ГЕОМЕТРИЯ

БОЙМУРОД
АЛИЕВ

11

БОЙМУРОД АЛИЕВ

ГЕОМЕТРИЯ – 11

(давоми стереометрия)
китоби дарсӣ барои синфи 11

Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон ба чоп тавсия кардааст

Душанбе
"Полиграф Групп"
2006

ББК 22.151Я72
А-49

Боймурод АЛИЕВ
Геометрия, китоби дарсӣ барои синфи 11.
«Полиграф Групп», Душанбе.
Соли 2006, 128 саҳифа.

ИСТИФОДАИ ИҶОРАВИИ КИТОБ:

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли таҳсил	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Аввали соли хониш	Охири соли хониш
1					
2					
3					
4					
5					

ISBN 99947-711-5-9

САРСУХАН

Китоби мазкур китоби дарсии мактаби таҳсилоти умумӣ ва давоми китоби дарсии «Геометрия – 10» (ибтидои стереометрия) (Душанбе, 2006, «Студент», 128 саҳ.) буда, аз рӯи «Барномаи геометрия барои синфҳои 7-11» (Душанбе, «Матбуот», 2002), ки онро ҳайати мушовараи Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон тавсия намудааст, навишта шудааст. Инчунин Консепсияи миллии маълумот, талаботи Стандарти давлатии таҳсилоти умумӣ аз математика пурра ба эътибор гирифта шудаанд. Мавҷуд набудани китобҳои дарсӣ ва маводи дидактикиро барои мактабҳои тамоюлӣ ба назар гирифта, мундариҷаи китобро нисбат ба барномаи таълим васеътар кардаем. Ин имконият медиҳад, ки китоб ҳамчун китоби дарсии мактаби таҳсилоти умумӣ, мактабҳои тамоилашон табиию риёзӣ, гимназияҳо, литсейҳо ва литсейҳои муштарак истифода шавад.

Китоб аз 5 параграф, ки ба 36 банд (пункт) тақсим шудааст, иборат аст. Чунин ҷисмҳои геометрӣ, ба монанди бисёррӯяҳо ва ҷисмҳои чархзанӣ, хусусиятҳои онҳо, буришҳо, масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурраи онҳо, ҳаҷми ин ҷисмҳо объекти омӯзишанд. Қариб дар ҳар як банд баъди баёни маводи назариявӣ ҳалли як ё якчанд масъала оварда мешавад, ки раванди ҳал тарзи истифодаи паҳлуҳои назарияро инъикос менамояд. Қисми назариявии банд бо саволҳои назоратӣ ба охир мерасад. Ба ҳар саволи гузошташуда дар матн ҷавоби аниқ мавҷуд аст, фақат онро ёфтан лозим аст. Дар маҷмӯъ саволҳои банд тамоми мундариҷаи китобро дар бар мегиранд. Ҳамин тариқ, саволҳо аз маводи назариявӣ чизи асосиро ҷудо карда, якбора сатҳи зарурии азхудкунии онро қайд мекунанд. Ин имкон медиҳад, ки вазифаи хонагӣ доир ба назария на дар шакли анъанавии азёдкунӣ, балки дар шакли тайёр кардани ҷавобҳо ба саволҳои овардашуда супурда шавад. Ба андешаи мо ин тарз ҳам барои хонанда ва ҳам барои муаллим ниҳоят қулай аст. Талаба дар китоб ба саволҳо ҷавоб кофта, мустақилона бо маводи таълимӣ кор кардан, мағзи онро дарёфт намудан, фарқ кардани элементҳояшро ёд мегирад, ки маҳз ҳамин роҳи дар оянда мустақилона омӯхтан аст.

Миқдори масъалаҳои дар ҳар банд овардашуда имконият медиҳад, ки бо назардошти қобилият вазифаи хонагӣ фардӣ бошад. Бо афзудани рақами масъала дар банд раванди ҳалли он мушкилтар мегардад. Масъалаҳое, ки ҳаллашон каме мураккаб аст, бо аломати * нишона шудаанд.

Дар охири ҳар банд, чун қоида, ду масъала барои такрор оварда мешавад. Масъалаи стереометрии ин қисм бо истифодаи назарияи бандҳои пешина, масъалаи планиметрӣ бошад дар асоси маводи синфҳои 7-9 ҳал карда мешавад.

Мувофиқи талаботи Стандарти давлатии таҳсилоти умумии Ҷумҳурии Тоҷикистон дар китоб очерки таърихӣ оварда мешавад, ки дар он саҳми нобиғаҳои Юнони Қадим, мамолики Шарқ, алалхусус Осиёи Марказӣ ва Аврупо дар рушди илми геометрия қайд гардидааст.

Умуман сохтори китоб ба сохтори китобҳои дарсии фанни математика барои синфҳои 6-11 шабоҳат дорад. Ба андешаи мо, ягонагии сохтори китобҳои дарсӣ омӯзиши математикаро осон менамояд.

Ҳангоми навиштани ин китоб китобҳои дарсӣ ва таълимӣ-методие, ки рӯйхаташон дар сарсухани «Геометрия-10» ҳаст, истифода шудаанд.

Банда ҳар гуна фикру андешаи холисонаро нисбат ба сохтор ва мундариҷаи китоб, ки мақсадаш дар оянда беҳ шудани сифати он аст, бо камоли мамнуният қабул хоҳам кард. Хоҳиш мешавад, ки мулоҳизаҳо ба суроғаи: 734012, Душанбе, хиёбони Айнӣ, 45, Пажӯҳишгоҳи илмҳои омӯзгории Тоҷикистон ирсол шаванд.

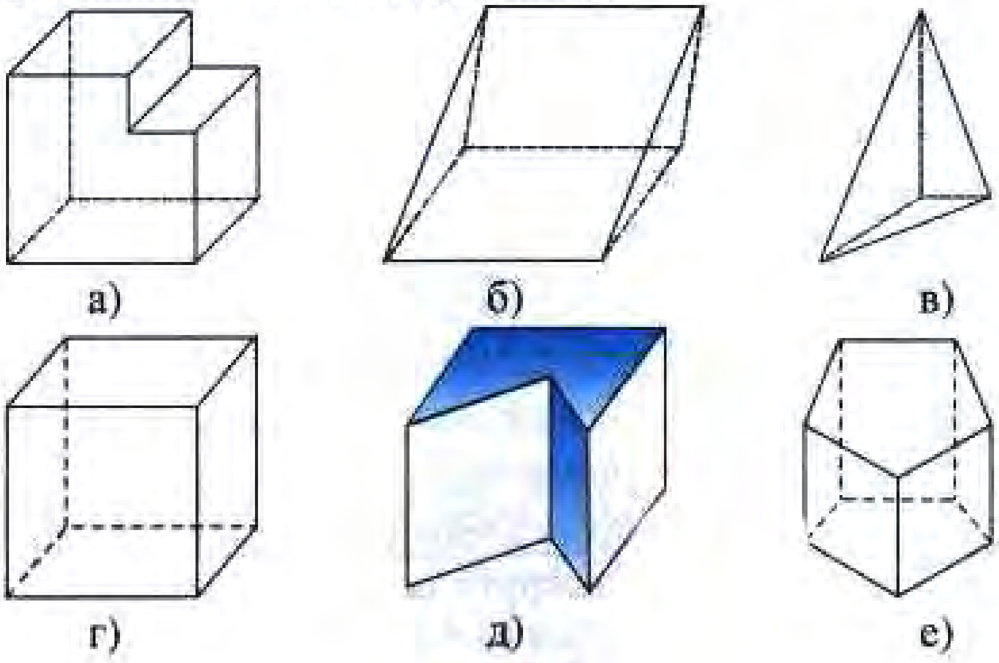
Муаллиф

1. МАЪЛУМОТИ УМУМӢ ДАР БОРАИ БИСЁРРӮЯҲО

Ба омӯзиши фигураҳо дар фазо, ки **ҷисмҳо** ном доранд, шурӯъ мекунем. Бо мақсади васеъ кардани доираи масъалаҳое, ки мо бо онҳо дар синфи 10 сарукор доштем, мафҳуми бисёррӯяро дохил карда будем (ниг. ба «Геометрия - 10», §1, банди 3, саҳ. 18-22). Бисёррӯяҳо низ ба мисли бисёркунҷаҳо дар ҳамворӣ фигураҳои оддитарини фазо мебошанд. Дар ҳамон ҷой баъзе маълумоти аввалинро нисбат ба параллелепипед ва пирамида, буриши онҳо бо ҳамворӣ оварда будем.

Акнун ба омӯзиши муфассали бисёррӯяҳо сар карда, хосиятҳои умумӣ ва дар мисоли бисёррӯяҳои алоҳида (призма, параллелепипед, пирамида) хосиятҳои мушаххаси онҳоро муоина менамоем. Бо ин мақсад баъзе мафҳумҳое, ки дар «Геометрия – 10» оварда шуда буданд, васеътар баён карда мешаванд.

Таъриф. Ҷисми геометрии маҳдуд*, ки сатҳи он аз шумораи охирноки бисёркунҷаҳои ҳамвор иборат аст, *бисёррӯя* номида мешавад (расми 1).



РАСМИ 1

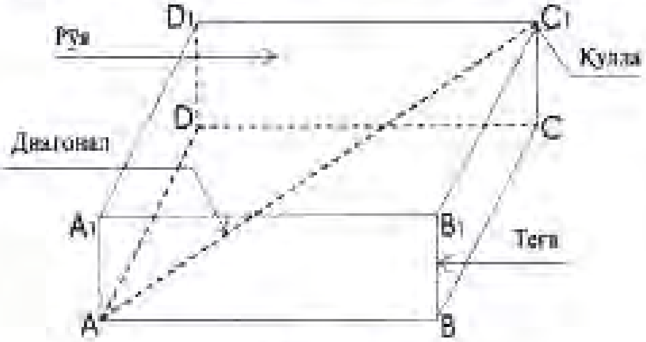
* Дар фазо ҷисми геометрии маҳдуд гуфта қисми маҳдуди фазоро меноманд, ки бо ҷисми физикавӣ ҷудо карда шудааст.

Мисоли бисёррӯяҳоро сари ҳар қадам дидан мумкин аст. Масалан, қуттии гӯгирд, китоб, қалами рахдор, гайка бисёррӯяҳоянд.

Бисёркунҷаи дилхоҳи дар сатҳи бисёррӯя будаpo мегирем. Вай дар ҳамворӣ ҷойгир аст. Чӣ тавре ки медонем ин ҳамворӣ (ниг. ба «Геометрия - 10», масъалаи 35, саҳ. 17) фазоро ба ду қисм ё ба ду зерфазо ҷудо мекунад. Агар бисёррӯя дар *як тарафи* ҳар яке аз чунин ҳамвориҳо ҷойгир бошад, он гоҳ вай *барҷаста* ном дорад. Бисёррӯяҳои б), в), г), е)-и расми 1 барҷаста буда, бисёррӯяҳои а) ва д) ғайрибарҷастаанд.

Таърифи овардашудаи бисёррӯяи барҷаста ба таърифи зерин баробарқувва аст: *Бисёррӯя барҷаста номида мешавад, агар ҳар гуна порчаи нӯгҳояш дар бисёррӯя ҷойгир-буда пурра (яъне, ҳар як нуқтааш) дар он ҷойгир бошад.*

Бисёркунҷаҳо, ки аз он бисёррӯя ташкил меёбад, *рӯяҳо* ном доранд. Порчаеро, ки дар натиҷаи буриши ду рӯя ҳосил мешавад, *тега* мегӯянд. Нуқтае, ки дар он се ё зиёда аз он рӯяҳо бурида мешаванд, *қуллаи* бисёррӯя аст. Порчаи хати рост, ки ду қуллаи дар як рӯя нахобидаи бисёррӯяро бо ҳам пайваст мекунад, *диагонали* он номида мешавад. Дар бисёррӯяи дар расми 2 овардашуда:



РАСМИ 2

а) чоркунҷаҳои $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1C_1, ABB_1A_1 – рӯяҳо; б) порчаҳои AB, D_1C_1, BB_1 – баъзе аз теғаҳо; в) нуқтаҳои A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 – қуллаҳо; г) порчаи AC_1 диагонал мебошанд. Рӯяҳо *сатҳи* бисёррӯя ё *сарҳади* бисёррӯяро ташкил медиҳанд. Зоҳиран возеҳ аст, ки барои ҷисми геометрӣ будани бисёррӯя (яъне, барои ишғоли қисми фазо) зарур аст, ки вай на кам аз 4 рӯя дошта бошад.

Математики бузурги Швейтсария Леонард Эйлер (1707-1783) вобастагии байни рӯяҳо, теғаҳо ва қуллаҳои бисёррӯяи барҷастаро муайян кардааст, ки он бо номи *тавсифи (характеристикаи)* Эйлер машҳур аст. Агар бо Р миқдори рӯяҳо, бо Т миқдори теғаҳо ва бо Қ миқдори қуллаҳоро ишорат намоем, он гоҳ ин тавсиф бо формулаи

$$Р\text{-}Т+Қ=2$$

ифода мешавад*. Кунҷҳоеро, ки ҳангоми буриши теғаҳо ҳосил мешаванд, *кунҷҳои* бисёррӯя меноманд. Нишон додан мумкин аст, ки ҳосили ҷамъи кунҷҳои бисёррӯя бо формулаи $S=(Қ\text{-}2)\cdot 360^o$ ҳисоб карда мешавад.

Масъалаи 1. Бисёррӯяи барҷаста 12 қулла ва 5 рӯя дорад. Миқдори теғаҳои онро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи формулаи Эйлер, аз рӯи додашудаҳо муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$5\text{-}T+12=2 \quad \text{ё} \quad 17\text{-}T=2, \quad \text{ё ки} \quad T=15.$$

Масъалаи 2. Муайян мекунем, ки оё аз 3 квадрат ва 2 секунҷаи баробартараф бисёррӯяи барҷаста сохтан мумкин аст ё не.

Ҳал. Агар чунин бисёррӯя мавҷуд бошад, пас вай 5 рӯя дорад. Агар бо *Т* миқдори теғаҳои онро ишорат кунем, он гоҳ *2Т* ба ҳосили ҷамъи миқдори тарафҳои ҳамаи рӯяҳо баробар аст, яъне

$$2T=3\cdot 4+2\cdot 3=18, \qquad T=9.$$

Ҳосили ҷамъи кунҷҳои дохилии бисёррӯя $S=3\cdot 360^o+2\cdot 180^o=4\cdot 360^o$ аст. Бинобар ин $(Қ\text{-}2)\cdot 360^o=4\cdot 360^o$ ё $Қ\text{-}2=4$, ё ки $Қ=6$. Мебинем, ки формулаи Эйлер $Р+Қ=Т+2$ ҷой дорад, чунки $5+6=9+2$ мебошад. Инак, чунин бисёррӯя вуҷуд дорад.

1. Чӣ гуна ҷисми геометриро бисёррӯя меноманд? Мисолҳои бисёррӯяҳоро оред. **2.** Кадом бисёррӯя барҷаста номида мешавад? **3.** Рӯя, теға, қулла ва диагонали бисёррӯя гуфта чиро мегӯянд? **4.** Формулаи вобастагии байни ин мафҳумҳоро (формулаи Эйлерро) шарҳ диҳед.

* Нишон дода шудааст, ки ҷой доштани ин формула шарти зарурӣ ва кифояи барҷаста будани бисёррӯя мебошад.

1. Нишон диҳед, ки бисёррӯяи шакли китобро дошта, барҷаста аст.
2. Яке аз бисёррӯяҳо шакли ситораи панҷгӯша ва дигаре шакли хонаи бисёрошёнаи ҳарфи П-ро дорад. Нишон диҳед, ки ин бисёррӯяҳо барҷаста нестанд.
3. Миқдори рӯяҳо, теғаҳо ва қуллаҳои бисёррӯяҳои б), в), г) ва е)-и дар расми 1 овардашударо ёбед. Нишон диҳед ки онҳо ба формулаи Эйлер тобеъанд.
4. Миқдори рӯяҳо, теғаҳо ва қуллаҳои бисёррӯяҳои а) ва д)-и дар расми 1 бударо ёбед. Оё онҳо тавсифи Эйлерро қаноат мекунонанд?
5. Магар аз рӯи 8 шашкунчаи мунтазам ва 6 квадрат бисёррӯяи барҷаста сохтан мумкин аст?

Масъалаҳо барои такрор

6. Охирҳои порчаи дарозиаш 1,25 м аз ҳамворӣ дар масофаҳои 1 м ва 0,56 м ҷойгиранд. Проектсияи онро дар ҳамворӣ муайян намоед.
7*. Ҷойи геометрии нуқтаҳоеро ёбед, ки аз ду нуқтаи додашуда дар масофаи баробар ҷойгиранд.
8. Магар яке аз кунҷҳои параллелограмм ба 30° ва дигараш ба 60° баробар шуда метавонад?
9. Масофаи байни марказ ва хордаи давра $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ м буда, аз радиус 2 маротиба хурд аст. Дарозии хордаро ёбед.

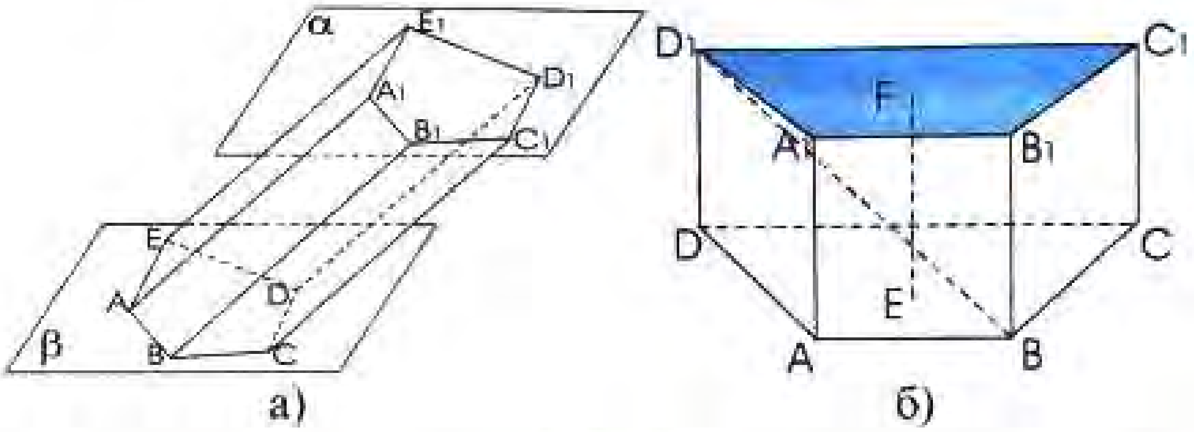
2. ПРИЗМА

Акнун ба омӯзиши бисёррӯяҳои мушаххас мегузарем. Омӯзишро аз призма сар мекунем.

Таъриф. Бигузор дар ду ҳамвории параллел ду бисёркунҷаи ба ҳам баробар ҷойгир шудааст. Бисёррӯяе, ки рӯяҳои он дар натиҷаи пайваст кардани қуллаҳои мувофиқи*

* Ду қуллаи чунин бисёркунчаҳо ба ҳам мувофиқанд, агар: 1) тарафҳои ба ин қулла часпидаи бисёркунчаҳо байни худ параллел бошанд; 2) ин тарафҳо ва кунҷи байни онҳо ба ҳамдигар баробар бошанд; 3) масофаи ин қуллаҳо дар байни масофаҳои яке аз онҳо то қуллаҳои бисёркунҷаи дигар камтарин бошад. Ду тарафи аз ин қулла бароямадаро тарафҳои мувофиқ мегӯянд.

ин бисёркунҷаҳо ҳосил мешавад, *призма* ном дорад (расми 3).



РАСМИ 3

Бо ибораи дигар, призма бисёррӯяест, ки рӯяҳои (сарҳади) он дар натиҷаи буриши ҳамвориҳои аз болои ду тарафи мувофиқи бисёркунҷаҳо мегузаштагӣ ва худи бисёркунҷаҳо хосил мешавад.

Дар байни рӯяҳои призма *рӯяҳои паҳлуӣ* ва *асосҳоро* фарқ мекунанд. Бисёркунҷаҳои ба ҳам баробари дар ҳамвориҳои параллел ҷойгирбуда *асосҳоянд*. Ҳангоми бисёркунҷаи барҷаста будани асоси призма, вай *бисёррӯяи барҷаста* аст. (Дар ин ҷо ва дар оянда мо танҳо чунин призмаро муоина менамоем.)

Теоремаи 1. Рӯяҳои паҳлуии призма, ки дар натиҷаи ба ҳам пайвастани қуллаҳои мувофиқ ҳосил мешаванд, параллелограммҳо мебошанд.

Ин тасдиқ зоҳиран фаҳмост, чунки, масалан, дар чоркунҷаи AA_1E_1E (расми 3, а)) тарафҳои AA_1 ва E_1E мувофиқи созиш параллеланд. Тарафҳои AE ва A_1E_1 бошанд, ҳамчун тарафҳои мувофиқ параллел ва баробаранд. Яъне, чоркунҷаи AA_1E_1E параллелограмм аст. Параллелограмм будани дигар рӯяҳои паҳлуӣ низ ҳамин тавр нишон дода мешавад.

Хулоса. *Тегаҳои паҳлуии призма ба ҳам баробар ва параллеланд.*

Дурустии хулоса аз он бармеояд, ки ду тарафи муқобили ин параллелограммҳо тегаҳои ҳамсоя буда, ду тарафи дигараш тарафҳои мувофиқи асосҳо мебошанд.

