ ба 16*м*, тарафи паҳлуии яке аз секунҷаҳо ба 17*м* баробар аст. Тарафҳои паҳлуии секунҷаи дигар перпендикуляранд. Масофаи байни қуллаҳои секуҷаҳо ёфта шавад.

173. Ду ҳамворӣ ҳамдигарро дар зери кунҷи 30^0 мебуранд. Нуқтаи A, ки дар якеи ин ҳамвориҳо ҷойгир аст, аз ҳамвории дигар дар масофаи a меистад. Масофаро аз ин нуқта то хати рости буриши ҳамвориҳо ёбед.

174. Секунҷаҳои баробарпаҳлуи ABC ва ABD бо асоси умумии AB дар ҳамвориҳои гуногун, ки кунҷи байнашон ба φ баробар аст, ҷойгиранд. Кунҷи φ-ро ёбед, агар AB=24*м*, AC=65*м*, AD=20*м*, CD=63*м* бошад.

175. Кунҷи байни ҳамвориҳоро ёбед, агар нуқтаи дар яке аз онҳо гирифташуда аз хати рости буриши онҳо дар масофаи аз ҳамвории дигар 2 карат зиёд ҷойгир бошад.

176. Катетҳои секунҷаи росткунҷа $7м$ ва $24м$ мебошанд. Масофаро аз қуллаи кунҷи рост то ҳамворие, ки аз рӯи гипотенуза гузашта бо ҳамвории секунҷа 30^0-ро ташкил мекунад ёбед.

177*. Исбот кунед, ки дар пирамидаи мунтазам: 1) теғаҳои паҳлуӣ; 2) рӯяҳои паҳлуӣ ба ҳамвории асос якхел моиланд.

178*. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам кунҷи байни рӯяҳои паҳлуӣ ва ҳамвории асос ба φ баробар аст. Кунҷи байни теғаҳои паҳлуӣ ва ҳамвории асос ёфта шавад.

179*. Дар пирамидаи секунҷаи мунтазам кунҷи байни рӯяҳои паҳлуӣ ва ҳамвории асос ба φ баробар аст. Кунҷи байни рӯяи паҳлуӣ ва ҳамвории асосро ёбед.

180. Исбот кунед, ки дар куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ҳамвориҳои ACC_1A_1 ва A_1BD бо ҳам перпендикуляранд.

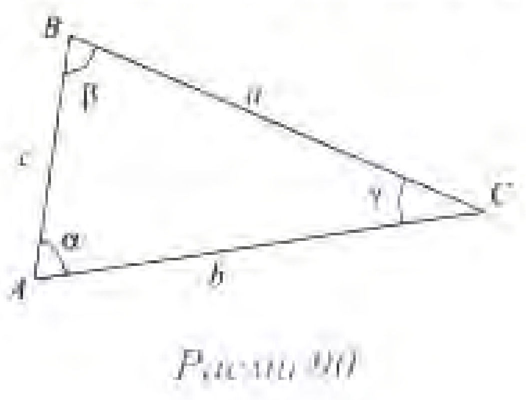
181. Исбот кунед, ки диагонали AC_1-и куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бо ҳамвориҳои A_1BD ва CB_1D_1 перпендикуляр мебошад.

182. Аз рӯи тарафи AB-и секунҷаи ABC ҳамвории α гузаронида шудааст, ки бо ҳамвории секунҷа кунҷи 60^0-ро ташкил мекунад. Масоҳати проектсияи перпендикулярии секунҷаи ABC-ро ба ин ҳамворӣ ёбед, агар $AB=5м$ ва дарозии баландии аз нуқтаи C фаровардашуда ба $2м$ баробар бошад.

Масъалаҳо барои такрор

183. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст, ки якеи онҳо аз дигараш 6см дарозтар аст. Проектсияи моилҳо ба $17см$ ва $7см$ баробаранд. Моилҳоро ёбед.

184. Моил бо ҳамворӣ кунҷи 45^0-ро ташкил мекунад. Аз рӯи асоси моил дар ҳамворӣ дар зери кунҷи 45^0 ба проектсияи моил хати рост гузаронида шудааст. Кунҷи байни ин хати рост ва моилро ёбед.



Расми 90

185. Исбот кунед, ки агар дар секунҷаи ABC (расми 90) баробариҳои

$a^3+b^3=c^2(a+b)$, $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\pi-\gamma)=\frac{2}{3}$ **дуруст бошанд, он гоҳ ин секунҷа баробартараф мебошад.**

Маълумоти мухтасари таърихӣ доир ба параллелӣ ва перпендикулярӣ

Асосгузори илмии фанни геометрия олими Юнони Қадим Уқлидус (Эвклид) (365-300 пеш аз милод) ҳисоб мешавад. Вай дар асари худ «Ибтидо», ки аз 13 китоб иборат аст, мафҳумҳо (фигураҳо) ва муносибатҳои ибтидоӣ ва нисбати онҳо аксиомаҳоро дар ҳамворӣ ва дар фазо пешниҳод намуда, аз рӯи онҳо назарияи илман ҷиддии геометрияро офаридааст. «Ибтидо» муддати дароз ҳамчун китоби дарсии курси (фанни) геометрияи мактабӣ истифода карда мешуд.

Се китоби охирини «Ибтидо» асосан маводи стереометриро дар бар мегирад. Алалхусус, дар китоби 11-ум асосҳои умумии стереометрия, масъалаҳои ҷойгиршавии хатҳои рост ва ҳамвориҳо, аз он ҷумла, параллелӣ ва перпендикулярии онҳо, инчунин таълимот дар бораи призма ва параллелепипед оварда шудааст. Мо қисми зиёди ин маводро дар китоби мазкур овардем.

Дар аввал геометрияи Уқлидус қавӣ ҳисоб мешуд. Вале охиста-охиста баъзе мафҳумҳо, таърифҳо ва аксиомаю постулатҳои (*постулат* – қоидае, ки ҳамчун ҳақиқат қабул мешавад) дохил кардаи ӯ, хусусан постулати 5-ум, зери шубҳа гузошта шуданд. Постулати 5-ум тасдиқ мекунад, ки агар ду хати рост бо хати рости сеюм бурида шавад, он гоҳ ин ду хати рост ҳамдигарро аз ҳамон тараф мебуранд, ки ҳосили ҷамъи кунҷҳои дохила аз 180^0 хурд аст. Исботталаб будани ин тасдиқот ҳанӯз дар Юнони Қадим дарк карда шуда буд. Масалан, дар асри I пеш аз милод математики римӣ Посидоний (135-51 пеш аз милод) ба ҷои ин постулат фарзияи мавҷудияти хатҳои рости дар як масофа ҷойгирбударо пешниҳод карда, посулатро исбот карда буд.

Асрҳои VIII-IX давраест, ки маркази тараққиёти математика аз Аврупо, Ҳиндустон ва Хитой ба мамлакатҳои Шарқи наздик ва Миёна мекӯчад. Дар ин давра асарҳои

математикҳои Бобулистону Юнон, Ҳиндустону Хитой ба забони арабӣ тарҷума шуда, дастраси умум мегарданд ва дар асоси онҳо тадқиқоти илмӣ ривоҷ меёбад. Ба ҳамаи кашфиёти геометрии илми ин мамолик наистода танҳо саҳми аҳли илми онҳоро дар назарияи хатҳои рост ва дар кӯшиши исботи постулати 5-ум махсус қайд мекунем. (Бояд гуфт, ки то охири асри XIX масъалаи исботи ин постулат диққати ҳамаи математикҳои бузурги дунёро ҷалб кардааст.)

Дар асри IX исботи постулат аз тарафи олимони араб Ҷавҳарӣ, Ибни Қорро ва Найрезӣ диққатҷалбкунанда мебошад. «Донишнома»-и Абуалӣ Ибни Сино (980-1037) дорои ду боби риёзӣ аст, ки якеи он ба геометрия бахшида шудааст. Ин боб баёни «Ибтидо»-и Уклидусро бо исботҳо, ки қисми зиёди онҳо бо исботҳои Уклидус якхела нестанд, дар бар мегирад. Ибни Сино постулати 5-умро исбот кард, ки он ба фарзияи мавҷудияти хатҳои рости дар масофаи баробар ҷойгиршуда (ин фарзия бо постулати исботшаванда баробарқувва аст) асос карда шудааст. Ҳасан Ибни Ҳайсам (956-1039) аз ш.Басраи Ироқ барои исбот аз аксиомаи Архимед (мавҷудияти порчае, ки ба порчаи додашуда то андозаи дилхоҳ каратӣ аст) истифода кардааст. Нодурустии исботи Ҳайсам дар он аст, ки аксиомаи Архимед хулосаи постулат мебошад ва баръакс. Исботи Умари Хайём (1048-1131) ба фарзияи он ки агар ду хати рост ба ҳамдигар наздик шаванд, он гоҳ онҳо хатман ҳамдигарро мебуранд, такя мекунад. Ин фарзия ҳам, ба постулат баробарқувва мебошад.

Бузургтарин математики асри XIII-и дунё Насируддини Тусӣ (1201-1272) дар асарҳояш «Таҳрири Уклидус» (исбот аз 28 китоб), «Усули ҳандаса» ва «Шакл-ул-қитъа» назарияи параллелии хатҳои ростро аз рӯи истифодаи натиҷаҳои Ҷавҳарӣ ва Хайём инкишоф дода, ду тарзи исботи постулати 5-умро пешниҳод кардааст. Тусӣ дар яке аз ин исботҳо аз далели ҳамдигарро буридани перпендикуляр ва моил, ки аз як нуқта ба хати рост гузаронида шудаанд, дар дигараш, аз он ки аз нуқтаи дохилии кунҷ хати ростеро гузаронидан мумкин аст, ки он ҳар ду тарафи кунҷро мебурад истифода мекунад. Инҳо бошанд ба постулат баробарқувваанд. Вале бояд қайд кард, ки аз ҳамаи исботҳои постулати 5-ум, ки то замони мо омада расидаанд, мукаммалтаринаш исботи пешниҳодкардаи Тусӣ мебошад. Исботи дар нимаи дуюми асри XIII пешниҳодкардаи Шамсиддини Самарқандӣ моҳиятан аз исботҳои Хайём ва Тусӣ кам фарқ мекунад.

Кушишҳо дар кори исботи постулати 5-ум бесамар бошанд ҳам, онҳо боиси пайдо шудани паҳлуҳои нави назарияи параллелии хатҳои рост гардиданд. Натиҷаҳои дар муддати 5 аср ба даст овардаи олимони Шарқи асримиёнагӣ дар оянда асоси тадқиқоти олимони Аврупо шуданд. Онҳо барои пайдоиши геометрияи нав, ба ном-*ғайриэвклидӣ* шароит фароҳам оварданд.

Математики машҳури рус Николай Лобачевский (1792-1856) аввалин шуда исботнопазирии постулатро (соли 1826) нишон дод. (Чуноне пайхас кардаем, исботи постулати мазкур маънии бо истифодаи дигар аксиомаҳои Уқлидус исбот кардани онро дорад.) Лобачевский мавҷудияти системаи геометриеро муқаррар кард, ки дар он постулати 5-ум ба постулати муқобилаш иваз шудааст. Пайдоиши геометрияи Лобачевский ё *геометрияи ғайриэвклидӣ* дар инкишофи геометрия ва умуман математика давраи нав кушод ва боиси такон додани методҳои аксиоматикии тадқиқот шуд. (Хотирнишон мекунем, ки баъдтар (соли 1832) мустақилан геометрияи ғайриэвклидиро математики маҷор Я. Бойя (1802-1860) низ кашф кардааст). Аввалин шуда ин геометрияро математики бузурги немис К.Ф.Гаусс (1777-1855) эътироф карда, дар рушди он саҳмгузорӣ кардаст. Барои ҳамин геометрияи ғайриэвклидиро геометрияи Лобачевский-Бойя-Гаусс ҳам мегӯянд.

