мувофикан дар нуктахои P_1 ва Q_1 мебуранд. Порчахои SP ва SO хамвории SPO ва порчахои SQ ва SO хамвории SQO -ро муайян мекунанд. Чи тавре медонем, агар ду хамвории параллел бо хамвории сеюм бурида шаванд, он гох хатхои буриши онхо параллеланд (ниг. ба «Геометрия-10», теоремаи 10, сах. 46). Бинобар ин $OP \| O_1P_1$ ва $OQ \| O_1Q_1$. Пас, секунчахои SPO ва SP_1O_1, инчунин секунчахои SQO ва SQ_1O_1 ба хам монанданд. Яъне

$\dfrac{OP}{O_1P_1} = \dfrac{SO}{SO_1}$; $\dfrac{OQ}{O_1Q_1} = \dfrac{SO}{SO_1}$. Аз ин чо $\dfrac{OP}{O_1P_1} = \dfrac{OQ}{O_1Q_1}$. Вале $OP = OQ$, пас $O_1P_1 = O_1Q_1$. Ин нишон медихад, ки B_1 доира буда, O_1 маркази давраи он аст. Теорема исбот шуд.

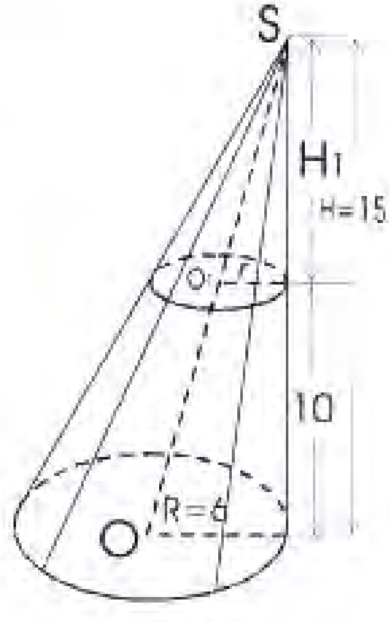
Хулосаи 1. *Бурише, ки ба асос параллел аст, баландӣ ва ташкилдихандахоро ба қисмхои мутаносиб чудо мекунад,* яъне

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{SQ_1}{SQ} = \frac{H_1}{H}.$$

Хулосаи 2. *Нисбати масохати буриши параллелӣ бар масохати асоси конус ба квадрати нисбати қисмхои ба хам мутаносиб баробар аст,* яъне

$$\frac{S_{B1}}{S_B} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 = \left(\frac{SP_1}{SP}\right)^2.$$

Масъала. Баландии конуси моил 15 см ва радиуси асосаш 6 см аст. Хамвории ба асос параллел конусро дар масофаи 10 см аз асос мебурад. Масохати буришро мeёбем.



РАСМИ 51

Хал. Бо r радиус ва бо S_{B1} масохати буришро ишорат мекунем. Агар H_1 масофаи буриш то куллаи S бошад (расми 51), он гох мувофики хулосаи 1-и теорема $\dfrac{H_1}{H} = \dfrac{r}{R}$. Киматхои додашудахоро гузошта ҳосил мекунем:

$$\frac{15-10}{15}=\frac{r}{6}. \text{ Яъне, } r=2\,\text{см}.$$

Пас,

$$S_{B1}=\pi r^2=2^2\cdot\pi=4\pi\ \text{см}^2.$$

Қайд мекунем, ки масъаларо бо истифодаи хулосаи дуюми теорема ҳам ҳал кардан мумкин буд. Агар бо S_B масоҳати асоси конусро ишорат кунем, он гоҳ мувофиқи хулосаи 2:

$$\frac{S_{B1}}{S_B}=\left(\frac{H_1}{H}\right)^2 \quad \text{ё} \quad \frac{S_{B1}}{\pi R^2}=\left(\frac{15-10}{15}\right)^2, \ \text{ё ки} \quad \frac{S_{B1}}{6^2\cdot\pi}=\frac{25}{225}=\frac{1}{9}.$$

Аз ин ҷо $S_{B1}=4\pi$ см².

1. Буриши конус бо ҳамворие, ки аз қуллааш мегузарад, чӣ гуна фигура аст? **2.** Чӣ хел буришро буриши тирии конус меноманд? **3.** Буриши параллелии конус чист? **4.** Хосиятҳои буриши параллелии конусро номбар кунед.

163. Радиуси асоси конус R буда, буриши тириаш секунҷаи росткунҷа мебошад. Масоҳати буришро ёбед.

164. Нисбати масоҳати асоси конус бар масоҳати буриши тирии он ба π баробар аст. Кунҷи байни ташкилдиҳанда ва ҳамвории асосро ёбед.

165. Баландии конус H аст. Буриши параллелӣ дар кадом масофа бояд ҷойгир бошад, то ки масоҳаташ ба нисфи масоҳати асос баробар шавад?

166. Радиуси асоси конус R аст. Масоҳати буриши параллелиро, ки аз миёнаҷои баландӣ мегузарад, ҳисоб кунед.

167. Баландии конус 20 см, радиуси асосаш 25 см аст. Масоҳати буришеро, ки аз қулла гузашта, дар масофаи 12 см аз маркази давраи асос ҷойгир аст, ҳисоб кунед.

168. Ташкилдиҳандаи конус *l*, кунҷи назди қуллаи буриши тирӣ φ аст. Масоҳати асосро ёбед.

169. Масоҳати асоси конус Q буда, ташкилдиҳандааш *l* аст. Масоҳати буриши тирии онро ёбед.

170*. Ба ташкилдиҳандаи конус l аз миёначои баландӣ хати рости параллел гузаронида шудааст. Дарозии порчаи хатро, ки дар дохили конус ҷойгир аст, ҳисоб кунед.

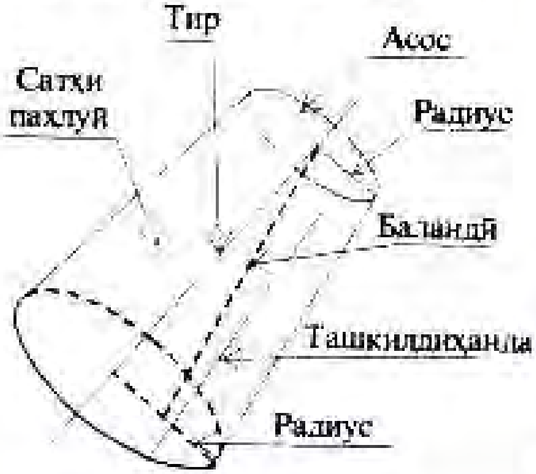
Масъалаҳо барои такрор

171. Кунҷи ҳамвори назди қуллаи пирамидаи шашкунҷаи мунтазам 30^0 буда, теғаи паҳлуӣ 2 м аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаро ёбед.

172. Маълум, ки $A=(0;\ 1;\ -1)$, $B=(1;\ -1;\ 2)$, $C=(3;\ 1;\ 0)$. Косинуси кунҷи C – и секунҷаи ABC – ро ёбед.

20. КОНУСИ САРБУРИДА

Таъриф. Қисми конус, ки дар байни асос ва ҳамвории ба асос параллел ҷойгир аст, *конуси сарбурида* номида мешавад (расми 52).



Расми 52

Асоси конус ва доираи буриш (ба асос параллел) *асосҳои конуси сарбуридаанд*. Хати росте, ки аз маркази асосҳо мегузарад *тир* ва порчае, ки ба асосҳо перпендикуляр аст, *баландӣ* мебошад. *Радиусҳои конуси сарбурида* радиуси асосҳоянд. Қисми сатҳи конусӣ, ки конуси сарбуридаро маҳдуд менамояд, *сатҳи паҳлуӣ* аст. Мувофиқан *ташкилдиҳандаҳои* конуси сарбурида порчаҳоеанд, ки сатҳи конусии дар байни ду асос бударо ташкил медиҳанд.

Агар конуси аввала рост бошад, он гоҳ ҳамаи ташкилдиҳандаҳо (онҳоро *апофема* ҳам мегӯянд) ба ҳамдигар баробар буда, баландӣ аз маркази асосҳо мегузарад. Дар ин ҳолат конуси сарбуридаро *конуси рости сарбурида* мегӯянд. (Дар оянда агар махсус таъкид нашуда бошад, зери мафҳуми конуси сарбурида конуси рости сарбуридаро дар назар хоҳем дошт.)

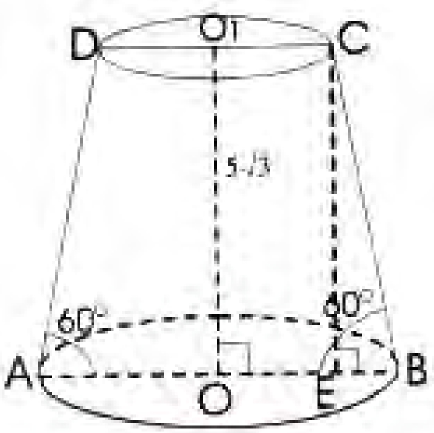
Конуси сарбуридаро ҳамчун ҷисме тасаввур кардан мумкин аст, ки он дар натиҷаи чарх задани трапетсияи росткунҷа дар атрофи тарафи паҳлуияш, ки ба асосҳо перпендикуляр мебошад, пайдо мешавад. Дар расми 53 конуси сарбуридаи дар натиҷаи дар гирди тарафи BC чарх задани трапетсияи росткунҷаи $ABCD$ ҳосилшуда тасвир карда шудааст. Сатҳи паҳлуии ин конус дар натиҷаи чархзании тарафи AD, асосҳои конуси сарбурида бошанд, дар натиҷаи чархзании тарафҳои CD ва AB – и трапетсия ҳосил мешаванд.

РАСМИ 53

Буриши конуси сарбурида бо ҳамворӣ айнан ба вазъи конус шабоҳат дорад (ниг. ба банди 19). Дар ин ҳолат буриши ҳамворие, ки ҳар ду асосро мебурад, аз он ҷумла буриши тирӣ ҳам, трапетсияи баробарпаҳлу мебошад.

Масъала. Ташкилдиҳандаи конуси сарбуридаи рост бо ҳамвории поёнии асос кунҷи 60^0-ро ташкил медиҳад. Маълум, ки баландии конус $5\sqrt{3}$ см буда, диаметри асоси болоиаш 12 см аст. Диаметри асоси поёниро меёбем.

Ҳал. Бигзор $ABCD$ буриши тирии конус аст (расми 54). Мувофиқи додашудаҳои масъала $\angle ABC = 60^0$, $DC = 12$ см ва $OO_1 = CE = 5\sqrt{3}$ см, яъне $O_1C = \dfrac{CD}{2} = 6$ см. Аз секунҷаи росткунҷаи CEB меёбем: $CE = BE \cdot tg60^0 = \sqrt{3} \cdot BE$. Аз ин ҷо, $BE = \dfrac{CE}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5$ см. Инак, радиуси асоси поёнӣ $OB = OE + EB = 6 + 5 = 11$ см.



РАСМИ 54

Ҷавоб: $d = AB = 2 \cdot OB = 22$ см.

1. Конуси сарбурида аз конус чӣ тавр ҳосил карда мешавад? **2.** Асосҳо, тир, сатҳи паҳлуӣ, радиуси асосҳо, баландӣ дар чунин конус чӣ тавр муайян карда мешаванд? **3.** Конуси сарбуридаро ҳамчун ҷисми чархзанӣ чӣ тавр ҳосил кардан мумкин аст? **4.** Буриши тирии конуси сарбурида чӣ гуна фигура аст?

173. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида 3 м ва 6 м, баландӣ 4 м аст. Ташкилдиҳандаашро ёбед.

174. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида 11 см 16 см ва ташкилдиҳандааш 13 см аст. Масофаи байни маркази асоси хурдро то давраи асоси калон ёбед.

175. Баландии конуси сарбурида ба H баробар аст. Дарозии ташкилдиҳандаро ёбед, агар маълум бошад, ки вай бо асос кунҷи 30^0 – ро ташкил медиҳад.

176. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида 3 см ва 7 см, ташкилдиҳандааш 5 см мебошад. Масоҳати буриши тириро ёбед.

177. Аз миёнаҷои баландии конуси сарбурида, ки масоҳати асосҳояш 4 $м^2$ ва 16$м^2$ аст, ҳамвории ба асосҳо параллел гузаронида шудааст. Масоҳати буришро ёбед.

178. Масоҳати асосҳои конуси сарбурида ба 4 $дм^2$ ва 16 $дм^2$ баробар аст. Аз миёнаҷои баландӣ ҳамвории ба асосҳо параллел гузаронида шудааст. Масоҳати буришро ёбед.

179. Дар конуси сарбурида масоҳати асосҳо ба 1 ва 49 баробар аст. Масоҳати буриши параллелӣ нимсуммаи онҳо аст. Ин буриш баландии конусро ба кадом қисмҳо ҷудо мекунад ?