Масофаи байни ду ҳамвориҳои параллел, ки дар онҳо асосҳои призма ҷойгиранд, *баландии* призма номида мешавад. Қуллаҳои асосҳо *қуллаҳои* призмаанд. Призмаро аз рӯи миқдори тарафҳои асос ё миқдори кунҷҳои асос номгузорӣ мекунанд. Призма *n-кунҷа* номида мешавад, агар асоси он n-кунҷа бошад. Масалан, призмаи дар расми 3, а) буда панҷкунҷа ва дар расми 3, б) – чоркунҷа аст. Дар призмаи чоркунҷаи дар расми 3, б) овардашуда чоркунҷаҳои $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ – асосҳо, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CC_1D_1D, AA_1D_1D рӯяҳои паҳлуӣ мебошанд. Порчаи EF, ки ба асосҳо перпендикуряр аст, *баландии* ин призма мебошад. *Диагонали* призма порчаест, ки ду қуллаи дар як рӯя нахобидаи онро пайваст мекунад (ниг. ба банди 1). Дар призмаи расми 3, б) хати D_1B диагонал аст.

Қайд мекунем, ки калимаи «prisma» лотинӣ буда, маънояш пораи (қисми) арра кардашуда аст. Меъморон ҳангоми сохтани кӯшкҳо, манораҳо ва калисоҳо аз призмаҳо васеъ истифода кардаанд. Масалан, кӯшки дар ш.Виборги наздикии Санкт-Петербург буда, шакли призмаи ҳашткунҷаро дорад.

---

1. Чӣ гуна бисёррӯяро призма меноманд? **2.** Дар бораи асосҳо, рӯяҳо ва теғаҳои паҳлуии призма чӣ гуфтан мумкин аст? **3.** Баландӣ ва диагонали призма чӣ тавр муайян карда мешавад? **4.** Призмаи n–кунҷа гуфта чӣ гуна призмаро меноманд?

---

10. Барои сохтани модели каркасии призмаи секунҷа, ки ҳар як теғааш ба 10 см баробар аст, чанд метр сим зарур аст? Барои призмаи панҷкунҷа, ки теғаҳои паҳлуиаш ба 8 см ва теғаҳои асосаш ба 4 см баробар аст-чӣ?

11. Дар мисоли призмаи чоркунҷа нишон диҳед, ки барояш формулаи Эйлер Қ+Р-Т=2 дуруст аст.

12. Миқдори камтарини рӯяҳо, ки аз онҳо призма сохтан мумкин аст, чанд мебошад? Ин призма чанд қулла, теға ва теғаи паҳлуӣ дорад?

13. Призмаи: а) ҳафткунҷа; б) даҳкунҷа; в) n-кунҷа чанд қулла, рӯя ва теға дорад?

14. Призма 33 теға дорад. Вай чӣ гуна призма аст?

15. Магар призмае мавҷуд аст, ки: а) 13 қулла; б) 15 теға; в) 23 рӯя дошта бошад?

16. Дар призмаи: а) секунҷа; б) чоркунҷа; в) панҷкунҷа; г) n-кунҷа чанд диагонал гузаронидан мумкин аст?

17. Призмаи панҷкунҷа чанд: а) кунҷи ҳамвор*; б) кунҷи дурӯя** дорад?

Масъалаҳо барои такрор

18. Дар байни ду ҳамвории параллел перпендикуляри дарозиаш 4 м ва моили дарозиаш 6 м гузаронида шудаанд. Масофаи байни нӯгҳои онҳо дар ҳар ду ҳамворӣ ба 3 м баробар аст. Масофаи байни нуқтаҳои миёнаҷои перпендикуляр ва моилро ёбед.

19. Аз 8 секунҷаи баробартараф ва 2 квадрат бисёррӯяи барҷаста сохтан мумкин аст?

20. Дарозии давраи дарункашидаи шашкунҷаи мунтазамро, ки тарафаш $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ м аст, ёбед.

3. БУРИШИ ПРИЗМА БО ҲАМВОРӢ

Мафҳуми буриши бисёррӯяро бо ҳамворӣ дар фазо ҳанӯз дар синфи 10 дохил карда будем (ниг. ба банди 3-и §1-и «Геометрия-10», саҳ. 18-22). Акнун онро дар мисоли бисёррӯяҳои мушаххас муоина менамоем. Чӣ тавре нишон дода будем, ҳар гуна ҳамворӣ фазоро ба ду нимфазо ҷудо мекунад. Таърифи зеринро, ки барои бисёррӯя дар «Геометрия-10», дар саҳ. 20 оварда шудааст, такроран

* Кунҷи ҳамвор гуфта кунҷи байни ду теғаро мегӯянд.

** Кунҷи дурӯя гуфта кунҷи байни ду рӯяро меноманд, ки теғаи умумӣ доранд. Ин кунҷ ба кунҷи байни ҳамвориҳое, ки рӯяҳоро дар бар гирифта, аз рӯи теға бурида мешаванд, баробар аст.

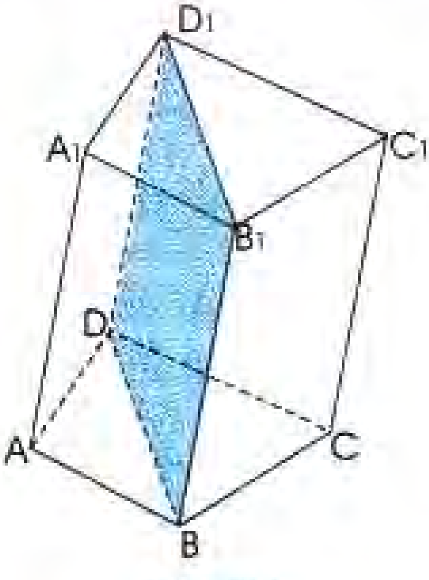
барои ҷисми дилхоҳи геометрӣ меорем.

Таъриф. Агар ақаллан ду нуқтаи ҷисми геометрӣ дар нимфазоҳои гуногун ҷойгир бошанд, он гоҳ мегӯянд, ки *ҳамворӣ ҷисмро мебурад.* Дар ин ҳолат ҳамворӣ *ҳамвории буранда* ном дорад. Фигурае, ки ҳар як нуқтаи он ба ҷисм ва ба ҳамвории буранда тааллуқ дорад, *буриши ҷисм бо ҳамворӣ* ё кӯтоҳ *буриш* номида мешавад.

Теоремаи 2. Буриши призма бо ҳамворӣ бисёркунҷаи барҷаста аст.

Исбот. Буриши ҳамворӣ бо ду теғаи ҳамсояи призма нуқтаҳои фигураи буриш аст. Порчае, ки ин нуқтаҳоро пайваст мекунад, низ ба буриш тааллуқ дорад, чунки ин порча ҳам дар рӯяи призма ва ҳам дар ҳамворӣ ҷойгир аст. Пас буриши призма бо ҳамворӣ фигураи ҳамвор буда, сарҳадаш хати шикастаи сарбаст аст. Яъне буриш бисёркунҷаи барҷаста аст. Тасдиқ исбот шуд.

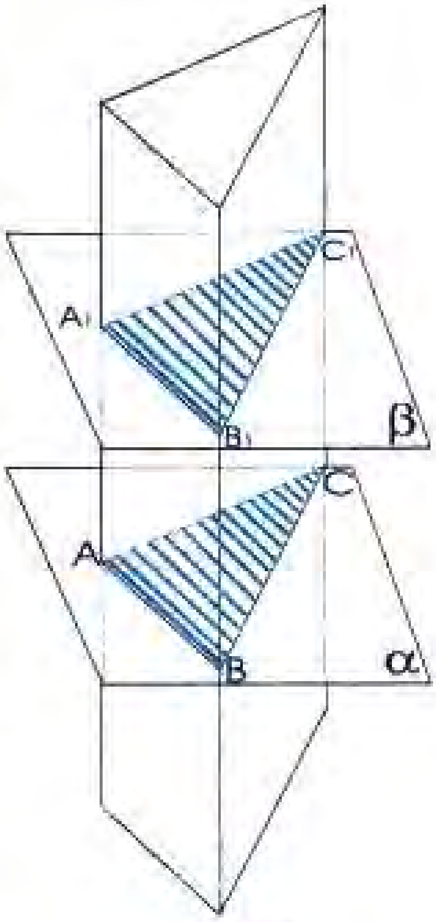
Буришҳои призма бо ҳамвориҳое, ки ба теғаҳои паҳлуӣ параллеланд, параллелограмҳо мебошанд. *Буришҳои диагоналӣ* буришҳое мебошанд, ки дар натиҷаи буриш бо ҳамвориҳое, ки онҳо аз рӯи ду теғаи паҳлуии дар як рӯя ҷойгир набудаи призма мегузаранд, ҳосил мешаванд. Буришҳои диагоналӣ низ параллелограмманд. Дар расми 4 чоркунҷаи BB_1D_1D буриши диагоналии призмаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ аст. Вай дар натиҷаи буриши ҳамвории аз рӯи теғаҳои паҳлуии BB_1 ва DD_1 мегузаштагӣ ҳосил шудааст.



РАСМИ 4

Теоремаи 3. Буришҳои призма бо ҳамвориҳои параллел, ки ҳамаи теғаҳои паҳлуиро мебуранд, бисёркунҷаҳои баробаранд.

Исбот. Барои осонӣ исботро барои призмаи секунҷа меорем (расми 5). Бигузор секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ буриши ҳамвориҳо бо призмаи секунҷа мебошанд. Нишон медиҳем, ки ин секунҷаҳо бо ҳам баробаранд.



РАСМИ 5

Чӣ тавре медонем, агар ду ҳамвории параллел бо ҳамвории сеюм бурида шаванд, он гоҳ хатҳои рости буриш параллел мебошанд. (ниг. ба теоремаи 10-и «Геометрия-10», саҳ. 46). Яъне, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ ва $AC \parallel A_1C_1$. Аз тарафи дигар, мувофиқи хулосаи теоремаи 1 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Яъне, чоркунҷаҳои ABB_1A_1, BCC_1B_1 ва ACC_1A_1 параллелограмманд, пас $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ ва $AC=A_1C_1$. Баробарии буришҳо аз баробар будани тарафҳояшон бармеояд. Теорема барои призмаи секунҷа исбот шуд.

Тасдиқи зерин хулосаи ин теорема аст: *Буриши призма бо ҳар гуна ҳамвории ба асосҳо параллел бисёркунҷаи ба асосҳо баробар мебошад.*

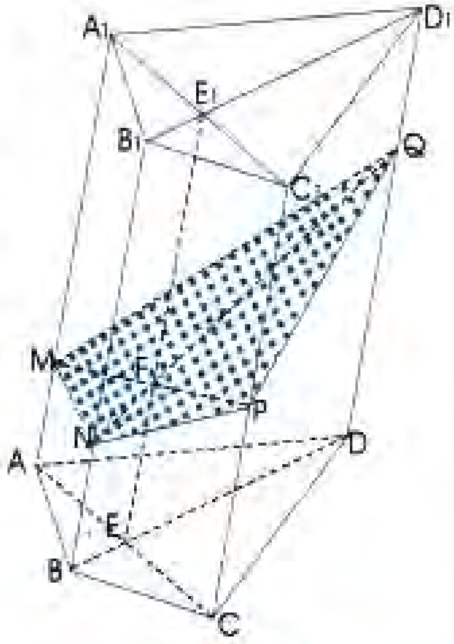
Масъалаи аввалин доир ба буришҳо ин аз рӯи талаботи зарурӣ сохтани буриш аст. Масъалаи зеринро доир ба сохтани буриш муоина мекунем. (Инчунин ниг. ба «Геометрия-10», саҳ. 20-25)

Масъала. Нуқтаҳои M, N ва P ба тегаҳои паҳлуии гуногуни призмаи чоркунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тааллуқ доранд. Буриши призмаро бо ҳамворие, ки аз ин нуқтаҳо мегузарад, месозем.

Ҳал. Порчаҳои MN ва NP ба буриши матлуб тааллуқ доранд (расми 6). Қуллаи буришро, ки дар тегаи DD_1 ҷойгир аст, меёбем. Барои ин буришҳои диагоналии

AA_1C_1C ва BB_1D_1D–ро месозем. Порчаи умумии буришҳои диагоналӣ EE_1 хати MP–ро дар нуқтаи F мебурад. Ин нуқта ба буриш тааллуқ дорад. Хати N F теғаи D D_1- ро дар нуқтаи Q мебурад. Чоркунҷаи $MNPQ$ буриши матлуб аст.

Баъзан дар масъалаҳо ба ғайр аз ёфтани буриш, боз ҳисоби масоҳат, периметр ё элементҳои дигари он талаб карда мешавад. Дар оянда бо чунин масъалаҳо низ сарукор хоҳем дошт.



РАСМИ 6

1.Чиро буриши ҷисм бо ҳамворӣ мегӯянд? **2.**Чаро буриши призма бо ҳамворӣ бисёркунҷаи барҷаста аст? **3.** Буриши диагоналии призма гуфта чиро мегӯянд? **4.**Теоремаи 3-ро дар мавриди призмаи чоркунҷа исбот кунед.

21. Магар призмаи секунҷа буриши диагоналӣ дорад?

22. Аз рӯи як теғаи призмаи панҷкунҷа чанд буриши диагоналӣ гузаронидан мумкин аст? Ин буришҳо призмаро ба чанд қисм ҷудо мекунанд? Ҳар кадоми ин қисмҳо чӣ гуна ҷисманд?

23*. Аз рӯи ҳамаи теғаҳои паҳлуии призмаи n-кунҷа чанд буриши диагоналӣ гузаронидан мумкин аст?

24. Дар призмаи секунҷа буришеро созед, ки аз рӯи тарафи асос ва қуллаи асоси дигар гузарад.

25. Буриши призмаи чоркунҷаро бо ҳамворие созед, ки аз рӯи тарафи асос ва яке аз қуллаҳои асоси дигар гузарад.

26. Буриши призмаи чоркунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ро бо ҳамворие, ки аз рӯи диагонали AD_1 ва миёнаҷои теғаи паҳлуии BB_1 мегузарад, созед.

27. Порчаи дарозиаш 10 см ҳамвориро мебурад. Охирҳои ин порча аз ҳамворӣ дар масофаи 3 см ва 2 см ҷойгиранд. Кунҷи байни порча ва ҳамвориро ёбед.

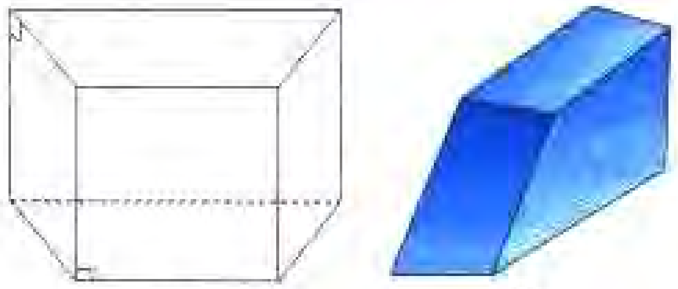
28. Тарафҳои секунҷа ба 20 м ва 21 м, синуси кунҷи тези байни онҳо ба 0,6 баробар аст. Тарафи сеюмро ёбед.

4. ПРИЗМАҲОИ РОСТ ВА МУНТАЗАМ. МАСОҲАТИ САТҲҲОИ ПАҲЛУӢ ВА ПУРРАИ ОНҲО

Баъзан призмаҳоро аз рӯи намуди кунҷҳое, ки теғаҳои паҳлуии онҳо бо тарафҳои асос ташкил мекунанд, номгузорӣ менамоянд.

Таърифи 1. Призма *рост* номида мешавад, агар теғаҳои паҳлуии он ба асосҳо перпендикуляр бошанд. Вагарна призмаро призмаи *моил* мегӯянд.

Дар расми 7, а) призмаи чоркунҷаи рост ва б) призмаи моил тасвир шудаанд. Призмаи дар расми 3, а) овардашуда низ моил мебошад. Мо асосан призмаҳои ростро муоина мекунем, агар махсус таъкид карда нашуда бошад.



а) б)

РАСМИ 7

Дар призмаи рост: **1.** *Рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳо мебошанд.* Ин аз таърифи призма ва теоремаи 1 бармеояд.

Перпендикулярии теғаҳои паҳлуӣ имконият медиҳад, ки онҳоро дар нақшаҳо ҳамчун порчаҳои амудӣ тасвир кунем. **2.** *Теғаҳои паҳлуӣ, ки бо ҳам баробаранд, баландианд.*

Таърифи 2. Призмаи росте, ки асоси он бисёркунҷаи мунтазам аст, *призмаи мунтазам* номида мешавад.

Рӯяҳои паҳлуии призмаи дилхоҳ *сатҳи паҳлуии* онро ташкил медиҳанд. Мувофиқан, асосҳо ва сатҳи паҳлуии ин призма *сатҳи пурраи* он аст.

Теоремаи 4. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи рост ба ҳосили зарби периметри асос бар баландӣ баробар аст.

Исбот. Рӯяҳои паҳлуии призмаи рости n-кунҷа росткунҷаҳо мебошанд. Асоси ин росткунҷаҳо тарафҳои бисёркунҷаи асоси призма буда, баландиашон ба дарозии теғаҳои паҳлуӣ баробар аст. Агар дарозии теғаҳои асосро бо $a_1, a_2, \ldots, a_n$, баландиро бо H ва масоҳати сатҳи паҳлуиро бо $S_{пахл}$ ишорат кунем, он гоҳ

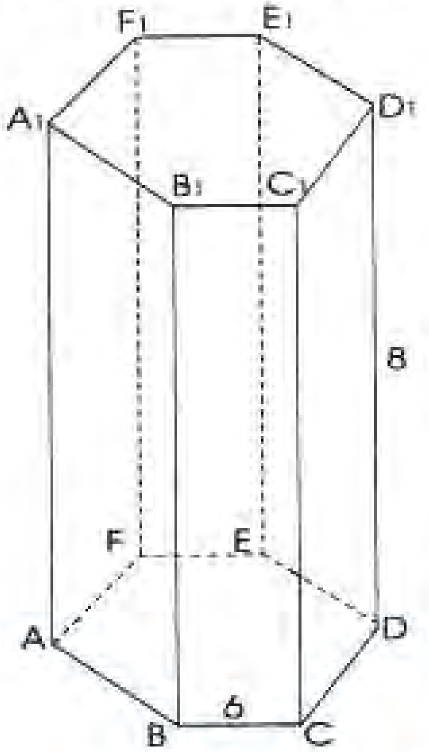
$$S_{пахл} = a_1H + a_2H + \cdots + a_nH = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)H = pH$$

мешавад, ки дар ин ҷо p периметри асоси призма аст. Теорема исбот шуд.

Фаҳмост, ки дар формулаи $S_{пахл}=pH$, p-ро ҳамчун периметри буриши призма бо ҳамворие, ки ба асосҳо параллел аст, гирифтан мумкин аст (ниг. ба хулоса аз теоремаи 3). Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи рости мунтазами n-кунҷа, ки тарафи асосаш a аст, бо формулаи $S_{пахл}=anH$ ҳисоб карда мешавад. Масоҳати сатҳи пурраи ҳар гуна призма бо формулаи

$$S_{пур}=S_{пахл}+2S_{асос}$$

ҳисоб карда мешавад.



РАСМИ 8

Эзоҳ. Нишон додан мумкин аст, ки масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи дилхоҳ ба ҳосили зарби масоҳати *буриши перпендикулярӣ* (бисёркунҷаест,ки дар натиҷаи буриши ҳамворӣ бо ҳамаи теғаҳо ҳосил мешавад) бар теғаи паҳлуӣ, ки ин ҳамворӣ бо он перпендикуляр аст, баробар мебошад.

Масъалаи 1. Дар призмаи мунтазами шашкунҷа теғаи асос ба 6 см ва баландӣ ба 8 см баробар аст. Масоҳати сатҳи пурраи призмаро меёбем.

Ҳал. Агар $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмаи мазкур бошад (расми 8), пас

$$S_{пахл} = (AB + BC + CD + DE + EF + FA)DD_1 = 6\cdot 6\cdot 8 = 288.$$

$$S_{асос} = S_{ABCDEF} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot BC^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 6^2 = 54\sqrt{3}\ см^2.$$

Инак, $S_{пур} = 2S_{асос} + S_{пахл} = (108\sqrt{3} + 288)\ см^2$.

Масъалаи 2. Масоҳати сатҳи пурраи призмаи секунҷа, ки теғаҳои асосҳояш 25 см, 29 см ва 36 см мебошад, ба 1620 см^2 баробар аст. Масохати сатҳи паҳлуӣ ва баландии призмаро меёбем.

Ҳал. Аввал аз рӯи формулаи Герон масоҳати асос-секунҷаро меёбем. Нимпериметри секунҷаи асос $(25+29+36):2=45$ см аст, бинобар ин

$$S_{асос} = \sqrt{45(45-25)(45-29)(45-36)} =$$
$$= \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = 3 \cdot 4\sqrt{900} = 12 \cdot 30\ см^2 = 360\ см^2.$$

Мувофиқи шарти масъала $S_{пур}=1620$ см^2. Азбаски $S_{пур}=S_{паҳл}+2S_{асос}$, пас $1620 = 2 \cdot 360 + S_{паҳл}$. Аз ин ҷо $S_{пахл}=900$ $см^2$. Мувофиқи теоремаи 4 $S_{пахл} = p \cdot H$, яъне $900 = 90 \cdot H$.

Инак, $S_{паҳл}=90$ см^2, $H=10$ см.

---

1. Таърифи призмаи ростро баён кунед. **2.** Чаро дар призмаи рост рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳо буда, баландӣ ба теғаи паҳлуӣ баробар аст. **3.** Призмаи мунтазам гуфта чиро мегӯянд. **4.** Сатҳи паҳлуӣ ва сатҳи пурраи призма чист? **5.** Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи рост бо кадом формула ҳисоб карда мешавад? Масоҳати сатҳи пуррааш чӣ?

---

29. Дар призмаи рости секунҷа ҳамаи теғаҳо ба ҳамдигар баробаранд. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ 12 м^2 аст. Баландии онро ёбед.

30. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи чоркунҷаи мунтазам 32 м^2 ва масоҳати сатҳи пуррааш 40 м^2 аст. Баландиашро ёбед.

31. Нисбати масоҳати буриши диагоналии призмаи рости чоркунҷаро бар масоҳати рӯяи паҳлуии он ёбед.