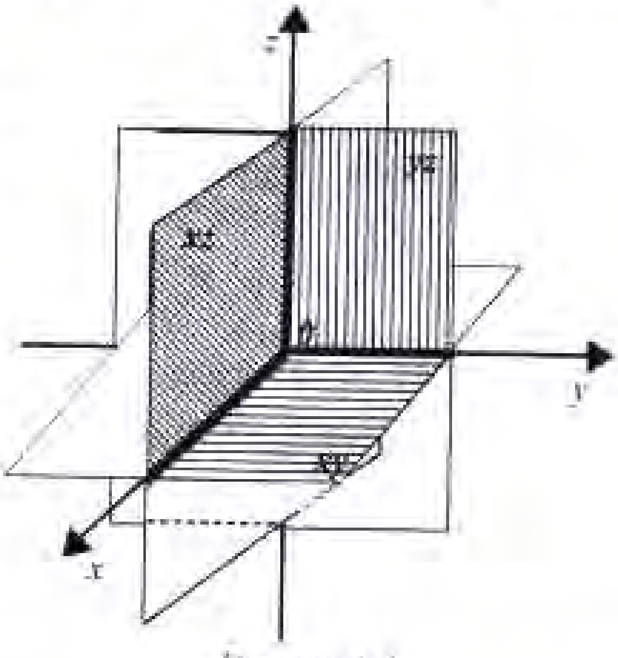
Ба таърихи назарияи перпендикулярӣ дахл карда ҳаминро қайд мекунем, ки теорема дар бораи се перпендикуляр дар «Ибтидо»-и Уқлидус оварда нашудааст. Ин теоремаро аввалин шуда Насируддини Тусӣ дар асари худ «Рисола роҷеъ ба чортарафаи пурра» оварда исбот кардааст. Дар Аврупо фаронсавиҳо Луи Бертран (1731-1812) якумин шуда тасвияи ин теорема ва Анре Лежандр (1752-1833) дар асараш «Элементҳои геометрия», ки соли 1794 чоп шудааст, исботашро меоранд. Бинобар ин теоремаро дар бораи се перпендикуляр, ки дар ҳозира дар исботҳо ва дар ҳалли масъалаҳо қурби баланд дорад, теоремаи Тусӣ–Бертран–Лежандр номидан аз рӯи адолат мебуд.

§5. КООРДИНАТАҲО ДАР ФАЗО

Дар курси геометрияи синфи 8 мо аллакай координатаҳои декартиро дар ҳамворӣ омӯхта будем. Дар ҳамон ҷой бо чунин мафҳумҳо ба монанди координатаҳои нуқта, масофаи ду нуқтаи ҳамворӣ, координатаи буриши ду хати рост, ҷойгирщавии ду хати рост нисбати системаи координатавӣ, табдилдиҳиҳо (ҳаракат, симметрия, параллелкучонӣ), векторҳо, дарозии вектор, зарби адад бар вектор, зарби скалярии векторҳо шинос шуда будем. Акнун ин махфумҳоро дар фазо паҳн мекунем.

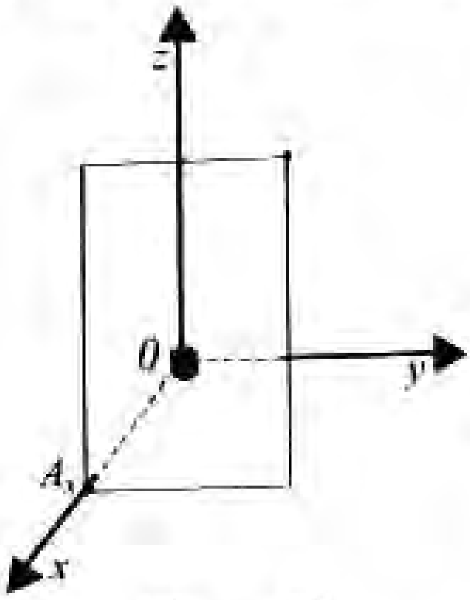
14. Координатаҳои декартӣ

Нуқтаи дилхоҳи фазо O-ро гирифта аз он се хати рости ба якдигар перпендикуляри Ox, Oy ва Oz-ро мегузаронем. Мувофиқи назарияи пункти 8 чунин сохтан ҳамеша имконпазир аст (ниг. ба масъалаи рақами 116). Дар ҳақиқат, кифоя аст, ки дар ҳамворӣ ду хати рости перпендикулярро гирифта, дар нуқтаи буриши онҳо ба ҳамворӣ перпендикуляр барқарор намоем (расми 91).



Расми 91

Аз рӯи ҳар як ҷуфти ин хатҳо ҳамворӣ мегузаронем. Ҳамворие, ки аз рӯи хатҳои рости Ox ва Oy мегузарад, ҳамвории Oxy меномем. Ду ҳамвории дигар мувофиқан ҳамвориҳои Oyz, Oxz ном доранд. Хатҳои рости Ox, Oy, Oz *тирҳои координатавӣ* (Ox – тири *абсисса*, Oy– тири *ордината*, Oz – тири *апликата*), ҳамвориҳои Oxy, Oyz, Oxz *ҳамвориҳои координатавӣ* ном доранд. Ҳамвориҳои координатавӣ байни худ перпендикуляранд. Нуқтаи буриши тирҳои координатавӣ O *ибтидои координата* ном дорад. Нуқтаи O ҳар яке аз тирҳои координатавиро ба ду нимхатҳои рост – *нимтирҳо* ҷудо мекунад. Якеашро мусбат, дигарашро манфӣ меномем.



Расми 92

Акнун мафҳуми *координатаи нуқтаро* дохил мекунем. Бигузор нуқтаи дилхоҳи A дода шудааст. Аз нуқтаи A ҳамвории ба ҳамвории Oyz параллелро мегузаронем. Вай тири Ox-ро дар ягон нуқтаи A_x мебурад. *Координатаи* (абсиссаи) x-и нуқтаи A гуфта ададеро меноманд, ки қиматаш ба масофаи порчаи OA_x баробар аст. Ин қимат мусбат аст, агар A_x дар нимтири мусбати тири Ox ва манфӣ аст, агар дар нимтири манфӣ воқеъ бошад. Рафту агар A_x бо нуқтаи O ҳамҷоя шавад, он гоҳ $x=0$ ҳисоб карда мешавад. Координатаҳои y ва z-и нуқтаи A айнан ҳамин тавр муайян карда мешаванд. Координатаи нуқтаро дар қавс дар паҳлӯи ишораи ҳарфии нуқта менависем: $A(x;y;z)$. Баъзан бе ишораи ҳарфӣ ҳам, яъне ҳамчун $(x;y;z)$.

Муҳимтарин масъалае, ки пайдо мешавад чунин аст: магар барои ҳар як се ададӣ батартибовардашудаи $(x;y;z)$ дар фазо нуқтае мавҷуд ҳаст, ки дорои ин координатаҳо мебошад? Ҷавоб мусбат аст. Дар ҳақиқат, дар тирҳо нуқтаҳои $A_x(x;o;o)$, $A_y(o;y;o)$, $A_z(o;o;z)$-ро гирифта аз онҳо се ҳамвории ба ҳамвориҳои координатавӣ параллел (яъне, ба тирҳо перпендикуляр) мегузаронем. Нишон додан мумкин аст, ки ин ҳамвориҳо ҳамдигарро дар як нуқтаи A мебуранд. Зоҳиран фаҳмост, ки координатаҳои нуқтаи A ададҳои x, y, z мебошанд.

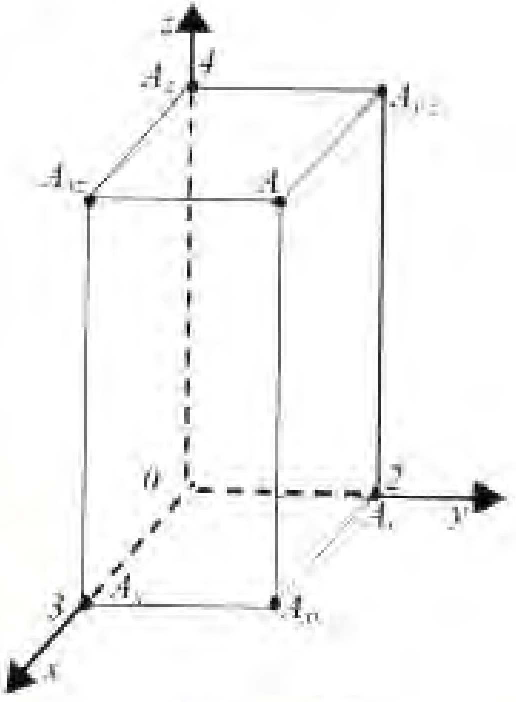
Масъалаи 1. Нуқтаи $A(3;2;4)$-ро дар фазои координатавӣ тасвир мекунем.

Ҳал. Аз нуқтаҳои $x=3$, $y=2$, ва $z=4$ се ҳамвориҳои ба ҳамвориҳои координатавӣ параллел бударо гузаронида мебинем, ки ин ҳамвориҳо ҳамдигарро дар як нуқта мебуранд. Ин нуқта нуқтаи матлуб мебошад (расми 93).

Эзох. Буриши ин се ҳамворӣ ва ҳамвориҳои координатавӣ параллелипед аст, ки он *параллелепипеди координатавӣ* **ном дорад (расми 93).**

Барои $A(x;y;z)$ **андозаҳои ин параллелепипед** $|x|$, $|y|$ **ва** $|z|$ **аст.**

Масъалаи 2. Нуқтаҳои $A(2;1;4)$, $B(0;2;0)$, $C(2;1;0)$, $D(0;1;2)$ дода шудаанд. Кадоми онҳо: 1) дар ҳамвории Oxy; 2) дар тири Oy; 3) дар ҳамвории Oyz ҷойгир буданашонро муайян мекунем.



Расми 93

Ҳал. Барои нуқтаҳои ҳамвории Oxy **координатаи** z **ба нул баробар аст. Барои ҳамин нуқтаҳои** B **ва** C **дар ҳамвории** Oxy **ҷойгиранд. Барои нуқтаҳои тири** Oy **ду координата** x **ва** z **нуланд. Пас нуқтаи** B **ба тири** Oy **тааллуқ дорад. Нуқтаҳои** B **ва** D **дар ҳамвории** Oyz **ҷойгиранд.**

---

1. Тирҳо ва ҳамвориҳои координатавӣ гуфта дар фазо чиро меноманд? 2. Ибтидои координата ва нимтирҳо чианд? Нимтирҳои мусбат ва манфӣ-чӣ? 3. Мафҳуми координатаи нуқта дар фазо чӣ тавр дохил карда мешавад? 4.Чаро координатаҳои нуқта онро дар фазо яккимата муайян менамояд? 5. Чиро параллелепипеди координатавӣ меноманд?