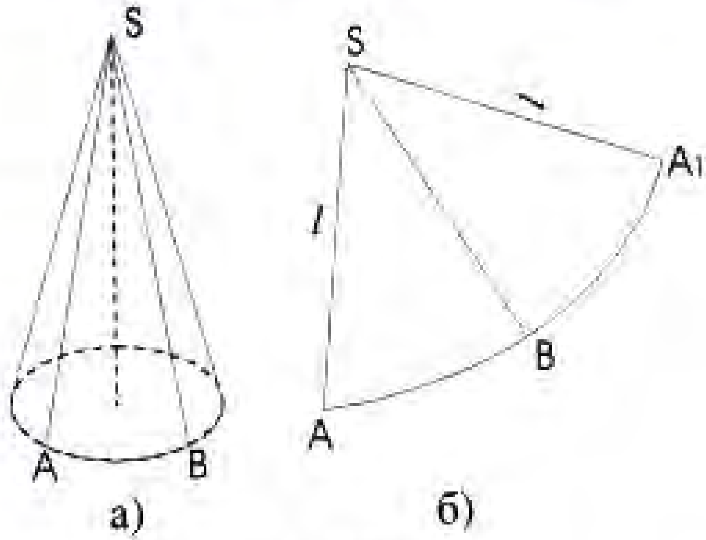
<u>Масъалаҳо барои такрор</u>

180. Масоҳати буриши тирии силиндр $\frac{6}{\pi}$ м ^{2} аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии силиндрро ёбед.

181. Дар сектори доиравӣ, ки камонаш 60^0 аст, доира кашида шудааст. Нисбати масоҳати ин секторро бар масоҳати доира ёбед.

21. МАСОҲАТИ САТҲИ ПАҲЛУИИ КОНУС

Агар сатҳи паҳлуии конусро, мисли сатҳи паҳлуии силиндр (ниг. ба банди 17), аз рӯи яке аз ташкилдиҳандаҳояш бурем ва онро дар ҳамворӣ паҳн созем, он гоҳ сектори доиравиро ҳосил мекунем (расми 55). Радиуси ин сектор (расми 55, б)) ба ташкилдиҳандаи конус ва дарозии камони сектор ба дарозии давраи асоси конус баробар аст.



РАСМИ 55

Масоҳати сатҳи паҳлуии конусро бо воситаи ташкилдиҳандааш l ва радиуси асосаш R ифода мекунем. Ин масоҳат ба масоҳати доиравии ABA_1S баробар аст. Бинобар ин $S_{пахл} = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot \alpha$, ки дар ин ҷо α ченаки градусии камони ABA_1 аст. Дарозии ин камон, ки дарозии давра аст, ба $2\pi R$ баробар мебошад.

Яъне, $2\pi R = \frac{\pi l}{180^0} \cdot \alpha$. Аз ин ҷо $\alpha = \frac{360^0 R}{l}$ ва

$$S_{пахл} = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot \frac{360^0 R}{l} = \pi R l.$$

Дурустии теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 16. Масоҳати сатҳи паҳлуии конус ба ҳосили зарби нисфи дарозии давраи асос бар ташкилдиҳанда баробар аст.

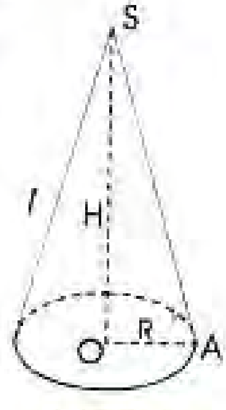
Масоҳати сатҳи пурраи конус бошад, бо формулаи

$$S_{пур} = S_{пахл} + S_{асос} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$$

ҳисоб карда мешавад.

Масъалаи 1. Масоҳати сатҳи паҳлуии конусеро, ки радиуси асосаш 6 см, баландиаш 8 см аст, меёбем.

Ҳал. Мувофиқи додашудаҳо $R = 6$ см, $H = 8$ см (расми 56). Ташкилдиҳанда l –ро меёбем. Мувофиқи теоремаи Пифагор $SA^2 = SO^2 + OA^2$ ё $l^2 = H^2 + R^2 = 8^2 + 6^2 = 100$. Аз ин ҷо $l = 10$ см ва $S_{пахл} = \pi Rl = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$ см².



РАСМИ 56

Масъалаи 2. Суммаи масоҳатҳои сатҳҳои паҳлуии ду конуси монанд 68 см² аст. Нисбати ташкилдиҳандаҳояшон 3:5 аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии ҳар як конусро меёбем.

Ҳал. Агар $S_{пахл}^{(1)}$, $S_{пахл}^{(2)}$ масоҳатҳои сатҳҳои паҳлуии конусҳо, l_1, l_2 ва R_1, R_2 мувофиқан ташкилдиҳандаҳо ва радиусҳои асосҳои онҳо бошанд, он гоҳ $\frac{S_{пахл}^{(1)}}{S_{пахл}^{(2)}} = \frac{\pi R_1 l_1}{\pi R_2 l_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{l_1}{l_2}$. Вале дар конусҳои монанд $\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{H_1}{H_2}$ ва H_1, H_2 баландиҳои конусҳо мебошанд.

$$\text{Пас, } \frac{S_{пахл}^{(1)}}{S_{пахл}^{(2)}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{H_1^2}{H_2^2}.$$

Ин натиҷаро истифода карда, ҳосил мекунем:

$\frac{S_{пахл}^{(1)}}{S_{пахл}^{(2)}} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$; $S_{пахл}^{(1)} = \frac{9}{25} S_{пахл}^{(2)}$. Вале

$S_{пахл}^{(1)} + S_{пахл}^{(2)} = 68$, пас $\left(\frac{9}{25} + 1\right) S_{пахл}^{(2)} = 68$.

Аз ин ҷо $S_{пахл}^{(2)} = 50$ см² ва $S_{пахл}^{(1)} = 18$ см².

Ҷавоб: 18 см² ва 50 см².

1. Агар конусро бурида пахн кунем, кадом фигураро ҳосил мекунем? **2.** Масоҳати сатҳи паҳлуии конус бо кадом формула ҳисоб карда мешавад? Масоҳати сатҳи пурраи конус - чӣ? **3.** Монанд будани ду конусро шарҳ диҳед.

182. Баландии конус 6 м, радиуси асосаш 8 м аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии онро ёбед.

183. Баландии конус 4 м, ташкилдиҳандааш 5 м аст. Масоҳати сатҳи пурраи конусро ёбед.

184. Палаткаи шакли конусдошта, ки баландиаш 3,5 м ва диаметри асосаш 4 м аст, бо матоъ рӯпӯш карда шудааст. Барои ин чанд метри квадратӣ матоъ сарф шудааст?

185. Боми манораи силоснигоҳдорӣ шакли конусро дорад. Баландии бом 2 м ва диаметри манора 6 м аст. Барои рӯйпуш кардани бом чанд дона тунукаи оҳанини андозааш 0,7x1,4 ($м^2$) зарур аст, агар маълум бошад, ки барои мустаҳкам кардани тунукаҳо 10%-и оҳани зарурӣ сарф шудааст.

186. Масоҳати сатҳи нӯги манораи конусӣ ба 250 $м^2$, диаметри асосаш 9 м аст. Баландии ин нӯгро ҳисоб кунед.

187. Хордае, ки аз охири диаметр гузаронида шудааст, дар гирди диаметр чарх мезанад. Дарозии диаметр 25 см ва дарозии хорда 20 см аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии ҷисми ҳосилмешударо ёбед.

188. Секунҷаи баробарпаҳлу дар атрофи баландиаш чарх мезанад. Тарафҳои ин секунҷаро ёбед, агар периметри он ба 30 см ва масоҳати сатҳи пурраи ҷисми чархзанӣ ба 60π $см^2$ баробар бошад.

Масъалаҳо барои такрор

189. Асоси пирамида росткунҷаи тарафҳояш 6 см ва 15 см аст. Баландӣ, ки 4 см аст, аз нуқтаи буриши диагоналҳои асос мегузарад. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаро ёбед.

190. Диагоналҳои ромб ба 10 см ва 24 см баробаранд. Тарафи ромбро ёбед.

22. МАСОҲАТИ САТҲИ ПАҲЛУИИ КОНУСИ САРБУРИДА

Бигзор R ва r радиусҳои асос ва l ташкилдиҳандаи конуси сарбурида бошад (расми 57). Масоҳати сатҳи паҳлуии ин конусро бо воситаи ин се бузургӣ R, r ва l ифода менамоем. Барои ин конуси сарбуридаро то конуси муқаррарӣ пурра менамоем. Агар S қуллаи ин конус, SA ташкилдиҳандааш бошад, он гоҳ мувофиқи теоремаи 16 масоҳати сатҳи паҳлуии ин конус $S_{пахл}^{(1)} = \pi R \cdot SA$ аст. Мувофиқи ҳамон теорема масоҳати сатҳи паҳлуии конусе, ки радиуси асосаш r аст, ба $S_{пахл}^{(2)} = \pi r \cdot SA_1$ баробар аст. Зоҳиран возеҳ аст, ки $S_{пахл} = S_{пахл}^{(1)} - S_{пахл}^{(2)} = \pi R \cdot SA - \pi r \cdot SA_1 = \pi R(SA_1 + A_1A) - \pi r \cdot SA_1$.

РАСМИ 57

Бо назардошти он ки $AA_1 = l$ аст, ҳосил мекунем:

$$S_{пахл} = \pi Rl + \pi(R - r)SA_1 .$$

Ташкилдиҳандаи SA_1 – ро ба воситаи l, R ва r ифода мекунем. Секунҷаҳои росткунҷаи SO_1A_1 ва SOA ба ҳам монанданд, чунки кунҷи тези умумӣ доранд, бинобар ин $\frac{SA_1}{SA} = \frac{r}{R}$ ё $\frac{SA_1}{SA_1 + l} = \frac{r}{R}$. Аз ин ҷо $SA_1 \cdot R = SA_1 \cdot r + lr$ ва

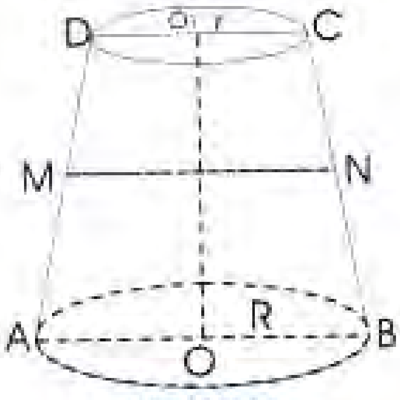
$SA_1(R - r) = lr$, $\quad SA_1 = \frac{lr}{R - r}$. Ҳамин тариқ,

$$S_{пахл} = \pi Rl + \pi(R - r) \cdot \frac{lr}{R - r} = \pi(R + r)l .$$

Теоремаи зерин исбот шудааст.

Теоремаи 17. Масоҳати сатҳи паҳлуии конуси сарбурида ба нисфи ҳосили зарби нимсуммаи дарозии давраҳои асос бар ташкилдиҳанда баробар аст.

Масъалаи 1. Дарозии порчае, ки нимаҷои тарафҳои буриши тирии конуси сарбуридаро пайваст мекунад, 12 см буда, ташкилдиҳандааш 5 см аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии ин конусро меёбем.



РАСМИ 58

Ҳал. Чӣ тавре медонем (банди 20) буриши тирии конуси сарбурида трапетсияи баробарпаҳлуи $ABCD$ мебошад (расми 58). Агар M ва N нимаҷои AD ва BC бошанд, он гоҳ

$$12 = MN = \frac{AB + DC}{2} = \frac{2R + 2r}{2} = R + r .$$

Пас, $S_{паҳл} = \pi(R + r)l = \pi \cdot 12 \cdot 5 = 60\pi$ см^2.

1. Масоҳати сатҳи паҳлуии конуси сарбурида ба чӣ баробар аст? **2.** Вай бо кадом формула ифода мешавад? **3.** Формулаеро нависед, ки масоҳати сатҳи пурраи конуси сарбурида бо он ҳисоб карда шавад.

191. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида R ва r буда, ташкилдиҳанааш бо асос кунҷи 60^0 - ро ташкил медиҳад. Масоҳати сатҳи паҳлуии конусро ёбед.

192. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида ва ташкилдиҳандаи он ҳамчун 1:4:5 нисбат дошта, баландиаш 8 см аст. Масоҳати сатҳи паҳлуиашро ёбед.

193. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида 6 м ва 14 м буда, масоҳати сатҳи пурраaш ба 572π м^2 баробар аст. Баландии ин конусро ёбед.

194. Баландии конуси сарбурида 63 см, ташкилдиҳандааш 65 см ва масоҳати сатҳи паҳлуиаш 26π м^2 аст. Радиусҳои асосҳоро ёбед.

195. Сатил шакли конуси сарбуридаро дорад, ки асосҳояш 15 см ва 10 см-анд. Ташкилдиҳанда 30 см мебошад. Чӣ қадар ранг зарур аст, то 100-то ҳамин гуна сатил аз даруну берун ранг карда шавад, агар маълум бошад, ки ба 1 $м^2$ 150 г ранг сарф мешавад?

196. Барои сохтани карнай, ки диаметри як канораш 0,43 м, диаметри канори дигараш 0,036 м ва ташкилдиҳандааш 1,42 м аст, чанд метри квадратӣ вараҷи латунӣ лозим аст?

197. Масоҳати сатҳи паҳлуии конуси сарбурида S, радиусҳои асосҳо R ва r-анд. Масоҳати сатҳи паҳлуии конуси пурраро ёбед.

198. Масоҳати асосҳои конуси сарбурида Q ва q буда, ташкилдиҳандааш бо асос кунҷи 60^0-ро ташкил медиҳад. Масоҳати сатҳи паҳлуии ин конусро ёбед.

199. Дар конуси сарбурида аз рӯи баландӣ H, ташкилдиҳанда l ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ S масоҳати буриши тириро ёбед.

200. Масоҳати буриши тирии конуси сарбуридаро ёбед, агар масоҳатҳои асос Q,q ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ S дода шуда бошанд.