32. Диагонали призмаи мунтазами чоркунҷа ба d баробар буда, бо рӯя кунҷи $60^о$ -ро ташкил мекунад. Дарозии теғаи асосро ёбед.

33. Асоси призмаи рост секунҷаи росткунҷа аст. Аз миёнаҷои гипотенуза ҳамвории ба он перпендикуляр гузаронида шудааст. Масоҳати буришро ёбед, агар катетҳо ба 20 см ва 21 см, теғаи паҳлуӣ ба 42 см баробар бошанд.

34. Асоси призмаи рост секунҷаи тарафҳояш 5 см ва 3 см, ки кунҷи байни онҳо 120° аст, мебошад. Масоҳати калонтарин дар байни рӯяҳои паҳлуӣ ба 35 $см^2$ баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаро ёбед.

35. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи мунтазами чоркунҷа $64\sqrt{2}$ $см^2$ ва диагонали он 8 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи ин призмаро ёбед.

36. Теғаи паҳлуии призмаи моил, ки 15 см аст, бо ҳамвории асос кунҷи 30° –ро ташкил медиҳад. Баландии призмаро ёбед.

37. Масоҳати сатҳи пурраи призмаи рости чоркунҷаро ёбед, агар диагонали он ба $\sqrt{34}$ м ва диагонали рӯяи паҳлуияш ба 5 м баробар бошад.

38*. Масофаи байни теғаҳои призмаи секунҷаи моил мувофиқан ба 2 см, 3 см ва 4 см баробар аст. Теғаи паҳлуиро ёбед.

39*. Буриши перпендикулярии призма секунҷаи баробартарафест, ки дарозии тарафаш 4 см аст. Дарозии теғаи паҳлуии призма 10 см мебошад. Масоҳати сатҳи паҳлуиро ёбед.

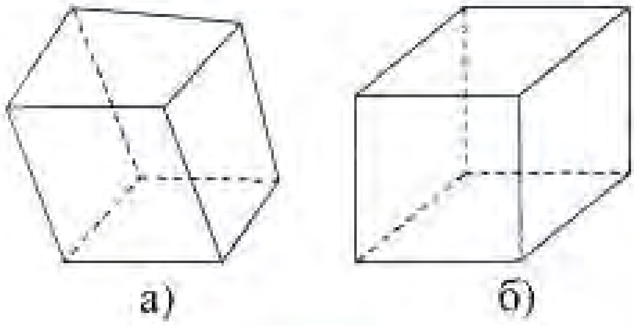
Масъалаҳо барои такрор

40. Призма 100 қулла дорад. Миқдори рӯяҳо ва теғаҳои ин призмаро муайян кунед.

41. Аз нуқтаи А дар зери кунҷи 60° ба ҳамворӣ моил гузаронида шудааст. Дарозии моилро ёбед, агар проексияи он ба ҳамворӣ 8 см бошад.

5. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Таърифи 1. Агар асосҳои призма параллелограммҳо бошанд, вай *параллелепипед* номида мешавад.



РАСМИ 9

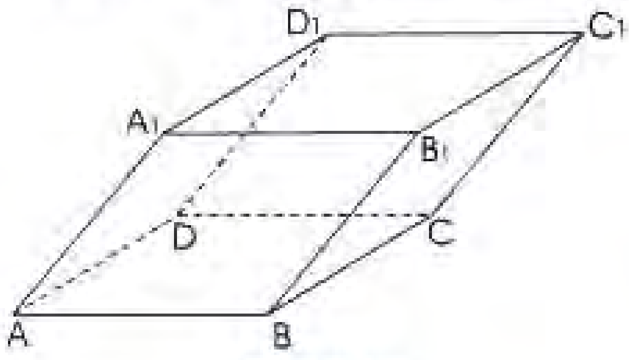
Дар расми 9, а) параллелепипеди моил ва дар расми 9, б) параллелепипеди рост оварда шудаанд. Рӯяҳои параллелепипед, ки теғаи умумӣ доранд, *ҳамсоя* ва рӯяхое, ки чунин тегаро надоранд, *муқобил* номида мешаванд.

Баъзе хосиятҳои параллелепипед ба хосиятҳои маъмули параллелограмм шабоҳат доранд.

Таърифи 2. Ду параллелограмм *бо ҳам баробар* номида мешаванд, агар ду тараф ва кунҷи байни онҳо дар як параллелограмм ба ду тараф ва кунҷи байни онҳо дар параллелограмми дигар баробар бошанд.

Теоремаи 5. Рӯяҳои муқобили параллелепипед бо ҳам баробар ва параллеланд.

Исбот. Бигузор $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ параллелепипед, $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ асосҳоанд (расми 10). Дар он, мувофиқи таъриф $AB \| DC$, $AB=DC$ ва $A_1B_1 \| D_1C_1$, $A_1B_1=D_1C_1$ аст. Ғайр аз ин мувофиқи хулосаи теоремаи 1 теғаҳои паҳлуӣ параллел ва баробаранд. Яъне, $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$ ва $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$. Ҳамин тариқ, ҳар чор рӯяи паҳлуӣ параллелограммҳо мебошанд. Мувофиқи теоремаи 25 (ниг. «Геометрия – 10», саҳ. 77) $\angle BAA_1=\angle CDD_1$, $\angle CBB_1=\angle DAA_1$. Инчунин ҳамвории ABB_1A_1 ба ҳамвории DCC_1D_1, ҳамчун ҳамвориҳои аз болои ду ҷуфти хатҳои рости ҳамдигарро буранда мегузаштагӣ, параллел аст. Яъне, мувофиқи



РАСМИ 10

таърифи 2 $ABB_1A_1=DCC_1D_1$. Баробарии BCC_1B_1 ва ADD_1A_1 ҳам ҳамин хел муқаррар карда мешавад. Теорема исбот шуд.

Хулоса. *Дар параллелепипеди рост рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳоянд.*

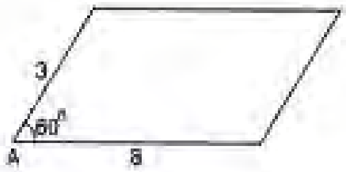
Инак, ҳамаи шаш рӯяи параллелепипед параллелограммҳо мебошанд ва ду рӯяи дилхоҳи муқобили онро ҳамчун асос қабул кардан мумкин аст.

Доир ба ҳисоби масоҳати сатҳи пурраи параллелепипеди рост ҳалли ду масъаларо меорем.

Масъалаи 1. Масоҳати сатҳи паҳлуии параллелепипеди рост 220 см² буда, тарафҳои асосҳояш ба 3 см ва 8 см, кунҷи байни онҳо ба 60° баробар аст. Масоҳати сатҳи пурраро меёбем.

Ҳал. Аввал масоҳати асосро меёбем:

$$S_{асос} = 8 \cdot 3 \sin 60^0 = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$$



Пас $S_{пур} = S_{пахл} + 2S_{асос} = 220 + 24\sqrt{3} \approx$

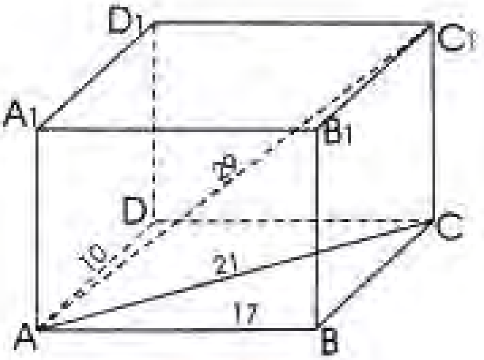
$$\approx 220 + 24 \cdot 1{,}7321 \approx 220 + 41{,}5704 \approx 262 \; см^2.$$

Масъалаи 2. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос ба 10 см ва 17 см баробаранд. Яке аз диагоналҳои асос 21 см буда, диагонали калонаш 29 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи параллелепипедро меёбем.

Ҳал. Теғаи паҳлуии CC_1 – ро аз рӯи теоремаи Пифагор меёбем (расми 11):

$$CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{(29-21)(29+21)} =$$

$$= \sqrt{8 \cdot 50} = \sqrt{400} = 20 \; см.$$



Расми 11

Мувофиқи хулосаи теоремаи 5 рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳоянд, бинобар ин

$$S_{пахл} = 2(10 \cdot 20) + 2(17 \cdot 20) = 1080 \; см^2.$$

Акнун бо формулаи Герон масоҳати секунҷаи ABC –ро меёбем:

$$p=\frac{21+17+10}{2}=24\ см,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=$$

$$=\sqrt{24\cdot3\cdot7\cdot14}=2\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot7^2}=14\cdot6=84\ см^2$$

ва $S_{асос}=2S=168\ см^2$. Ҳамин тариқ,

$$S_{пур}=S_{паҳл}+2S_{асос}=1080+2\cdot168=1416\ см^2.$$

---

1. Параллелепипед гуфта чӣ гуна призмаро меноманд? **2.** Рӯяҳои ҳамсоя ва муқобили параллелепипед чӣ тавр фарқ карда мешаванд? **3.** Тасдиқи теоремаи 5 ба кадом хосияти параллелограмм шабеҳ аст? **4.** Чаро дар параллелепипед ду рӯяи дилхоҳи муқобилро ҳамчун асосҳо қабул кардан мумкин аст?

---

42. Параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст. Нишон диҳед, ки кунҷҳои дурӯя, ки теғаҳояшон AA_1 ва CC_1 мебошанд, ба ҳамдигар баробаранд.

43. Магар асоси параллелепипеди моил росткунча шуда метавонад?

44. Порчае, ки маркази ду асоси параллелепипедро мепайвандад, ба теғаҳои паҳлуӣ параллел аст. Инро исбот кунед.

45. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос ба 6 м ва 8 м баробар буда, кунҷи 30°-ро ташкил медиҳанд. Теғаи паҳлуӣ 5 м аст. Масоҳати сатҳи пурраро ёбед.

46. Дар параллелепипеди рост теғаи паҳлуӣ 1 м буда, тарафҳои асос ба 23 дм ва 11 дм баробаранд. Диагоналҳои асос ҳамчун 2:3 нисбат доранд. Масоҳати буришҳои диагоналиро ёбед.

<u>**Масъалаҳо барои такрор**</u>

47. Дар призмаи секунҷаи рост ҳамаи теғаҳо баробаранд. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ба 12 м^2 баробар аст. Баландии призмаро ёбед.

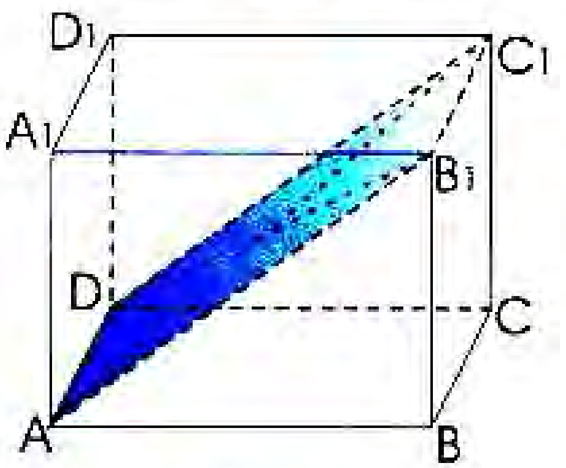
48. Тарафи хурди росткунча 6 см аст. Дарозии диагоналҳоро ёбед, агар онҳо ҳамдигарро дар тахти кунчи 60° буранд.

6. ХОСИЯТИ ДИАГОНАЛҲОИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Боз як далели ба параллелепипед хосбударо муқаррар менамоем.

Теоремаи 6. Диагоналҳои параллелепипед дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи бурищ ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд.

Исбот. Бигзор AC_1 ва DB_1 диагоналҳои параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ мебошанд (расми 12). Тарафи B_1C_1 ба BC параллел аст (мувофиқи теоремаи 1). BC бошад ба AD параллел аст. Пас тегаҳои AD ва B_1C_1 ба ҳам параллеланд ва дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Ин ҳамворӣ ҳамвориҳои рӯяҳои муқобили параллелепипедро аз рӯи хатҳои DC_1 ва AB_1 мебурад. Аз сабаби параллелии ин рӯяҳо (теоремаи 5), ин хатҳо ба ҳам параллеланд. Инак, чоркунҷаи AB_1C_1D параллелограмм мебошад. Диагоналҳои параллелепипед AC_1 ва DB_1 диагоналҳои ин параллелограмманд. Пас аз рӯи хосияти маъмули параллелограмм онҳо дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи бурищ ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд.



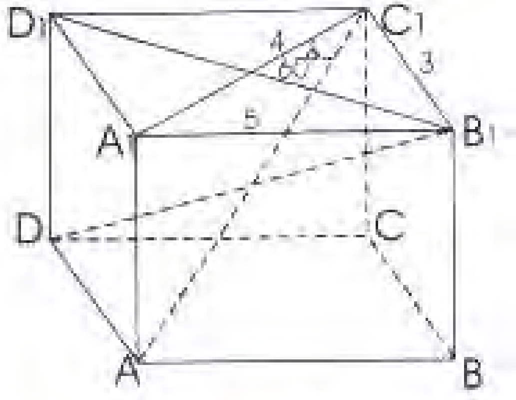
Расми 12

Айнан ҳамин хел исбот карда мешавад, ки диагоналҳои BD_1 ва CA_1, инчунин BD_1 ва AC_1 бо ҳам бурида шуда, дар нуқтаи бурищ ба ду ҳисса тақсим мешаванд. Ҳамин тариқ, ҳар чор диагонали параллелепипед дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи бурищ онҳо ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд. Теорема пурра исбот шудааст.

Эзоҳ. Мисли параллелограмм нуқтаи буриши диагоналҳоро *марказӣ* параллелепипед меноманд.

Хулоса. *Дар параллелепипеди рост диагоналҳо ҷуфтан ба ҳамдигар баробаранд.*

Масъала. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос 3 см ва 5 см буда, яке аз диагоналҳои асос ба 4 см баробар аст. Диагонали калони параллелепипедро меёбем, агар маълум бошад, ки диагонали хурд бо ҳамвории асос кунҷи 60°-ро ташкил медиҳад.



Расми 13

Ҳал. Диагонали дуюми асосро меёбем. Дар параллелограмм суммаи квадрати диагоналҳо ба суммаи квадрати тарафҳо баробар аст. Пас диагонали дигари асос ба $\sqrt{2\cdot3^2+2\cdot5^2-4^2}=\sqrt{52}$ баробар буда, аз 4 калон аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки проектсияи диагонали хурди параллелепипед (масалан,диагонали AC_1 дар расми 13), ки бо ҳамвории асос кунҷи 60°-ро ташкил медиҳад, $A_1C_1=4$ мебошад. Аз секунҷаи росткунҷаи AA_1C_1 теғаи паҳлуӣ (баландии) параллелепипедро меёбем: $H=4tg60^0=4\sqrt{3}$. Аз секунҷаи росткунҷаи DD_1B_1, ки катетҳояш $D_1B_1=\sqrt{52}$ ва $DD_1=H=4\sqrt{3}$ мебошанд, диагонали калони параллелепипедро ҳосил мекунем:

$$DB_1=\sqrt{(\sqrt{52})^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{52+16\cdot3}=\sqrt{52+48}=\sqrt{100}=10.$$

Ҷавоб: Диагонали калони параллелепипед 10 см аст.

---

1. Дар исботи теорема тарзи истифодаи хосияти параллелии рӯяҳои муқобили параллелепипедро (теоремаи 5) баён кунед. **2.** Кадом хосияти диагоналҳои параллелограмм дар исбот истифода карда шудааст ва чӣ тавр?

---

49. Тарафҳои асоси параллелепипеди рост ба $\sqrt{18}$ см ва 7 см, кунҷи байни онҳо ба 135°, теғаи паҳлуӣ ба 12 см баробаранд. Диагоналҳои параллелепипедро ёбед.

50. Тарафҳои асоси параллелепипеди рост ба 8 см ва 5 см, яке аз диагоналҳои асос ба 3,2 см ва диагонали калон ба 13 см баробар аст. Диагонали хурдашро ёбед.

51. Диагоналҳои параллелепипеди ростро, ки ҳамаи теғаҳояш ба a ва кунҷи асосаш ба 60° баробар аст, ёбед.

52. Асоси параллелепипеди рост ромб буда, диагоналҳояш ба 10 см ва 24 см баробаранд. Баландии параллелепипед 10 см аст. Диагонали калони параллелепипедро ёбед.

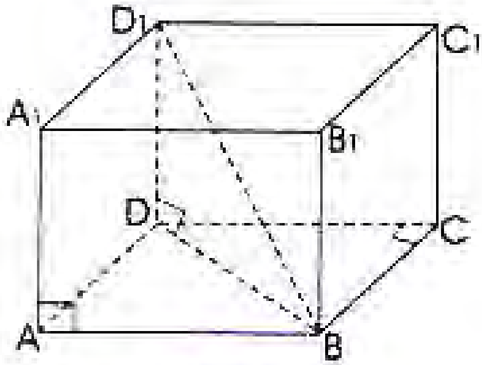
<u>Масъалаҳо барои такрор</u>

53*. Дар призмаи моили секунҷа ду рӯяи паҳлуӣ бо ҳам перпендикуляранд. Теғаи умумии онҳо аз ду теғаи дигар дар масофаи 12 см ва 35 см ҷойгир буда, ба 24 см баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаро ёбед.

54. Периметри секунҷаи росткунҷа ба 30 см, суммаи квадратҳои тарафҳои он ба 338 см^2 баробар аст. Тарафҳои секунҷа ёфта шаванд.

7. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДИ РОСТКУНҶА. КУБ

I. Таърифи 1. Параллелепипеди рост, ки асосаш росткунҷа аст, *параллелепипеди росткунҷа* номида мешавад (расми 14).



РАСМИ 14

Масалан, хишт, қуттиҳои гӯгирд ё сабзавот, хона ё ҳавзи шиноварӣ шакли чунин параллелепипедро доранд. Аз сабаби ҳолати хусусии параллелепипеди ростро доштани параллелепипеди росткунҷа (ПР), вай дорои хосиятҳои зерин мебошад: *ҳамаи шаш рӯя росткунҷаҳоянд; рӯяҳои муқобил ба ҳамдигар параллеланд; дутои дилхоҳи онҳоро ба сифати асосҳо қабул кардан мумкин аст; диагоналҳо дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд.* Ин нуқта *маркази* параллелепипеди росткунҷа мебошад. Дар шакли теоремаҳо ду хосияти дигарро меорем, ки махз ба чунин параллелепипед хосанд. Нимҳамвориҳое, ки дар онҳо рӯяҳои ҳамсояи параллелепипед ҷойгиранд, кунҷҳои дурӯяро ташкил медиҳанд. Ин кунҷҳоро *кунҷҳои дурӯяи параллелепипед* меноманд.

Теоремаи 7. Ҳамаи кунҷҳои дурӯяи параллелепипеди росткунҷа кунҷҳои ростанд.

Исбот. Тасдиқи теорема айёнан возеҳ аст, чунки кунҷҳои рост будани кунҷҳои хаттии ин кунҷҳои дурӯя зоҳиран фаҳмоянд. Масалан, кунҷи дурӯяи рӯяҳои $ABCD$ ва ABB_1A_1 ба кунҷи A_1AB баробар аст, ки рост будани он аз таъриф бармеояд (расми 14). Рост будани кунҷҳои дурӯяи дигар ҳам ҳамин тавр муқаррар карда мешаванд.

II. Таърифи 2. Дарозии ҳар як се теға, ки дар як нуқта бурида мешаванд, *ченакҳо* ё *андозаҳои хаттии* параллелепипеди росткунҷа ном доранд.

Масалан, дар мисоли параллелепипеди росткунҷаи дар расми 14 овардашуда дарозии теғаҳои AB, AD ва AA_1 ченакҳо мебошанд. Дар зиндагии ҳаррӯза ин ченакҳо ҳамчун *дарозӣ*, *бар* ва *баландӣ* маъмуланд. Масалан, дар мисоли хона ё ҳавзи шиноварӣ.

Аз теоремаи Пифагор бармеояд, ки диагонали росткунҷа ба суммаи квадратҳои тарафҳояш баробар аст. Параллелепипеди росткунҷа низ ба ин монанд хосиятро дорост. Аниқаш, ҷумлаи зерин дуруст аст:

Теоремаи 8. Квадрати диагонали параллелепипеди росткунҷа ба суммаи квадратҳои се ченакаш баробар аст.

Исбот. Нишон медиҳем, ки дар параллелепипеди росткунҷаи $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$, масалан, баробарии

$$d^2 = D_1B^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$$

ҷой дорад (расми 14). Теғаи D_1D ба асос перпендикуляр аст, яъне кунҷи D_1DB кунҷи рост мебошад. Барои ҳамин дар секунҷаи D_1DB, мувофиқи теоремаи Пифагор $D_1B^2 = DD_1^2 + DB^2$. Азбаски DB диагонали росткунҷаи $ABCD$ аст, пас $DB^2 = AB^2 + AD^2$. Инчунин $DD_1 = AA_1$. Аз ин се баробарӣ дурустии тасдиқи теорема бармеояд.

Хулоса. *Диагоналҳои параллелепипеди росткунҷа ба ҳамдигар баробаранд.*

Ҳамин тариқ, агар a, b, c ченакҳои параллелепипеди росткунҷа бошанд, он гоҳ квадрати дарозии диагонал бо формулаи $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ифода мешавад.

Масъалаи 1. Ченакҳои параллелепипеди росткунҷа ба 8, 9, 12 баробаранд. Диагоналро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи тасдиқи теоремаи 8

$$d^2 = 8^2 + 9^2 + 12^2 = 64 + 81 + 144 = 289.$$

Аз ин ҷо $d = \sqrt{289} = 17$.