---

186. **Нуқтаи: 1)** $A(1;-2;2)$; **2)** $B(4;3;0)$**-ро дар фазои координатавӣ тасвир кунед.**

187. **Кадоме аз нуқтаҳои** $A(1;0;2)$, $B(1;-4;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;-2)$, $E(-1,5;2;0)$, $F(-3;0;0)$ **дар: 1) тири** Ox; **2) тири** Oy; **3) тири** Oz; **4) ҳамвории** Oxy; **5) ҳамвории** Oyz; **6) ҳамвории** Oxz **ҷойгиранд?**

188*. **Аз нуқтаҳои (1;0;0), (0;2;0), (0;0;3) се ҳамвории ба ҳамвориҳои координатавӣ параллел гузаронида шудааст. Нишон диҳед, ки онҳо дар нуқтаи ягонаи** $A(1;2;3)$ **ҳамдигарро мебуранд.**

189. **Барои нуқтаи** $A(4;1;3)$ **параллелепипеди координатавиро созед.**

190*. **Координатахои қуллаҳои параллелепипеди координатавии нуқтаи $A(2;3;1)$-ро ёбед.**

Машқҳо барои такрор

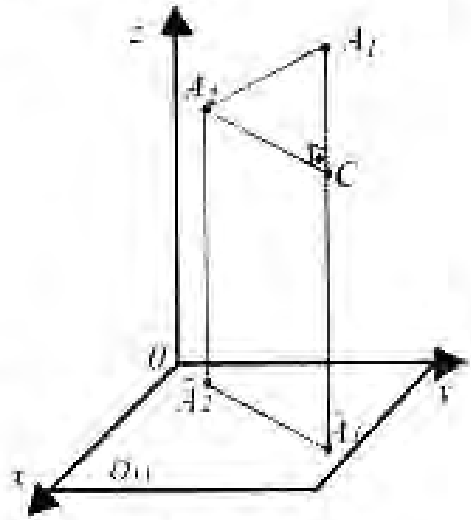
191. **Масофаи байни нуқтаҳои $A(-1;3)$ ва $B(4;-1)$-и дар ҳамворӣ бударо ёбед.**

192. **Координатаҳои миёначои порчаеро, ки нӯгҳояш $A(-2;-5)$ ва $B(-5;2)$ мебошанд, ёбед.**

193. **Кунчи байни моили a ва ҳамворӣ 30^0 аст. Проектсияи моилро дар ҳамворӣ ёбед.**

15. Масофаи байни ду нуқта дар фазо. Координатаҳои миёначои порча

Бигузор нуқтаҳои $A_1(x_1;y_1;z_1)$ ва $A_2(x_2;y_2;z_2)$ дода шудаанд. Масофаи байни ин ду нуқтаро бо воситаи координатаҳояшон ифода мекунем.



Расми 94

Чи тавре медонем масофаи байни ду нуқтаи $A_1(x_1;y_1)$ ва $A_2(x_2;y_2)$-и ҳамворӣи Oxy бо формулаи

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ифода меёбад. Мо шабеҳи (аналоги) ин формуларо барои нуқтаҳои фазо ҳосил мекунем.

Фарз мекунем, ки хати рости A_1A_2 ба тири Oz параллел нест. Аз нуқтаҳои A_1 ва A_2 хатҳои рости ба тири Oz параллелро мегузаронем (расми 92). Онҳо ҳамворӣи Oxy-ро дар нуқтаҳои $\bar{A}_1$ ва $\bar{A}_2$ мебуранд. Абсиссаю ординатаи ин нуқтаҳо бо абсиссаю ординатаи нуқтаҳои A_1 ва A_2 якхелаанд, вале аппликатаашон нул аст. Аз нуқтаи A_2 ҳамворӣи ба ҳамворӣи Oxy параллелро мегузаронем. Вай хати рости $A_1\bar{A}_1$-ро дар нуқтаи C мебурад. Секунҷаи A_1CA_2 росткунҷа аст. Дар ҳақиқат, ҳамворӣи аз нуқтаи A_2 мегузаштагӣ ва бо Oxy параллел буда ба тири Oz,

яъне ба хати ба ин тир параллели A_1A_1 перпендикуляр аст. Пас $A_1C\perp A_2C$. Барои ҳамин аз рӯи теоремаи Пифагор

$$A_1A_2^2=A_1C^2+CA_2^2.$$

Вале $CA_2=\overline{A_1A_2}$; $\overline{A_1A_2}=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$, $A_1C=|z_2-z_1|$. Барои ҳамин

$$A_1A_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

Рафту агар порчаи A_1A_2 ба тири Oz паралел бошад, он гоҳ $A_1A_2=|z_2-z_1|$ буда, $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ аст ва формулаи ҳосилшуда дар ин ҳолат ҳам ҳамон натиҷаро медиҳад.

Ҳамин тариқ, барои масофаи байни нуқтаҳои A_1 ва A_2 формулаи зерин ҳосил мешавад.

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Инак, *масофаи байни ду нуқта ба решаи квадратӣ аз суммаи квадрати фарқҳои координатаҳои мувофиқи нуқтаҳо баробар аст.*

Масъалаи 1. Масофаи нуқтаҳои: 1) $A(-3;2;1)$ва $B(4;1;7)$; 2) $A(x;4;-5)$ ва $B(3;1;4)$-ро меёбем.

Ҳал:

1) $|AB|=\sqrt{(4-(-3))^2+(1-2)^2+(7-1)^2}=\sqrt{7^2+1^2+6^2}=\sqrt{86}$;

2) $AB=\sqrt{(3-x)^2+(1-4)^2+(4-(-5))^2}=\sqrt{(3-x)^2+3^2+9^2}=\sqrt{x^2-6x+99}$.

Масъалаи 2. Дар тири Ox нуқтаеро меёбем, ки аз нуқтаҳои $A(1;2;3)$ва $B(-2;1;1)$ дар як хел масофа ҷойгир аст.

Ҳал. Агар C нуқтаи матлуб бошад, пас $C(x;0;0)$ аст. Мувофиқи шарт квадрати масофаҳо бо ҳамдигар баробаранд, яъне $AC^2=BC^2$. Мувофиқи формулаи масофа ва шарти масъала

$$AC^2=(x-1)^2+2^2+3^2=(x-1)^2+13,$$
$$BC^2=(x+2)^2+1^2+1^2=(x+2)^2+2$$

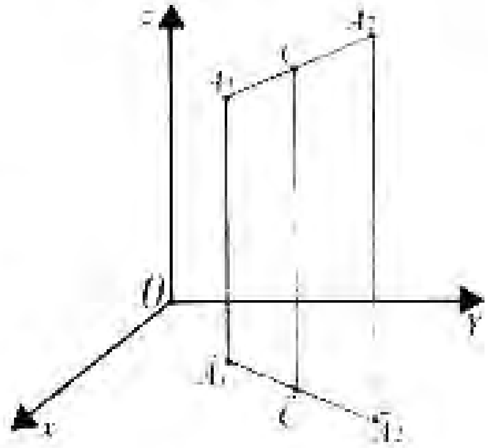
ва

$$(x-1)^2+13=(x+2)^2+2$$
ё $$x^2-2x+14=x^2+4x+6.$$

Аз ин ҷо $6x=8$ ва $x=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

Ҷавоб: $C\left(\frac{4}{3};0;0\right)$.

Акнун координатаҳои миёнаҷои порчаи A_1A_2-ро бо воситаи координатаҳои нӯгҳои он ифода мекунем (расми 95). Бигузор $C(x;y;z)$ миёнаҷои порчаи A_1A_2 аст. Аз нуқтаҳои A_1, C, A_2 хатҳои ба тири Oz параллелро мегузаронем. Онҳо ҳамвории Oxy-ро дар нуқтаҳои $\overline{A}_1(x_1;y_1;0)$, $\overline{C}(x;y;0)$ ва $\overline{A}_2(x_2;y_2;0)$ мебуранд. Мувофиқи теоремаи Фалес нуқтаи $\overline{C}$ миёнаҷои порчаи $\overline{A}_1\overline{A}_2$ аст. Бинобар ин мувофиқи формулаи планиметрӣ



Расми 95

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Барои ёфтани z кифоя аст, ки ба ҷои ҳамвории Oxy ҳамвории Oxz-ро гирем. Яъне, порчаи A_1A_2-ро якҷоя бо миёнаҷои он C ба ҳамвории Oxz параллел ба тири Oy проектсия намоем. Дар айни ҳол барои z формулаи монанд ҳосил мешавад:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Чун қоида миёнаҷои порчаи A_1A_2-ро бо $M_{A_1A_2}$ ишорат мекунем.

Масъалаи 3. Исбот мекунем, ки чоркунҷаи $ABCD$, ки қуллаҳояш $A(0;2;-3)$, $B(-1;1;1)$, $C(2;-2;-1)$, $D(3;-1;-5)$ мебошанд, параллелограмм мебошад.

Ҳал.

$$M_{AC} = M\left(\frac{0+2}{2};\frac{2-2}{2};\frac{-3-1}{2}\right) = M(1;0;-2),$$

$$M_{BD} = M\left(\frac{-1+3}{2};\frac{1-1}{2};\frac{1-5}{2}\right) = M(1;0;-2).$$

Инак, диагоналҳои чоркунҷа дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар тақсим мешаванд. Пас чоркунҷа параллелограмм аст.

---

1. Масофаи байни ду нуқта дар фазо бо кадом формула ифода мешавад? 2. Масофаи байни ибтидои координатаҳо ва нуқтаи додашударо чӣ тавр ёфтан мумкин аст? 3. Координатаҳои миёнаҷои порча, ки нӯгҳояш дода шудааст, ба чӣ баробар аст? 4. Чӣ тавр аз рӯи координатаҳои чор нуқта муқаррар кардан мумкин аст, ки онҳо қуллаҳои параллелограмманд?

---

194. Масофаи байни нуқтаҳои: 1) $A(4;0;-2)$ ва $B(2;-1;3)$ 2) $A(-2;4;6)$ ва $B(2;-2;5)$-ро ёбед.

195. Дар тири Oy нуқтаеро ёбед, ки аз нуқтаҳои $A(2;3;0)$ ва $B(-1;2;-5)$ дар як хел масофа ҷойгир аст.

196. Кадоме аз нуқтаҳои $A(4;-5;1)$ ё $B(2;1;7)$ аз ибтидои координатаҳо дуртар аст?

197. Кадоме аз нуқтаҳои $A(-3;3;1)$ ё $B(4;-2;1)$ ба ибтидои координатаҳо наздиктар аст?

198. Масофаи нуқтаи $A(2;1;-3)$-ро то: 1) ҳамвориҳои координатавӣ; 2) тирҳои координатавӣ; 3) ибтидои координатаҳо ҳисоб кунед.

199. Нуқтаҳои $A(-2;3;5)$, $B(1;2;4)$, $C(4;-3;6)$ қуллаҳои секунҷаанд. Тарафҳои секунҷаро ёбед?

200. Оё нуқтаҳои $A(2;-1;0)$, $B(0;1;-4)$, $C(1;-4;1)$ қуллаҳои секунҷаанд?

201. Координатаҳои миёнаҷои порчаи нӯгҳояш нуқтаҳои $A(-7;-5;2)$ ва $B(4;1;-6)$ буда чанданд?

202. Магар чоркунҷаи $ABCD$, ки қуллаҳояш дар нуқтаҳои $A(2;2;-3)$, $B(-1;2;1)$, $C(2;-3;-1)$, $D(-3;-4;-5)$ ҷойгир аст, параллелограмм мебошад?

203. Нишон диҳед, ки чоркунҷаи $ABCD$ ромб аст, агар $A(0;2;0)$, $B(1;0;0)$, $C(2;0;2)$, $D(1;2;2)$ бошад.

204. Координатаҳои қуллаи D-и параллелограми $ABCD$-ро ёбед, агар координатаҳои се қуллаи дигари он $A(0;2;-3)$, $B(3;4;5)$, $C(4;7;1)$ дода шуда бошанд.

205. Қуллаҳои секунҷа дода шудаанд: $A(-4;1;5)$, $B(1;0;3)$, $C(3;-2;1)$. Дарозии медианаҳои онро ҳисоб кунед.

206. Як нӯги порча $A(2;4;-2)$ ва миёначои он $C(1;2;1)$ дода шудааст. Координатаҳои нӯги дигари порча $B(x;y;z)$-ро ёбед.

Машқҳо барои такрор

207. Секунҷаи ABC дода шудааст. Исбот кунед, ки:
1) $\sin A = \sin (B + C)$; 2) $\cos A = - \cos (B + C)$ аст.

208. Масофаи байни нуқтаи M, ки берун аз ҳамвории α ҷойгир аст, то: 1) ҳамвории α; 2) хати росте, ки дар ҳамвории α ҷойгир аст, чӣ тавр муайян карда мешавад?

209. Дарозии хода бояд чанд бошад, то ки охирҳои онро дар ду пояҳои амудии баландиашон 4*м* ва 8*м*, ки масофаашон 3*м* аст, гузоштан мумкин бошад?