<u>Масъалаҳо барои такрор</u>

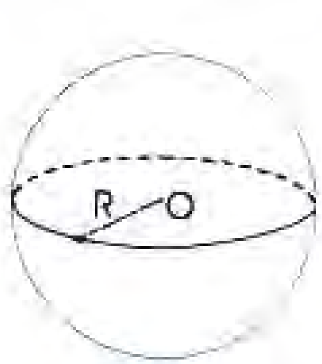
201. Баландии конус $\frac{2}{3}$ ҳиссаи диаметри асоси онро ташкил мекунад. Нисбати масоҳати асоси онро бар масоҳати сатҳи паҳлуияш ёбед.

202. Диагонали квадрат ба 12 см баробар аст. Масоҳати квадратро ёбед.

23. СФЕРА ВА КУРА

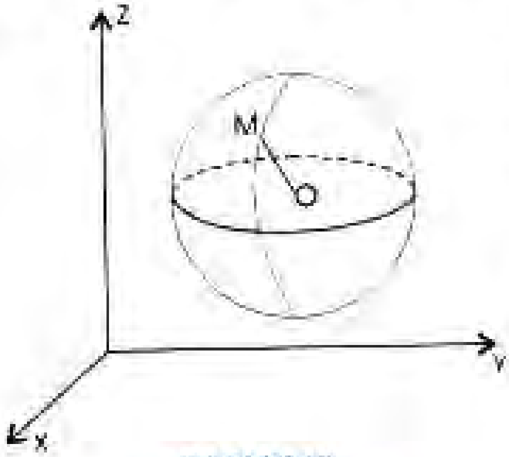
Шабоҳати давра дар фазо сфера аст.

Таърифи 1. *Сфера* гуфта сатҳеро меноманд, ки аз нуқтаҳои аз нуқтаи додашуда дар масофаи доимӣ ҷойгирбуда сохта шудааст (расми 59).



РАСМИ 59

Нуқтаи додашудаи O *маркази сфера*, масофаи доимии R *радиуси сфера* ном доранд. Порчае, ки ду нуқтаи дилхоҳи сфераро пайваст мекунад, *хорда* номида мешавад. Хордае, ки аз марказ мегузарад, *диаметри сфера* мебошад. Зоҳиран фаҳмост, ки мисли давра, дар сфера ҳам диаметр дучандаи радиус аст. Нӯгҳои диаметрро *нуқтаҳои ба ҳам диаметрии муқобили* сфера мегӯянд. Сфераро ҳамчун фигурае, ки дар натиҷаи дар гирди диаметр чарх задани нимдавра ҳосил мешавад, тасаввур кардан мумкин аст.



РАСМИ 60

Муодилаи сфераро дар системаи росткунҷаи координатаи $Oxyz$ менависем. Фарз мекунем, ки маркази сфера дар нуқтаи $O(a;\ b;\ c)$ ҷойгир аст (расми 60). Мувофиқи таърифи 1 барои ҳар гуна нуқтаи сфера $M(x;\ y;\ z)$ масофаи байни он ва маркази сфера $O(a;\ b;\ c)$ адади доимии ба радиус баробар мебошад: $MO=R$ ё $MO^2=R^2$. Агар формулаи масофаи байни ду нуқтаро истифода барем (ниг. ба «Геометрия – 10», саҳ. 100), он гоҳ баробарии болоро ин тавр навишта метавонем:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Ин аст муодилаи сфера дар фазо. Дар ин муодила $a=b=c=0$ гузошта, муодилаи сфераро, ки марказаш дар ибтидои координатаҳо ҷойгир буда, радиусаш R аст, ҳосил мекунем:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Масалан, муодилаи сфера, ки марказаш дар нуқтаи (2; 0; -1) ва радиусаш $\sqrt{5}$ аст, чунин мебошад:

$$(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=5.$$

Масъала. Исбот мекунем, ки муодилаи $x^2+6x+y^2-2y+z^2=0$ муодилаи сфера аст. Марказ ва радиуси ин сфераро меёбем.

Ҳал. $0=x^2+6x+y^2-2y+z^2=x^2+2\cdot 3x+9-9+y^2-2y+1-1+z^2=$
$=(x^2+2\cdot 3x+9)+(y^2-2y+1)+z^2-10=(x+3)^2+(y-1)^2+z^2-10.$

Ё $(x+3)^2+(y-1)^2+z^2=10=(\sqrt{10})^2$.

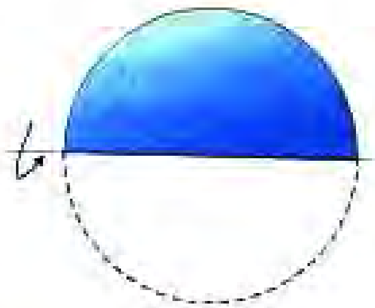
Инак, муодилаи мазкур муодилаи сфераест, ки марказаш дар нуқтаи O(-3; 1; 0) ҷойгир буда, радиусаш $R=\sqrt{10}$ мебошад.

Таърифи 2. Ҷисми геометрӣ, ки сатҳи он сфера аст, *кура* номида мешавад.

Марказ, радиус, хорда, диаметр, нуқтаҳои ба ҳам диаметрии муқобили сфераро, ки сатҳи кура аст, марказ, радиус, хорда, диаметр, нуқтаҳои ба ҳам диаметрии муқобили кура ҳам мегӯянд.

Зоҳиран фаҳмост, ки кура ҳамаи нуқтаҳоеро, ки аз марказ дар масофаи аз радиус зиёднабуда ҷойгиранд, дар бар мегирад (аз он ҷумла марказро низ).

Кура мисли силиндр ва конус ҷисми чархзанӣ аст. Вай ҳангоми дар атрофи диаметри худ чарх задани нимдоира ҳосил мешавад (расми 61).



Расми 61

1. Чӣ гуна сатҳро сфера меноманд? **2.** Марказ, радиус, хорда, диаметр, нуқтаҳои ба ҳам диаметрии муқобили сфера чӣ тавр муайян карда мешаванд? **3.** Муодилаи сфераро, ки марказ ва радиусаш дода шудааст, нависед. **4.** Чӣ гуна ҷисмро кура мегӯянд? **5.** Чаро кура ҷисми чархзанӣ аст?

203. Муодилаи сфераеро нависед, ки марказаш дар нуқтаи O ҷойгир буда, радиусаш R аст, агар:

а) *O(-1;2;1), R=2;* б) *O(2; 0; -3),* $R=\sqrt{3}$ бошад.

204. Муодилаи сфераро, ки аз рӯи нуқтаи A гузашта, марказаш O аст, нависед, агар: а) *A(2; 3; 4), O(1; 0; -2);* б) *A(-1; 2; -3), O(0; -3; -1)* бошад.

205. Магар ба сфераи марказаш дар нуқтаи O(1; -2; 0) ва радиусаш 3 буда, нуқтаи: а) (3; -3; 1); б) (1; -2; 3) тааллуқ дорад?

206. Координатаҳои марказ ва радиуси сфераро ёбед, агар муодилааш:

а) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=1$; б) $(x+3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=16$ бошад.

207. Исбот кунед, ки муодилаи: а) $x^2+2x+y^2+z^2=3$; б) $x^2-8x+y^2+4y+z^2=0$ муодилаи сфера аст. Координатаҳои марказ ва радиуси онро ёбед.

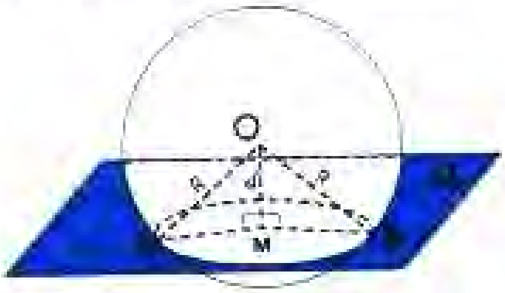
Масъалаҳо барои такрор

208. Диагонали куб 3 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи кубро ёбед.

209. Росткунҷа дар давраи радиусаш 5 см дарункашида буда, дарозии як тарафаш 8 см мебошад. Тарафи дигари росткунҷаро ёбед.

24. БУРИШИ СФЕРА ВА КУРА БО ҲАМВОРӢ

Теоремаи 18. Ҳар гуна буриши сфера бо ҳамворӣ давра аст. Маркази ин давра асоси перпендикулярест, ки аз маркази сфера ба ҳамвории буранда фуроварда шудааст.



РАСМИ 62

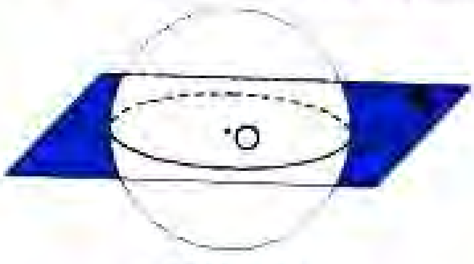
Исбот. Бигзор сфераи марказаш O бо ҳамвории α бурида мешавад (расми 62) ва M асоси перпендикуляр аст. Ду нуқтаи дилхоҳи A ва B-и буришро мегирем, яъне ин нуқтаҳо ҳам ба сфера ва ҳам ба ҳамворӣ тааллуқ доранд. Ин нуқтаҳоро ба нуқтаи M пайваст мекунем. Порчаи OM ба α перпендикуляр аст, пас вай ба ҳар гуна хати рости дар ин ҳамворӣ воқеъбуда перпендикуляр мебошад. Аз ин ҷо $OM \perp MA$ ва $OM \perp MB$.

Агар радиусҳои OA ва OB–ро гузаронем, он гоҳ ду секунҷаҳои бо ҳам баробари росткунҷаи OMA ва OMB–ро ҳосил мекунем. Аз баробарии ин секунҷаҳо бармеояд, ки $MA = MB$ аст. Аз ин, аз сабаби ихтиёрӣ будани нуқтаҳои A ва B ҳосил мекунем, ки ҳамаи нуқтаҳои буриш аз нуқтаи M дар масофаи баробар воқеанд ва дар ҳамвории α

ҷойгиранд. Аз ин ҷо бармеояд, ки фигурае, ки дар натиҷаи буриши сфера бо ҳамвории α ҳосил мешавад, давраест, ки марказаш дар нуқтаи M ҷойгир буда, радиусаш $MA = MB = \sqrt{R^2 - d^2}$ аст, ки дар ин ҷо d масофаи маркази сфера то буриш мебошад. Теорема пурра исбот шудааст.

Агар ҳамвории буранда аз маркази сфера гузарад, вай *ҳамвории диаметрӣ*, буриши ҳосилмешуда *давраи калон* ном доранд.

Айнан ҳамин тавр, мисли теоремаи 18, исбот кардан мумкин аст, ки буриши кура бо ҳамворӣ доираест, ки марказаш асоси перпендикуляри аз маркази доира ба ҳамвории буранда гузаронидашуда мебошад. *Ҳамвории диаметрӣ* ва *доираи калони кура* ҳамон тавре, ки барои сфера муайян шуда буданд (бо иваз кардани калимаи давра ба калимаи доира), муайян мешаванд.



РАСМИ 63

Хосиятҳои зерин ба осонӣ исбот мешаванд: 1) Маркази давраи калон маркази сфера аст; 2) Давраҳои калони сфера ба ҳамдигар баробаранд; 3) Хати буриши ду давраи калон диаметри умумии онҳо ва сфера аст; 4) Аз рӯи ду нуқтаи сфера фақат ва фақат як давраи калон гузаронидан мумкин аст; 5) Фақат ва фақат як радиуси сфера ба хорда перпендикуляр аст. Вай аз миёнаҷойи хорда мегузарад; 6) Аз ду хордаи давраи калон ҳамонаш ба марказ наздик аст, ки дарозии калонтарро дорад ва баръакс; 7) Аз рӯи се нуқтаи дилхоҳи сфера давра (на ҳамеша калон) гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.

Фаҳмост, ки хосиятҳои 1) – 7) бо иваз кардани калимаҳои сфера ба кура ва давра ба доира дурустанд.

Масъалаи 1. Муайян мекунем, ки буриши сфераи $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ бо ҳамвории $y - z = 2$ кадом фигура аст.

Ҳал. Масофаро аз маркази сфера $O(0;0;0)$ то ҳамвории $y - z = 2$ муайян мекунем. (Масофаи байни нуқтаи $M(a;b;c)$ ва ҳамвории $Ax + By + Cz - D = 0$ аз рӯи формулаи

$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} |a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C - D|$ ҳисоб карда мешавад.)

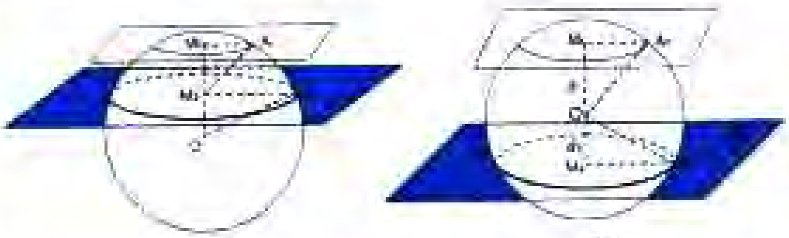
Пас дорем $d = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} |0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) - 2| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Аз сабаби он ки $\sqrt{2} = d < R = 2$ аст, ҳамворӣ сфераро аз рӯи давра мебурад.

Аз тарзи ҳал дида мешавад, ки ҳангоми $d > R$ будан ҳамворӣ сфераро намебурад. Агар $d = R$ шавад, он гоҳ ҳамворӣ ба сфера расанда аст.

Масъалаи 2. Ду бурише, ки дар натиҷаи буриши кураи радиусаш 13 см бо ҳамвориҳои параллел ҳосил шудаанд, дорои радиусҳои 5 см ва 12 см мебошанд. Масофаи байни ҳамвориҳои бурандаро меёбем.