III. Агар ченакҳои ПР (дарозӣ, бар ва баландии он) $a, в, c$ бошанд, он гоҳ масоҳати сатҳи пурраи чунин параллелепипед бо формулаи

$$S_{пур} = 2(ab + ac + bc)$$

ҳисоб карда мешавад, чунки масоҳати сатҳи пурраи ПР ба ҳосили ҷамъи масоҳати ҳамаи шаш рӯяҳо баробар аст.

Масъалаи 2. Диагонали ПР 5 буда, ченакҳояш $a, в, c$ мебошанд. Маълум, ки $3a + \sqrt{7}b + 3c = 25$ аст. Масоҳати сатҳи пурраи ПР –ро меёбем.

Ҳал. Дарозии диагонал мувофиқи теоремаи 8 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 5$ аст. Барои ҳамин $a^2 + b^2 + c^2 = 25$. Мувофиқи шарти масъала $3a + \sqrt{7}b + 3c = 25$ ё $6a + 2\sqrt{7}b + 6c = 50$ аст. Пас

$a^2 + b^2 + c^2 - (6a + 2\sqrt{7}b + 6c) = 25 - 50 = -25$.

Ё $(a^2 - 6a) + (b^2 - 2\sqrt{7}b) + (c^2 - 6c) + 25 = 0$. Квадратҳои пурра ҷудо карда ҳосил мекунем: $(a-3)^2 + (b - \sqrt{7})^2 + (c-3)^2 = 0$. Ягона қиматҳое, ки ин баробариро қаноат менамоянд $a = 3$, $b = \sqrt{7}$ ва $c = 3$ ҳастанд. Бинобар ин мувофиқи формулаи масоҳати сатҳи пурра доро ҳастем:

$$S_{пур} = 2(ab + ac + bc) = 2(3 \cdot \sqrt{7} + 3 \cdot 3 + 3 \cdot \sqrt{7}) = 18 + 12\sqrt{7}.$$

Таърифи 3. ПР, ки дар он ҳар се ченак ба ҳамдигар баробаранд, *куб* номида мешавад.

Дар куб хамаи шаш рӯя ба ҳамдигар баробар мебошанд. Куб ҳамаи он хосиятҳоеро, ки ба ПР мансубанд, дорад. Алалхусус, агар дарозии теғаи куб a бошад, он гох диагонали он $d=\sqrt{3}a$ ва масоҳати сатҳи пурраaш $S_{пур}=6a^2$ аст.

Масъалаи 3. Дарозии диагонали рӯяи куб ба $7\sqrt{2}$ см баробар аст. Дарозии диагонали кубро меёбем.

Ҳал. Агар теғаи куб ба a баробар бошад, он гох диагонали рӯяи он ба $a\sqrt{2}$ баробар аст. Барои ҳамин $a\sqrt{2}=7\sqrt{2}$, яъне $a=7$ см. Мувофиқи формулаи дарозии диагонали куб $d=a\sqrt{3}=7\sqrt{3}$ см мешавад.

---

1. Чӣ гуна параллелепипедро ПР мегӯянд? **2.** ПР ҳамчун параллелепипед дорои чӣ гуна хосиятҳо аст? Хосиятҳои танҳо ба ПР хос бударо номбар кунед. **3.** Чаро дар ПР кунҷҳои дурӯя кунҷҳои рост буда, диагоналҳо ба ҳамдигар баробаранд. **4.** Ченакҳои ПР кадомҳоянд? **5.** Диагонали ПР бо кадом формула ҳисоб мешавад? Масоҳати сатҳи пурраaш-чӣ? **6.** Чиро куб мегӯянд? **7.** Призмаи рости квадратӣ (асосаш квадрат) аз куб чӣ фарқ дорад?

---

55. Ченакҳои ПР ба: а) 12, 16, 21; б) $\sqrt{39}$, 7, 9 баробаранд. Диагонали онро ёбед.

56. Теғаи куб 7 м аст. Диагонали кубро ёбед.

57. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шуда аст. Кунҷи дурӯяи: а) ABB_1C_1 – ро; б) A_1BB_1K-ро, ки K миёнаҷои теғаи A_1D_1 аст, ёбед.

58*. Кунҷи тези байни ду диагоналҳои кубро ёбед.

59. Дар ПР-и $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=12$ см, $BB_1=4$ см ва $BC=5$ см аст. Ёфта шавад: а) диагонали AC_1; б) масоҳати буриши ACC_1A_1.

60. Дар ПР тарафҳои асос ба 7 см ва 24 см, баландӣ ба 8 см баробар аст. Масоҳати буриши диагоналии онро ёбед.

61. Дар ПР теғаи паҳлуӣ ба 5 см, масоҳати буриши диагоналӣ ба 205 см² ва масоҳати асос ба 360 см² баробар аст. Тарафҳои асосро ёбед.

62. Ҳосили ҷамъи ҳамаи теғаҳои ПР ба 16 м ва диагоналаш ба 3 м баробар аст. Масоҳати сатҳи пурраи онро ёбед.

63. Масоҳати сатҳи пурраи куб 24 м^2 аст. Теғаи онро ёбед.

64. Нишон диҳед, ки масоҳати сатҳи пурраи куб бо формулаи: а) $S_{пур} = 2d^2$, ки d дарозии диагонал аст; б) $S_{пур} = 3\sqrt{2}Q$, ки Q масоҳати буриши диагоналӣ аст, ифода мешавад.

65. Дар ПР тарафҳои асос ҳамчун 7:24 нисбат доранд, масоҳати буриши диагоналӣ ба 50 см^2 баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуиро муайян кунед.

66*. Исбот кунед, ки агар ҳамаи диагоналҳои параллелепипед бо ҳамдигар баробар бошанд, он гоҳ вай росткунҷа аст.

67. Тарафҳои асоси ПР ба 3 м ва 4 м баробаранд. Диагонали параллелепипед бо ҳамвории асос кунҷи 45°-ро ташкил мекунад. Масоҳати сатҳи пурраи параллелепипедро ёбед.

68. Диагонали ПР $5\sqrt{2}$ м буда, бо ҳамвории асос кунҷи 45° – ро ташкил мекунад. Масоҳати сатҳи паҳлуии параллелепипедро ёбед, агар масоҳати асос 12 м^2 бошад.

69. Диагонали ПР –ро ёбед, агар вай бо ҳамвории асос кунҷи 60°–ро ташкил дода, тарафҳои асос 3 м ва 4 м бошанд.

<u>Масъалаҳо барои такрор</u>

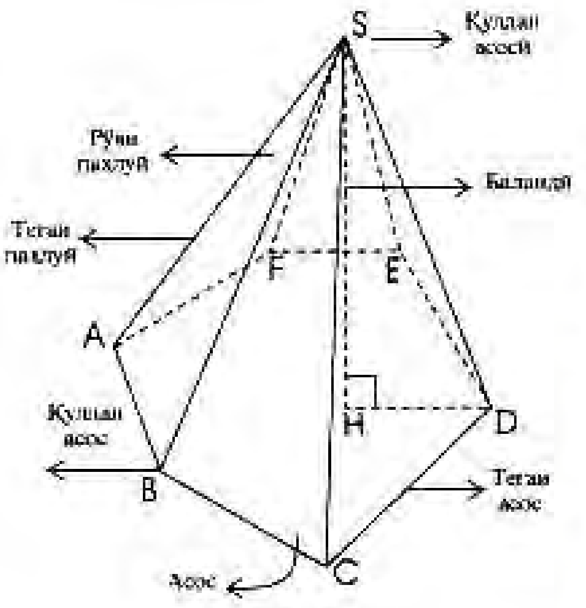
70. Дар призмаи секунҷа тарафҳои асос ба 3 м, 4 м ва 5 м, баландӣ ба 6 м баробаранд. Масоҳати сатҳи пурраи призма ёфта шавад.

71. Тарафҳои росткунҷа ҳамчун 4:1 нисбат дошта, масоҳаташ 400 см^2 аст. Тарафи калони росткунҷаро ёбед.

8. ПИРАМИДА

Мо бо пирамида, ҳамчун ҷисми геометрӣ ва ҳолати хусусии он – тетраэдр, шинос ҳастем. (ниг. «Геометрия – 10», саҳ. 20-22). Боз баъзе тасвияҳои ба пирамида хосбударо васеътар муҳокима намуда, доир ба онҳо масъалаҳоро ҳал ва пешниҳод мекунем.

Таъриф. Бисёррӯяе, ки дар натиҷаи пайваст кардани нуқтаи додашудаи берунаи бисёркунҷаи ҳамвор бо ҳар як нуқтаи ин бисёркунҷа ҳосил мешавад, *пирамида* ном дорад. Нуқтаи додашуда *қуллаи асосӣ*, бисёркунҷаи ҳамвор *асоси пирамида* ном доранд (расми 15).



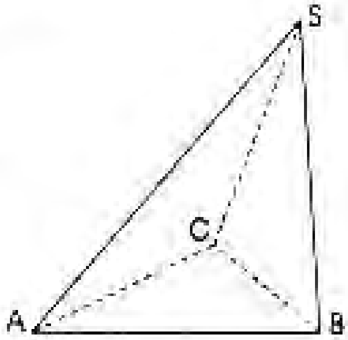
РАСМИ 15

Пирамидаҳои Мисри қадим, ки оромгоҳи фиръавнҳо буда, асосашон квадрат аст ё бурҷҳои Кремли Маскав мисоли пирамидаҳоанд. Қуллаи асосӣ ва қуллаҳои асос *қуллаҳои* пирамидаанд. (Дар оянда агар махсус таъкид нашуда бошад, зери истилоҳи қуллаи пирамида қуллаи асосӣ фаҳмида мешавад.)

Сатҳи пирамида аз асос ва *рӯяҳои паҳлуӣ*, ки секунҷаҳоянд, иборат аст. Порчаҳое, ки қуллаи пирамидаро ба қуллаҳои асос пайваст мекунанд, *тегаҳои паҳлуӣ* ном доранд. Тарафҳои асосро *тегаҳои асос* ҳам мегӯянд. Порчае, ки аз қулла ба ҳамвории асос перпендикуляр фароварда шудааст, *баландии пирамида* аст.

Пирамидаро, мисли призма, аз рӯи миқдори тарафҳои (кунҷҳои) асос номгузорӣ мекунанд. Пирамида *n- кунҷа* номида мешавад, агар асоси он бисёркунҷаи n-кунҷа бошад. Дар расми 15 пирамидаи шашкунҷа тасвир шудааст. Шашкунҷаи $ABCDEF$ асос, S қулла, SA, SB,...,SF тегаҳои паҳлуии он мебошанд. Рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои ASB, BSC,...,FSA буда, SH баландӣ аст.

Пирамидаи секунҷаро тетраэдр (tetrahedron) ҳам мегӯянд. (Аз ду калимаи юнонии tetra – чор ва hedra – асос, рӯя тартиб дода шуда, маънои tetrahedron чоррӯя аст). Тетраэдр дорои 4 рӯя, 6 теғаю 4 қулла мебошад (расми 16). Рӯяи дилхоҳи тетраэдрро ҳамчун асосаш қабул кардан мумкин аст.



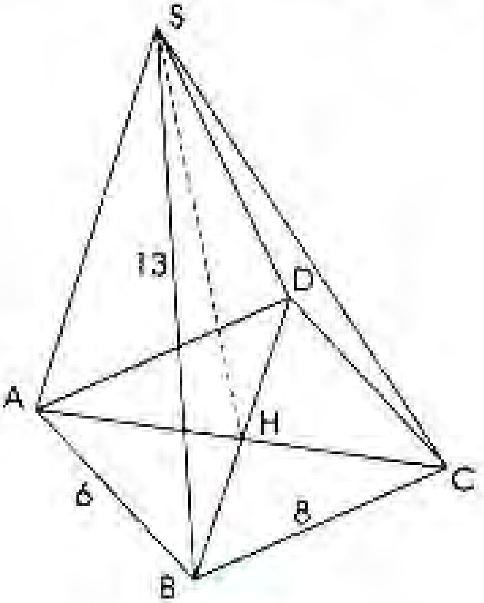
Расми 16

Ҳангоми бисёркунҷаи барҷаста будани асоси пирамида, вай бисёррӯяи барҷаста аст. Бинобар ин барояш формулаи Эйлер (ниг. ба банди 1) дуруст аст. Яъне, байни миқдори рӯяҳо (P), теғаҳо (T) ва қуллаҳо ($Қ$) вобастагии

$$Қ+P-T=2$$

ҷой дорад.

Масъала. Асоси пирамидаи чоркунҷа росткунҷаи тарафҳояш 6 см ва 8 см аст. Ҳар як теғаи паҳлуии пирамида 13 см аст. Баландии пирамидаро меёбем.



Расми 17

Ҳал. Ба осонӣ нишон додан мумкин аст, ки баландии пирамида SH ҳамвории асос $ABCD$ -ро дар нуқтаи буриши диагоналҳои росткунҷа мебурад. Ин диагоналҳо бо ҳамдигар баробар буда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд (расми 17). Аз секунҷаи росткунҷаи ABC:

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10.$$

Пас $AH=\dfrac{AC}{2}=5$ см. Акнун аз секунҷаи росткунҷаи AHS: $SH=\sqrt{AS^2-AH^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12.$

Ҷавоб. 12 см.

1. Чӣ гуна бисёрруя пирамида аст? Асос, рӯяҳои паҳлуӣ, тегаҳо, куллаҳо ва баландии он чӣ тавр муайян карда мешаванд? **2.** Пирамида аз рӯи чӣ ва чӣ тавр номгузорӣ карда мешавад? **3.** Чӣ гуна пирамидаро тетраэдр меноманд. **4.** Дар кадом ҳолат пирамида бисёррӯяи барҷаста аст?

72. Асоси тетраэдр секунҷаи баробарпаҳлуи асосаш 12 см ва тарафи паҳлуиаш 10 см аст. Рӯяҳои паҳлуӣ ба асос кунҷҳои дурӯяи ба 45° баробарро ташкил медиҳанд. Баландии тетраэдрро ёбед.

73. Секунҷаи баробарпаҳлу, ки асосаш 6 см ва баландиаш 9 см аст, асоси пирамида мебошад. Дар он тегаҳои паҳлуӣ бо ҳам баробар буда, дарозиашон 13 см аст. Баландии пирамидаро ёбед.

74. Асоси пирамида параллелограммест, ки тарафҳояш 3 см ва 7 см буда, яке аз диагоналҳояш 6 см аст. Баландии пирамида, ки аз нуқтаи буриши диагоналҳо мегузарад, 4 см аст. Тегаҳои паҳлуии пирамидаро ёбед.

75. Асоси тетраэдр секунҷаи баробартарафи тарафаш 9 см аст. Тегаи паҳлуӣ 6 см мебошад. Баландии тетраэдрро ёбед.

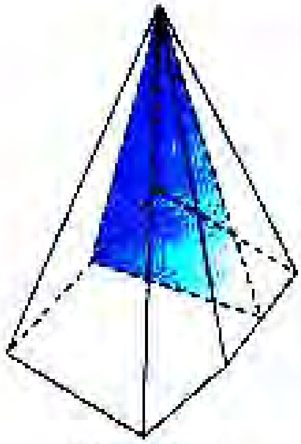
Масъалаҳо барои такрор

76. Ромби $ABCD$, ки тарафаш 8 см ва дар он $\angle A=45^{\circ}$ мебошад, дода шуда аст. Аз нуқтаи F ба ҳамвории ромб перпендикуляри FC фуроварда шудааст. Масофаи нуқтаи F то тарафи AD ёфта шавад.

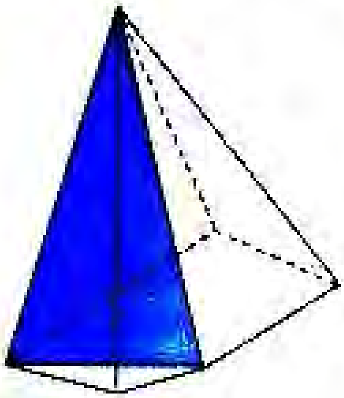
77. Дар секунҷаи росткунҷа яке аз катетҳо 3 см буда, котангенси кунҷи ба он часпида 0,75 аст. Гипотенузаро ёбед.

9. БУРИШИ ПИРАМИДА БО ҲАМВОРӢ

Ҳамворӣ рӯяҳои пирамидаро аз рӯи порчаҳо мебурад. Бисёркунҷае, ки тарафҳояш ин порчаҳо мебошанд, *буриши пирамида* ё *буриш* ном дорад. Барои сохтани буриш кифоя аст, ки нуқтаҳои буриши ҳамвориро бо тегаҳо муайян карда, дутои чунин нуқтаро, ки дар як рӯя мехобанд, пайваст намоем. Буришҳои пирамида бо ҳамвориҳое, ки аз қуллаи асосии он мегузаранд, секунҷаҳо мебошанд (расми 18).



РАСМИ 18

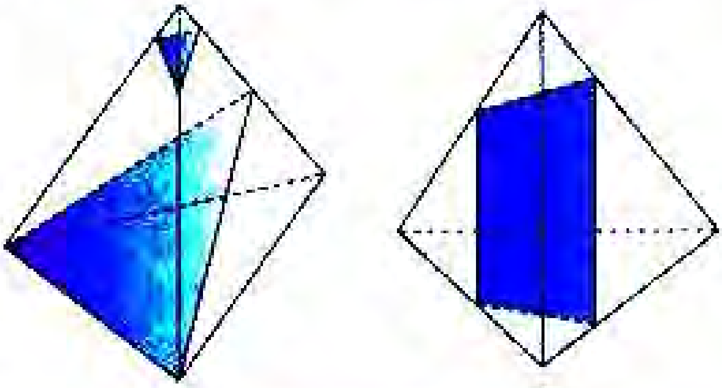


РАСМИ 19

Дар пирамида буришҳое, ки онҳоро ҳамвориҳои аз рӯи ду теғаи ҳамсоянабуда мегузаштагӣ ташкил мекунанд, *буришҳои диагоналӣ* ном доранд (расми 19). Онҳо низ секунҷаанд. Буришҳои тетраэдр, ки чор рӯя дорад, секунҷа ё чоркунҷа мебошанд (расми 20 а; б).

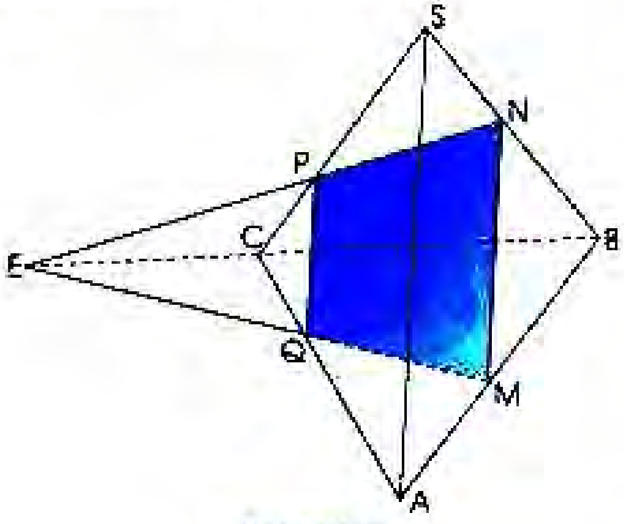
Масъалаи зеринро доир ба сохтани бериш дар тетраэдр муоина менамоем.

Масъала. Дар теғаҳои AB, BC ва CS-и тетраэдри $SABC$ нуқтаҳои M, N ва P гирифта шудаанд (расми 21). Буриши тетраэдрро бо ҳамвории аз рӯи ин нуқтаҳо мегузаштагӣ (ҳамвории MNP) месозем. (Хатҳои рости PN ва BC параллел нестанд.)



а) б)

РАСМИ 20



РАСМИ 21

Ҳал. Дар аввал хати ростеро мекашем, ки аз рӯи он ҳамвории MNP бо ҳамвории рӯяи ABC бурида мешавад. Нуқтаи M нуқтаи умумии ин ҳамвориҳост. Барои ёфтани боз як нуктаи ин хати рост порчаҳои PN ва BC-ро то ҳамдигарро буриданашон дар нуктаи E давом медиҳем. E нуқтаи матлуб аст.

Инак, ин ҳамвориҳо аз рӯи хати рости ME бурида мешаванд. Ин хат теғаи AC-ро дар нуқтаи Q мебурад. Чоркунҷаи $MNPQ$ чоркунҷаи матлуб мебошад.

1. Чаро буриши пирамида бо ҳамворӣ бисёркунҷа аст? **2.** Буриши пирамида бо ҳамвориҳое, ки аз қуллаи асосии он мегузаранд, чӣ гуна фигура аст? **3.** Чӣ гуна буришро буриши диагоналии пирамида мегӯянд? **4.** Буриши пирамидаи n-кунҷа бисёркунҷаи $(n+1)$-кунҷа шуда метавонад? $(n+2)$-кунҷа чӣ?

78. Масъалаи дар матн муоинашударо ҳангоми параллел будани хатҳои рости PN ва BC ҳал кунед.

79. Дар призмаи секунҷаи $ABCA_1B_1C_1$ аз рӯи теғаи AB ва қуллаи C_1 ҳамворӣ гузаронида шудааст. Фигураи $C_1AB_1A_1$ чӣ гуна фигура аст?

80. Буриши ҳамвориро бо пирамидаи чоркунҷа, ки он аз рӯи се нуқтаи ба теғаҳои гуногун тааллуқдошта мегузарад, созед.

81. Буриши ҳамвориро бо тетраэдр созед, агар маълум бошад, ки ҳамворӣ аз рӯи нуқтаи яке аз теғаҳо ва ду нуқтаҳои рӯяҳои ин теғаро дарбарнагиранда мегузарад.

82. Аз рӯи нуқтаи додашудаи рӯяи тетраэдр буриши ба асос параллелбударо созед.

83. Буриши ҳамвориро бо пирамида созед, агар ҳамворӣ аз рӯи ягон нуқтаи асос ва яке аз теғаҳои паҳлуӣ гузарад.