210. Нуқтаи $A(4;2;5)$ дода шудааст. Координатаҳои қуллаҳои параллелепипеди координатавии ин нуқтаро ёбед.

16. Ҳаракат, симметрия ва параллелкӯчонӣ дар фазо

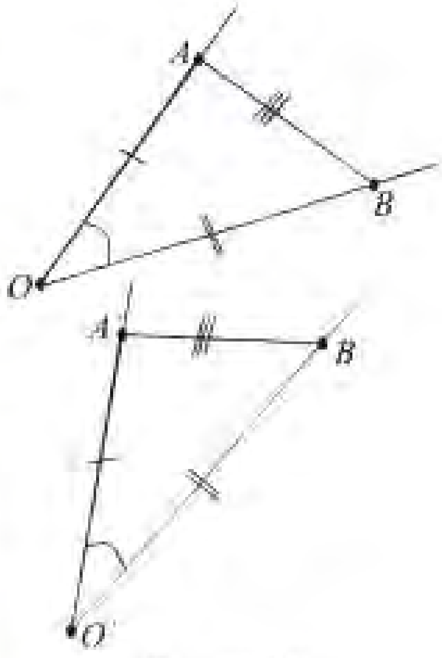
Агар ҳар як нуқтаи фигураи додашударо бо ягон тарз ҷойгардон кунем, фигураи дигарро ҳосил мекунем. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки ин фигура аз фигураи додашуда дар натиҷаи *табдилдиҳӣ* ҳосил шудааст. Дар ҳамворӣ чунин табдилдиҳиро, ба монанди ҳаракат, симметрия, параллелкӯчонӣ ва ғайраро муоина карда будем. Акнун ин мафҳумҳоро дар фазо паҳн намуда, хосияти онҳоро муайян менамоем.

1⁰. Ҳаракат. Айнан мисли ҳаракат дар ҳамворӣ, ҳаракат дар фазо ҳам як навъи табдилдиҳӣ мебошад.

Таъриф. Табдилдиҳие, ки дар он масофаи байни нуқтаҳо нигоҳ дошта мешавад, *ҳаракат* ном дорад.

Ҳамон тавре, ки дар ҳамворӣ мукаррар карда будем, дар фазо низ исбот карда мешавад, ки ҳангоми ҳаракат хатҳои рост ба хатҳои рост, нимхатҳои рост ба нимхатҳои рост, порчаҳо ба порчаҳо табдил меёбанд ва кунҷҳои байни нимхатҳои рост нигоҳ дошта мешаванд.

Дар ҳақиқат, бигузор нуқтаҳои A, B, C дар як хати рост ҷойгир буда, ҳангоми ҳаракат ба нуқтаҳои A', B', C' табдил меёбанд. Агар фарз кунем, ки B дар байни A ва C ҷойгир бошад, он гоҳ $AB+BC=AC$ аст. Мувофиқи таърифи ҳаракат, аз ин ҷо бармеояд, ки $A'B' + B'C' = A'C'$ мебошад. Ин маънои онро дорад, ки B' дар хати рости $A'C'$ ҷойгир аст (вагарна нобаробарии ҷиддии секунҷа $A'B' + B'C' > A'C'$ иҷро мешуд!) ва бар замми ин дар байни A' ва C'. Азбаски хати рост, нимхати рост, порча бо ду нуқтаашон муайян мешаванд, пас ҳангоми ҳаракат хати рост ба хати рост, нур ба нур ва порча ба порча табдил меёбад. Нигоҳ дошта шудани кунҷҳо аз нигоҳдории масофа ва аломати баробарии секунҷаҳо аз рӯи се тараф бармеояд (расми 96).

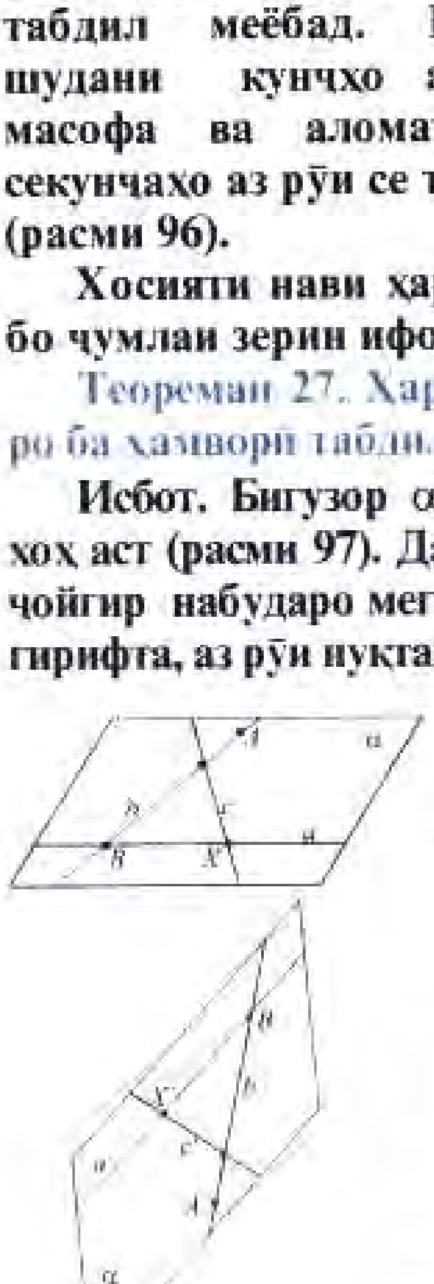


Расми 96

Хосияти нави ҳаракат дар фазо бо ҷумлаи зерин ифода меёбад.

Теоремаи 27. Ҳаракат ҳамвориро ба ҳамворӣ табдил медиҳад.

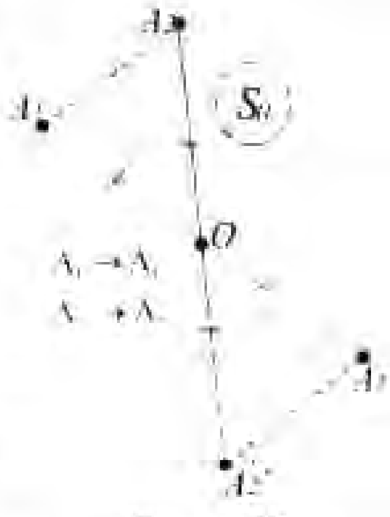
Исбот. Бигузор α ҳамвории дилхоҳ аст (расми 97). Дар он хати рости a ва нуқтаи A-и дар он ҷойгир набударо мегирем. Нуқтаи дихоҳи B-и хати рости a-ро гирифта, аз рӯи нуқтаҳои A ва B хати рости b-ро мегузаронем.


Расми 97

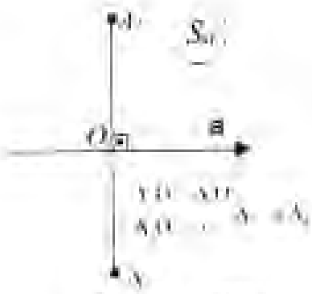
Ҳаракат ин хатҳоро ба хатҳои рости a' ва b' табдил медиҳад. Ин хатҳо ҳамҷоя шуда наметавонанд, чунки кунҷи байни a' ва b' ба кунҷи байни a ва b баробар аст. Аз болои хатҳои рости ҳамдигарро мебуридагии a' ва b' ҳамвории α'-ро мегузаронем. Исбот мекунем, ки дар ин ҳаракат ҳамвории α ба ҳамвории α' табдил меёбад. Хати рости c-ро мегузаронем, ки хатҳои рости a ва b-ро мебурад (расми 97). Аз сабаби ҳангоми ҳаракат нигоҳ дошта шудани кунҷҳо хати рости c', ки c ба он табдил ёфтааст, хатҳои рости a' ва b'-ро мебурад, яъне c' ва бо он нуқтаи буришаш бо хати α', ки X' аст ҳам дар ҳамвории α' ҷойгир аст. Инак, ҳар гуна нуқтаи ҳамвории α ҳангоми ҳаракат ба нуқтаи ҳамвории α', ё ки α ба α' табдил меёбад. Теорема исбот шуд.

Мисли ҳамворӣ, дар фазо ду фигура *баробар* номида мешаванд, агар онҳо ҳангоми ягон ҳаракат ҳамҷоя шаванд.

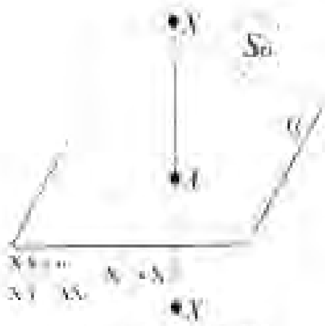
2°. Симметрия. Табдилдиҳиҳои симметрия нисбат ба нуқта (расми 98), нисбат ба хати рост (расми 99) ва гомотетия айнан мисли табдилдиҳиҳо дар ҳамворӣ дохил карда мешаванд. Дар қатори ин табдилдиҳиҳо дар фазо боз табдилдиҳии симметрияро нисбат ба ҳамвории муоина менамоянд. Ин мафҳум ин тавр дохил карда мешавад. Бигузор α ҳамворӣ буда, X нуқтаи дилхоҳи фигураи фазо аст (расми 100). Аз нуқтаи X перпендикуляри XA-ро фаровардa дар давоми он порчаи AX'-и ба порчаи AX баробарро ҷудо мекунем. Нуқтаи X' ба нуқтаи X нисбати ҳамвории α *симметрӣ* номида мешавад. Чунин табдилдиҳӣ *табдилдиҳии симметрия нисбати ҳамвории* α ном дорад.



Расми 98



Расми 99



Расми 100

Агар нуқтаи X дар ҳамвории α ҷойгир бошад, он гоҳ ҳисоб карда мешавад, ки вай ба худ табдил мегардад. Агар табдилдиҳии симметрия нисбат ба ҳамвории α фигураро ба худаш табдил диҳад, фигураро *нисбат ба ҳамвории* α *симметрӣ* меноманд ва ҳамвории α *ҳамвории симметрияи* он номида мешавад.

Агар барои кӯтоҳгуфторӣ симметрияро нисбат ба нуқтаи O бо S_O, нисбат ба хати рости a бо S_a ва нисбат ба ҳамвории α бо

S_0 ишорат кунем, он гоҳ аз баробарии секунҷаҳои A_1OA_2 ва $A_1'OA_2'$-и расми 98 бармеояд, ки S_0 ҳаракат аст, яъне $A_1A_2 = A_1'A_2'$. Чи тавре дида будем дар ҳамворӣ S_a ҳаракат буд. Нишон медиҳем, ки дар фазо S_a ва S_α низ ҳаракатанд. Барои ин аввал масъалаи зеринро ҳал мекунем.

Масъалаи 1. Нуқтаи (1;2;3) дода шудааст. Нуқтаҳоеро, ки нисбат ба ҳамвориҳои координатавӣ ба ин нуқта симметрианд меёбем.

Ҳал. Нуқтае, ки нисбат ба ҳамвории Oxy ба нуқтаи (1;2;3) симметрӣ аст, дар хати рости ба ҳамвории Oxy перпендикуляр будагӣ воқеъ аст. Бинобар ин координатаҳои x ва y-и онҳо якхела аст: $x=1, y=2$. Нуқтаи симметрӣ аз ҳамвории Oxy дар ҳамон масофа (дар дигар тарафаш) воқеъ аст. Бинобар ин координатаи z-и он фақат бо аломаташ фарқ мекунад, яъне $z=-3$. Инак, нуқтае, ки нисбат ба ҳамвории Oxy ба нуқтаи (1;2;3) симметрӣ мебошад, нуқтаи (1;2;-3) аст. Барои ҳамвориҳои координатавии дигар ҳал ҳамин тавр ёфта мешавад.

Теоремаи 28. Табдилдиҳии симметрия нисбат ба нуқта, хати рост ва ҳамворӣ дар фазо ҳаракат мебошад.