Ҳал. Вобаста ба он ки маркази кура дар байни ҳамвориҳо ҷойгир аст ё на, тарзи ҳал ва ҷавоби масъала гуногун аст.



а) б)

РАСМИ 64

Ҳолати якум. Маркази кура дар байни ҳамвориҳои буранда ҷойгир нест (расми 64, а)). Ба секунҷаҳои росткунҷаи OM_1A_1 ва OM_2A_2 теоремаи Пифагорро татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$d_1 = OM_1 = \sqrt{OA_1^2 - M_1A_1^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см,

$d_2 = OM_2 = \sqrt{OA_2^2 - M_2A_2^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ см. Аз расм айён аст, ки масофаи матлуб $M_1M_2 = d_1 - d_2 = 12 - 5 = 7$ см аст.

Ҳолати дуюм. Маркази кура дар байни ҳамвориҳои буранда ҷойгир аст (расми 64, б)). Айнан мисли ҳолати якум дорем: $d_1 = 12$ см ва $d_2 = 5$ см . Бинобар ин масофаи байни ҳамвориҳо $MM_2 = d_1 + d_2 = 12 + 5 = 17$ см мебошад.

1. Буриши сфера бо ҳамворӣ чӣ гуна фигура аст? Буриши кура бо ҳамворӣ –чӣ? **2.** Ҳамвории диаметрӣ гуфта чӣ гуна ҳамвориро мегӯянд? **3.** Давраҳои калони сфера (кура) чӣ гуна буришанд? **4.** Хосиятҳои давраи (доираи) калони сфераро (кураро) номбар кунед.

210. Ҳангоми буриши сфераи $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ бо ҳамвории: а) $x = 2$; б) $11x + 19y - 7z = 0$; в) $x + y - z + 9 = 0$ кадом фигура ҳосил мешавад?

211. Курае, ки радиусаш 41 дм аст, бо ҳамвории масофааш аз марказ 9 дм буда бурида шудааст. Масоҳати буришро ёбед.

212. Радиуси кура R аст. Аз охири радиус дар зери кунҷи 60^0 ҳамворӣ гузаронида шудааст. Масоҳати буришро муайян кунед.

213. Радиуси кураи Замин R аст. Дарозии давраи доираи параллелӣ ба чанд баробар аст, агар арзи он 60^0 бошад?

214. Шаҳри N дар 60^0 арзи шимол ҷойгир аст. Дар муддати 1 соат аз сабаби дар атрофи тири худ чарх задани Замин кадом масофаро ин мавзеъ тай мекунад, агар радиуси Замин 6000 км бошад?

215*. Дар сфера се нуқта дода шудааст, ки масофаашон мутаносибан 6 см, 8 см ва 10 см аст. Радиуси сфера 13 см мебошад. Масофаи байни маркази сфера ва ҳамвориеро, ки аз рӯи ин се нуқта мегузарад, ҳисоб кунед.

216*. Диаметри кура 15 м аст. Берун аз кура нуқтаи A дода шудааст, ки дар масофаи 10 м аз сатҳи кура (сфера) ҷойгир аст. Дар сфера дарозии чунин давраеро ёбед, ки ҳамаи нуқтаҳои он аз нуқтаи A дар масофаи 20 м воқеъ бошанд.

Масъалаҳо барои такрор

217. Секунҷаи росткунҷаи гипотенузааш 17 см ва яке аз катетҳояш 8 см дар атрофи ҳамин катет давр мезанад. Масоҳати сатҳи пурраи ҷисми ҳосилшударо ёбед.

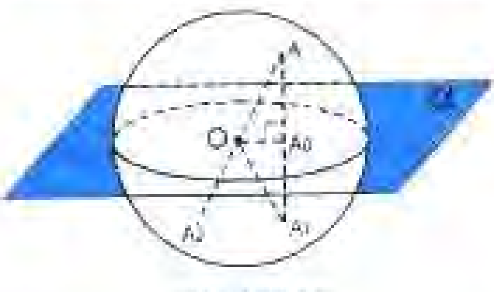
218. Масоҳати доираи дарункашидаи шашкунҷаи мунтазами дарозии тарафаш 4 см бударо ҳисоб кунед.

25. СИММЕТРИЯ ДАР КУРА

Зоҳиран дарк кардан мумкин аст, ки ҳар гуна хати росте, ки аз маркази доира мегузарад, тири симметрияи он аст. Дар фазо хосияти ба он монандро кура дорост-вай нисбати ҳар гуна ҳамвории диаметрӣ симметрӣ мебошад. Ин тасдиқро ҳамчун теорема тасвия менамоем.

Теоремаи 19. **Ҳар гуна ҳамвории диаметрии кура ҳамвории симметрияи он аст. Маркази кура маркази симметрия мебошад**.

Исбот. Бигзор α ҳамвории диаметрӣ ва A нуқтаи дилхоҳи кураи марказаш дар нуқтаи O-и радиусаш R аст (расми 65). Нуқтаи A_1-ро, ки ба нуқтаи A нисбат ба ҳамвории α симметрӣ аст, месозем. Ҳамвории α ба порчаи AA_1 перпендикуляр буда, онро дар нимаҷояш мебурад (ниг. «Геометрия-10», саҳ. 105). Секунҷаҳои



Расми 65

AOA_0 ва A_1OA_0 ҳамчун секунҷаҳои росткунҷа ба ҳамдигар баробаранд, бинобар ин $AO=OA_1$. Вале $AO \leq R$ аст, пас $OA_1 \leq R$, яъне нуқтаи ба нуқтаи A нисбат ба ҳамвории α симметрӣ ба кура тааллуқ дорад. Ҳамвории симметрияи кура будани ҳамвории диаметрӣ исбот шуд.

Акнун бигзор A_2 нуқтаест, ки ба нуқтаи A нисбат ба маркази кура симметрӣ аст. Пас $OA_2 = OA \leq R$, яъне нуқтаи A_2 ба кура тааллуқ дорад. Теорема пурра исбот шудааст.

Эзоҳи 1. Тасдиқи теорема дуруст аст, агар ба ҷои кура сфера муоина карда шавад. Яъне, сфера нисбат ба марказаш ва ҳамвории диаметриаш симметрӣ аст.

Эзоҳи 2. Зоҳиран фаҳмост, ки ҳар гуна хати росте, ки аз марказ мегузарад, тири симметрияи кура (сфера) аст.

1. Нуқта, тир ва ҳамвории симметрия дар кура кадомҳоянд? **2.** Теоремаро доир ба ҳамвории симметрия будани ҳамвории диаметрӣ барои сфера исбот кунед. **3.** Давраҳои калони сфера (кура) чӣ гуна буришанд? **4.** Оё миқдори ҳамвориҳои симметрияи кура ё сфера охирноканд? Агар на, пас чаро?

Масъалаҳо барои такрор

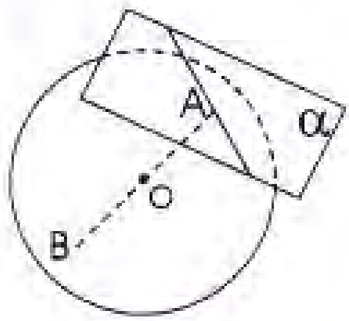
219. Ташкилдиҳандаи конус l ба ҳамвории асос дар зери кунҷи 60^0 моил аст. Масоҳати сатҳи пурраи конусро ёбед, агар $l = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$ см бошад.

220. Масоҳати секунҷаи росткунҷаро, ки катеташ 2,5 см ва гипотенузааш $\sqrt{70,25}$ см аст, ёбед.

26. ХАТИ РОСТ ВА ҲАМВОРИИ БА КУРА РАСАНДА

Таъриф. Ҳамворӣ ба кура (сфера) *расанда* номида мешавад, агар вай бо кура (сфера) танҳо як нуқтаи умумӣ дошта бошад.

Нуқтаи умумии A – ро, ки ҳам ба ҳамворӣ ва ҳам ба кура тааллуқ дорад, *нуқтаи расиши* ҳамворӣ ва кура меноманд (расми 66).



РАСМИ 66

Теоремаи зерин ба нишонаи расиши хати рост ва давра шабоҳат дорад.

Тероемаи 20. Барои он ки ҳамворӣ ба кура расанда бошад, зарур ва кифоя аст, ки вай ба диаметри кура перпендикуляр буда, аз охираш гузарад.

Исбот. *Кифоягӣ.* Бигзор AB диаметри кура буда, нуқтаи A ба ҳамвории α тааллуқ дорад ва AB ба α перпендикуляр аст. Яъне, радиуси OA перпендикулярест, ки аз маркази кура ба ҳамворӣ фуроварда шудааст. Пас масофа аз маркази кура то ҳамворӣ ба радиус баробар аст. Ин нишон медиҳад, ки ҳамворӣ ва кура танҳо як нуқтаи умумӣ доранд, яъне ҳамворӣ ба кура расанда аст.

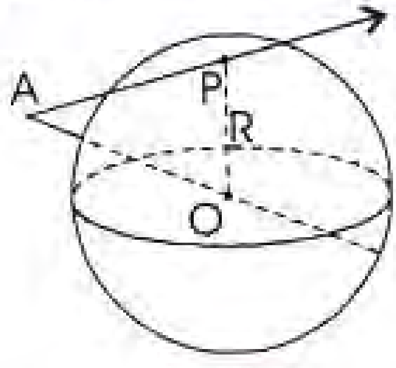
Зарурият. Бигзор A нуқтаи расиши ҳамвории α ва кураи марказаш O мебошад (расми 66). Нишон медиҳем, ки OA ба α перпендикуляр аст.

Фарз мекунем, ки ин тавр нест, яъне радиуси OA ба ҳамвории α моил ва масофа аз маркази кура то ҳамвории α аз радиус хурд аст. Барои ҳамин кура ва ҳамворӣ аз рӯи доира бурида мешаванд. Ин бошад, ба расанда будани ҳамвории α зид мебошад. Ҳамин тариқ, кура ва ҳамворӣ як нуқтаи умумӣ доранд. Зиддияти ҳосилшуда нишон медиҳад, ки радиуси OA ба α перпендикуляр аст. Теорема пурра исбот шудааст.

Бигзор дар фазо хати рост дода шудааст. Вай метавонад бо кура нуқтаи умумӣ надошта бошад, дуто ё якто нуқтаи умумӣ дошта бошад. Дар ҳолати якум хати рост кураро намебурад, дар ҳолати дуюм кураро мебурад ва дар ҳолати сеюм ба кура *расанда* аст. Фаҳмост, ки хати рости расанда дар ҳамвории расанда ҷойгир аст. Инчунин аз ҳар як нуқтаи сатҳи кура (сфера) миқдори беохири хатҳои рости расанда гузаронидан мумкин аст. Аз нуқтаи берун аз кура ҷойгиршуда бошад, ба он миқдори беохири хатҳои рости расанда ва ҳамвориҳои расандаро гузаронидан мумкин аст.

Эзоҳ. Равшан аст, ки тасдиқоти дар боло овардашуда дурустанд, агар дар тасвияи онҳо калимаи кураро ба сфера иваз намоем.

Масъала. Масофаи байни маркази кура O ва нуқтаи A 10 см аст. Радиуси кура $R=6$ см мебошад. Дарозии порчаи расандаро, ки аз нуқтаи A ба кура гузаронида шудааст, меёбем.



расми 67

Ҳал. Зоҳиран фаҳмост, ки нуқтаи A берун аз кура воқеъ аст (расми 67). Расандаи AP-ро гузаронида, нуқтаи расиш P-ро бо марказ пайваст карда, секунҷаи росткунҷаи AOP-ро ҳосил мекунем. Аз ин, мувофиқи теоремаи Пифагор $AP^2 = AO^2 - OP^2$ ё $AP^2 = AO^2 - R^2 = 10^2 - 6^2 = 64$. Инак, $AP = 8$ см.

1. Чӣ гуна ҳамвориро ҳамвории ба кура (сфера) расанда меноманд? **2.** Нишонаи ба кура расанда будани ҳамвориро баён карда, шарҳ диҳед. **3.** Аз ҳар як нуқтаи сфера ба он чанд ҳамвории расанда гузаронидан мумкин аст? Агар нуқта дар беруни сфера ҷойгир бошад-чӣ? **4.** Дар кадом ҳолат хати рост ба кура расанда мебошад?

221. Тарафҳои секунҷа ба 13 см, 14 см ва 15 см баробаранд. Масофаро аз ҳамвории секунҷа то маркази кура, ки тарафҳои секунҷа ба он расандаанд, ёбед, агар радиуси кура 5 см бошад.

222. Диагоналҳои ромб ба 15 см ва 20 см баробаранд. Радиуси кура 10 см буда, ҳамаи тарафҳои ромб ба он расандаанд. Масофаи маркази кураро то ҳамвории ромб ёбед.

223. Сфераи радиусаш R ба рӯяҳои кунҷи дурӯяи бузургиаш φ расанда аст. Масофаро аз маркази сфера то теғаи кунҷи дурӯя ёбед.

224. Сфера ба рӯяҳои кунҷи дурӯяи бузургиаш 120^0 расанда аст. Радиуси сфераро ёбед, агар масофаи байни маркази сфера то теғаи кунҷи дурӯя a бошад.

225*. Радиуси сфера 112 см аст. Нуқтаи дар ҳамвории расанда ҷойгирбуда аз нуқтаи расиш дар масофаи 15 см ҷойгир аст. Масофаи байни ин нуқта ва нуқтаи ба он наздиктарини сфераро ҳисоб кунед.