Масъалаҳо барои такрор

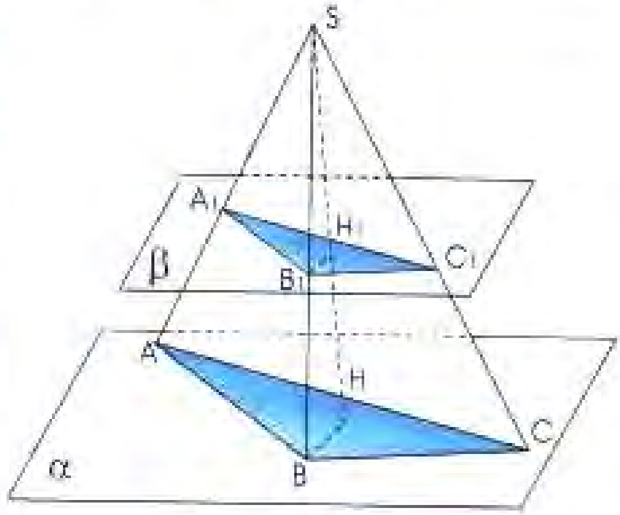
84. Масоҳати се рӯяи параллелепипед ба 1 м^2, 2 м^2 ва 3 м^2 баробаранд. Масоҳати сатҳи пурраи ин параллелепипед чанд аст?

85. Тарафи паҳлуии секунҷаи баробарпаҳлуро ёбед, агар асоси он ба 18 см ва масоҳаташ ба 108 см^2 баробар бошад.

10. ПИРАМИДАИ САРБУРИДА

I. Теоремаи 9. Агар ҳамвории ба асоси пирамида параллел тамоми теғаҳои паҳлуии пирамидаро бурад, он гоҳ: а) буриш ва асос ба ҳам параллеланд; б) ин ҳамворӣ баландӣ ва теғаҳои паҳлуиро ба қисмҳои ба ҳам мутаносиб ҷудо мекунад; в) бисёркунҷаҳои буриш ва асос ба ҳам монанданд.

Исбот. Исботи теоремаро барои пирамидаи секунҷа меорем. Бигузор асоси пирамидаи секунҷаи $SABC$ дар ҳамвории α ҷойгир аст ва SH баландиаш мебошад (расми 22). Фарз мекунем, ки пирамида бо ҳамвории β, ки ба α параллел аст, бурида шудааст ва секунҷаи $A_1B_1C_1$ буриш аст.



РАСМИ 22

а) Порчаҳои A_1B_1 ва AB параллеланд. Чунки онҳо дар ҳамвориҳои параллел ҷойгир буда, қисмҳои буриши ҳамвории сеюм бо ин ду ҳамвории параллел мебошанд. (ниг. ба теоремаи 10-и «Геометрия-10», саҳ. 46). Ҳамин тариқ, $AB \| A_1B_1$, $BC \| B_1C_1$, $AC \| A_1C_1$, $BH \| B_1H_1$. Яъне, тарафҳои ΔABC ва $\Delta A_1B_1C_1$ ҷуфт-ҷуфт бо ҳам параллеланд.

б) Аз параллелии порчаҳо ва теоремаи Фалес бармеояд, ки

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{SH_1}{SH}.$$

в) Аз мутаносибии тарафҳои секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ мувофиқи аломати сеюми монандии секунҷаҳо тасдиқ карда метавонем, ки ин секунҷаҳо ба ҳам монанданд.

Теорема барои пирамидаи секунҷа исбот шуд. Дурустии ин теорема барои пирамидаи n-кунҷа бо тарзи ба пирамидаҳои секунҷа ҷудо кардани пирамида ҳосил карда мешавад (ба ин бо роҳи ба секунҷаҳо ҷудо кардани бисёркунчаи асос ба осонӣ ноил шудан мумкин аст).

Хулоса. *Агар бо $S_{асос}$ масоҳати асос ва бо $S_{бур}$ масоҳати буриши параллелиро ишорат кунем, он гоҳ*

$$\frac{S_{бур}}{S_{асос}} = \frac{SH_1^2}{SH^2}.$$

Яъне, нисбати масоҳатҳо ба нисбати квадрати баландиҳо баробар аст.

Дар ҳақиқат, чӣ тавре медонем масоҳатҳои ду бисёркунҷаҳои монанд ба квадратҳои тарафҳои мувофиқи онҳо мутаносиб аст, яъне, масалан,

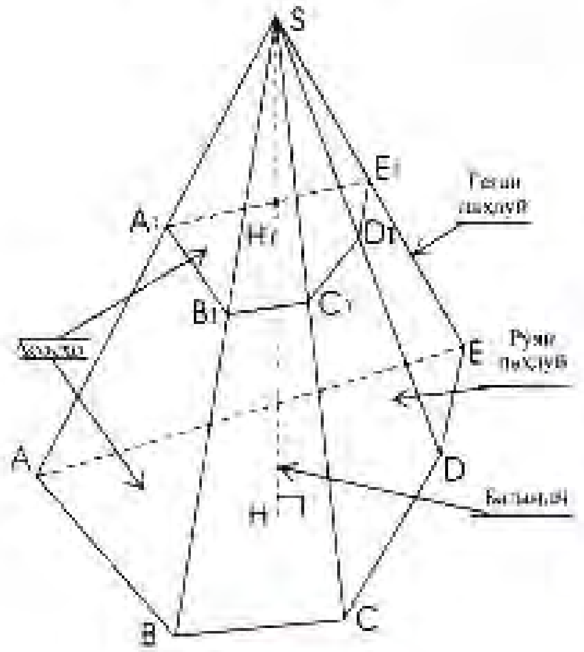
$$\frac{S_{бур}}{S_{асос}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}. \quad \text{Вале} \quad \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SH_1}{SH}.$$

Ин дурустии хулосаро тасдиқ менамояд.

Масъалаи 1. Дар пирамида аз миёнаҷои баландӣ ба асос буриши параллелӣ (буриши миёна) гузаронида шудааст. Масоҳати асос 60 см^2 аст. Масоҳати буришро меёбем.

Ҳал. Агар баландии пирамидаро бо H ишорат кунем, он гоҳ мувофиқи хулоса

$$\frac{S_{бур}}{S_{асос}} = \frac{\left(\frac{H}{2}\right)^2}{H^2} = \frac{1}{4}. \quad \text{Аз ин ҷо} \quad S_{бур} = \frac{S_{асос}}{4} = \frac{60}{4} = 15 \text{ см}^2.$$



РАСМИ 23

II. Таъриф. Қисми пирамида, ки дар байни асос ва ҳамвории ба асос параллели онро мебуридагӣ ҷойгир аст, *пирамидаи сарбурида* номида мешавад (расми 23).

Рӯяҳое, ки дар ҳамвориҳои параллел ҷойгиранд, *асосҳо* ном доранд. Онҳо мувофиқи теоремаи 9 бисёркунҷаҳои тарафҳои мувофиқашон параллел ва бо ҳам монанданд. Буриш *асоси* *хурд* аст. Дигар рӯяҳои пирамидаи сарбуридаро, чун пештара *рӯяҳои паҳлуӣ* мегӯянд. Онҳо трапетсияҳо мебошанд. Масалан, дар пирамидаи сарбуридаи $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ –и расми 23 порчаҳои AA_1, BB_1,... тегаҳои паҳлуӣ буда, трапетсияҳои ABB_1A_1, $BC\ C_1B_1$,... рӯяҳои паҳлуианд. Порчаи H_1H –и ба асосҳо перпендикуляр баландӣ мебошад.

Масъалаи 2. Дар пирамидаи чоркунҷаи сарбурида тарафҳои яке аз асосҳо ба 6 см, 7 см, 8 см ва 9 см баробаранд. Тарафи хурди асоси дигарӣ 5 см аст. Дигар тарафҳои ин асосро меёбем.

Ҳал. Агар тарафҳои номаълуми ин асосро бо x, y, z ишорат кунем, он гоҳ мувофиқи тасдиқи теоремаи 9 ба муодилаҳои $\frac{x}{7}=\frac{5}{6}$, $\frac{y}{8}=\frac{5}{6}$, $\frac{z}{9}=\frac{5}{6}$ соҳиб мешавем. Аз онҳо меёбем: $x=\frac{35}{6}$; $y=\frac{20}{3}$; $z=\frac{15}{2}$.

Ҷавоб. $\frac{35}{6}$ см, $\frac{20}{3}$ см, $\frac{15}{2}$ см.

---

1. Бурриши ҳамвории ба асоси пирамида параллел бо пирамида чӣ гуна фигура аст? **2.** Ин буриш дорои кадом хосиятҳо аст? **3.** Кадом бисёррӯя пирамидаи сарбурида аст? Вай аз пирамида чӣ тавр ҳосил мешавад? **4.** Рӯяҳои паҳлуии пирамидаи сарбурида чӣ гуна чоркунҷаҳоанд?

---

86. Дар пирамида буриши ба асос параллел, баландиро ба нисбати 3:4 ҷудо мекунад (аз қулла ба асос). Масоҳати буриш аз масоҳати асос 200 см^2 кам аст. Масоҳати асосро ёбед.

87. Баландии пирамида 16 м буда, масоҳати асосаш 512 м^2 аст. Буриши параллелии масоҳаташ 50 м^2 дар кадом масофа ҷойгир аст?

88. Дар пирамида масоҳати асос 150 см^2, масоҳати буриши параллелӣ 54 см^2 ва масофаи байни онҳо 14 см аст. Баландии пирамидаро ёбед.

89. Тарафҳои мувофиқи асосҳои пирамидаи сарбурида ҳамчун 13:17 нисбат доранд. Периметри буриши миёна 45 м аст. Периметри асосҳоро муайян кунед.

90. Масоҳати асосҳои пирамидаи сарбурида ба 25 $см^2$ ва 9 $см^2$ баробаранд. Масоҳати буриши миёнаро ёбед.

91. Масоҳати асосҳои пирамидаи сарбурида 18 $м^2$ ва 128 $м^2$–анд. Масоҳати буриши параллелиро, ки баландиро ба нисбати 2:3 (аз асоси хурд сар карда) ҷудо мекунад, ёбед.

<u>**Масъалаҳо барои такрор**</u>

92. Асоси параллелепипеди рост ромби диагоналҳояш 12 см ва 16 см мебошанд. Агар баландии параллелепипед 8 см бошад, масоҳати сатҳи пурраи он муайян карда шавад.

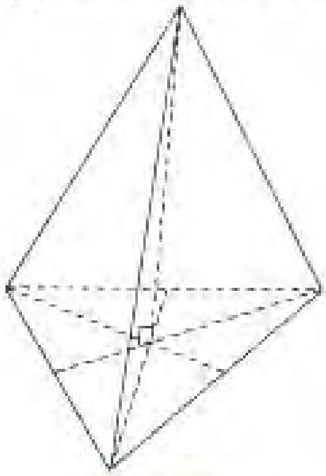
93. Дар секунҷаи баробарпаҳлу кунҷи назди қулла 120^0 буда, тарафҳои паҳлуӣ ба 10 см баробаранд. Берун аз секунҷа нуқтае дода шудааст, ки он аз ҳар як қуллаи секунҷа дар масофаи 26 см ҷойгир аст. Масофаи байни ин нуқта ва ҳамвории секунҷаро муайян намоед.

11. ПИРАМИДАИ МУНТАЗАМ

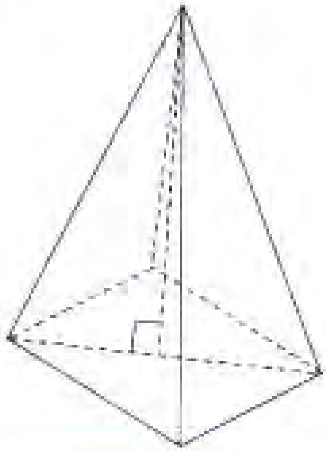
1 . Чӣ тавре медонем бисёркунҷа *мунтазам* номида мешавад, агар дар он тарафҳо ва кунҷҳо бо ҳам баробар бошанд. Масалан, секунҷаи баробартараф ё квадрат мисоли бисёркунҷаи мунтазаманд.

Таъриф. Агар асоси пирамида бисёркунҷаи мунтазам буда, баландиаш аз маркази ин бисёркунҷа гузарад, онро *пирамидаи мунтазам* меноманд.

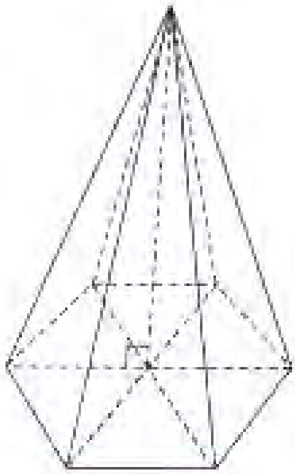
Дар расми 24 пирамидаҳои мунтазами секунҷа (тетраэдри мунтазам), чоркунҷа ва шашкунҷа оварда шудааст. Чӣ тавре маълум аст, маркази секунҷаи баробартараф нуқтаи буриши медианаҳо, маркази квадрат нуқтаи буриши диагоналҳо мебошад. Ин нуқтаҳо бошанд, маркази давраи дарункашида ё берункашидаи ин фигураҳо мебошанд. Умумӣ карда гуфтан мумкин аст, ки маркази асоси пирамидаи мунтазам маркази давраи дарункашида ё берункашидаи асос аст.



тетраэдри мунтазам



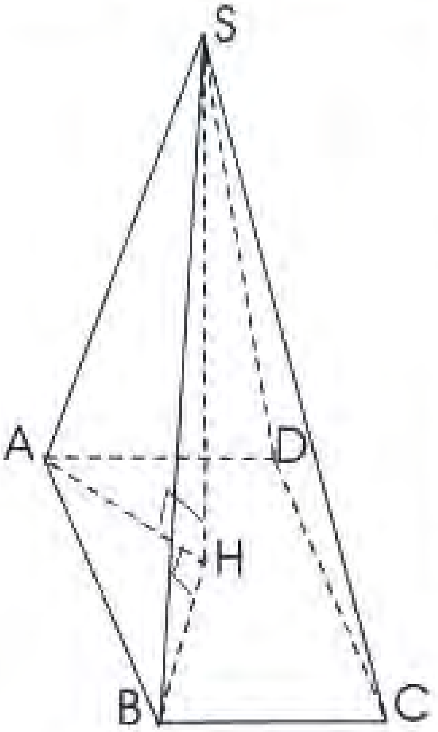
пирамидаи мунтазами чоркунча



пирамидаи мунтазами шашкунча

РАСМИ 24

Хати росте, ки баландии пирамидаро дар бар мегирад, *тири* пирамида ном дорад. Дар пирамидаи мунтазам: 1) *Теғаҳои паҳлуӣ ба ҳамдигар баробаранд;* 2) *Рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои ба ҳам баробари баробарпаҳлуянд;* 3) *Баландиҳои рӯяҳои паҳлуӣ, ки аз қулла ба асос фуроварда шудаанд, ба ҳамдигар баробаранд.* Ин баландиҳоро *апофема* меноманд.



РАСМИ 25

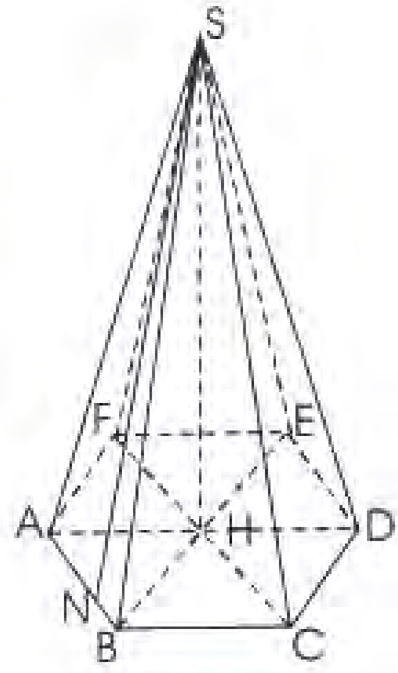
Исботи хосияти 1)-ро барои пирамидаи чоркунҷаи мунтазам (расми 25) меорем. Бигзор H маркази асос аст. ΔABH баробартараф буда, $\angle SHA=\angle SHB=90^\circ$ аст. Пас, мувофиқи аломати дуюми баробарии секунчаҳои росткунҷа $\Delta SHA=\Delta SHB$, яъне $SA=SB$. Айнан ҳамин гуна мулоҳизаронӣ ба баробарии $SB=SC$, баъд ба $SC=SD$, сонӣ ба $SD=SA$ меоварад.

Хосиятҳои 2) ва 3) хулосаҳои хосияти 1) мебошанд.

Масъалаи 1. Дар пирамидаи шашкунҷаи мунтазам теғаи асос 10 см ва баландӣ $\sqrt{69}$ см аст. Апофемаи пирамидаро меёбем.

Ҳал. Бигузор дар пирамидаи мунтазами $SABCDEF$ $AB=BC=10$ ва SN апофема аст (расми 26). Мувофиқи шарт $SH=\sqrt{69}$ см. Секунҷаи ABH баробартараф мебошад, пас $BH=AH=AB=10$ см. Аз секунҷаи росткунҷаи SHB мувофиқи теоремаи Пифагор

$SB^2=SH^2+HB^2=(\sqrt{69})^2+10^2=169$. Пас $SB=13$ см. Апофема SN медианаи секунҷаи ASB аст, барои ҳамин $BN=\dfrac{AB}{2}=5$ см. Акнун аз секунҷаи



Расми 26

росткунҷаи SNB: $SB^2=SN^2+BN^2$ ё
$SN^2=SB^2-BN^2=13^2-5^2=169-25=144$; $SN=12$.

Ҷавоб. Дарозии апофемаи пирамидаи мунтазами мазкур 12 см аст.

II. Чӣ тавре гуфта будем, сатҳи пурраи пирамида аз асос ва рӯяҳои паҳлуӣ иборат аст (ниг. ба банди 8). Пас масоҳати сатҳи паҳлуӣ ҳосили ҷамъи масоҳати рӯяҳои паҳлуӣ аст.

Теоремаи 10. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи мунтазам ба ҳосили зарби нисфи периметри асос бар апофема баробар аст.

Исбот. Агар дарозии теғаи асоси пирамидаи мунтазами n-кунҷа a бошад, он гоҳ масоҳати як рӯяи паҳлуии он (ҳамчун масоҳати секунҷаи баробарпаҳлу) $\dfrac{al}{2}$ аст, ки дар ин ҷо l дарозии апофема мебошад. Аз сабаби баробарии рӯяҳои паҳлуӣ масоҳати ҳамаи онҳо $\dfrac{al}{2}\cdot n=\dfrac{pl}{2}$ мешавад, ки $p=an$ периметри асос аст. Теорема исбот шуд.

Ҳамин тариқ, барои пирамидаи мунтазами n-кунҷа

$$S_{пур}=S_{асос}+S_{паҳл}=S_{асос}+\frac{pl}{2}.$$

Агар ҳамвории ба асос параллел пирамидаи мунтазамро ба ду қисм ҷудо кунад, он гоҳ қисми дар байни асос ва ҳамворӣ ҷойгирбударо *пирамидаи сарбуридаи мунтазам* меноманд. Дар чунин пирамида асосҳо бисёркунҷаҳои мунтазаманд. Хати росте, ки маркази асосҳоро мепайвандад *баландӣ* аст. Дар ин ҷо ҳам чун пештара *диагонал* гуфта хати ростеро меноманд, ки ду қуллаи дар як рӯя нахобидаи пирамидаи сарбуридаро пайваст менамояд.

Рӯяҳои паҳлуии пирамидаи сарбуридаи мунтазам трапетсияҳои баробарпаҳлуи асосҳояшон якхелаи ба a ва b баробар мебошанд. Баландии ин трапетсияҳоро *апофема* мегӯянд.

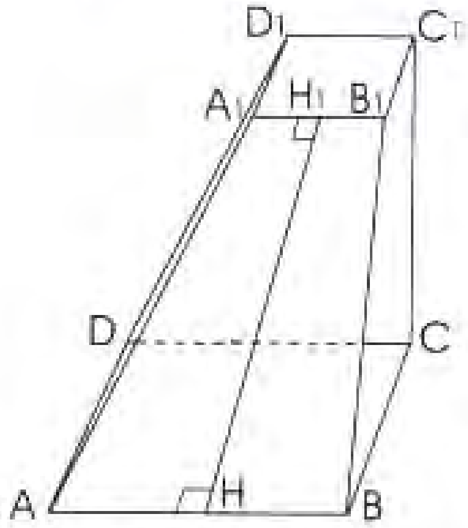
Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки теоремаи зерин дуруст аст:

Теоремаи 11. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи сарбуридаи мунтазами n-кунҷа ба ҳосили зарби нисфи суммаи периметри асосҳо бар апофема баробар аст.

Ба ибораи дигар, формулаи зерин ҷой дорад:

$$S_{пахл} = \frac{(a+b)n}{2} \cdot l .$$

Масъалаи 2. Тарафҳои асосҳои пирамидаи сарбуридаи мунтазами квадратӣ мувофиқан ба 6 см ва 8 см баробар буда, апофемааш 5 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи ин пирамидаро меёбем.



РАСМИ 27

Ҳал. Аввал масоҳати сатҳи паҳлуиро меёбем. Мувофиқи додашудаҳо $a=AB=8$ см, $b=A_1B_1=6\ см$ ва $l=HH_1=5\ см$ аст. (расми 27). Пас аз рӯи теоремаи 11

$$S_{пахл} = \frac{(8+6)\cdot 4}{2} \cdot 5 = 140\ см^2 .$$

$$S_{пур} = S_{пахл} + S_{ABCD} + S_{A_1B_1C_1D_1} = 140 + 8^2 + 6^2 = 240\ см^2.$$

Ҷавоб. 240 см².