Исбот. Системаи координатавиро ҳамеша чунин интихоб кардан мумкин аст, ки ҳамвории симметрия α бо ҳамвории координатавии Oxy ва тири симметрия α бо тири координатавии Ox ҳамҷоя шавад. Ҳалли масъалаи боло нишон медиҳад, ки симметрияи $S_a = S_{oxy}$ нуқтаи $A(x;y;-z)$-ро ба нуқтаи A' $(x;y;z)$ табдил медиҳад. (Ин нуқтаҳо дар ҳамвории Oxy дорои проектсияи $A_{xy}(x;y;0)$ буда, аз он дар як хел масофа ҷойгиранд: $|z|=|-z|$.) Нуқтаи дигари $A_1(x_1;y_1;z_1)$ бошад ба нуқтаи $A_1'(x_1;y_1;-z_1)$ табдил меёбад. Зоҳиран фаҳмост, ки $AA_1 = A'A_1'$ аст, яъне S_α ҳаракат мебошад.

Ҳангоми симметрия нисбат ба тири Ox бошад, нуқтаи $A(x;y;z)$ ба нуқтаи $A'(x;-y;-z)$ табдил меёбад. (Дар ҳақиқат, миёнаҷои порчаи AA' нуқтаи $M(x;0;0)$ аст, яъне бо проектсияҳои A ва A' дар тири Ox якхела аст.) Мисли пешина нишон додан мумкин аст, ки ин симметрия низ ҳаракат мебошад. Теорема исбот шуд.

Қайд мекунем, ки симметрия дар табиат васеъ пахн мебошад. Масалан, онро дар шакли баргҳо ва гулҳои растаниҳо, ҷойгиршавии узвҳои гуногуни ҳайвонот ва одамон, ҷисмҳои кристаллӣ мушоҳида кардан мумкин аст. Симметрия дар амалия, сохтмон ва техника васеъ истифода карда мешавад (биноҳо, машина, механизмҳо ва ғайра).

3^0. Параллелкӯчонӣ. **Табдилдиҳие, ки дар он нуқтаи дилхоҳи $(x;y;z)$-и фигура ба нуқтаи $(x+a;\ y+b;\ z+c)$, ки дар ин ҷо a,b,c ададҳои доимианд, табдил меёбад,** *параллелкӯчонӣ* **дар фазо ном дорад. Параллелкӯчонӣ дар фазо бо формулаҳои**

$$x'=x+a,\ y'=y+b,\ z'=z+c$$

ифода мешавад. Дар ин ҷо $x',\ y',\ z'$ координатаҳои нуқтае мебошад, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаи $(x;y;z)$ ба он табдил меёбад. Айнан ҷуноне ки дар ҳамворӣ исбот карда будем, хосиятҳои зерини параллелкӯчонӣ исбот карда мешаванд:

1. **Параллелкӯчонӣ ҳаракат аст.**

2. **Ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаҳо аз рӯи хатҳои рости параллел (ё ҳамҷояшаванда) ба якхел масофа мекӯчанд.**

3. **Ҳангоми параллелкӯчонӣ ҳар як хати рост ба хати рости ба он параллел (ё ба худаш) табдил меёбад.**

4. **Нуқтаҳои A ва A' чи хел набошанд, параллелкӯчонии ягонае ҳаст, ки дар он нуқтаи A ба нуқтаи A' табдил меёбад.**

Масъалаи 2. Қиматҳои a,b,c-и дар формулаҳои параллелкӯчонӣ бударо меёбем, агар маълум бошад, ки нуқтаи $A(2;-4;6)$ ба нуқтаи $A(0;-3;2)$ табдил меёбад.

Ҳал. Координатаҳои нуқтаи A ва A'-ро дар формулаҳои параллелкӯчонӣ гузошта, муодилаҳо ҳосил мекунем. Аз онҳо a,b,c-ро муайян менамоем:

$$0=2+a,\ -3=-4+b,\ 2=6+c.$$

Аз ин ҷо $a=-2,\ b=1,\ c=-4$.

Хосияти зерин барои параллелкӯчонӣ дар фазо нав аст, ки мо онро ҳамчун теорема меорем.

Теоремаи 29. Ҳангоми параллелкӯчонӣ дар фазо ҳар як ҳамворӣ ё ба худаш, ё ба ҳамвории ба он параллел табдил меёбад.

Исбот. Бигузор α ҳамвории дилхоҳ аст. Дар он ду хати рости a **ва** b**-и ҳамдигарро мебуридагӣ мегузаронем. Мувофиқи хосияти 3, ҳангоми параллелкӯчонӣ ин ду хат ё ба худашон, ё ба хатҳои рости ба онҳо параллели** a' **ва** b' **табдил меёбанд. Ҳамвории α ба ҳамвории α', ки аз рӯи хатҳои рости** a' **ва** b' **мегузарад, табдил мешавад. Агар ҳамвории α' бо ҳамвории α ҳамҷоя нашавад, он гоҳ мувофиқи теоремаи 8-и пункти 7 вай ба α параллел аст. Теорема исбот шуд.**

---

1. Чӣ гуна табдилдиҳиро ҳаракат меноманд? 2. Исбот кунед, ки ҳаракат дар фазо ҳамвориро ба ҳамворӣ табдил медиҳад. 3. Табдилдиҳии симметрия нисбат ба нуқта, ба хати рост ва ба ҳамворӣ чӣ тавр муайян карда мешавад? 4. Ҳамвории симметрияи нуқта чист? 5. Исбот кунед, ки табдилдиҳии симетрия нисбат ба нуқта, хати рост ва ҳамворӣ дар фазо ҳаракат аст. 6. Чиро параллелкӯчонӣ меноманд? Хосиятҳоеро, ки ба ин табдилдиҳӣ ҳам дар ҳамворӣ ва ҳам дар фазо хосанд, номбар намоед. 7. Нишон диҳед, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ дар фазо ҳар як ҳамворӣ ё ба худаш, ё ба ҳамвории параллел табдил меёбад.

---

211. Нишон диҳед, ки ҳаракат секунҷаро ба секунҷаи ба он баробар табдил медиҳад.

212. Исбот кунед, ки ҳангоми ҳаракат дар фазо доира ба доираи дорои ҳамон радиус табдил меёбад.

213. Исбот кунед, ки ҳангоми ҳаракат дар фазо се нуқтаи дар як хати рост буда, ба се нуқтаи низ дар як хати рост ҷойгирбуда табдил меёбанд.

214. Исбот кунед, ки табдилдиҳии симметрия нисбат ба ҳамвории координатавии Oxz **бо формулаҳои** $x'=x$, $y'=-y$, $z'=z$ **дода мешавад.**

215. Нуқтаи $A(2;1;-4)$ **дода шудааст. Нуқтаҳои нисбат ба ҳамвориҳои координатавии ба он симметрия бударо ёбед.**

116. Нуқтаи $A(2;1;-4)$ **дода шудааст. Нуқтаҳои нисбат ба тирҳои координатавии ба он симметрия бударо ёбед.**

117. Нуқтаи $A(2;1;-4)$ **дода шудааст. Нуқтаҳоеро ёбед, ки онҳо нисбат ба ибтидои координата ба ин нуқта симметрӣ мебошанд.**

118.* Нишон диҳед, ки параллелкӯчонӣ хати ростро ба хати рости ба он чиликӣ табдил дода наметавонад.

119. Маълум, ки нуқтаи $A(2;1;-6)$ ҳангоми параллелкӯчонӣ ба нуқтаи $A'(4;8;3)$ табдил меёбад. Формулаҳои параллелкӯчониро нависед.

220. Маълум, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ ибтидои координатаҳо ба нуқтаи $A(3;4;-1)$ табдил меёбад. Координатаҳои нуқтаеро ёбед, ки нуқтаи $B(2;-4;-7)$ ба он табдил меёбад.

221. Маълум, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаи $A(4;7;-2)$ ба нуқтаи $A'(1;-2;0)$ табдил меёбад. Ибтидои координатаҳо дар айни ҳол ба кадом нуқта табдил меёбад?

222. Оё параллелкӯчоние ҳаст, ки дар он нуқтаи A ба нуқтаи B ва нуқтаи C ба нуқтаи D табдил меёбад, агар: $A(2;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(3;-2;1)$, $D(2;-3;0)$; $A(0;1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(3;-2;2)$, $D(2;-3;1)$ бошад.

Машқҳо барои такрор

223. Тарафҳои секунча ба $0{,}8$м, $1{,}6$м ва 2м баробаранд. Тарафҳои секунчаи ба ин секунча монандро ёбед, ки периметраш ба $5{,}5$м баробар аст.

224. Маълум, ки проексияи ду хати рост дар ҳамворӣ ҳамдигарро мебуранд. Исбот кунед, ки ин хатҳои рост параллел нестанд.

225. Ду ҳамвории параллел ва нуқтаи P-и дар байни онҳо ҷойгирнабуда дода шудаанд. Ду хати росте, ки аз нуқтаи P мегузаранд, ҳамвории ба нуқтаи P наздикбударо дар нуқтаҳои A_1 ва A_2, дурбударо-мувофиқан дар нуқтаҳои B_1 ва B_2 мебуранд. Дарозии порчаи B_1B_2-ро ёбед, агар $A_1A_2 = 6$ см ва $PA_1 : A_1B_1 = 3 : 2$ бошад.

226. Дар ҳамвории Oxy нуқтаи $D(x;y;0)$-ро ёбед, ки аз нуқтаҳои $A(1;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$ дар якхел масофа ҷойгир аст.

§6. ВЕКТОРҲО ДАР ФАЗО

17. Координатаҳои вектор

Мисли ҳамворӣ, дар фазо порчаи самтдорро вектор меноманд. Зери порчаи самтдори $\overrightarrow{AB}$ порчаи AB - ро

мефаҳманд, ки яке аз нӯгҳояш A - ибтидо ва нӯги дигараш B ҳамчун интиҳо қабул карда мешавад.

Айнан мисли ҳамворӣ чунин мафҳумҳои асосӣ барои векторҳо дар фазо ба монанди самти вектор, қимати мутлақи (дарозии) вектор, баробарии векторҳо дохил карда мешавад.

Агар нуқтаи ибтидоии вектор - A дорои координатаҳои $(x_1;y_1;z_1)$ ва нуқтаи интиҳояш B дорои координатаҳои $(x_2;y_2;z_2)$ бошад, он гоҳ ададҳои x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1-ро координатаҳои вектори $\overrightarrow{AB}$ меноманд. Ду вектор баробар ҳисоб карда мешаванд, агар координатаҳои баробар дошта бошанд. Ва баръакс, дар векторҳои баробар координатаҳои мувофиқ баробаранд. Масалан, агар $A(2;7;-3)$, $B(1;0;3)$, $C(-3;-4;5)$ ва $D(-2;3;-1)$ бошанд, он гоҳ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ аст. Дар ҳақиқат, $\overrightarrow{AB}=(1-2;\ 0-7;\ 3-(-3))=(-1;-7;6)$, $\overrightarrow{DC}=(-3-(-2);\ -4-3;\ 5-(-1))=(-1;\ -7;\ 6)$. Айнан ҳамин хел санҷидан мумкин аст, ки $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ мебошад.

Масъалаи 1. Нуқтаҳои $A(4;3;0)$, $B(-1;2;4)$, $C(0;2;5)$ дода шудаанд. Нуқтаи $D(x;y;z)$ – ро меёбем, ки $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ аст.

Ҳал. Дорем $\overrightarrow{AB}=(-1-4;\ 2-3;\ 4-0)=(-5;-1;\ 4)$, $\overrightarrow{CD}=(x-0;\ y-2;\ z-5)$ мувофиқи шарт $x-0=-5$, $y-2=-1$, $z-5=4$. Аз ин ҷо $x=-5$, $y=1$, $z=9$.

Ҷавоб: $D(-5;\ 1;\ 9)$.