<u>Масъалаҳо барои такрор</u>

226. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 12 см аст. Берун аз ҳамвории секунҷа нуқтае гирифта шудааст, ки он аз ҳар се қуллаи секунҷа дар масофаи 10 см воқеъ мебошад. Масофаи байни ин нуқта ва ҳамвории секунҷаро муайян кунед.

227. Кунҷҳои секунҷа ҳамчун 3:7:8 нисбат доранд. Кунҷи калонтарини секунҷаро ёбед.

§4. ҲАҶМИ БИСЁРРУЯҲО

27. МАФҲУМИ ҲАҶМИ ҶИСМ

Барои чен кардани масофаи байни ду нуқта *воҳиди дарозӣ*, ки дарозии порчаи ихтиёран интихобшуда аст (милиметр, сантиметр, детсиметр, метр, километр ва ғайра), истифода карда мешавад. Андозаи ин масофа ба миқдори он воҳиде, ки дар масофаи мазкур мегунҷад, баробар аст. Ба ин монанд барои чен кардани масоҳати фигура мо квадратро, ки тарафаш воҳиди интихобшудаи дарозӣ аст, истифода мебарем. Чунин квадрат *квадрати воҳидӣ* ном дорад. Масоҳати сатҳи додашуда ба миқдори квадратҳои воҳидӣ , ки фигура онҳоро дар бар мегирифт, баробар буд.

Барои чен кардани ҳаҷм *куби воҳидӣ*, ки теғааш ба воҳиди дарозӣ, масоҳати рӯяаш ба квадрати воҳидӣ (сантиметри квадратӣ, метри квадратӣ ва ғайра) баробар аст, истифода карда мешавад. Чунин куб *воҳиди ҳаҷм* ном дорад.

Таърифи 1. Миқдори воҳиди ҳаҷм, ки ҷисми геометрӣ (призма, пирамида, силиндр, кура ва ғайраҳо) онро дар бар мегирад, *ҳаҷми ҷисм* номида мешавад. (Дар айни ҳол талаб карда намешавад, ки ин миқдор бо адади бутун ифода шавад.)

Агар теғаи куби воҳиди ҳаҷм 1 см бошад, он гоҳ ҳаҷм бо сантиметри кубӣ (см^3); агар теғаи куби воҳидӣ 1 м бошад, ҳаҷм бо метри кубӣ (м^3) чен карда мешавад. Рафту теғаи куб 1 км бошад, он гоҳ ҳаҷм бо километри кубӣ (км^3) чен карда мешавад ва ғайра.

Априорӣ (бе исбот, ё ки ҳамчун гипотеза) қабул карда шудааст, ки барои ҷисмҳои геометрӣ ду *постулати* зерин дурустанд:

1. *Ба ҳар гуна ҷисми геометрӣ ба таври ягона ададн мусбати мувофиқ гузоштан мумкин аст, ки он ҳаҷми ҷисм мебошад.*

2. *Агар ҷисм ба ҷисмҳои бо ҳам қисми умуминадошта ҷудо шуда бошад, он гоҳ ҳаҷми ҷисм ба суммаи ҳаҷми ҳар як қисм баробар аст.*

Масалан, чи тавре, ки дар оянда хоҳем дид, ҳар гуна призма ё пирамидаи n-кунҷаро ба миқдори охирноки призма ё пирамидаҳои секунҷа ҷудо кардан мумкин аст. Мувофиқи постулати 2, агар ҳаҷми пирамидаи секунҷаро ёфта тавонем, пас ҳаҷми пирамидаи дилхоҳи n – кунҷаро низ ёфта метавонем. Постулати 2 *хосияти аддитивии ҳаҷм ном* дорад.

Таърифи 2. Агар ҳаҷми ду ҷисм ба ҳам баробар бошад, ҷисмҳоро *баробарбузург* меноманд.

Фаҳмост, ки мафҳумҳои ҷисмҳои бо ҳам баробар ва ҷисмҳои бо ҳам баробарбузург маънои гуногунро доранд. Масалан, призма ва пирамида баробарбузург шуда метавонанд, вале асло ба ҳам баробар не.

1. Воҳиди ҳаҷм чӣ гуна куб аст? **2.** Ҳаҷми ҷисм чӣ тавр муайян карда мешавад? **3.** Постулатҳои ҳаҷмро номбар намоед. **4.** Дар кадом ҳолат ду ҷисм баробарбузурганд? **5.** Ҷисмҳои баробарбузург ҳамеша ба ҳам баробаранд?

Масъалаҳо барои такрор

228. Баландии ПР 12 см буда, тарафҳои асосаш 8 см ва 6 сманд. Масоҳати буриши диагоналиро ёбед.

229. Росткунҷаи тарафҳояш 32 см ва 24 см дарункашида аст. Радиуси давра ёфта шавад.

28. ҲАҶМИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Аввал ба ёфтани ҳаҷми параллелепипеди росткунҷа (ПР) машғул мешавем. Барои ёфтани ҳаҷми ПР, ки андозаҳояш дода шудаанд, тасдиқи зеринро беисбот қабул мекунем: *нисбати ҳаҷми ду ПР, ки асосҳои якхела доранд, ба* *нисбати баландиҳояшон баробар аст.* Дарозӣ, бар ва баландии ПР – ро *андозаҳои хаттӣ* меноманд.

Теоремаи 21. Ҳаҷми ПР, ки андозаҳои хаттиаш a, b, c мебошад, бо формулаи $V = abc$ ҳисоб карда мешавад.

Исбот. Куберо, ки воҳиди чен кардани ҳаҷм аст, яъне андозаҳояш 1, 1, 1 аст, интихоб мекунем. Баъд се ПР-и андозаҳояшон $a, 1, 1$; $a, b, 1$ ва a, b, c – ро мегирем. Ҳаҷми онҳоро бо V_1, V_2 ва V ишорат мекунем. Аз сабаби он ки андозаи дилхоҳи ПР-ро ҳамчун баландӣ қабул кардан мумкин аст, мувофиқи тасдиқи дар боло овардашуда $\frac{V_1}{1} = \frac{a}{1}$, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{b}{1}$, $\frac{V}{V_2} = \frac{c}{1}$. Ҳар се ин баробариро аъзо ба аъзо зарб мекунем: $\frac{V_1}{1} \cdot \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V}{V_2} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1}$, яъне $V = abc$.

Дурустии теорема исбот шудааст.

Масъалаи 1. Маълум, ки агар ҳар як теғаи кубро 1 м зиёд намоем, он гоҳ ҳаҷми куб 7 м^3 зиёд мешавад. Чанд будани теғаи кубро меёбем.

Ҳал. Агар теғаи кубро бо x ишорат кунем, он гоҳ ҳаҷми он ба x^3 баробар мешавад. Мувофиқи шарти масъала $(x+1)^3 - x^3 = 7$ ё $3x^2 + 3x + 1 = 7$, ё ки $3x^2 + 3x - 6 = 0$. Аз ин муодилаи квадратӣ

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 6 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{81}}{6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2};\ x_1 = -2,\ x_2 = 1$$

Танҳо решаи мусбат маънои геометриро дорад. Инак, теғаи куб 1 м аст.

Аз теорема чунин хулосаҳо бармеоянд:

Хулосаи 1. *Ҳаҷми ПР ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.*

Дар ҳақиқат, рӯяи теғаҳояш ба a ва b баробарро ҳамчун асоси ПР қабул мекунем. Пас, масоҳати асос S ба $a \cdot b$ ва баландии H ба c баробар мешавад, яъне

$$V = abc = S \cdot H.$$

Амалан дуруст будани ин хулосаро барои ҳар гуна параллелепипед нишон додан мумкин аст. Яъне дурустии ҷумлаи зеринро: *Ҳаҷми параллелепипеди дилхоҳ* (моил, рост, росткунҷа) *ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.* Вале мо бо овардани тасвияи ҳамин тасдиқ маҳдуд шуда, исботашро намеорем.

Хулосаи 2. *Ҳаҷми куби тегааш a бо формулаи $V = a^3$ ҳисоб карда мешавад.*

Масъалаи 2. Масоҳати се рӯяи ПР ба 2 м², 3 м² ва 6 м² баробар аст. Ҳаҷми онро меёбем.

Ҳал. Нишон медиҳем, ки агар Q_1, Q_2, Q_3 масоҳатҳои рӯяҳо бошанд, он гоҳ $V = \sqrt{Q_1 Q_2 Q_3}$ мешавад. Дар ҳақиқат, агар a, b, c андозаҳои ПР бошанд, он гоҳ $V = abc$, $ab = Q_1$, $bc = Q_2$, $ac = Q_3$ аст. Аз ин баробариҳо ҳосил мекунем:

$$b = \frac{Q_2}{c}, \quad a = \frac{Q_3}{c}, \; Q_1 = ab = \frac{Q_2}{c} \cdot \frac{Q_3}{c} \quad c^2 = \frac{Q_2 Q_3}{Q_1}, \; c = \sqrt{\frac{Q_2 Q_3}{Q_1}}.$$

Ҳамин тариқ,

$$V = abc = \frac{Q_3}{c} \cdot \frac{Q_2}{c} \cdot c = \frac{Q_2 Q_3}{c} = \frac{Q_2 Q_3}{\sqrt{\frac{Q_2 Q_3}{Q_1}}} = \sqrt{Q_1 Q_2 Q_3}.$$

Қиматҳои додашудаи масъаларо истифода карда меёбем: $V = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = 6$ м³.

1. Андозаҳои хаттии ПР гуфта чиро мегӯянд? **2.** Ҳаҷми ПР бо кадом формула ҳисоб карда мешавад? **3.** Исбот кунед, ки ҳаҷми ПР ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст. **4.** Тасдиқи зикршуда барои ҳар гуна параллелепипед дуруст аст ё не?

230. Ҳаҷми ПР - ро, ки тарафҳои асосаш a ва b буда, баландиаш h аст, ёбед, агар:

а) $a = 11$, $b = 12$, $h = 15$; б) $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 10\sqrt{10}$ бошад.

231. Диагонали куб $3\sqrt{3}$ см аст. Ҳаҷми кубро ёбед.

232. Асоси ПР квадрат аст. Диагонали рӯяи паҳлуии параллелепипед, ки 8 см аст, бо ҳамвории асос кунҷи 30^0-ро ташкил мекунад. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

233. Андозаҳои ПР 15 м, 50 м ва 36 м-анд. Теғаи куберо, ки бо ин параллелепипед баробарбузург аст, муайян намоед.

234. Андозаҳои хишт ба 25 см, 12 см ва 6,5 см баробаранд. Массааш 3,51 кг аст. Зичии хиштро ёбед.

235. Андозаҳои чӯби чоррахаи (брусок) росткунҷа 3 см, 4 см, 5 см-анд. Агар ҳар теғаи онро ба x сантиметр зиёд кунем, он гоҳ масоҳати сатҳаш 54 см^2 зиёд мешавад. Ҳаҷми чӯб чӣ тавр тағйир меёбад?

236. Андозаҳои ПР ба 8 см, 12 см ва 18 см баробаранд. Теғаи куберо, ки бо ин параллелепипед баробарбузург аст, муайян кунед.

237. Диагоналҳои ПР, ки 18 см аст, бо ҳамвории рӯяи паҳлуӣ кунҷи 30^0 ва бо теғаи паҳлуӣ кунҷи 45^0 –ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

238. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос $2\sqrt{2}$ см ва 5 см буда, кунҷи 45^0-ро ташкил медиҳанд. Диагонали хурди параллелепипед 7 см аст. Ҳаҷми онро ёбед.

239. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос ба 13 см ва 37 см, диагонали калони асос ба 40 см баробар аст. Теғаи паҳлуӣ ба диагонали калони параллелепипед ҳамчун 15:17 нисбат дорад. Ҳаҷми ин параллелепипедро ёбед.

240. Асоси параллелепипеди моил параллелограмми $ABCD$ аст, ки дар он $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм ва $BD = 6$ дм мебошад. Масоҳати буриши диагоналии AA_1C_1C 1 м^2 буда, ба ҳамвории асос вай перпендикуляр аст. Ҳаҷми параллелепипедро ҳисоб кунед.

241. Рӯяҳои параллелепипед ромбҳои тарафашон a ва кунҷи тезашон 60^0 –аи ба ҳам баробар мебошанд. Ҳаҷми ин параллелепипеди моилро ёбед.

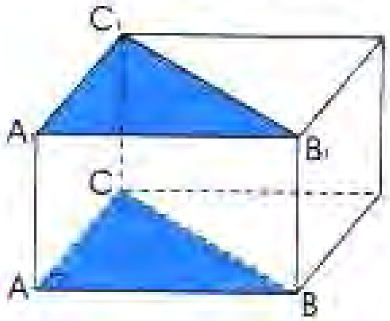
Масъалаҳо барои такрор

242. Масоҳати сатҳи паҳлуии конус 11 ва дарозии ташкилдиҳандааш $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ аст. Масоҳати асоси конусро ёбед.

243. Кунҷҳои асоси трапетсия 90^0 ва 45^0 мебошанд. Яке аз асосҳо аз дигараш ду маротиба калон буда, ба 24 см баробар аст. Тарафи паҳлуии хурди трапетсияро ёбед.

29. ҲАҶМИ ПРИЗМА

Дар аввал фарз мекунем, ки призмаи додашуда призмаи рост буда, асосаш секунҷаи росткунҷа мебошад. Нишон медиҳем, ки *ҳаҷми чунин призма ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.* Призмаи $ABCA_1B_1C_1$-ро, ки дар он $\angle A = 90^0$ аст, то параллелепипеди росткунҷа ҳосил кардан пурра мекунем (расми 68).