1. Чӣ гуна пирамидаро мунтазам меноманд? **2.** Маркази асоси пирамидаи мунтазам дар куҷо ҷойгир аст? **3.** Чиро тири ҷунии пирамида мегӯянд? **4.** Дар пирамидаи мунтазам теғаҳои паҳлуӣ, рӯяҳои паҳлуӣ ва баландии рӯяҳои паҳлуӣ чӣ гунаанд? **5.** Апофемаи пирамидаи мунтазам гуфта чиро мегӯянд? **6.** Исбот кунед, ки масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи мунтазам ба нисфи ҳосили зарби периметри асос бар апофема баробар аст. **7.** Баландӣ, апофема ва диагонал дар пирамидаи сарбуридаи мунтазам чӣ тавр муайян карда мешаванд? **8.** Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи сарбуридаи мунтазам бо кадом формула ифода карда мешавад?

94. Дар пирамидаи мунтазами чоркунҷа масоҳати сатҳи паҳлуӣ ба 14,76 $м^2$, масоҳати сатҳи пурра ба 18 $м^2$ баробар аст. Дарозии тарафи асос ва баландии пирамидаро ёбед.

95. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам баландӣ 12 см буда, апофемаи рӯяи паҳлуӣ 15 см мебошад. Теғаи паҳлуии пирамидаро ёбед.

96. Тарафи асоси пирамидаи чоркунҷаи мунтазам ёфта шавад, агар баландии он H ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ S бошад.

97. Тарафи асоси пирамидаи чоркунҷаи мунтазам ва апофемаи онро ёбед, агар теғаи паҳлуӣ ба 10 см ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ ба 144 $см^2$ баробар бошад.

98. Тарафи асоси пирамидаи чоркунҷаи мунтазам 5 см, масоҳати сатҳи пурраи он 115 $см^2$ аст. Апофемаи пирамидаро ёбед.

99. Тарафи асоси пирамидаи секунҷаи мунтазами $SABC$ ба a, теғаи паҳлуиаш ба b баробар аст. Дар ин пирамида аз миёнаҷои теғаҳои AB ва BC ба теғаи SB ҳамворӣ гузаронида шудааст. Масоҳати буришро бо пирамида ёбед.

100*. Баландии пирамидаи сарбуридаи мунтазами чоркунҷа 16 см, тарафҳои асосҳояш 24 см ва 40 см аст. Диагонали пирамидаи сарбурида ва масоҳати буриши диагоналии онро ёбед.

101. Масоҳати сатҳи пурраи пирамидаи секунҷаи мунтазамро, ки баландиаш 6 см ва кунҷи байни ҳамвориҳои рӯяи паҳлуӣ ва асос 60^{o} аст, ёбед.

102. Тарафҳои асосҳои пирамидаи сарбуридаи мунтазам ҳамчун 1:2 нисбат доранд. Баландии пирамидаи сарбурида H аст. Рӯяи паҳлуӣ бо ҳамвории асос кунҷи 45^{o} –ро ташкил мекунад. Масоҳати асосҳоро ёбед.

103. Дар пирамидаи сарбуридаи панҷкунча чандто диагонал гузаронидан мумкин аст? Дар пирамидаи сарбуридаи п-кунҷа чӣ?

104. Дар пирамидаи чоркунҷаи сарбуридаи мунтазам баландӣ 2 см, тарафҳои асосҳо 3 см ва 5 см мебошанд. Диагонали ин пирамидаи сарбуридаро ёбед.

105. Баландии пирамидаи сарбуридаи мунтазам 7 см, тегаи паҳлуӣ 9 см ва диагонал 11 см аст. Тарафи асосҳои пирамидаро ёбед.

106. Тарафҳои асосҳои пирамидаи сарбуридаи шашкунҷаи мунтазам ба 2 см ва 4 см, баландиаш ба 1 см баробаранд. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ёфта шавад.

107. Тарафҳои асосҳои пирамидаи сарбуридаи секунҷаи мунтазам 6 м ва 12 м мебошад. Баландии он ба 1 м баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ёфта шавад.

108. Тарафҳои асосҳои пирамидаи чоркунҷаи сарбуридаи мунтазам 2 м ва 8 м, баландиаш 4 м аст. Масоҳати сатҳи пурраи пирамидаро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

109. Масофаи байни тегаҳои паҳлуии призмаи секунҷаи моил мувофиқан ба 2 см, 3 см ва 4 см баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ – ба 45 см². Тегаи паҳлуиро ёбед.

110. Дар секунҷаи ABC аз асоси D-и баландии AD ба тарафи AB ба таври параллелӣ хати рост гузаронида шудааст, ки он AC-ро дар нуқтаи K мебурад. AK/KC ёфта шавад, агар $S_{ADC} : S_{ABC} = \frac{3}{16}$ бошад.

Дар синфи 10 табдилдиҳиҳои ҳаракат, симметрия, параллелкӯчониро дар фазо муоина карда будем (ниг. «Геометрия-10», банди 16, саҳ. 103-109). Алалхусус, табдилдиҳиҳои симметрия нисбат ба нуқта, нисбат ба хати рост ва нисбат ба ҳамворӣ муфассал таҳқиқ шуда буданд. Дар ин параграф дар бораи нуқтаҳо, хатҳои рост ва ҳамвориҳо, ки бисёррӯяҳо ҳамчун фигураҳои (ҷисмҳои) геометрӣ нисбат ба онҳо симметрианд, сухан меравад. Инчунин доир ба бисёррӯяҳои мутлақо мунтазам маълумоти ибтидоӣ оварда мешавад.

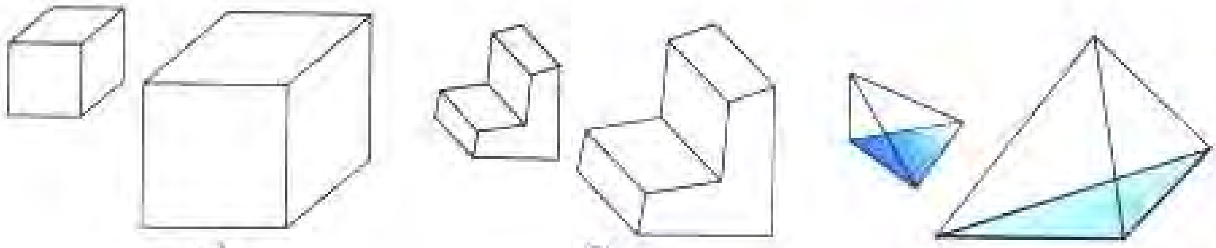
12. БАРОБАРӢ ВА МОНАНДИИ БИСЁРРӮЯҲО

Мисли ҳамворӣ, дар фазо ду фигура (ҷисми геометрӣ) *баробар* номида мешаванд, агар онҳо ҳангоми ягон ҳаракат ҳамҷоя шаванд. Масалан, ду призмаи n-кунҷа ба ҳамдигар баробаранд, агар асосҳо ва баландии онҳо баробар бошанд. Ҳамин тасдиқ нисбати ду пирамидаи *n*-кунҷа ҳам дуруст аст.

Дар планиметрия ду бисёркунҷаро, ки миқдори якхелаи тарафҳо доранд, монанд номида будем, агар кунҷҳои мувофиқи онҳо баробар буда, тарафҳои мувофиқашон мутаносиб бошанд. Ба ин мувофиқ, дар фазо таърифи зеринро дохил мекунем.

Таъриф. Ду бисёррӯя, ки дорои миқдори якхелаи рӯяҳоанд, *монанд* номида мешаванд, агар рӯяҳои онҳо монанд ва якхела ҷойгиру кунҷҳои дурӯяи мувофиқашон баробар бошанд.

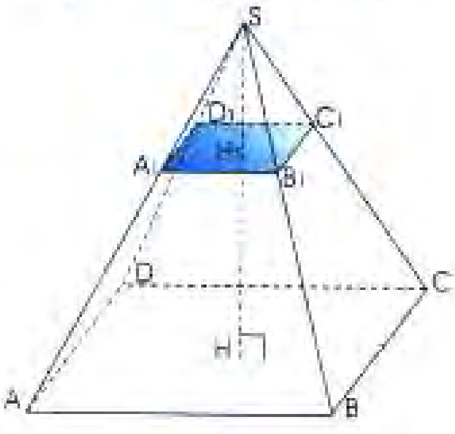
Бисёррӯяҳои дар қисми а) ва б)-и расми 28 овардашуда монанд буда, бисёррӯяҳои дар қисми в)-и расм монанд нестанд.



РАСМИ 28

Нишон додан мумкин аст, ки ду бисёррӯя фақат ва фақат ҳамон вақт монананд, агар чунин табдилдиҳии монанд (гомотетия) мавҷуд бошад,ки бо ин таблилдиҳӣ бисёррӯяҳо ҳамҷоя шаванд. Аз ин бармеояд, ки нисбатҳои ченакҳои хаттии мувофиқи ду бисёррӯяи монанд ба ҳам баробаранд. Яъне, агар k-коэффитсиенти монандӣ бошад, он гоҳ: 1) Нисбати дарозии тегаҳои мувофиқ k аст. Нисбатҳои мувофиқи дарозиҳои баландиҳо, медианаҳо ва биссектрисаҳо низ ба k баробаранд; 2) Нисбати параметрҳои дигари мувофиқи рӯяҳо, масалан, периметрҳо ё диагоналҳояшон k аст; 3) нисбатҳои масоҳатҳои мувофиқи асосҳо, сатҳҳои паҳлуӣ ва сатҳҳои пурра ба k^2 баробар аст.

Масъала. Пирамидаи чоркунҷаи баландиаш 10 см бо ҳамвории ба асос параллел, ки аз қулла дар масофаи 4 см ҷойгир аст, бурида шудааст. Нисбатҳои дарозии тегаҳои мувофиқ, периметрҳо ва масоҳатҳои буришу асоси пирамидаро меёбем.



РАСМИ 29

Ҳал. Дар натиҷаи буриш пирамидаи $SA_1B_1C_1D_1$ ҷудо карда мешавад (расми 29). Аз теоремаи 9 ва таъриф бармеояд, ки пирамидаҳои $SABCD$ ва $SA_1B_1C_1D_1$ монананд. Мувофиқи шарт $SH=10$ см, $SH_1=4$ см аст. Пас, коэффитсенти монандӣ

$$k=\frac{SH_1}{SH}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

Инак, $\frac{A_1B_1}{AB}=k=\frac{2}{5}$, $\quad \frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}=k^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$.

1. Дар кадом ҳолат ду бисёррӯя ба ҳам баробаранд? **2.** Монандии бисёррӯяҳо чӣ тавр муайян карда мешавад? **3.** Дар бораи ченакҳои хаттии ду бисёррӯяи монанд чӣ гуфтан мумкин аст ? Дар бораи ченакҳои квадратиашон-чӣ?

111. Исбот кунед, ки ду куби тегаашон дилхоҳ ба ҳам монананд.

112. Нисбати масоҳатҳои асосҳои ду призмаи рост $\frac{4}{9}$ аст. Коэффитсиенти монандиро, ки ин ду призмаро ҳамҷоя мекунад, ёбед.

113. Ду пирамидаи мунтазами чоркунҷа бо коэффитсиенти монандии $k=\frac{1}{3}$ ба ҳам монананд. Баландии яке аз онҳо 6 м, теғаи асосаш 4 м аст. Масоҳати рӯяи паҳлуии пирамидаи дигарро ёбед.

<u>**Масъалаҳо барои такрор**</u>

114. Исбот кунед, ки агар дар пирамидаи секунҷа ҳамаи рӯяҳо периметрҳои баробар дошта бошанд, он гоҳ рӯяҳо баробаранд.

115. Баландии секунҷаи баробарпаҳлу 45 см буда, асосаш бар тарафи паҳлуӣ ҳамчун 4:3 нисбат дорад. Радиуси давраи дарункашидаро ёбед.

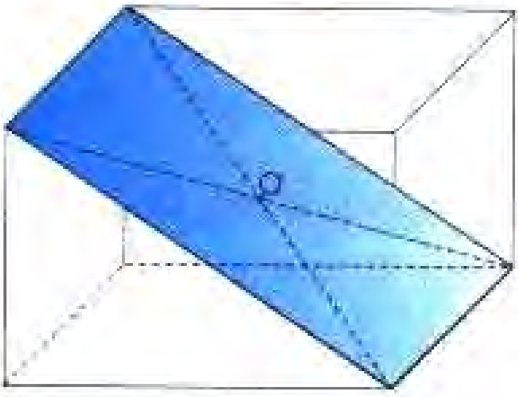
13. СИММЕТРИЯ ДАР БИСЁРРӮЯҲО

Дар фазо табдилдиҳиҳои симметрияро нисбат ба нуқта (симметрияи марказӣ), нисбат ба хати рост (симметрияи тирӣ) ва нисбат ба ҳамворӣ (симметрияи ойинавӣ) дар банди 16-и «Геометрия-10» (ниг. ба саҳ. 105-107) муоина карда будем. Акнун мавҷудияти чунин симметрияро дар бисёррӯяҳои мушаххас муайян менамоем.

Хотирнишон мекунем, ки *нуқта (хати рост, ҳамворӣ) маркази (тири, ҳамвориш) симметрияи фигураи фазоӣ* *номида мешавад, агар ҳар як нуқтаи фигура нисбати он ба нуқтаи дигари ҳамин фигура симметрӣ бошад.*

Бо симметрия мо дар табиат, санъати меъморӣ, техника ва зиндагӣ сари ҳар қадам вомехӯрем. Дар табиат дар шакли баргҳо ва гулҳои растаниҳо, дар ҷойгиршавии узвҳои ҳайвонот симметрияро дарк кардан мумкин аст. Ҳамаи кристалҳои дар табиат вомехӯрдагӣ марказ, тир ва ҳамвории симметрияро доранд. Қисми зиёди биноҳо нисбат ба ҳамвориҳо симметрианд, баъзе намуди деталҳо тири симметрия доранд. Масалан, асбоби дурбин, тарозуи паҳлудор, хати шиддатнокиаш баланди барқгузарон ва ғайраҳо.

а) *Маркази симметрия.* Дар теоремаи 6 (ниг. ба банди 6) муқаррар карда будем, ки диагоналҳои параллелепипед дар як нуқта бурида мешаванд ва ин нуқта *маркази* параллелепипед аст. Аз ин бармеояд, ки параллелепипед нисбат ба нуқтаи буриши диагоналҳояш ҷисми *мутамаркази симметрӣ* аст ва ин нуқта маркази симметрия мебошад (расми 30, нуқтаи O). Ин натиҷа амсоли вазъ дар ҳамвориро мемонад, ки мувофиқи он параллелограмм нисбат ба нуқтаи буриши диагоналҳояш фигураи мутамаркази симметрӣ буда, дар он ин нуқта маркази симметрия аст.



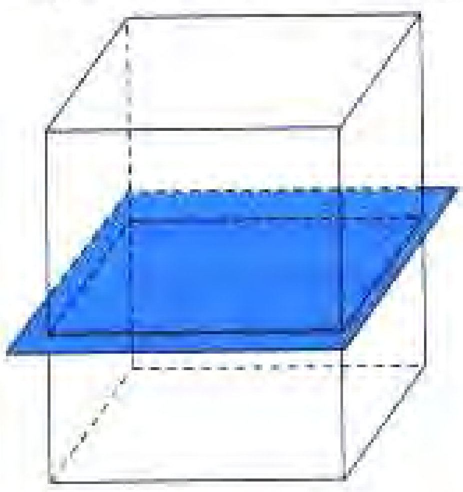
РАСМИ 30

Дигар бисёрруяҳои барҷаста, ғайр аз параллелепипед, маркази симметрия надоранд.

б) *Тири симметрия.* Дар росткунҷа хатҳои росте, ки аз нуқтаи буриши диагоналҳо гузашта, ба тарафҳои он параллеланд, тирҳои симметрияанд. Айнан мисли ҳамин, дар параллелепипеди росткунҷа (ПР) хатҳои росте, ки аз маркази он гузашта, ба тегаҳои асос параллеланд, тирҳои симметрияи ПР мебошанд. ПР нисбат ба хати росте, ки аз марказ гузашта, ба ҳамвории асос перпендикуляр аст, низ симметрӣ мебошад. Хулоса, се хати рости ба ҳам ҷуфт-ҷуфт перпендикуляр, ки дар марказ ҳамдигарро мебуранд, тирҳои симметрияи ПР мебошанд. Бо ибораи дигар, маркази симметрияи ПР-ро ҳамчун ибтидои системаи росткунҷаи координатавӣ дар фазо қабул кардан мумкин аст. Ҳар як тири координатавӣ тири симметрияи чунин параллелепипед аст.

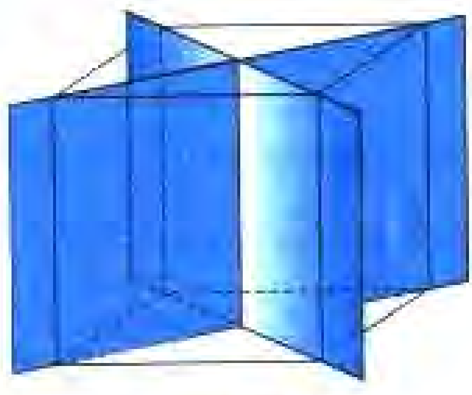
Дар пирамидаи мунтазам тири он тири симметрия аст, яъне чунин пирамида нисбат ба тираш ҷисми симметрӣ мебошад.

в) *Ҳамвориш симметрия.* ПР се ҳамвории симметрия дорад. Онҳо аз маркази симметрия гузашта, ба рӯяҳои муқобил параллеланд. Яъне, аз миёнаҷои чор теғаҳои ба ҳам параллели параллелепипед мегузаранд. Дар расми 31 яке аз чунин ҳамвориҳо оварда шудааст. Нуқтаҳои охири теғаҳо нуқтаҳои симметрианд.



РАСМИ 31

Агар ҳамаи андозаҳои хаттии ПР гуногун бошанд, он гоҳ вай ғайр аз ҳамвориҳои номбаршуда дигар ҳамвории симметрия надорад.



РАСМИ 32

Агар асоси параллелепипед квадрат бошад (яъне ду андозааш якхела бошад), он гоҳ вай боз ду ҳамвории симметрияро дорад. Онҳо ҳамвориҳои буриши диагоналӣ мебошанд, ки дар расми 32 оварда шудаанд.

Агар дар ПР ҳар се ченак якхела бошад, он гоҳ дар он ҳар гуна буриши диагоналӣ ҳамвории симметрия аст. Ҳамин тариқ, куб 9-то ҳамвории симметрия дорад.

Дар пирамидаи мунтазам ҳамворие, ки аз қулла, маркази пирамида ва яке аз қуллаҳои асос гузаронида шудааст, ҳамвории симметрия аст.

1. Симметрияҳои марказӣ ва тирӣ дар ҳамворӣ ва дар фазо чӣ тавр муайян карда мешаванд? **2.** Дар фазо чӣ гуна ҳамвориро ҳамвории симметрия меноманд? **3.** Кадом нуқта маркази симметрияи параллелепипед аст? **4.** Кадом хатҳои рост тирҳои симметрияи ПР мебошанд? **5.** Ҳамвориҳои симметрияи ПР ва пирамидаи мунтазам кадом ҳамвориҳоянд? **6.** Чаро куб нӯҳто ҳамвории симметрия дорад?

116. Нишон диҳед, ки ҳар гуна призма ақаллан якто ҳамвории симметрия дорад.

117. Призмаи секунҷаи мунтазам чандто тир ва ҳамвории симметрия дорад? Призмаи чоркунҷаи мунтазам-чӣ?

118. Призмаи секунҷаи мунтазам маркази симметрия дорад? Призмаи чоркунҷаи мунтазам-чӣ?

119. Параллелепипеди рост, ки ПР нест, чандто тири симметрия ва ҳамвории симметрия дорад?

120. ПР, ки куб нест, чандто тири симметрия ва ҳамвории симметрия дорад?

121. Куб чандто тири симметрия дорад?

<u>**Масъалаҳо барои такрор**</u>

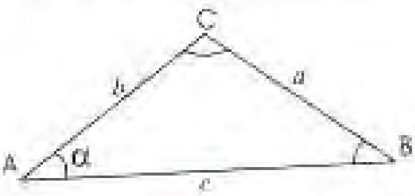
122. Диагонали куб 6 см аст. Масоҳати яке аз рӯяҳои онро ёбед.

123. Апофемаи пирамидаи чоркунҷаи мунтазам ба 5 см баробар аст. Тангенси кунҷи дурӯяи назди асос $\frac{4}{3}$ аст. Масоҳати сатҳи пурраи пирамидаро ёбед.

124*. Исбот кунед, ки агар дар секунҷаи ABC (расми 33) вобастагиҳои $a^3+b^3=c(a+b)$,

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$$

иҷро шавад, он гоҳ ин секунҷа баробартараф аст.