Чи тавре дидем, аломати баробарии векторҳо имконият медиҳад, ки барои ишорати вектор координатаҳояшро истифода кунем: $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$. Агар ҳамаи координатаҳои вектор нул бошанд, он гоҳ вай вектори нулӣ ном дорад. Ин вектор самт надорад.

Агар $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ **бошад, он гох адади** $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ *дарозӣ ё қимати мутлақ* **ва ё** *модули вектор* **ном дорад. Агар** $A(x_1;y_1;z_1)$ **ибтидо ва** $B(x_2;y_2;z_2)$ **интихои вектори** $\overrightarrow{AB}$ **бошанд, он гох дарозиаш ба масофаи байни нуктахои** A **ва** B **баробар аст:**

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,.$$

Барои баробарии ду вектор зарур ва кифоя аст, ки онхо самтхои якхела ва дарозии баробар дошта бошанд. Вектор *воҳидӣ* **номида мешавад, агар дарозии он ба 1 баробар бошад. Масалан, вектори** $\vec{a}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **воҳидӣ аст, чунки**

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1.$$

Масъалаи 2. **Маълум, ки дарозии векторҳои** $\vec{a}=(4;1;-2)$ **ва** $\vec{b}=(1;2;z)$ **ба ҳам баробаранд.** z **-ро меёбем.**

Ҳал. Азбаски $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{21}$,

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2+z^2}=\sqrt{5+z^2}$ **аст, пас аз** $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$ **бармеояд, ки** **21=5+**z^2 **ё** z^2**=16, ё ки** $z=\pm4$. **Ҳамин тариқ, векторҳои** $\vec{b}_1=(1;2;4;)$ **ва** $\vec{b}_2=(1;2;-4;)$ **бо** $\vec{a}$ **дарозии якхела доранд.**

---

1. Чиро дар фазо вектор меноманд? 2. Координатаҳои вектор чӣ тавр муайян карда мешаванд? Шарти баробарии ду вектор бо координатаҳояшон чӣ тавр навишта мешавад? 3. Дарозии вектор бо воситаи координатаҳояш чӣ хел муайян мешавад. 4. Вектори нулӣ чист? Оё вай самт дорад? Дарозиаш чанд аст? 5. Чӣ гуна векторро воҳидӣ меноманд.

---

227. Координатаҳои векторӣ $\overrightarrow{AB}$- ро ёбед, агар: 1) $A(2;-1;-7)$ ва $B(3;-4;-2)$; 2) $A(0;-1;6)$ ва $B(4;8;-3)$ бошад.

228. Дарозии вектореро, ки ибтидояш нуқтаи $A(0;-2;3)$ ва интиҳояш нуқтаи $B(4;8;-1)$ аст, ҳисоб кунед.

229. Дарозии вектори $\vec{a}=(4;-1;-2)$ -ро ёбед.

230. Нуқтаҳои $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;2;-1)$ дода шудаанд. Нуқтаи $D(x;y;z)$-ро ёбед, агар векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ баробар бошанд.

231. Векторҳои $\vec{a}=(2;1;-4)$ ва $\vec{b}=(x;-1;2)$ дарозии баробар доранд. x-ро ёбед.

232. Дарозии вектори $\vec{a}-(-a;a;-2a)$ ба 6 баробар аст. Ин векторро ёбед.

Машқҳо барои такрор

233. Катетҳои секунҷаи росткунҷа ба $7м$ ва $24м$ баробаранд. Ҳамвории α аз гипотенуза гузашта бо ҳамвории секунҷа кунҷи 30^0-ро ташкил медиҳад. Масофаи байни қуллаи кунҷи рост ва ҳамвориро ёбед.

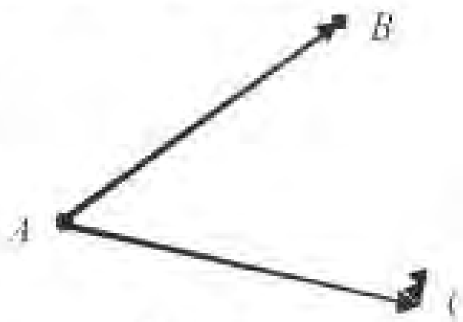
234*. Нуқтаҳои $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(1;2;0)$ нуқтаҳои пай дар пайи параллелограмм мебошанд. Суммаи координатаҳои қуллаи чорумро ёбед.

235. Дар тири Oz нуқтаеро ёбед, ки вай аз нуқтаҳои $A(2;1;1)$ ва $B(4;-2;2)$ дар якхел масофа ҷойгир аст.

18. Амалҳо бо векторҳо

Амалҳо бо векторҳо дар фазо ба монанди ҷамъи векторҳо, зарби вектор бар адад айнан чун дар ҳамворӣ муайян карда мешаванд. Суммаи векторҳои $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ ва $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ гуфта вектори $c=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$- ро меноманд ва менависанд: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Масалан, суммаи векторҳои $\vec{a}=(-2;1;4)$ ва $\vec{b}=(4;-2;3)$ вектори $\vec{c}=(2;-1;7)$ мебошад.

Барои векторҳои дилхоҳи $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ баробариҳои $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$ (қонуни ҷойивазкунӣ) ва $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (қонуни комбинатсиягӣ) ҷой доранд. Барои исботи ин баробариҳо баробар будани координатаҳои қисми чап ва ростро нишон додан зарур аст. Ин бошад зоҳиран фаҳмост.



Расми 101

Айнан чун дар ҳамворӣ баробарии $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ исбот карда мешавад. Ин баробарӣ *қоидаи секунҷаҳо* ном дорад (расми 101).


Расми 102

Суммаи векторҳое, ки ибтидои умумӣ доранд, ҳамчун диагонали параллелограмми дар ин векторҳо сохташуда тасвир мешавад. Инро *қоидаи параллелограмм* меноманд (расми 102). Дар ҳақиқат, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ аст. Пас $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Ду вектор *муқобил* номида мешаванд, агар суммаи онҳо вектори нулӣ бошад. Векторҳои муқобил дарозии якхела дошта, самташон ба ҳам муқобил аст. Масалан, векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$ ҳамеша ба ҳам муқобиланд.

Масъалаи 1. Нуқтаҳои $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$ ва $C(0;2;-1)$ дода шудаанд. Нуқтаи D-ро меёбем, агар маълум бошад, ки суммаи векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ вектори нулӣ аст.

Ҳал. Агар $D(x;y;z)$ **бошад, он гоҳ** $\overrightarrow{AB}=(-2;1;1)$ **ва** $\overrightarrow{CD}=(x-0;y-2;z+1)$ **аст, пас мувофиқи шарт**

$$0=x-2=y-2+1=1+(z+1).$$

Аз ин ҷо $x=2, y=1, z=-2$. **Ҷавоб:** $D(2;1;-2)$.

Ҳосили зарби **вектори** $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ **бар адади** λ **гуфта вектори** $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$**-ро меноманд. Айнан чун дар ҳамворӣ исбот кардан мумкин аст, ки дарозии вектори** $\lambda\vec{a}$ **ба** $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ **баробар мебошад. Самти** $\lambda\vec{a}$ **ҳангоми** $\lambda>0$ **будан бо самти** $\vec{a}$ **якхела буда, ҳангоми** $\lambda<0$ **будан ба самти** $\vec{a}$ **муқобил аст.**

Чун дар ҳамворӣ ду вектор дар фазо *коллинеарӣ* **номида мешавад, агар онҳо дар як хати рост ё дар хатҳои рости параллел ҷойгир бошанд. Самти ду вектори коллинеарӣ якхела ё муқобил аст. Шарти зарурӣ ва кифоягии коллинеарии векторҳои** $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **мавҷудияти чунин адади** $\lambda\neq 0$ **аст, ки** $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ **бошад. Яъне,** $(a_1;a_2;a_3)=\lambda(b_1;b_2;b_3)=(\lambda b_1;\lambda b_2;\lambda b_3)$ **ё ки** $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, $a_3=\lambda b_3$. **Ин се баробариро дар шакли таносуби дучанда навиштан мумкин аст:**

$$a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3=\lambda.$$

Кӯтоҳ карда гуфтан мумкин аст, ки барои коллинеарии ду вектор зарур ва кифоя аст, ки координатаҳои онҳо мутаносиб бошанд.

Масъалаи 2. Векторҳои $\vec{a}=(1;-2;1)$ **ва** $\vec{b}=(3;4;-6)$ **дода шудаанд. Вектори** $2\vec{a}-3\vec{b}$**-ро меёбем.**

Ҳал.

$$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}=2\cdot(1;-2;\ 1)-3\cdot(3;\ 4;-6)=(2;-4;\ 2)-(9;\ 12;-18)=$$
$$=(2-9;\ -4-12;\ 2-(-18))=(-7;\ -16;\ 20).$$

Масъалаи 3. Барои кадом қиматҳои m ва n коллинеарӣ будани векторҳои $\vec{a}=(2;n;3)$ ва $\vec{b}=(3;2;m)$ - ро муайян мекунем.

Ҳал. Мувофиқи шарти коллинеарӣ $2:3=n:2=3:m=\lambda$.

Аз ин чо $\lambda=\frac{2}{3}$, $n=2\lambda=\frac{4}{3}$, $\frac{3}{m}=\frac{2}{3}$, $2m=9$, $m=\frac{9}{2}=4{,}5$.

Ҷавоб: m=4,5; $n=1\frac{1}{3}$.

---

1. Суммаи ду вектор дар фазо чӣ тавр муайян карда мешавад? 2. Қоидаи секунҷа барои ёфтани суммаи ду вектор чӣ тавр навишта мешавад? Қоидаи параллелограмм –чӣ? 3. Дар кадом ҳолат ду вектор ба ҳамдигар муқобиланд? 4. Ҳосили зарби вектор бар адад чӣ тавр муайян карда мешавад? 5. Дар кадом ҳолат ду вектор ба ҳамдигар коллинеарианд? Шарти коллинеарӣ бо координатаҳо чӣ тавр навишта мешавад?

---

236. Суммаи векторҳои $\vec{a}=(2;1;-4)$ **ва** $\vec{b}=(3;4;1)$ **- ро ёбед.**

237. Суммаи векторҳои $\vec{a}=(1;1{,}4;-2{,}3)$, $\vec{a}=(0;1{,}5;-2{,}1)$ **ва** $\vec{a}=(\frac{1}{3};4\frac{1}{5};2)$ **-ро ёбед.**

238. Координатаҳои вектореро ёбед, ки вай ба вектори $\vec{a}=(-1;3;-4)$ **муқобил аст.**

239. Векторҳои $\vec{a}=(2;-1;-4)$ **ва** $\vec{b}=(1;3;2)$ **дода шудаанд. Координатаҳои вектори** $-3\vec{a}+5\vec{b}$ **-ро ёбед.**

240. Дарозии вектори $3\vec{a}-\vec{b}$ **-ро ёбед, агар** $\vec{a}=(0;-1{,}5;2)$, $\vec{b}=(2;1;-3;)$ **бошанд.**

241*. Кадом шартҳоро координатаҳои нуқтаҳои A,B,C **бояд қаноат намоянд, то ки онҳо дар як хати рост ҷойгир бошанд?**

242. Барои кадом киматхои m ва n векторхои: 1) $\vec{a}=(m;2;5)$ ва $\vec{b}=(1;-1;n)$; 2) $\vec{a}=(m;n;2)$ ва $\vec{b}=(6;9;3)$ коллинеарианд?

243. Вектори $\vec{a}=(1;2;3)$ дода шудааст. Вектори ба он коллинеариро ёбед, ки ибтидоаш дар нуктаи $A(1;1;1)$ ва интихояш дар хамвории Oxy чойгир аст.

244. Вектори вохидиеро ёбед, ки ба вектори $\vec{a}=(3;2;-2)$ коллинеарӣ аст?

245. Нуктахои $A(1;0;2)$ ва $B(-1;1;1)$ дода шудаанд. Вектори вохидии $\vec{a}=(a;b;c)$-ро ёбед, ки ба вектори $\overrightarrow{AB}$ коллинеарӣ буда, бо он самти якхела дорад.