Расми 68

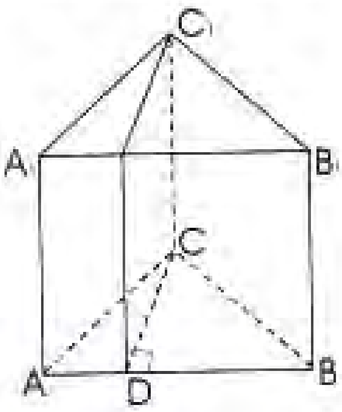
Мувофиқи хулосаи 1-и банди 28 ҳаҷми параллелепипеди ҳосилшуда ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст, яъне ба $2S_{ABC} \cdot H$, ки дар ин ҷо S_{ABC} масоҳати секунҷаи ABC ва H баландии призма мебошанд. Ҳамвории C_1CB параллелепипедро ба ду призмаи рост ҷудо мекунад, ки якеи онҳо призмаи додашуда аст. Ин призмаҳо ба ҳамдигар баробаранд, чунки асосҳо ва баландии баробарро доранд. Пас ҳаҷми призмаи додашуда ба нисфи ҳаҷми параллелепипед баробар аст. Ҳамин тариқ, $V = \frac{1}{2}(2S_{ABC} \cdot H) = S_{ABC} \cdot H$, ки исботаш зарур буд.

Акнун натиҷаи ҳосилшударо умумӣ менамоем.

Теоремаи 22. Ҳаҷми призмаи рост ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландиаш баробар аст.

Исбот. Теоремаро аввал барои призмаи секунҷаи рост исбот менамоем. Баъд дурустии онро барои призмаи рости дилхоҳ нишон медиҳем.

Бигзор $ABCA_1B_1C_1$ призмаи секунҷаи рости ҳаҷмаш V ва баландиаш H бошад (расми 69). Дар ΔABC чунин баландиеро мегузаронем, ки секунҷаро ба ду секунҷа ҷудо менамояд (порчаи CD дар расми 69). (Дар ҳар гуна секунҷа чунин баландӣ ҳаст!). Ҳамвории CC_1D призмаи додашударо ба ду призмаи секунҷаи асосҳоашон секунҷаҳои росткунҷаи ACD ва DBC ҷудо менамояд. Пас мувофиқи натиҷаи пеш аз тасвияи шарти теорема омада, ҳаҷмҳои онҳо V_1 ва V_2 мувофиқан ба $S_{ACD} \cdot H$ ва $S_{DBC} \cdot H$ баробаранд. Мувофиқи хосияти аддитивии ҳаҷм



$$V = V_1 + V_2 = S_{ACD} \cdot H + S_{DBC} \cdot H = (S_{ACD} + S_{DBC}) \cdot H = S_{ABC} \cdot H.$$

Дурустии теорема барои призмаи рости дилхоҳ аз он бармеояд, ки ҳар гуна призмаи ростро ба якчанд призмаи рости секунҷа ҷудо кардан мумкин аст. Инчунин аз хосияти аддитивии ҳаҷм ҳам.

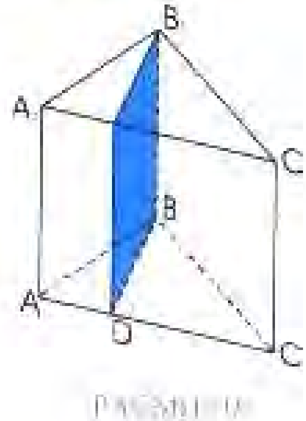
Эзоҳ. Тасдиқи теорема на ин ки барои призмаи рост, балки барои ҳар гуна призма дуруст аст. Яъне, *ҳаҷми ҳар гуна призма* (аз он ҷумла, призмаи моил) *ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландиаш баробар аст.*

Масъалаи 1. Дар призмаи рости $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 2\sqrt{5}$ см, $BC = 4\sqrt{5}$ см, $AA_1 = 10$ см ва $\angle ABC = 90^0$ аст. Ҳамвории аз рӯи теғаи BB_1 мегузаштагӣ ба рӯяи ACC_1A_1 перпендикуляр аст (расми 70). Ҳаҷми худи призма ва ҳаҷми призмаҳои $ABDA_1B_1D_1$ ва $BDCB_1D_1C_1$ -ро меёбем.

Ҳал.

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 10 = 200 \text{ см}^3.$$

Барои ёфтани ҳаҷми призмаи $ABDA_1B_1D_1$ масоҳати асоси он - масоҳати секунҷаи ADB – ро меёбем. Мувофиқи теоремаи Пифагор, аз секунҷаи росткунҷаи $ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 20 + 80 = 100$.



AC=10 см. Баъд, BD баландии ΔABC аст, бинобар ин аз рӯи вобастагии Уқлидус $AB^2 = AD \cdot AC$. Яъне, $(2\sqrt{5})^2 = AD \cdot 10$. Аз ин ҷо, AD=2 см, DC=AC-AD=10-2=8 см. Боз мувофиқи вобастагии Уқлидус $BD^2 = AD \cdot DC$, $BD^2 = 2 \cdot 8 = 16$. BD=4 см.

$$V_{ABDA_1B_1D_1} = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} AD \cdot BD \cdot AA_1 =$$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10 = 40$ см³. Мувофиқи хосияти аддитивии ҳаҷм

$V_{BDCB_1D_1C_1} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{ABDA_1B_1D_1} = 200 - 40 = 160$ см³.

Масъалаи 2. Асоси призмаи моил ромбест, ки диагоналҳояш 5 см ва 6 см мебошанд. Баландии ин призма 10 см аст. Ҳаҷмашро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи эзоҳ ҳаҷми призмаи мазкур ба ҳосили зарби масоҳати ромб бар баландӣ баробар аст. Масоҳати ромб бошад, нисфи ҳосили зарби диагоналҳояш аст, яъне $S = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$ см². Пас, $V = S \cdot H = 15 \cdot 10 = 150$ см³.

---

1. Тасдиқ доир ба ҳаҷми призмаи рости асосаш секунҷаи росткунҷа хулосаи кадом теорема аст? **2.** Чаро ақаллан яке аз баландиҳо секунҷаро ба ду секунҷа ҷудо менамояд, яъне тарафи муқобилро мебурад? **3.** Теоремаро баён намуда, онро ҳангоми секунҷа будани асоси призма исбот кунед. **4.** Дар мисоли призмаи панҷкунҷа сохтаҳое, ки барои исботи теорема лозиманд, гузаронед. **5.** Дар исботи теорема кадом хосияти ҳаҷм истифода мешавад ва чанд бор?

---

244. Ҳаҷми призмаи рости $ABCA_1B_1C_1$ -ро ёбед, агар $AB = 5$ см, $AC = 3$ см ва масоҳати калонтарини рӯяи паҳлуӣ 35 см^2 бошад.

245. Тарафҳои асоси призмаи секунҷаи мунтазам ба a баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ба суммаи масоҳати асосҳо баробар мебошад. Ҳаҷми призмаро ёбед.

246. Диагонали призмаи чоркунҷаи мунтазам 3,5 м буда, диагонали рӯяи паҳлуӣ 2,5 м аст. Ҳаҷми призмаро ҳисоб кунед.

247. Ҳаҷми призмаи n- кунҷаи мунтазамро, ки ҳар як теғаи он a аст, ҳисоб кунед, агар: а) n=3; б) n=4; в) n=6 бошад.

248. Қубури чӯянӣ буриши квадратӣ дорад. Бари берунаи он 2,5 см, ғафсии деворчаҳо 3 см аст. Қубури дарозиаш 1 м чӣ қадар вазн дорад? (Вазни хос 7,3).

249. Баландии призмаи рости секунҷа 5 м, ҳаҷмаш 24 м^3 аст. Масоҳати рӯяҳои паҳлуии он ҳамчун 17:17:16 нисбат доранд. Тарафҳои асосро ёбед.

250. Масоҳати асоси призмаи рости секунҷа 4 см^2 масоҳати рӯяҳои паҳлуиаш 9 см^2, 10 см^2 ва 17 см^2 мебошад. Ҳаҷмашро муайян кунед.

251. Хоктеппаи роҳи оҳан шакли трапетсияро дорад, ки асоси поёниаш 14 м, асоси болоиаш 8 м ва баландиаш 3,2 м аст. Ба ҳар як километр хоктеппа чанд метри кубӣ замин рост меояд?

252. Дар призмаи секунҷи моил тарафҳои асос 5 м, 6 м, ва 9 м-анд. Теғаи паҳлуӣ 10 м буда, бо ҳамвории асос кунҷи 45^0-ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми призма ёфта шавад.

253. Теғаҳои паҳлуии призмаи секунҷаи моил ба 15 м баробаранд. Масофаи байни онҳо 26 м, 25 м ва 17 м аст. Ҳаҷми призмаро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

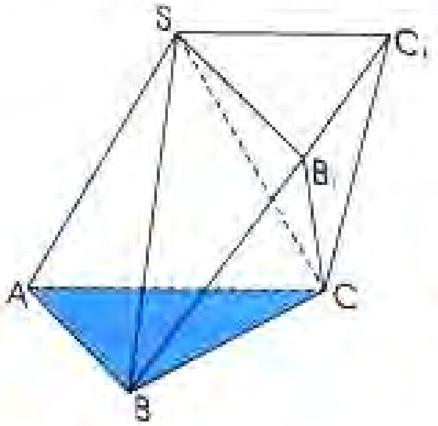
254. Дар призмаи секунҷаи рост тарафҳои асос 3 м, 4 м, 5 м буда, баландӣ 6 м аст. Масоҳати сатҳи пурраи призмаро ёбед.

255. Асосҳои трапетсияи баробарпаҳлу 6 см ва 10 см мебошанд. Диагоналаш 10 см аст. Масоҳати трапетсияро ёбед.

30. ҲАЧМИ ПИРАМИДА

Теоремаи 23. Ҳаҷми пирамида ба ҳосили зарби масоҳати асос бар сеяки баландӣ баробар аст.

Исбот. Теоремаро аввал барои пирамидаи секунҷа исбот мекунем. Бигзор $SABC$ пирамидаи секунҷа бошад. Онро бо хамон асос ва хамон баландӣ, ки пирамида дорад, то призмаи секунҷа ҳосил кардан пурра менамоем (расми 71). Призмаи хосилшуда аз се пирамидаи секунҷа иборат аст: пирамидаҳои $SABC$, SCC_1B_1 ва $SBCB_1$. Зохиран фаҳмост, ки $\Delta CC_1B_1 = \Delta CBB_1$. Яъне, масоҳати асосҳои пирамидаҳои дуюму сеюм якхелаанд. Инчунин баландиашон, ки аз қуллаи S фуроварда шудааст, умумӣ мебошад. Пас, ин ду пирамида ҳаҷми якхеларо доранд (ниг. ба банди 27).

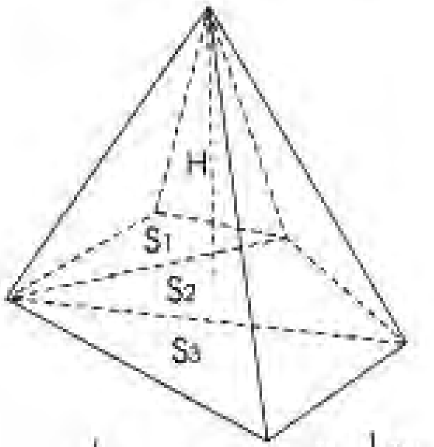


Асосҳои пирамидаҳои якум ва сеюм (секунҷаҳои SAB ва BB_1S) низ ба хам баробаранд, баландии онҳо, ки аз қуллаи C мегузарад, умумӣ аст. Барои ҳамин онҳо низ хаҷми баробарро доранд. Ҳамин тариқ, хар се пирамида дорои ҳаҷми баробаранд ва хосили ҷамъи хаҷмҳои онҳо ба ҳаҷми призмаи секунҷа баробар аст. Пас агар баландии призмаро бо H ишорат кунем, он гоҳ

$$3V_{SABC} = V_{ABCSB_1C_1} = S_{ABC} \cdot H \text{ ё } V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H .$$

Хулоса, дурустии теорема барои пирамидаи секунҷа нишон дода шудааст.

Акнун исботи теоремаро барои пирамидаи дилхоҳ меорем. Асоси ин пирамидаро ба секунҷаҳо ҷудо мекунем (дар расми 72 ин ҷудокунӣ барои пирамидаи панҷкунҷа нишон дода шудааст). Пирамидаҳои секунҷа, ки асосҳояшон ин секунҷаҳо ва қуллаашон қуллаи пирамидаи додашуда мебошанд, дар ҳамҷоягӣ пирамидаи додашударо ташкил медиҳанд. Аз рӯи принсипи аддитивии ҳаҷм ҳаҷми пирамида ба ҳосили ҷамъи пирамидаҳои онро ташкилдиҳанда баробар аст. Ин пирамидаҳо дорои баландии умумии H, ки баландии пирамидаи додашуда аст, мебошанд. Мувофикан, агар бо $S_1, S_2, \cdots, S_n$ масоҳати асосҳои пирамидаҳои секунҷаро ишорат кунем, он гоҳ



$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \cdots + S_n)H = \frac{1}{3}SH$

РАСМИ 72

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) = \frac{1}{3}SH.$$

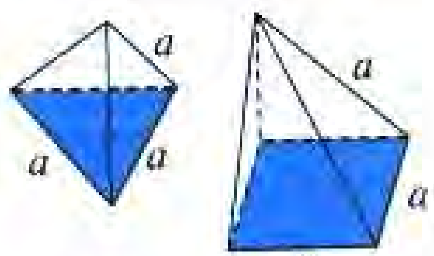
Инак, ҳаҷми призма ба $\frac{1}{3}SH$ ё ба сеяки ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст. Теорема исбот шудааст.