Расми 33

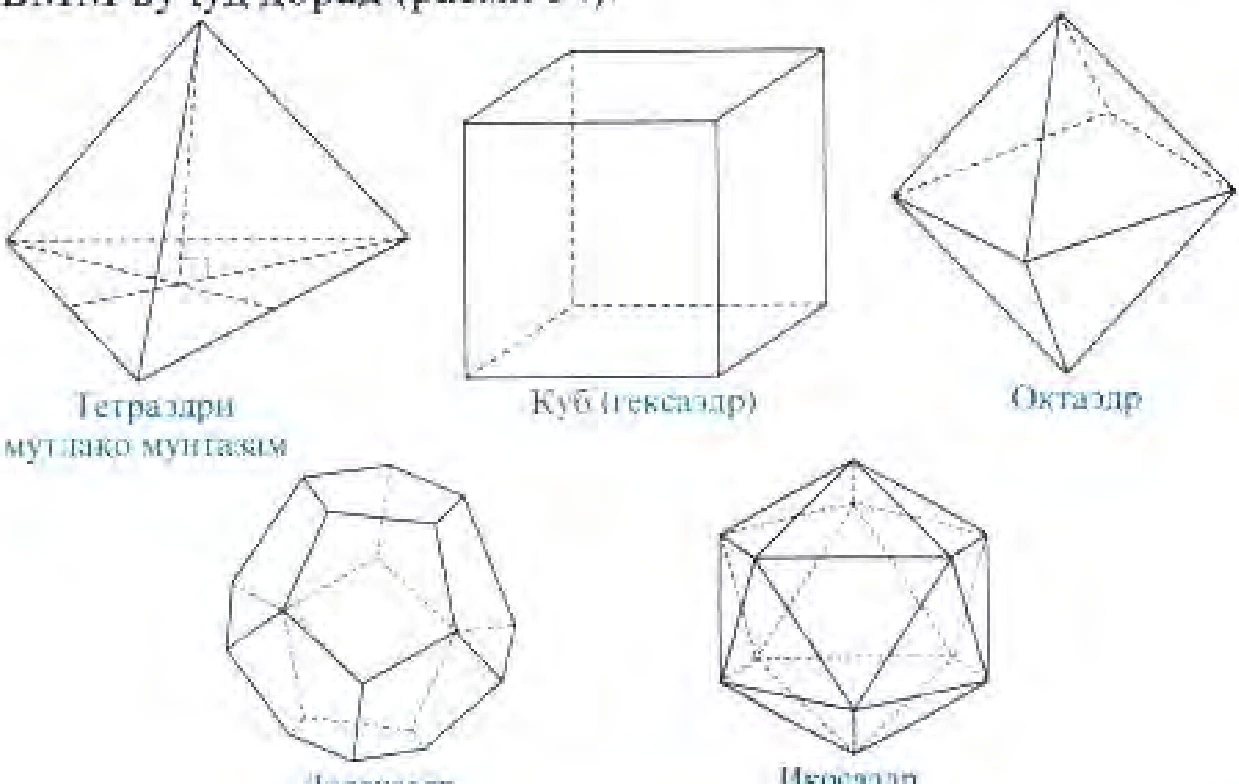
14. БИСЁРРӮЯҲОИ МУТЛАҚО МУНТАЗАМ (БММ)

Таъриф. Бисёррӯяи барҷаста *мутлақо мунтазам* номида мешавад, агар ҳамаи рӯяҳои он бисёркунҷаҳои дорои миқдори якхелаи тарафҳои ба ҳам баробар бошанд ва агар дар ҳар як қуллаи бисёррӯя миқдори баробари теғаҳо бо ҳам дучор оянд.

Мисоли бисёррӯяи мутлақо мунтазам (БММ) куб аст. Дар он ҳамаи 6 рӯя квадратҳои ба ҳам баробар буда, дар ҳар як қуллааш 3 теға бо ҳам дучор меоянд.

Аз таъриф бармеояд, ки дар БММ рӯяҳо ба ҳамдигар баробаранд. Аз ин ҷо кунҷҳои дурӯя, ки онҳоро рӯяҳои теғаи умумидошта ташкил медиҳанд, низ баробаранд.

Нишон дода шудааст, ки БММ-и n-кунҷа ҳангоми $n \geq 6$ будан вуҷуд надорад (исботи дурустии ин далелро намеорем, гарчанде на он қадар мураккаб аст). Барои ҳамин ҳар як қуллаи БММ танҳо қуллаи се, чор ё панҷ секунҷаи баробартараф, ё се квадрат, ё се панҷкунҷаи мунтазам шуда метавонаду халос. Мувофиқан ба ин, панҷ намуди БММ вуҷуд дорад (расми 34).



Тетраэдри мутлақо мунтазам · Куб (гексаэдр) · Октаэдр · Додекаэдр · Икосаэдр

РАСМИ 34

Онҳоро номбар карда тавсиф мекунем:

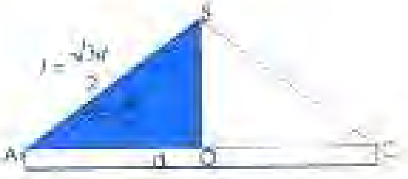
1) *Тетраэдри мутлақо мунтазам*[*] (чоррӯя) - рӯяҳояш аз 4 секунчаи баробартараф иборатанд. Ҳар як қуллаи он қуллаи се секунҷа аст. Яъне, дар ҳар як қуллаи он се теға ба ҳам дучор меоянд.
2) *Куб* (шашрӯя) - ҳамаи 6 рӯяҳояш квадратанд. Ҳар як қуллаи куб қуллаи 3 квадрат аст.
3) *Октаэдр* (ҳаштрӯя) - ҳамаи 8 рӯяҳояш секунҷаҳои баробаранд. Ҳар як қуллааш қуллаи 4 секунҷа мебошад.
4) *Додекаэдр* (дувоздаҳрӯя) – аз 12 панҷкунҷаи мунтазам тартиб дода шудааст. Ҳар як қуллаи он қуллаи 3 панҷкунҷаи мунтазам аст.
5) *Икосаэдр* (бистрӯя) – аз 20 секунҷаи баробартараф тартиб дода шудааст. Ҳар як қуллаи икосаэдр қуллаи 5 секунҷа аст.

Масъала. Кунҷҳои дурӯяи октаэдрро меёбем.

Ҳал. Октаэдр дар натиҷаи аз рӯи асосҳо ҳамҷоя кардани ду пирамидаи баробар ҳосил мешавад (расми 34). Барои ҳамин кунҷи матлуб φ аз кунҷи назди асоси пирамида α ду маротиба калон аст, яъне $\alpha = \frac{1}{2}\varphi$. Буриши пирамидаро, ки аз қуллаи S ва миёнаҷои ду теғаи асосҳои параллел мегузарад, дида мебароем. Агар A_1 ва C_1 миёнаҷои теғаҳои асосҳо бошанд, он гоҳ буриш секунҷаи баробарпаҳлуест, ки асосаш A_1C_1 ба теғаи октаэдр d баробар аст. Тарафҳои паҳлуӣ $SA_1=SC_1$ ба апофемаи пирамида, яъне ба $l = \frac{\sqrt{3}}{2}d$, баробаранд. Дар айни ҳол $\angle SA_1C_1 = \alpha = \frac{1}{2}\varphi$ (расми 35). Баландии SO - ро ба A_1C_1 гузаронида аз секунҷаи SOA_1 меёбем, ки

[*] мо тетраэдри мутлақо мунтазам ва пирамидаи секунҷаи мунтазамро (тетраэдри мунтазамро) аз ҳам фарқ мекунем. Бархилофи тетраэдри мутлақо мунтазам, ки ҳамаи теғаҳояш баробаранд, дар пирамидаи секунҷаи мунтазам теғаҳои паҳлуӣ метавонанд ба теғаҳои асос баробар набошанд.

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \cos SA_1O = \frac{A_1O}{SA_1} = \frac{d}{2} : \frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



РАСМИ 35

Аз ин ҷо

$$\varphi = 2\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

---

1. Чӣ гуна бисёррӯя бисёррӯяи мутлақо мунтазам номида мешавад? **2.** Бисёррӯяҳои мутлақо мунтазамро номбар кунед ва онҳоро тавсиф намоед. **3.** Тетраэдри мутлақо мунтазам аз пирамидаи секунҷаи мунтазам чӣ фарқият дорад?

---

124. Кунҷҳои дурӯяи тетраэдри мутлақо мунтазамро ёбед.

125. Нишон диҳед, ки ҳосили ҷамъи кунҷҳои ҳамвори назди ҳар як қуллаи додекаэдр ба 324° баробар аст.

126*. Исбот кунед, ки марказҳои рӯяҳои куб қуллаҳои октаэдранд ва баръакс, марказҳои рӯяҳои октаэдр қуллаҳои куб мебошанд.

127. Тетраэдри мутлақо мунтазам дорои кадом тирҳо ва ҳамвориҳои симметрия аст?

128. Дарозии тегаи октаэдр ба d баробар аст. Масоҳати сатҳи онро ёбед.

129. Масоҳати сатҳи тетраэдри мутлақо мунтазам ба Q баробар аст. Дарозии тегаи онро ёбед.

130*. Тегаи тетраэдри мутлақо мунтазам ба a баробар аст. Масоҳати буришро, ки квадрат аст, ҳисоб кунед.

Масъалаҳо барои такрор

131. Вектори (1; 2; 3) дода шудааст. Вектори ба он коллинеариро ёбед, ки ибтидоаш нуқтаи (1; 1; 1) буда, интиҳояш дар ҳамвории Oxy ҷойгир аст.

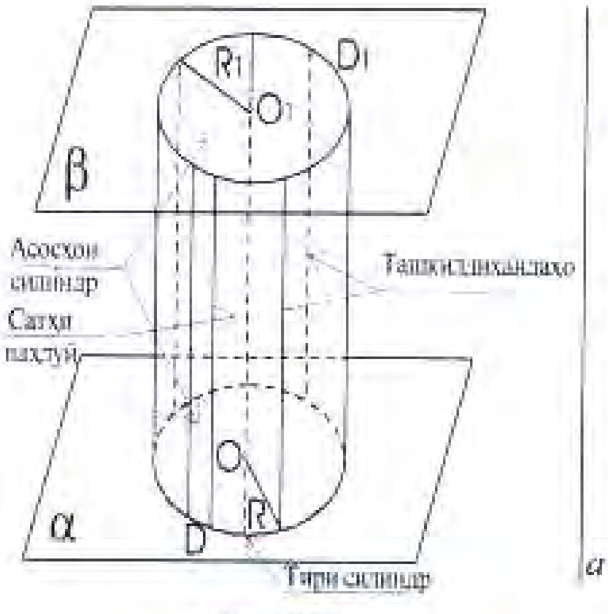
132. Порчаи BD ба порчаи AC перпендикуляр буда, онро дар нуқтаи O ба ду ҳисса тақсим мекунад. Маълум, ки $AB=5$ см, $AD=3,5$ см, $AO=3$ см аст. Периметрҳои чоркунҷаи $ABCD$ ва секунҷаи ABC –ро ёбед.

§3. ҶИСМҲОИ ЧАРХЗАНӢ

Ҷисмҳои муҳити атроф шаклҳои гуногун доранд. Дар байни онҳо на танҳо бисёррӯяҳо, балки ба ном ҷисмҳои чархзанӣ (гирд, лӯнда) ҳам вомехӯранд. Дар навбати аввал аз байни чунин ҷисмҳо-силиндр, конус ва кураро номбар кардан даркор аст. Мо ба омӯзиши онҳо ҳамчун ҷисмҳои геометрӣ шурӯъ мекунем.

15. СИЛИНДР

Бигузор дар ҳамвории α, ки ба ҳамвории β параллел аст, доираи даврааш D –и радиусаш R ва марказаш O, инчунин хати рости a, ки доираро намебурад, дода шудаанд (расми 36). Аз рӯи ҳар як нуқтаи давраи D хати рости ба a параллелро мегузаронем. Буриши ин хатҳо бо ҳамвории β давраеро ҷудо менамояд, ки онро бо D_1 ишорат мекунем. Порчаҳое, ки нуқтаҳои ин ду давраро бо ҳам пайваст менамоянд, сатҳеро ташкил медиҳанд, ки он *сатҳи силиндрӣ* ном дорад.



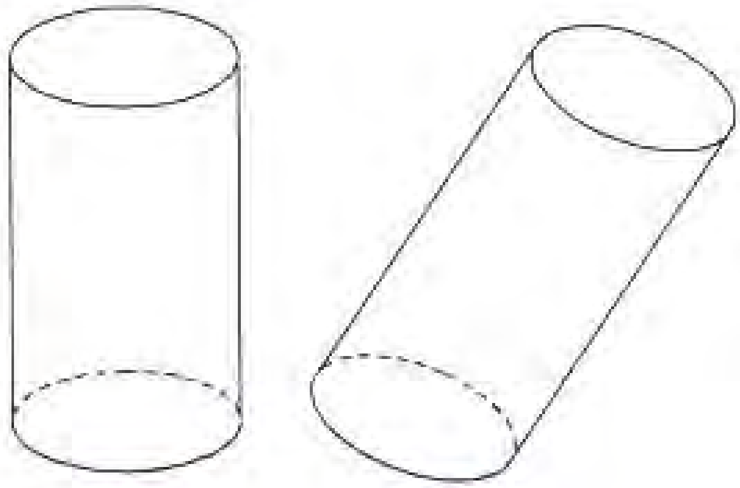
РАСМИ 36

Таъриф. Ҷисми геометрие, ки бо сатҳи силиндрӣ ва ду доираи давраашон D ва D_1 маҳдуд аст, *силиндр* (аниқаш, *силиндри гирд*) номида мешавад (расми 36). (Калимаи силиндр юнонӣ буда (kylindros) маънояш ғелидан ё чарх задан аст. Ашёи гуногуни бо дасти одам сохташуда, масалан, қатораи биноҳо, қубурҳо, истаконҳо, ғӯлачубҳо ва ғайра шакли силиндрро доранд. Ғалатӣ аст, агар бигӯем, ки кулоҳи мардонаи дар асри 18 васеъ паҳн гашта низ силиндр ном дошт).

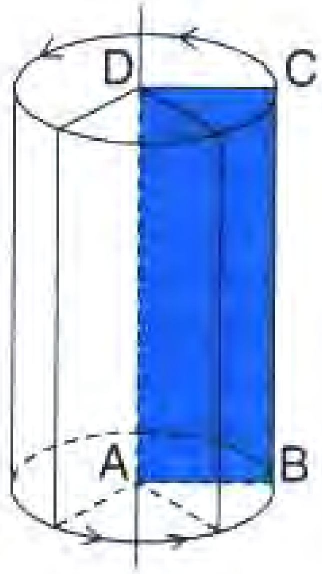
Порчаҳое, ки нуқтаҳои давраҳоро пайваст мекунанд, *ташкилдиҳандаҳои* силиндр номида мешаванд. Сатҳи силиндрӣ, ки аз ташкилдиҳандаҳо иборат аст, *сатҳи паҳлуии силиндр*, доираҳо бошанд *асосҳои силиндр* ном доранд. Ҳамин тариқ, сатҳи пурраи силиндр аз сатҳи паҳлуӣ ва доираҳо (асосҳо) иборат аст. Бо ибораи дигар, сатҳи силиндр аз қисмҳои ҳамвор ва қисми кач иборат аст. Сатҳи бисёррӯя бошад танҳо аз қисмҳои ҳамвор иборат буд.

Дарозии перпендикуляри ду ҳамвории параллел *баландии силиндр* аст. Ташкилдиҳандаҳо ҳамчун хатҳои рости параллел, ки дар байни ду ҳамвориҳои параллел ҷойгиранд, ба ҳамдигар баробаранд (теоремаи 10-и «Геометрия - 10», саҳ. 46). Инчунин аз ҳар як нуқтаи сатҳи паҳлуии силиндр танҳо як ташкилдиҳанда мегузарад. Радиуси давраҳои асос *радиуси силиндр* аст.

Силиндр рост номида мешавад, агар ташкилдиҳандаҳо ба ҳамвориҳои асос перпендикуляр бошанд, вагарна онро *моил* мегӯянд. Дар расми 37 силиндрҳои рост ва моил оварда шудаанд. (Дар оянда асосан ба омӯзиши силиндри рост машғул мешавем. Агар махсус таъкид карда нашавад, зери мафҳуми силиндр силиндри рости гирдро дар назар хоҳем дошт.) Аёнан силиндри ростро ҳамчун ҷисме, ки дар натиҷаи дар атрофи яке аз тарафҳои худ чарх задани росткунҷа ҳосил мешавад, тасаввур кардан мумкин аст. (Аз ҳамин сабаб силиндрро ҷисми чархзанӣ ҳам мегӯянд.) Дар расми 38 силиндре тасвир ёфтааст, ки дар натиҷаи дар атрофи тарафи AD чарх задани росткунҷаи $ABCD$ ҳосил шудааст.



РАСМИ 37



РАСМИ 38

Порчаи хати рост, ки маркази асосҳоро пайваст мекунад, *тири силиндр* ном дорад. Тир ба ташкилдиҳандаҳо параллел ва баробар аст.

1. Чӣ гуна чисми геометриро силиндри гирд меноманд? **2.** Ташкилдиҳандаҳо, сатҳи паҳлуӣ, асосҳо ва баландии силиндр чӣ тавр муайян карда мешаванд? **3.** Чӣ гуна силиндрро силиндри рост мегӯянд? Силиндри моил-чӣ? **4.** Чаро силиндрро чисми чархзанӣ ҳам мегӯянд? **5.** Тири силиндр чӣ тавр муайян карда мешавад?

Машқҳо барои такрор

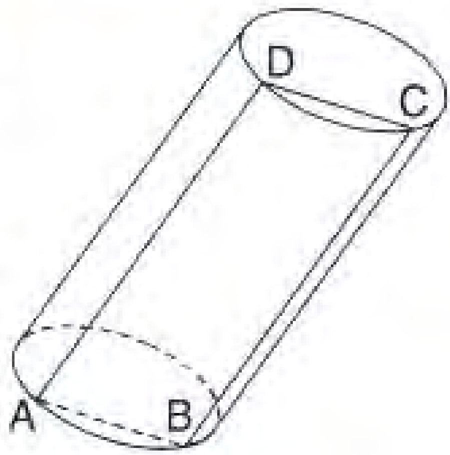
133. Масоҳати сатҳи паҳлуии параллелепипеди ростро, ки тарафҳои асосаш 8 ва 12-анд ва кунҷи 30^0-ро ташкил медиҳанд ёбед, агар теғаи паҳлуӣ 6 бошад.

134. Дар секунҷаи росткунҷа нуктаи расиши давраи дарункашида гипотенузаро ба порчаҳои 5 см ва 12 см ҷудо мекунад. Катетҳои секунҷаро ёбед.

16. БУРИШИ СИЛИНДР БО ҲАМВОРӢ

Теоремаи 12. Буриши ҳар гуна силиндри гирд бо ҳамворие, ки аз рӯи ташкилдиҳанда мегузарад, параллелограмм аст.

Исбот. Бигзор AD ташкилдиҳандаи силиндр аст, ки аз рӯи он ҳамвории силиндрро буранда мегузарад. Ин ҳамворӣ асосҳоро аз рӯи порчаҳои AB ва DC мебурад (расми 39). Мувофиқи теорема дар бораи порчаҳое, ки дар натиҷаи бо ҳамвории сеюм бурида шудани



РАСМИ 39

ду ҳамвории параллел ҳосил мешаванд (ниг. ба «Геометрия-10», теоремаи 10-и саҳ. 46), порчаҳои AB ва DC бо ҳам параллеланд. Ташкилдиҳандаи силиндр, ки аз нуқтаи C мегузарад, ба порчаи AD параллел аст ва хати рости AB –ро дар нуқтаи B мебурад. Инак, $DC \| AB$ ва $AD \| BC$. Яъне, $ABCD$ параллелограмм мебошад. Теорема исбот шуд.

Аз ин теорема хулосаҳои зерин бармеоянд:

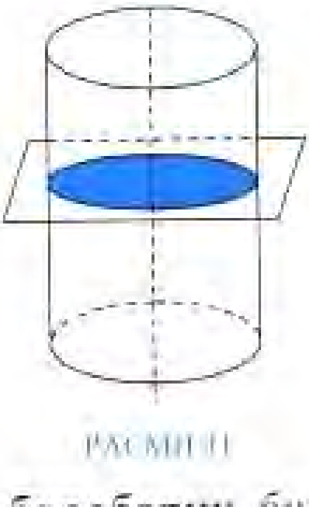
РАСМИ 40

1. Дар силиндри рост буриши ҳамвории аз рӯи ташкилдиҳанда мегузаштагӣ *росткунҷа аст.* Ин ҳамворӣ ба тири силиндр параллел мебошад.
2. *Буриши тирии силиндр* буришест, ки ҳангоми аз рӯи ташкилдиҳанда ва тир гузаштани ҳамвории буранда ҳосил мешавад. Ин буриш низ росткунҷа аст (расми 40). Ду тарафи он ташкилдиҳандаҳо буда, ду тарафи дигараш диаметрҳои давраҳои асосҳо мебошанд.
3. Дар силиндри рости гирд баландӣ ба ташкилдиҳандаҳо параллел ва баробар аст.

Масъалаи 1. Радиуси асоси силиндр 2 м, баландиаш 3 м мебошад. Диагонали буриши тирии онро меёбем.

Ҳал. Диаметри асос AB=4 м, баландӣ OO_1=CB=3 м аст (расми 40). Пас, мувофиқи теоремаи Пифагор

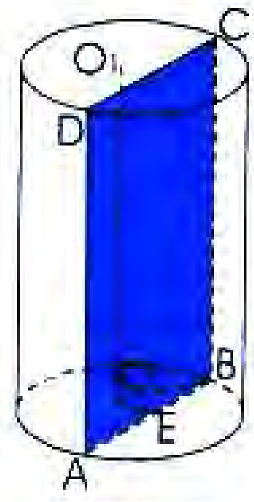
$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ м}.$$


РАСМИ 41

Акнун буриши силиндрро бо ҳамворие, ки ба асосҳо параллел аст, дида мебароем (расми 41). Параллелкӯчониро ба самти тири силиндр, ки ҳамвории параллелро бо ҳамвории асос ҳамҷоя мекунад, истифода карда нишон додан мумкин аст, ки ин гуна ҳамворӣ сатҳи паҳлуиро аз рӯи даврае мебурад, ки вай ба давраи асос баробар аст. Аз ин ҷо баробарии асосҳои силиндр, аз ҷумла, баробарии *буришҳои перпендикулярӣ* (буриши ҳамвориҳое, ки ба ташкилдиҳандаҳо перпендикуляранд) бармеоянд.

Масъалаи 2. Баландии силиндр 6 см, радиуси асосаш 5 см аст. Масоҳати буришеро, ки ба тири силиндр параллел буда, аз он дар масофаи 4 см воқеъ мебошад, меёбем.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $OO_1 = CB = 6$ см, $OB = 5$ см, $OE = 4$ см аст (расми 42). Секунҷаи OEB росткунҷа мебошад, бинобар ин



РАСМИ 42

$$EB = \sqrt{OB^2 - OE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3\,\text{см}.$$

$EB = AE = 3$ см, $AB = 2\,AE = 6$ см.