246. Дар кадом холат вектори $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ ба тири Ox параллел аст?

Машқҳо барои такрор

247. Дарозии вектореро, ки ибтидояш нуктаи $A(4,2;0;1,6)$ ва интихояш нуктаи $b(1,2;1,4;2,4)$ аст, ёбед.

248. Хатхои рости AB ва CD буррида мешаванд. Хатхои рости AC ва BD чиликӣ шуда метавонанд?

249. Магар вектори $\vec{a}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{2}{3}\right)$ вохидӣ аст?

250. Векторхои вохидии (0;1;0), (1;0;0), (0;0;1) дар кадом тирхои координатавӣ чойгиранд?

251*. Нуктахои B_2 ва C_2 миёначои порчаи BB_1 ва BC_1- и куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ мебошанд. Периметри буриши кубро бо хамвории AB_2C_2 ёбед, агар $AB=a$ бошад.

Таъриф. *Зарби скалярии* **векторҳои** $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ **ва** $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ **гуфта адади** $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ **-ро меноманд.**

Масалан, зарби скалярии векторҳои $\vec{a}=(2;4;0)$ **ва** $\vec{b}=(-1;3;2)$ **адади** $2\cdot(-1)+4\cdot3+0\cdot2=-2+12+0=10$ **мебошад.**

Аз формула – таърифи зарби скалярии ду вектор бевосита бармеояд, ки вай дорои хосиятҳои зерин аст:

$$1)\ \left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right);$$

$$2)\ \left(\vec{a},\vec{a}\right)=a_1^2+a_2^2+a_3^2=\left|\vec{a}\right|^2.$$

Яъне, зарби скалярии вектор бар худаш адади ғайриманфӣ буда, ба квадрати дарозии вектор баробар аст.

$$3)\quad (\vec{a},\alpha\vec{b}+\beta\vec{c})=\alpha(\vec{a},\vec{b})+\beta(\vec{a},\vec{c}),$$

ки дар ин ҷо α ва β ададҳои дилхоҳанд.

Хоситяҳои 1)-3)-ро истифода карда нишон дода мумкин аст, ки:

1⁰. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a},\vec{a})+2(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b});$

2⁰. $(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a},\vec{a})-2(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b});$

3⁰. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a},\vec{a})-(\vec{b},\vec{b}).$

Ҳамин тариқ, барои зарби скалярии векторҳо ба формулаҳои сумма ва фарқи квадрати мукаррарии ададҳо монанд формулаҳо ҷой доранд.

Масъалаи 1. Маълум, ки $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=9$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=6$ аст. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ - ро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи хосияти 1^0

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}\right) = (\vec{a},\vec{a}) + 2(\vec{a},\vec{b}) + (\vec{b},\vec{b}) =$$

$$= 3^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 9^2 = 90 + 2(\vec{a},\vec{b}).$$

Адади $2(\vec{a},\vec{b})$ **- ро меёбем. Аз рӯи хосияти 2^0 ва шарт**

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\right) = (\vec{a},\vec{a}) - 2(\vec{a},\vec{b}) + (\vec{b},\vec{b}) =$$

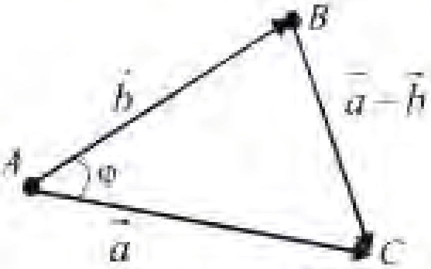
$$= 90 - 2(\vec{a},\vec{b}) = 36 = 6^2.$$

Аз ин ҷо $2(\vec{a},\vec{b}) = 90 - 36 = 54$. **Пас**

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 90 + 2(\vec{a},\vec{b}) = 90 + 54 = 144$. **Инак,** $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{144} = 12$.

Ҳарф ба ҳарф чуноне ки дар ҳамворӣ исбот карда будем, нишон дода мешавад, ки зарби скалярии векторҳо ба ҳосили зарби дарозиашон бар косинуси кунҷи байни онҳо баробар аст:

(1) $\qquad (\vec{a},\vec{b}) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$,



Расми 103

ки дар ин ҷо φ кунҷӣ байни $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **мебошад (расми 103).**

Формулаи (1) асосан дар се мавриդ истифода карда мешавад: 1) барои ёфтани $(\vec{a},\vec{b})$ **ҳангоми дода шудани** $\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$ **ва** φ; **2) барои ҳисоби** φ **ҳангоми дода шудани** $(\vec{a},\vec{b})$, $\left|\vec{a}\right|^2 = (\vec{a},\vec{a})$, $\left|\vec{b}\right|^2 = (\vec{b},\vec{b})$; **3) барои муқаррар кардани перпендикулярии векторҳои** $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **(векторҳои** $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ *перпендикуляр* **номида мешаванд, агар кунҷи байни онҳо 90^0 бошад. Аз (1) бармеояд, ки барои**

перпендикулярии ду вектор зарур ва кифоя аст, ки зарби скалярии онхо нул бошад).

Масъалаи 2. Координатахои вектори $\vec{b}$- ро, ки ба вектори $\vec{a}=(-1;1;-2)$ коллинеарӣ аст мееёбем, агар маълум бошад, ки $(\vec{a},\vec{b})=12$ аст.

Ҳал. Агар $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ бошад, пас

$(\vec{a},\vec{b})=-1\cdot b_1+1\cdot b_2-2\cdot b_3=12$ аст. Инчунин мувофиқи шарти коллинеарӣ

$$\frac{-1}{b_1}=\frac{1}{b_2}=\frac{-2}{b_3} \quad \text{ё} \quad b_2=-b_1,\ \ b_3=-2b_2=2b_1.$$

Аз ин чо ва аз $-b_1+b_2-2b_3=12$ мееёбем: $-b_1-b_1-4b_1=12$, яъне . $b_1=-2$. Пас $b_2=2$, $b_3=-4$.

Чавоб: $\vec{b}=(-2;2;-4)$.

Масъалаи 3. Барои кадом қимати m перпендикуляр будани векторхои $\vec{a}=(m;7;-2)$ ва $\vec{b}=(-3;m;2)$- ро муқаррар мекунем.

Ҳал. Дорем $(\vec{a},\vec{b})=m\cdot(-3)+7\cdot m+(-2)\cdot 2=-3m+7m-4$. Қимати ин ифода нул аст, агар $m=1$ бошад. Чавоб: m=1.

Масъалаи 4. Кунчи байни векторхои $\vec{a}=(\ 0,4\ ;\alpha\ \ 1)$ ва $\vec{b}=(0;2;-1)$ $\frac{\pi}{6}$ аст. Қимати α- ро мееёбем.

Ҳал. Мувофиқи формулаи (1)

$$\frac{3}{2}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\vec{a}\cdot\vec{b}}=\frac{0,4\cdot 0+\alpha\cdot 2-1\cdot 1}{0,4+\alpha^2+1^2\cdot\ \ 0^2+2^2+(-1)^2}=\frac{2\alpha-1}{1,4+\alpha^2\cdot\ \ 5},$$

Аз ин чо $2(2\alpha-1)=\ 15\cdot\ \ 1,4+\alpha^2$. Барои ёфтани ҳалли ин муодилаи ирратсионалӣ ҳар ду тарафро ба квадрат бардошта ҳосил мекунем:

$$16\alpha^2 - 16\alpha + 4 = 21 - 15\alpha^2,$$
$$\alpha^2 - 16\alpha - 17 = 0.$$

Решаҳои ин муодилаи квадратӣ $\alpha_1 = -1$ **ва** $\alpha_2 = 17$ **мебошанд. Вале** $\alpha_1 = -1$ **решаи муодилаи ирратсионалӣ нест, чунки** $2\alpha_1 - 1 \angle 0$ **мебошад. Ҷавоб:** $\alpha = 17$.

---

1. Зарби скалярии ду вектор чӣ тавр муайян карда мешавад? 2. Хосиятҳои зарби скалярии векторҳоро номбар кунед. 3. Кунҷи байни ду вектори ғайринулӣ бо кадом формула ҳисоб мешавад? 4. Перпендикулярии ду вектор чӣ хел фаҳмида мешавад? Онро чӣ тавр муқаррар кардан мумкин аст?

---

252. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **150^0,** $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ **аст.**

Бузургии: 1) $(\vec{a}, \vec{b})$; **2)** $|\vec{a} + \vec{b}|^2$; **3)** $|\vec{a} - \vec{b}|^2$;

4) $(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b})$ **- ро ёбед.**

253. $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$ **буданро дониста,** $|\vec{a} + \vec{b}|$ **- ро ёбед.**

254. Маълум, ки $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. $|\vec{b}|$ **-ро ёбед.**

255. Барои кадом m **ин векторҳо перпендикулярanд:**
1) $\vec{a} = (2;-1;3)$, $\vec{b} = (1;3;m)$; **2)** $\vec{a} = (n;-2;1)$, $\vec{b} = (n;2n;4)$**?**

256. Се нуқта дода шудааст: $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;2;-1)$. **Дар тири** Oz **чунин нуқтаи** $D(0;0;c)$ **- ро ёбед, ки векторҳои** $\overrightarrow{AB}$ **ва** $\overrightarrow{CD}$ **перпендикуляр бошанд.**

257. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a} = (\alpha;1;\frac{6}{5})$ **ва** $\vec{b} = (3;1;0)$ **ба** $\frac{\pi}{4}$ **баробар аст. Бузургии** α**-ро ёбед.**

258. Чор нуқта дода шудааст: $A(0;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;1;0)$, $D(2;-3;1)$. Косинуси кунҷи байни векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$-ро ёбед.

259. Се нуқта дода шудааст: $A(0;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;1;0)$. Косинуси кунҷи C-и секунҷаи ABC ёфта шавад.

260. Координатаҳои вектори $\vec{b}$-ро, ки ба вектори $\vec{a}=(1;1;-\frac{1}{2})$ коллинеарӣ буда, бо вектори $\vec{k}=(0;0;1)$ кунҷи кундро ташкил мекунад, ёбед, агар $|\vec{b}|=3$ бошад.

261. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ 60^0 буда, вектори $\vec{c}$ ба онҳо перпендикуляр аст. Дарозии вектори $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$-ро ёбед, агар $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ бошад.

262. Векторҳои $\vec{a}=(2;1;0)$ ва $\vec{b}=(-1;3;2)$ дода шудаанд. Чунин адади λ-ро ёбед, ки вектори $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ ба вектори $\vec{b}$ перпендикуляр бошад.

263. Исбот кунед, ки секунҷаи қуллаҳояш дар нуқтаҳои $A(2;1;3)$, $B(7;4;5)$, $C(4;2;1)$ буда, росткунҷа аст.

Машқҳо барои такрор

264. Аз нуқтаи додашуда ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст, ки якеаш аз дигараш $26см$ калон аст. Проектсияи моилҳо ба $12см$ ва $40см$ баробар мебошанд. Дарозии моилҳоро ёбед.

265. Аз нӯги A-и порчаи AB ҳамворӣ гузаронида шудааст. Аз нӯги B ва нуқтаи C-и порча хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвориро дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебуранд. Дарозии порчаи BB_1-ро ёбед, агар $AB=6$ см, , $AC:CC_1=2:5$ бошад.