Масъалаи 1. Ҳаҷми пирамидаи асосаш квадратро, ки баландиаш 9 см ва теғаи асосаш 8 см аст, меёбем.

Ҳал. Асоси пирамида квадрат буда, масоҳаташ $8^2 = 64$ см² аст. Пас, мувофиқи теорема ҳаҷми пирамида $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 9 = 64 \cdot 3 = 192$ см³ мебошад.

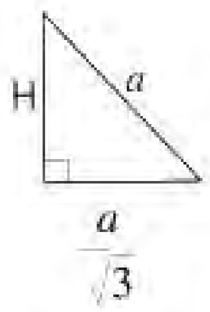
Масъалаи 2. Ҳаҷми тетраэдри мутлақо мунтазам ва пирамидаи мунтазами чоркунҷаро, ки теғаашон ба a баробар аст, меёбем.

Ҳал. 1) Масоҳати асоси тетраэдри мутлақо мунтазам (расми 73, а)) ба $S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ баробар аст. Баландиашро меёбем. Баландӣ аз маркази асос мегузарад, ки он маркази давраи берункашида буда, аз



а) б)

РАСМИ 73



Расми 74

қуллаи асос дар масофаи $\frac{a}{\sqrt{3}}$ ҷойгир аст. Пас дар асоси теоремаи Пифагор (расми 74)

$H^2 = a^2 - (\frac{a}{\sqrt{3}})^2 = \frac{2}{3}a^2$, яъне $H = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$. Барои ҳамин ҳаҷми чунин тетраэдр

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$

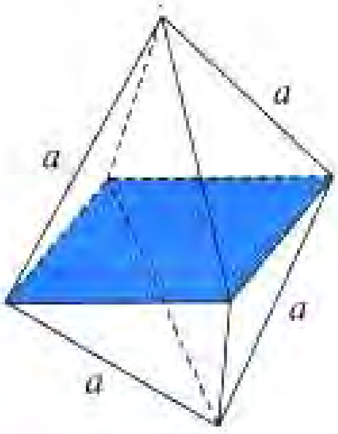
2) Мулоҳизаҳои дар қисми 1) бударо барои пирамидаи мунтазами чоркунҷа такрор карда меёбем, ки $S = a^2$,

$$H^2 = a^2 - (\frac{a}{\sqrt{2}})^2 = \frac{a^2}{2},\ H = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3}S\cdot H = \frac{a^2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2a^3}{3\cdot 2\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$$

Масъалаи 3. Ҳаҷми октаэдро, ки тегааш 9 см аст, меёбем.

Ҳал. Октаэдр дар натиҷаи аз рӯи асос болои ҳамдигар гузоштани ду пирамидаи мунтазами чоркунҷаи ҳамаи тегаҳояш ба ҳамдигар баробар ҳосил мешавад (расми 75). Пас агар тегаи октаэдр ба a баробар бошад, он гоҳ мувофиқи хосияти аддитивии ҳаҷм ва натиҷаи масъалаи 2 ҳаҷми октаэдр ба $V = 2\cdot\frac{\sqrt{2}a^3}{6} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ баробар аст. Бо назардошти a=9 см ҳосил мекунем: $V = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 9^3 = 243\sqrt{2}$ см^3.



Расми 75

1. Исботи теорема доир ба ҳаҷми пирамида ба баробарбузургии чӣ гуна пирамидаҳо асоснок карда шудааст? **2.** Аввал теоремаро барои пирамидаи секунҷа, баъд барои пирамидаи дилхоҳ исбот кунед. **3.** Ҳаҷми тетраэдри мутлақо мунтазам, пирамидаи квадратии мунтазам ва октаэдр бо воситаи тегаашон чӣ тавр ифода карда мешаванд?

256. Ҳаҷми пирамидаи квадратиро ёбед, агар баландии он 7 см ва теғаи асосаш 6 см бошад.

257. Аз рӯи тарафи асос a ва теғаи паҳлуии b ҳаҷми пирамидаҳои мунтазами секунҷа ва шашкунҷаро ёбед.

258. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам баландӣ 3 м, теғаи паҳлуӣ 5 м аст. Ҳаҷмашро ёбед.

259. Баландии пирамидаи секунҷаи мунтазам H буда , теғаи паҳлуӣ бо ҳамвории асос кунҷи 60^0 -ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми пирамидаро ҳисоб кунед.

260. Теғаи тетраэдри мутлақо мунтазам a аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва ҳаҷми онро ёбед.

261. Масоҳати сатҳи пурраи тетраэдри мутлақо мунтазам ба S баробар аст. Ҳаҷмашро ёбед.

262. Яке аз иншооти азимҷуссаи дунёи қадим – пирамидаи Хеопс дар Миср шакли пирамидаи чоркунҷаи мунтазамро дорад, ки баландиаш 150 м ва теғаи паҳлуиаш 220 м аст. Ҳаҷми пирамидаи Хеопсро ёбед.

263. Асоси пирамида росткунҷаи тарафҳояш 9 м ва 12 м буда, ҳар як теғаи паҳлуиаш ба 12,5 м баробар аст. Ҳаҷми пирамидаро ёбед.

264*. Асоси пирамида секунҷаи тарафҳояш 39 см, 17 см ва 28 см аст. Ҳар як теғаи паҳлуӣ ба 22,9 см баробар аст. Ҳаҷми ин пирамидаро ёбед.

265. Яке аз теғаҳои пирамидаи секунҷа 4 см ва ҳар як теғаи дигараш 3 см аст. Ҳаҷми пирамидаро ёбед.

266. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубест, ки теғааш 2 см мебошад. Ҳаҷми пирамидаи ACB_1D_1 – ро ёбед.

267. Теғаҳои пирамидаи асосаш чоркунҷаи $ABCD$ ба 13 см баробаранд. Маълум, ки $\angle BAD = 90^0$, $AB = 2\sqrt{21}$ см, $AD = 4$ см ва $BC = 6$ см мебошад. Ҳаҷми ин пирамидаро ёбед.

<u>Масъалаҳо барои такрор</u>

268. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи Хеопсро ёбед (ниг. ба масъалаи 262).

269. Масоҳати доираи дарункашидаи шашкунҷаи мунтазами дарозии тарафаш 4 см бударо ҳисоб кунед.

31. ҲАҶМИ ПИРАМИДАИ САРБУРИДА

Теоремаи 24. Ҳаҷми пирамидаи сарбурида ба сеяки зарби баландӣ бар ҳосили ҷамъи масоҳати асосҳою миёнаи геометрии онҳо баробар аст.

Исбот. Бигзор пирамидаи сарбурида дода шудааст (расми 76). S_1 ва S_2 ($S_1>S_2$) масоҳати асосҳо, H баландии ин пирамидаанд. Нишон медиҳем, ки ҳаҷми чунин пирамида бо формулаи

$$V=\frac{1}{3}H\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$$

РАСМИ 76

ҳисоб мешавад. Пирамидаи сарбуридаро то ҳосил кардани пирамида пурра менамоем. Бигзор L баландии ин пирамида аст. Ҳаҷми пирамидаи матлуб ба фарқи ҳаҷмҳои ду пирамида баробар аст: яке бо асоси масоҳаташ S_1 ва баландиаш L, дигарӣ бо асоси масоҳаташ S_2 ва баландиаш L-H. Ин пирамидаҳо ба ҳам монанданд (ниг. ба банди 12). Дар пирамидаҳои монанд нисбати масоҳати асосҳо ба квадрати нисбати баландиҳо баробар аст, бинобар ин $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{L}{L-H}\right)^2$. Яъне $\frac{L}{L-H}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$, $L\sqrt{S_2}=L\sqrt{S_1}-H\sqrt{S_1}$.

Аз ин ҷо $L=\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}$. Ҳаҷми пирамидаи сарбурида мувофиқи нишондоди дар боло қайдшуда

$$V=\frac{1}{3}\left[S_1\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}-S_2\left(\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}-H\right)\right]=$$

$$=\frac{H}{3}\cdot\frac{S_1\sqrt{S_1}-S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}=\frac{H}{3}\cdot\frac{\left(S_1\sqrt{S_1}-S_2\sqrt{S_2}\right)\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)}{\left(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}\right)\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)}=$$

$$=\frac{H}{3}\cdot\frac{S_1^2+\sqrt{S_1S_2}(S_1-S_2)-S_2^2}{S_1-S_2}=\frac{H}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$$

Формулаи заруриро ҳосил кардем ва бо ҳамин теоремаро исботшуда ҳисоб мекунем.

Масъала. Асосҳои пирамидаи сарбурида квадратҳои тарафашон 8 см ва 5 см мебошанд. Баландии ин пирамида 6 см аст. Ҳаҷмашро меёбем.

Ҳал. Аз сабаби квадрат будани асосҳо $S_1=8^2=64$ см², $S_2=5^2=25$ см² аст. Мувофиқи формулаи ҳаҷми пирамидаи сарбурида ҳаҷми матлуб:

$$V=\frac{H}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)=\frac{6}{3}\cdot\left(64+\sqrt{64\cdot 25}+25\right)=$$

$$=2(89+8\cdot 5)=2(89+40)=2\cdot 129=258\ см^3.$$

1. Чаро ҳангоми пурра намудани пирамидаи сарбурида ду пирамидаи монанд ҳосил мешавад? **2.** Кадом хосияти пирамидаҳои монанд дар исботи теорема истифода карда шудааст? **3.** Ҳаҷми пирамидаи сарбурида бо кадом формула ифода карда мешавад?

270. Чоҳ шакли пирамидаи сарбуридаи квадратиро дошта, чуқуриаш 1,5 м, тарафи асоси квадрати поёнаш 0,8 м ва болоаш 1,2 м аст. Вай чанд литр обро ғунҷонида метавонад?

271. Теғаи паҳлуии пирамидаи сарбуридаи чоркунҷаи мунтазам 3 м, тарафҳои асосҳо 5 м ва 1 м –анд. Ҳаҷми пирамидаро ёбед.

272. Масоҳати асосҳои пирамидаи сарбурида ба 245 м² ва 80 м², баландии пирамидаи пурракардашуда 35 м аст. Ҳаҷми пирамидаи сарбуридаро ёбед.

273. Баландии пирамидаи сарбурида 15 м ва ҳаҷми он 475 $м^3$ аст. Масоҳати асосҳо ҳамчун 4:9 нисбат доранд. Ин масоҳатҳоро ёбед.

274. Ҳаҷми пирамидаи сарбуридаи чоркунҷаи мунтазам ба 430 $м^3$, баландиаш ба 10 м ва тарафи яке аз асосҳояш 8 м аст. Тарафи асоси дигарашро ёбед.

275. Ҳаҷми пирамидаи сарбурида 76 $м^3$, баландиаш 6 м ва масоҳати яке аз асосҳо 18 $м^2$ аст. Масоҳати асоси дигарро ёбед.

276. Дар пирамидаи сарбурида фарқи масоҳатҳои асосҳо 6 $см^2$, баландӣ 9 см ва ҳаҷм 42 $см^3$ аст. Масоҳати асосҳоро ёбед.

277. Ҳаҷми пирамидаи сарбурида ба 1720 $м^3$, баландиаш 20 м ва тарафҳои мувофиқи ду асосаш ҳамчун 5:8 нисбат доранд. Масоҳати асосҳоро ёбед.

278. Дар пирамидаи сарбуридаи секунҷа, ки баландиаш 10 м аст, тарафҳои яке аз асосҳо ба 27 м, 29 м ва 52 м баробаранд. Периметри асоси дигар 72 м аст. Ҳаҷми пирамидаи сарбурида ёфта шавад.

<u>Масъалаҳо барои такрор</u>

279. Барои кадом қимати α векторҳои $\vec{a}(2; 3; -4)$ ва $\vec{b}(\alpha; -6; 8)$ параллеланд?

280. Дарозии ҳар як теғаи призмаи секунҷаи рост $2\sqrt{3}$ м аст. Ҳаҷми призмаро ёбед.

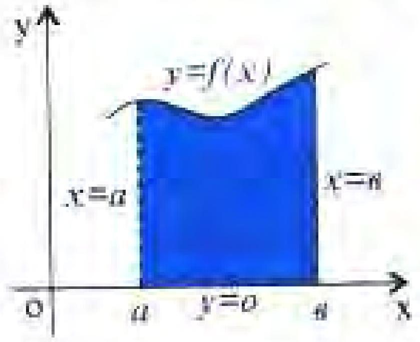
§5. ҲАҶМИ ҶИСМҲОИ ЧАРХЗАНӢ

32. ҲАҶМИ СИЛИНДРИ РОСТ

Ҳангоми омӯхтани татбиқи интеграл дар курси алгебра махсус қайд карда будем, ки яке аз муҳимтарин соҳаи татбиқи он ҳисоби ҳаҷми ҷисмҳои геометрӣ аст (ниг. ба «Алгебра-11», Душанбе, «Собириён», 2006, саҳ. 39). Дар ҳамон ҷо мо ин татбиқро наоварда таъкид карда будем, ки ин татбиқ дар курси геометрия муфассал омӯхта мешавад. Ҳоло акнун ин татбиқ дар мисоли ҳисоби ҳаҷми ҷисмҳои чархзанӣ муоина мешавад.