$S_{ABCD} = AB \cdot CB = 6 \cdot 6 = 36\,\text{см}^2$.

1. Буриши силиндр бо ҳамворие, ки аз рӯи ташкилдиҳанда мегузарад, чӣ гуна фигура аст? **2.** Чӣ гуна буришро буриши тирӣ меноманд? **3.** Бурише, ки ба асосҳо параллел аст, дорои чӣ гуна хосиятҳост? **4.** Кадом буришро буриши перпендикулярӣ меноманд ? **5.** Агар силиндр бо ҳамвории аз рӯи ташкилдиҳанда мегузаштагӣ, вале бо асосҳо параллелнабуда бурида шавад, буриш кадом шаклро мегирад?

135. Диагонали буриши тирии силиндр 48 см аст. Кунҷи байни ин диагонал ва ташкилдиҳанда 60^0 мебошад. Баландии силиндрро ёбед.

136. Буриши тирии силиндр квадрат буда, диагоналаш 20 см аст. Масоҳати асоси силиндрро ёбед.

137. Масоҳати буриши тирии силиндр 10 $м^2$, масоҳати асосаш 5 $м^2$ мебошад. Баландии силиндрро ёбед.

138. Баландии силиндр 12 см, радиуси асосаш 10 см аст. Силиндр бо ҳамвории ба тираш параллел чунон бурида шудааст, ки дар буриш квадрат ҳосил шудааст. Масофаи байни тири силиндр ва ҳамвории мебуридагиро ёбед.

139. Баландии силиндр 10 см аст. Масофаи буриши ҳамворие, ки аз тири силиндр дар масофаи 9 см воқеъ буда, ба тир параллел мебошад, 240 $см^2$ аст. Радиуси силиндрро ёбед.

140*. Масоҳати асоси силиндр ба масоҳати асоси буриши тирӣ ҳамчун π:4 нисбат дорад. Кунҷи байни диагоналҳои буришҳои тириро ёбед.

141. Радиуси асоси силиндр 5 см, ташкилдиҳандааш 9 см мебошад. Масоҳати буриши тирии силиндрро ёбед.

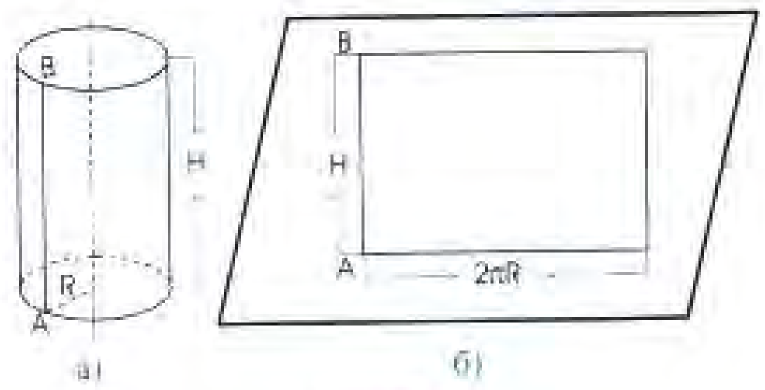
<u>**Масъалаҳо барои такрор**</u>

142. Асоси параллелепипеди рост ромби диагоналҳояш 12 см ва 16 см мебошад. Агар баландии параллелепипед 8 см бошад, масоҳати сатҳи пурраи онро муайян кунед.

143. Порчаи дарозиаш 10 см ҳамвориро мебурад. Охирҳои порча аз ҳамворӣ дар масофаҳои 5 см ва 3 см воқеъанд. Дарозии проексияи порчаро дар ҳамворӣ муайян кунед.

17. МАСОҲАТИ САТҲИ ПАҲЛУӢ ВА ПУРРАИ СИЛИНДР

Агар сатҳи паҳлуии силиндрро (расми 43, а) аз рӯи ягон ташкилдиҳанда бурему онро дар ҳамворӣ паҳн намоем, он гоҳ росткунҷае ҳосил мекунем, ки дарозиаш ба дарозии давраи асоси силиндр, бараш ба дарозии ташкилдиҳандаи он баробар аст (расми 43 б). Ин росткунҷаро *паҳнии* сатҳи паҳлуии силиндр меноманд. Агар H баландӣ ва R радиуси асоси силиндр бошад, он гоҳ масоҳати ин росткунҷа (паҳн), ки ҳамчун масоҳати сатҳи паҳлуии силиндр қабул карда мешавад, $2\pi RH$ мебошад. Инак,



РАСМИ 43

$$S_{паҳл} = 2\pi RH \,. \qquad (1)$$

Теоремаи зерин исбот шудааст.

Теоремаи 13. Масоҳати сатҳи паҳлуии силиндр ба ҳосили зарби дарозии давраи асос бар баландиаш баробар аст.

Масоҳати сатҳи пурраи силиндр ба ҳосили ҷамъи масоҳатҳои асосҳо, ки ҳар кадомашон πR^2 аст ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ баробар аст, яъне

$$S_{пур} = 2S_{асос} + S_{пахл} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R+H). \qquad (2)$$

Эзоҳ. Агар ду силиндри монанд дар натиҷаи чарх задани росткунҷаҳои монанд ҳосил шуда бошанд ва коэффитсиенти монандӣ k бошад, он гоҳ масоҳатҳои сатҳи паҳлуӣ ё сатҳи пурраи онҳо ҳамчун k^2 нисбат доранд.

Дар ҳақиқат, агар R_1, H_1 ва R_2, H_2 мувофиқан радиусҳои асос ва баландии онҳо ва $k = \frac{R_1}{R_2} = \frac{H_1}{H_2}$ бошад, пас

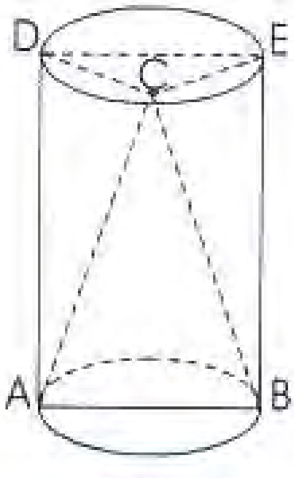
$$\frac{S^{(1)}_{пахл}}{S^{(2)}_{пахл}} = \frac{2\pi R_1 H_1}{2\pi R_2 H_2} = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{H_1}{H_2} = k\cdot k = k^2.$$

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки $\frac{S^{(1)}_{пур}}{S^{(2)}_{пур}} = k^2$.

Масъалаи 1. Радиуси силиндр 6 см буда, баландиаш 4 см аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурраи онро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи формулаи (1) $S_{пахл} = 2\pi RH = 2\pi\cdot 6\cdot 4 = 48\pi$ см^2

Масоҳати сатҳи пурра аз рӯи формулаи (2) ёфта мешавад: $S_{пур} = 2\pi R(R+H) = 2\pi\cdot 6\cdot(6+4) = 120\pi$ см^2



РАСМИ 44

Масъалаи 2. Нӯгҳои диаметри яке аз асосҳои силиндр ва нуқтаи давраи асоси дигари он қуллаҳои секунҷаи баробарпаҳлуянд. Маълум, ки асоси секунҷа $8\sqrt{2}$ см ва паҳлуяш 10 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи силиндрро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи додашудаҳои масъала нақшаи заруриро мекашем (расми 44). Дорем $AB = 8\sqrt{2}$ см, $AC=BC=10$ см. Баландии силиндрро меёбем.

Бигзор AD ва BE ташкилдиҳандаҳоянд. DE диаметр аст, чунки AB чунин аст. Яъне, $\angle DCE=90^0$ – ҳамчун кунҷи ба диаметр такякунанда. Аз тарафи дигар, AD ба DC ва BE ба EC перпендикуляранд ва $AD=BE$, $AC=BC$. Аз баробарии ΔADC ва ΔBCE бармеояд, ки $DC=CE$ мебошад. Ҳамин тарик, ΔDCE - росткунҷаи баробарпаҳлу аст. Барои ҳамин, $DE^2=2DC^2$ ё $AB^2=2DC^2$, ё ки $(8\sqrt{2})^2=2DC^2$, яъне, $DC=8$ см.

Акнун аз ΔADC $H=AD=\sqrt{AC^2-DC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=$ $=\sqrt{100-64}=6$ см ва мувофиқи формулаи (2)

$$S_{пур}=2\pi R(R+H)=2\pi\cdot 4\sqrt{2}(4\sqrt{2}+6)=16\pi(4+3\sqrt{2})\ см^2.$$

1. Паҳни сатҳи паҳлуии силиндр гуфта чӣ гуна росткунҷаро меноманд? Вайро чӣ тавр ҳосил кардан мумкин аст? **2.** Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурраи силиндр бо кадом формулаҳо ҳисоб карда мешаванд? **3.** Магар формулаҳои (1) ва (2) ҳангоми моил будани силиндр дурустанд?

144. Баландии силиндр аз радиуси асос 10 см зиёд буда, масоҳати сатҳи пуррааш 144π см^2 аст. Радиусро ёбед.

145. Радиуси асоси силиндр R буда, масоҳати сатҳи паҳлуии он ба ҳосили ҷамъи масоҳати асосҳо баробар аст. Баландии силиндрро ёбед.

146. Масоҳати сатҳи паҳлуии силиндр S аст. Масоҳати буриши тирии онро ёбед.

147. Масоҳати буриши тирии силиндр ба Q баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуиро ёбед.

148. Баландии силиндр чӣ қадар бояд бошад, то ки масоҳати сатҳи паҳлуии он аз масоҳати асос се маротиба калон бошад?

149. Росткунҷаи тарафҳояш 6 см ва 4 см дар атрофи тарафи хурд давр мезанад. Масоҳати сатҳи пурраи ҷисми ҳосилшударо муайян кунед.

150. Буриши тирии силиндр квадрати диагоналаш $2\sqrt{2}$ см мебошад. Масоҳати сатҳи паҳлуии силиндрро ёбед.

151. Барои ранг кардани бушкаи силиндрӣ, ки диаметри асосаш 1,5 м ва баландиаш 3 м аст, чӣ қадар ранг лозим аст, агар маълум бошад, ки ба як метри квадратӣ 200 г ранг сарф мешавад?

152. Барои тайёр кардани қубури дарозиаш 4 м ва диаметраш 40 см чӣ қадар тунука лозим аст, агар маълум бошад, ки барои мустаҳкам кардани қубур ба миқдори 2,5% -и масоҳати сатҳи паҳлуии он тунука лозим аст.

153. Кунҷи байни ташкилдиҳанда ва диагонали буриши тирии силиндр φ буда, масоҳати асосаш S аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии силиндрро ёбед.

154. Аз квадрат, ки диагоналаш d аст, сатҳи паҳлуии силиндр печонида шудааст. Масоҳати асоси силиндрро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

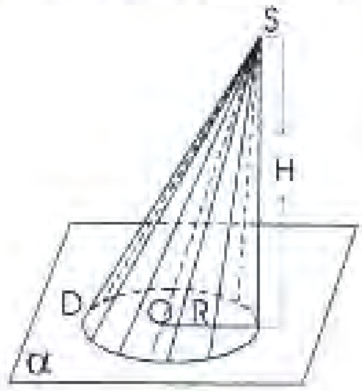
155. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи секунҷаи мунтазам чанд маротиба меафзояд, агар асоси онро 2 карат ва апофемаашро 3 карат зиёд кунем?

156. Баландии силиндр 6 см, радиуси асосаш 5 см аст. Нӯгҳои порчаи дарозиаш 10 см дар давраҳои асос ҷойгиранд. Масофаи ин порчаро то тир ёбед.

157. Кунҷҳои секунҷаи баробарпаҳлуро муайян кунед, агар кунҷи берунаи назди асос 118^0 бошад.

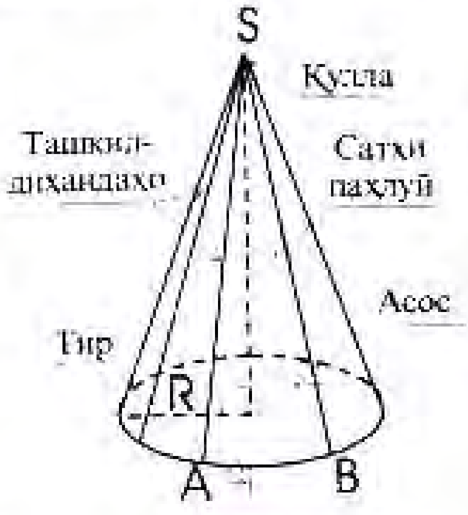
18. КОНУС

Бигузор дар ҳамвории α давраи D-и марказаш нуқтаи O ва нуқтаи S, ки дар α воқеъ нест, дода шудаанд. Ҳар як нуқтаи давраи D-ро бо нуқтаи S пайваст мекунем. Дар натиҷа сатҳеро ҳосил мекунем, ки он *сатҳи конусӣ* ном дорад (расми 45). Порчаҳое, ки нуқтаи S -ро бо давраи D пайваст мекунанд, *ташкилдиҳандаҳои* сатҳи конусӣ мебошанд.



РАСМИ 45

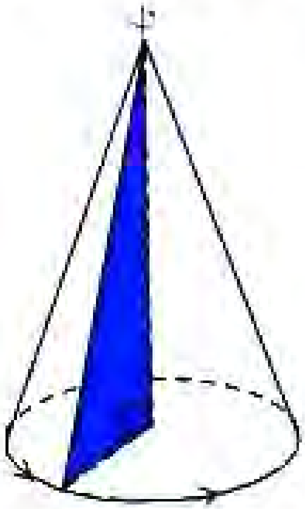
Таърифҳо. Ҷисми геометриро, ки бо сатҳи конусӣ ва доираи давраааш D маҳдуд аст, *конус* меноманд. Нуқтаи S *қуллаи* конус аст. Порчаи OS –ро, ки аз маркази давра ва қулла мегузарад, *тири конус* мегӯянд (расми 45). Масофаи байни қуллаи S ва ҳамвории α *баландии конус* аст. Порчаҳои SA, SB, ... , ки нуқтаи S –ро бо давраи D пайваст мекунанд, *ташкилдиҳандаҳои конус*, сатҳи конусиро *сатҳи паҳлуии конус*, доираи давраааш D –ро *асоси конус* ном мебаранд. Аз рӯи ҳар як нуқтаи сатҳи конусӣ танҳо як ташкилдиҳанда мегузарад. *Сатҳи пурраи конус* аз асос ва сатҳи паҳлуии он иборат аст (расми 46).



РАСМИ 46

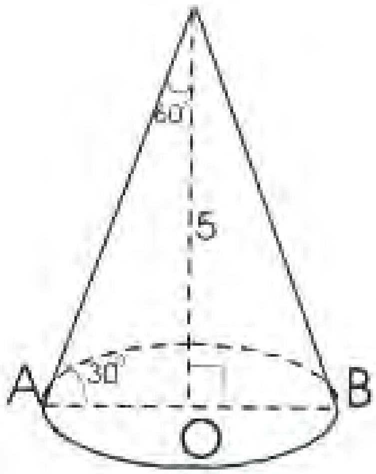
Агар тири конус ба асос перпендикуляр бошад, он гоҳ чунин конус *конуси рост* ном дорад, вагарна конусро *моил* мегӯянд. Дар расми 45 конуси моил ва дар расми 46 конуси рост оварда шудаанд. (Дар оянда агар махсус таъкид карда нашуда бошад, мо зери мафҳуми конус конуси ростро дар назар хоҳем дошт). Дар конуси рост ҳамаи ташкилдиҳандаҳо ба ҳамдигар баробаранд. Дар чунин конус баландӣ перпендикулярест, ки аз қулла ба асос фуроварда шудааст. Баландӣ аз маркази асос мегузарад.

Конуси ростро аёнан ҳамчун ҷисме, ки ҳангоми дар атрофи катет чарх задани секунҷаи росткунҷа ҳосил мешавад, тасаввур кардан мумкин аст (расми 47).


РАСМИ 47

Масъала. Тарафи хурди секунҷаи росткунҷаи дорои кунҷи 30^0 ба 5 см баробар аст. Дар натиҷаи дар атрофи ин тараф чарх задани секунҷа конуси рост ҳосил шудааст. Ташкилдиҳанда, радиус ва кунҷи назди қуллаи конусро муайян мекунем.

Ҳал. Бигузор секунҷаи росткунҷаи SOA дар атрофи тарафи SO чарх мезанад (расми 48). Секунҷаи SAB буриши тирии конусест, ки дар натиҷаи чунин чархзанӣ ҳосил мешавад. Аз секунҷаи SOA ҳосил мекунем:



РАСМИ 48

$OA = SO \cdot tg\,60^0 = SO \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ см.

Инчунин $SO = SA \sin 30^0 = \frac{SA}{2}$,

$SA = 2SO = 2 \cdot 5 = 10$ см. Ҳамин тариқ, радиуси конус $R = OA = 5\sqrt{3}$ см, ташкилдиҳандааш бошад $l = SA = 10$ см аст. Аз сабаби баробарии секунҷаҳои SOA ва SOB кунҷи назди қуллаи конус $\angle BSA = 2 \cdot \angle OSB = 2 \cdot 60^0 = 120^0$ мешавад.

1. Чӣ гуна сатҳро сатҳи конусӣ мегӯянд? **2.** Конус ҳамчун ҷисми геометрӣ чӣ тавр муайян карда мешавад? **3.** Қулла, ташкилдиҳанда, асос, сатҳи паҳлуии конус чиҳоянд? **4.** Баландии конус чӣ хел порча аст? **5.** Чаро дар конуси рост ҳамаи ташкилдиҳандаҳо баробаранд? **6.** Конуси ростро аёнан чӣ тавр тасаввур кардан мумкин аст?

158. Радиуси асоси конус 3 м, баландиаш 4 м аст. Ташкилдиҳандаашро ёбед.

159. Ташкилдиҳанда 10 м буда, бо радиуси асоси конус кунҷи 60^0 -ро ташкил медиҳад. Баландиро ёбед.

160. Масъалаи дар матн овардашударо ҳангоми дар атрофи катети калон чарх задани секунҷа ҳал намоед.

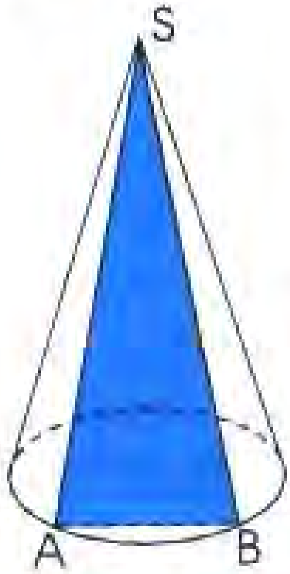
Масъалаҳо барои такрор

161. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос 10 см ва 17 см буда, яке аз диагоналҳо 21 см аст. Диагонали калони параллелепипед 29 см мебошад. Масоҳати сатҳи пурраи параллелепипедро ёбед.

162. Дар пирамидаи мунтазами секунҷа тарафи асос 9 см ва теғаи паҳлуӣ 6 см аст. Баландии пирамидаро ёбед.

19. БУРИШИ КОНУС БО ҲАМВОРӢ

Теоремаи 14. Буриши конуси рост бо ҳамворие, ки аз қулла гузашта асосро мебурад, секунҷаи баробарпаҳлуест, ки паҳлуҳояш ташкилдиҳандаҳои конус мебошанд.



РАСМИ 49

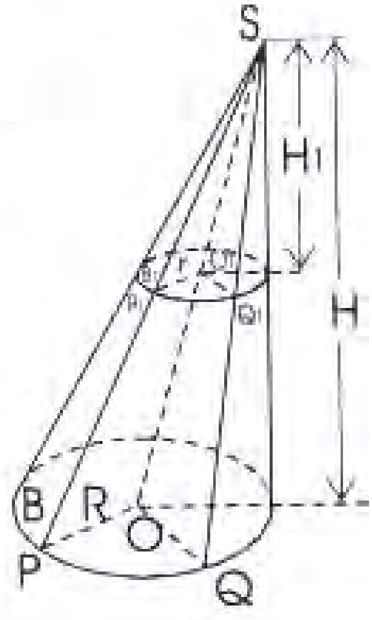
Исбот. Бигзор ҳамворӣ аз қуллаи S гузашта, асоси конусро аз рӯи хати AB мебурад (расми 49). Хатҳои рости SA ва SB ҳам дар ҳамвории буранда ва ҳам дар сатҳи конусӣ ҷойгиранд, яъне онҳо хатҳои буриши ҳамворӣ бо сатҳи конусанд. Яъне, секунҷаи ASB буриш аст. Баробарпаҳлу будани он аз баробарии ташкилдиҳандаҳои конус бармеояд. Бо ҳамин теорема исбот шуд.

Фаҳмост, ки агар конус моил бошад, он гоҳ буриши конус бо ҳамворӣ секунҷа буда, баробарпаҳлу буданаш шарт нест.

Фарз мекунем, ки ҳамвории буранда аз рӯи тири конус мегузарад. Дар ин ҳолат буриш секунҷаи баробарпаҳлуест, ки асосаш диаметри асоси конус аст. Чунин буришро *буриши тирии конус* меноманд.

Акнун ҳолатеро муоина менамоем, ки ҳамвории буранда бо асоси конус параллел аст. Дар ин ҳолат буриш *буриши параллелӣ* ном дорад.

Теоремаи 15. Буриши параллелии ҳар гуна конуси гирд доира мебошад. Маркази давраи ин доира дар тири конус воқеъ аст.



РАСМИ 50

Исбот. Бигзор асоси конус доираи B, ки маркази давраааш дар нуқтаи O воқеъ аст, мебошад. Буриши параллелӣ B_1 ба B параллел буда, O_1 нуқтаи буриши тири SO бо B_1 аст (расми 50). Агар ду нуқтаи дилхоҳи давраи асос P ва Q-ро гирифта, ташкилдиҳандаҳои PS ва QS –ро созем, онҳо буришро