266. **Вектори воҳидиеро ёбед, ки ба вектори $\vec{a}=(1;2;-4)$ коллинеарӣ аст.**

267. **Маълум, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаи $A(4;-1;3)$ ба нуқтаи $B(-1;2;7)$ табдил меёбад. Формулаҳои параллелкӯчониро нависед.**

5. **Хати рост дар ҳамин ҳамвории чойгир аст.** 6. **Ҳамвориҳо аз рӯи хати рости аз ҳамин нуқта мегузаштагӣ бурида мешаванд.** 7. **На, танҳо қисми ҳамворӣ.** 8. **Ба ду қисм.** 9. **Ба 4 ва 6 қисмҳо.** 10. **Ду ҳал дорад: 1,2*м* ва 7,6*м*.** 12. **5*см*.** 13. **30*см*.** 25. **Чунин ҳамвориҳо чортоанд.** 36. **На.** 39. **Кунчҳои тези секунҷа ба 30^0 ва 60^0 баробаранд, бинобар ин катетҳо $\frac{C}{2}$ ва $\frac{C\sqrt{3}}{2}$ мебошанд.** 40. **а) Ду баландии секунҷа (ё давоми онҳо) ҳамдигарро мебуранд, вагарна ду тарафи секунҷа параллел мебуд, ки ин номумкин аст; б) Дуто медиана бо тарафи мувофиқ кунҷҳое ташкил мекунанд, ки ҳосили ҷамъашон аз 180^0 хурд аст, пас, онҳо ҳамдигарро мебуранд ва дар айни ҳол дар дохили секунҷа; в) Дар дохили секунҷа хатман бурида мешаванд.** 49. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$. 50. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ **ва** $\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$.

51. **На.** 52. $2\sqrt{56}$ *см*. 53. **Ҳа.** 55. **Мумкин нест.** 56. **Мумкин аст.** 67.

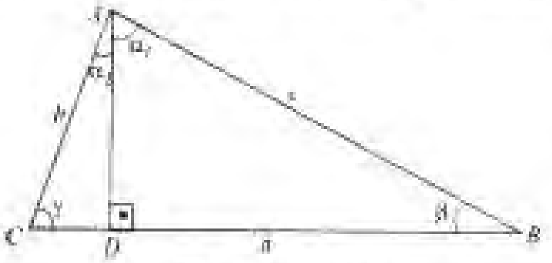
$$a=\sqrt{\frac{2S\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}},\qquad b=\sqrt{\frac{2S\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}},$$

$$c=\sqrt{\frac{2S\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$$

, ки дар ин ҷо a,b,c**-тарафҳои секунҷа, ки ба кунҷҳои он** $\alpha,\beta,\pi-(\alpha+\beta)$ **муқобиланд.** 70. **На.** 73. $\frac{1}{2}|a-b|$. 74.

1) **25*см*; 2)** $c(1+\frac{b}{a}$. 76. **Ба исботи леммаи пункти 12 нигаред.** 77. **2)** $a+c-b$. 78. **Дар ду рӯя –** AA_1BB_1 **ва** AA_1DD_1. 79. **Беҳад бисёр, агар нуқта бо хати рости** α **тааллуқ надошта бошад; ягонто ҳам не, агар нуқта ба** α **тааллуқ дошта бошад.** 80. **60^0 ва 120^0.** 81. **4*м* ва 6*м*.** 82. $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{4}$. 87. **1) 3,75*см*; 2)** $\frac{bc}{a+c}$. 88. **Хати рост ва ҳамвории асос параллел мебошанд.** 89. **Дар ҳолати ба** CD **параллел будани** AB. 94. **Аз рӯи ду хати рости параллел ё ҳамдигарро мебуридагӣ ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст.** 95. **Тасдиқоти**

масъалаи 75-ро истифода баред. 96. $\angle B=45^0$. Аз монандии секунҷаҳои ABC ва ACD бармеояд, ки $AB=\sqrt{2}AC$ аст. Баъд теоремаи синусҳоро истифода кардан лозим аст. 97. $arctg\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. 102. ABB_1A_1-параллелограмм, бинобар ин $A_1B_1=AB=4см$. 104. Аз ҳалли масъалаи 3-и қисми назриявии пункт ва теоремаи 9 истифода кунед. 105. 1) 10*см*; 2) 25*см*. 106. Исбот кунед, ки хатҳои рости AC ва B_1D_1 чиликӣ мебошанд. 109. Нуктаҳои буриши ҳамвории PKL-ро бо рӯяҳо созед ва исбот кунед, ки ҳамворӣ аз рӯи миёнаҷои рӯяҳо мегузарад. 110. Теоремаи 5-ро истифода кунед. 113. Ба секунҷаи ABD ду карат теоремаи синусҳоро татбиқ намуда кунҷи α_1 ва тарафи c-ро ёбед (расми 104). Баъд аз рӯи теоремаи косинусҳо аз секунҷаи ACD-тарафи b-ро. Дар охир, ба секунҷаи ABC теоремаи синусҳоро татбиқ намуда γ-ро ёфтан мумкин аст. 114. а) На; б) ҳа; в) на; г) на. 118. Исбот кунед, ки AB ба ҳамвории MAC перпендикуляр аст. 120. 5*см*. Барои ҳал формулаи $r=\dfrac{S}{P}$-ро истифода кунед, ки дар ин ҷо P-нимпериметр, S-масоҳати секунҷа мебошад. 121. 200*см*^{2}. 126. 0,36*м*. 128. 1) 4*м*; 2) $\dfrac{a+b}{2}$. 129. $\dfrac{a}{2}$. 130. 9*м*. 131. $\sqrt{a^2-\dfrac{b^2}{2}}$. 132. 41*см* ва 15*см*. 133. 4*см* ва 8*см*. 134. $\sqrt{2}$ *м*. 135. 5*м*, 3*м* ва 3*м*. 136. 6,5*м*. 137. 1) a; 2) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. 138. $4\dfrac{2}{3}$ см. 139. Теоремаи косинусҳоро истифода кунед. 140. 2,5*м*. 141. 2*м*. 142. $\sqrt{2b^2-a^2}$. 143. 6*м*. 144. 14*м*. 145. $\sqrt{a^2-\dfrac{1}{4}\alpha^2}$. 146. На. 147. $r=\dfrac{-c+\sqrt{c^2+4S}}{2}$, агар



Расми 104

$S \le \frac{c^2}{4}$ **бошад. Барои ёфтани ҳал формулаҳои** $p=c+r$, $S=pr$, **ки дар ин ҷо** p **нимпериметри секунҷа аст, истифода кунед.** 148. $arctg\frac{1}{45}$. 150. **1,3**$м$. 152. **1)** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 153. $\sqrt{a^2+b^2}$. 154. **1,7**$м$. 155. **0,4**$см$. 156. $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. 157. **38,88**$см^2$. 158. **Теоремаҳои косинусҳо ва синусҳоро истифода кунед.** 160. **1) 45⁰; 2) 90⁰; 3) 60⁰.** 161. **1)** $2h$; **2)** $\sqrt{2}h$; **3)** $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. 162. $a\sqrt{6}$. 163. **1)** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$; **2)** $\frac{a}{2}$. 164. **30⁰.** 165. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. 166. $\varphi_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\varphi_2=\varphi_3=\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$. 167. $a\sqrt{2}$. **168. 3**a. 169. **10**$см$ **ва 6**$см$. 172. **13**$м$. 173. **2**a. 174. $\arccos\frac{1}{7}$. 175. **30⁰.** 176. **3,36**$м$. 178. $arc\left(\frac{tg\varphi}{2}\right)$. 179. $arctg(2tg\varphi)$. 182. **2,5**$м^2$. 183. **23**$см$ **ва 17**$см$. 184. **60⁰.** 185. **Шарти масъала ва теоремаи косинусҳоро истифода карда, исбот кунед, ки дар секунҷа ҳар се кунҷ баробаранд.** 187. **1)** F; **2)**C; **3)** D; **4)** $B;C;E;F;$ **5)**C,D; **6)** $A,\ D,F;$ 190. A_x**(2;0;0),** A_y**(0;3;1),** A_z**(0;0;1),** A_{xy}**(2;3;0),** A_{xz}**(2;0;1),** A_{yz}**(0;3;1).** 191. $\sqrt{41}$. 192. $M(-3{,}5;-1{,}5)$. 193. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. 194. **1)** $\sqrt{30}$; **2)** $\sqrt{53}$. 195. **(0;-8,5;0).** 196. B. **197.** A. 198. **1) 3,1, 2; 2)** $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$; **3)** $\sqrt{14}$. 199. $\sqrt{11}$, $\sqrt{38}$, $\sqrt{73}$. 200. **Ҳа.** 201. $M(1{,}5;-2;-2)$. 202. **На.** 203. **Ҳа.** 204. D**(1;5;-7).** 205. **7,** $\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\frac{\sqrt{142}}{2}$. 206. B**(0;0;4).** 209. **5**$м$. 210. A_x**(4;0;0),** A_y**(0;2;0),** A_z**(0;0;5),** A_{xy}**(4;2;0),** A_{xz}**(4;0;5),** A_{yz}**(0;2;5).** 215. **(2;1;4), (2;-1;-4), (-2;1;-4).** 216. **(-2;1;4), (-2;1;4), (-2;-1;-4).** 217. **(-2;-1;-4).** 219. $x'=x+2$, $y'=y+7$. 220. **(5;0;-8).** 221. **(-3;-9;2).** 222. **1) На; 2) ҳа.** 223. **1**$м$, **2**$м$, **2,5**$м$. 224. **10**$см$.

226. $D\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};0\right)$. 227. **1) (1;-3;5); 2) (4;9;-9).** 228. $4\sqrt{3}$. 229. $\sqrt{21}$. 230. D**(-2;3;0).** 231. $x=\pm 4$. 232. **3.** 235. **(0;0;9).** 236. **(-2;4;-3).** 237. $\left(\frac{4}{3};-1\frac{3}{10};-2{,}4\right)$. 238. **Векторҳои** $\overrightarrow{AB}$ **ва** $\overrightarrow{AC}$ **ё** $\overrightarrow{AB}$ **ва** $\overrightarrow{BC}$ **бояд коллинеарӣ бошанд.** 242. **1)** $m=-2$, $n=-2{,}5$; **2)** $m=4$, $n=6$. 243. $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$. 244. $\left(\frac{3}{\sqrt{17}};\frac{2}{\sqrt{17}};-\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$ **ё** $\left(-\frac{3}{\sqrt{17}};-\frac{2}{\sqrt{17}};\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$. 245. $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. 246. **Ҳангоми** $a_2=a_3=0$ **будан.** 247. $\sqrt{11{,}6}$. 248. **На.** 249. **На.** 250. **Дар тирҳои** Oy, Ox **ва** Oz. 251. $2\sqrt{5}a$. 252. **1)** $-3\sqrt{3}$; **2)** $11-3\sqrt{3}$; **3)** $11-6\sqrt{3}$; **4)** $10-9\sqrt{3}$. 253. **20.** 254. **4.** 255. **1)** $m=\frac{1}{3}$; **2)** $m=2$. 256. $c=1$. 257. $\alpha=1$. 258. $-\frac{5}{\sqrt{63}}$. 259. $\sqrt{\frac{2}{15}}$. 260. **(2;2;-1).** 261. **4.** 262. $\lambda=-14$. 264. **15***см* **ва 41***см.* 265. **15***см.* 266. $\left(\frac{1}{\sqrt{21}};\frac{2}{\sqrt{21}};-\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$ **ва** $\left(-\frac{1}{\sqrt{21}};-\frac{2}{\sqrt{21}};\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$. 267. $x'=x-5$, $y'=y+3$, $z'=z+4$.

МУНДАРИЧА

Б. Алиев

Геометрия

(ибтидои стереометрия)
китоби дарсӣ барои синфи 10

Муҳаррир *Дилшод Шарапов*
Мусаҳҳеҳ *Маҳмадсалим Абдукаримов*
Муҳаррири техникӣ *Нуралӣ Хушвахтов*
Дизайн ва ороиши муқова *Нуралӣ Хучивахтов*
Чопи компютерӣ *Зафар Ташрифов*

Ба чопаш 10.05.2006 имзо шуд.
Андозаи коғаз 60x90 1/16. Коғази офсетӣ.
Гарнитураи Times New Roman Tj.
Чопи офсетӣ. Ҳаҷм 8 ҷузъи чопии аслӣ.
Адади нашр 50 000

Нашриёти «Студент»

ISBN 999477010-1

9 789994 770106