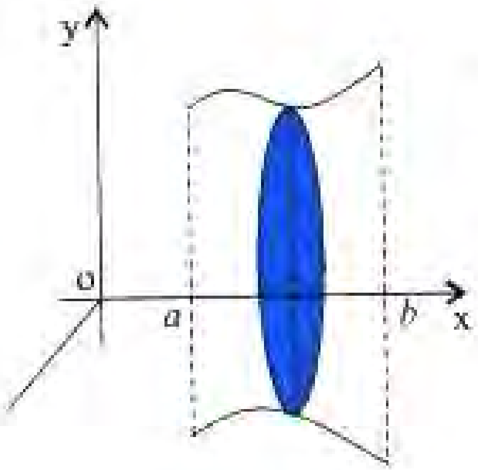
1. Ҳаҷми ҷисме, ки дар натиҷаи чархзании трапетсияи каҷхатта ҳосил мешавад. Бигзор дар порчаи $[a;b]$ функсияи ғайриманфии $y = f(x)$ дода шудааст.

Таъриф. Фигурае, ки бо графики функсия, тири абсисса ва хатҳои рости $x=a$, $x=b$ маҳдуд аст, *трапетсияи каҷхатта* ном дорад (расми 77).



РАСМИ 77

Ҳангоми дар атрофи тири абсисса чарх занондани трапетсияи каҷхатта фигурае ҳосил мекунем, ки вай *фигураи чархзанӣ* ном дорад. Буриши ҳамвории ба тири ox перпендикулярбуда бо ин фигураи чархзанӣ доира ё нуқта аст (расми 78).



РАСМИ 78

Бо $S(x)$ масоҳати ин доираро, ки марказаш дар нуқтаи x ҷойгир буда, радиусаш ба $f(x)$ баробар аст, ишорат мекунем. фаҳмост, ки $S(x) = \pi \ f^2(x)$ мебошад. Агар ҳаҷми ҳосилшударо бо V ишорат кунем, он гоҳ аз таърифи интеграл истифода намуда, нишон додан мумкин аст, ки

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \quad (1)$$

Ин формуларо априорӣ (беисбот) қабул карда, аз рӯи он ҳаҷми ҷисмҳои чархзаниро меёбем.

Масъалаи 1. Трапетсияи каҷхатта бо муодилаҳои $y = 2x - x^2$ ва $y = 0$ дода шудааст. Ҳаҷми ҷисмеро, ки дар натиҷаи чархзании ин трапетсия ҳосил мешавад, меёбем.

РАСМИ 79

Ҳал. Трапетсияи каҷхаттаро схемавӣ тасвир мекунем (расми 79). Мувофиқи формулаи (1) дорем:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\pi\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)dx=$$

$$=\pi\left[4\int_0^2 x^2dx-4\int_0^2 x^3dx+\int_0^2 x^4dx\right]=\pi\left[4\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2-4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2+\frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{32}{3}-2^4+\frac{2^5}{5}\right]=\pi\left(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}\right)=\pi\cdot\frac{160-240+96}{15}=\frac{16\pi}{15}$$

воҳиди кубӣ.

II. Ҳаҷми силиндри рост. Чӣ тавре қайд карда будем, силиндри ростро аёнан ҳамчун ҷисме, ки дар натиҷаи чарх задани росткунча дар атрофи яке аз тарафҳои худ ҳосил мешавад, тасаввур кардан мумкин аст (ниг. ба банди 15). Ба ин такя карда, аз рӯи формулаи (1) ҳаҷми чунин силиндрро меёбем.

Бигзор силиндри рости радиуси асосаш R ва баландиаш H дода шудааст. Ин гуна силиндрро дар натиҷаи дар атрофи тарафи H чарх занондани росткунҷаи тарафҳояш R ва H ҳосил кардан мумкин аст (расми 80) (инчунин ниг. ба расми 48-и банди 15). Агар тири абсиссаро аз рӯи тарафи H-и росткунча равон кунем, он гоҳ муодилаи тарафи

РАСМИ 80

муқобил $y=R$ мешавад. Яъне, дар ин ҳолат роли трапетсияи каҷхатаро росткунҷае, ки муодилаи тарафҳояш $y=0$, $y=f(x)=R$, $x=0$, $x=H$ аст, иҷро мекунад. Барои ҳамин мувофиқи формулаи (1) ҳаҷми силиндри рост

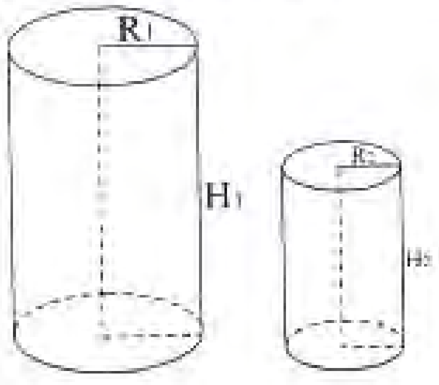
$$V=\pi\int_0^H f^2(x)dx=\pi\int_0^H R^2dx=\pi R^2H=S\cdot H\ .$$

Дар ин ҷо $S=\pi R^2$ масоҳати асоси силиндр мебошад, ки доираи радиусаш R аст. Ҳамин тариқ, дурустии теоремаи зерин нишон дода шудааст.

Теоремаи 25. Ҳаҷми силиндри рост ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.

Эзоҳи 1. Теоремаи 25 барои силиндри моил ҳам дуруст аст. Исботи онро намеорем.

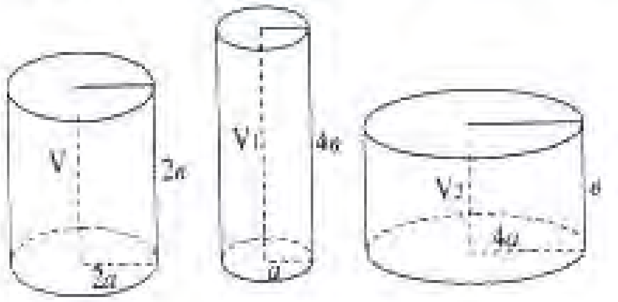
Эзоҳи 2. Нисбати ҳаҷмҳои ду силиндри рости монанд (расми 81) ба куби нисбати радиусҳояшон ё куби нисбати баландиҳояшон баробар аст, яъне



Расми 81

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3.$$

Масъалаи 2. Фирмаи саноати хӯрокворӣ дар қатори куттии мавҷуда боз истеҳсоли ду куттии навро пешниҳод кард, ки ҳар сеи онҳо силиндршакланд. Радиуси куттии якум аз радиуси куттии мавҷуда ду маротиба хурд, баландиаш ду маротиба зиёд аст. Мувофиқан, радиуси куттии дуюм нисбат ба радиуси куттии мавҷуда ду маротиба зиёд ва баландиаш ду маротиба кам аст. Нархи ҳар се куттӣ якхелаанд. Харидани кадом куттӣ беҳтар (фоидаовар) аст?



Расми 82

Ҳал. Аз рӯи додашудаҳои масъала ҳаҷмҳои куттиҳоро меёбем (расми 82).

$$V = \pi(2a)^2 \cdot 2b = 8\pi a^2 b,$$

$$V_1 = \pi a^2 \cdot 4b = 4\pi a^2 b,$$

$$V_2 = \pi(4a)^2 \cdot b = 16\pi a^2 b.$$

Мебинем, ки ҳаҷми куттии дуюм аз ҳаҷми куттии мавҷуда ду ва аз ҳаҷми куттии якум 4 маротиба зиёд аст. Пас, харидани кутии сеюм муфид мебошад.

Масъалаи 3. Ҳосили ҷамъи ҳаҷми ду силиндри рости монанд 140 см^3 аст. Масоҳати сатҳҳои паҳлуии онҳо ҳамчун 4:9 нисбат доранд. Ҳаҷми ҳар як силиндрро меёбем.

Ҳал. Бигзор V_1 ва V_2, S_1 ва S_2, R_1 ва R_2 мувофиқан ҳаҷм, масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва радиуси силиндрҳо мебошанд. Мувофиқи хосияти монандии силиндрҳо (ниг. ба банди 17) доро ҳастем:

$\frac{4}{9}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{R_1^2}{R_2^2}$, яъне $\frac{R_1}{R_2}=\frac{2}{3}$. Баъд, аз рӯи эзоҳи 2

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}.$$

Аз ин ҷо $V_1=\frac{8}{27}V_2$.

Аз тарафи дигар, $V_1+V_2=140$ ё $\frac{8}{27}V_2+V_2=140$, $\frac{35}{27}V_2=140$, $V_2=\frac{140\cdot 27}{35}=4\cdot 27=108$. $V_1=140-V_2=140-108=32$.

Ҷавоб. 32 см^3 ва 108 см^3.

---

1. Чӣ гуна фигураро трапетсияи каҷхатта меноманд? **2.** Ҳаҷми фигураеро, ки дар натиҷаи дар гирди тири абсисса чарх задани трапетсияи каҷхатта ҳосил мешавад, бо кадом формула ҳисоб мекунанд? **3.** Ҳаҷми силиндри рост ба чӣ баробар аст? Ҳаҷми силиндри моил - чӣ?

---

281. Ҳаҷми ҷисмеро, ки дар натиҷаи чархзании трапетсияи каҷхаттаи сарҳадаш бо муодилаҳои: а) $y=x^2$, $x=1$, $y=0$; б) $y=x^3$, $x=2$, $y=0$; в) $y=1-x^3$, $x=2$, $y=0$ додашуда, дар атрофи тири абсисса ҳосил мешавад, ҳисоб кунед.

282. Радиус ва баландии силиндр дода шудааст: а) $R=7$ см, $H=5$ см; б) $R=3$ м, $H=4$ м. Ҳаҷми силиндрро ёбед.

283. Баландии силиндр ба дучандаи радиусаш баробар аст. Ҳаҷми силиндр 128π см^3 аст. Баландӣ ва масоҳати сатҳи паҳлуии силиндрро ёбед.

284. Диагонали росткунҷа бо яке аз тарафҳояш кунҷи α-ро ташкил медиҳад. Нисбати ҳаҷмҳои силиндрҳоеро, ки ҳангоми дар гирди тарафҳои ҳамсоя чарх задани росткунҷа ҳосил мешаванд, ёбед.

285*. Зарфи шишагии обдор, ки шакли силиндрро дорад, уфуқӣ хобонида шудааст. Агар радиуси асос 6 см, баландии зарф 10 см ва баландии об аз замин 3 см бошад, ҳаҷми оби дар зарфбударо ёбед.

286. 25 метр сими мисӣ дорои массаи 100,7 г аст. Диаметри симро ёбед (зичии мис 8,94 г/см³ мебошад).

287. Қубури қӯрғошимӣ (зичии қӯрғошим 11,4 г/см³), ки ғафсии деворчааш 4 мм мебошад, дорои диаметри дохилии 13 мм аст. 25 м чунин қубур чӣ қадар масса дорад?

Масъалаҳо барои такрор

288. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}(-1; 2; -2)$ ва $\vec{b}(6; 3; -6)$ –ро ёбед.

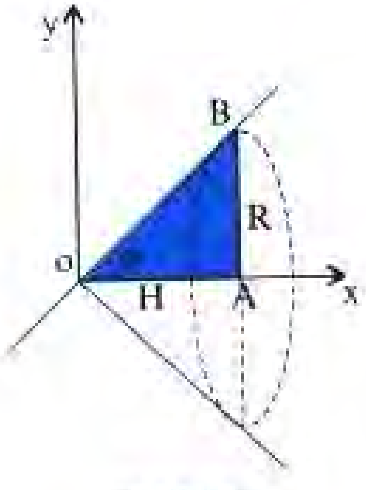
289. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам теғаи паҳлуӣ ба $6\sqrt{2}$ см ва кунҷи байни ин теға ва ҳамвории асос ба 45^0 баробар аст. Ҳаҷми ин пирамидаро ҳисоб кунед.

290. Нисбати ҳаҷмҳои тетраэдри мутлақо мунтазам ва пирамидаи чоркунҷаи мунтазамро, ки теғаашон a аст, ёбед.

33. ҲАҶМИ КОНУСИ РОСТ

Теоремаи 26. Ҳаҷми конуси рост ба сеяки ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.

Исбот. Чи тавре дар банди 18 қайд кардем, конуси рост ҷисми геометриест, ки ҳангоми дар атрофи катет чарх занондани секунҷаи росткунҷа ҳосил мешавад. Бигзор конус ҳангоми дар атрофи хати рости OA чарх задани секунҷаи росткунҷаи OAB $(\angle A=90^0)$ ҳосил шудааст (расми 83). Дар ҳамвории OAB системаи росткунҷаи координатавиро, ки ибтидоаш нуқтаи O ва тири абсиссааш аз рӯи хати OA равон карда шудааст, дохил мекунем. Муодилаи хати рости OB $y=kx$ мебошад, ки $k = tg\varphi = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{R}{H}$ аст. Яъне, муодилаи



РАСМИ 83

хати рости OB $y = \dfrac{R}{H}x$ аст. (Секунҷаи OAB ҳолати хусусии трапетсияи каҷхатта мебошад. Вай бо тири абсисса, графики функсияи $y = \frac{R}{H}x$ ва хати рости $x=R$ маҳдуд аст.)

Барои ёфтани ҳаҷми конус формулаи (1) –и банди 32 –ро татбиқ карда ҳосил мекунем:

$$V = \pi\int_O^H y^2(x)dx = \pi\int_O^H\left(\frac{Rx}{H}\right)^2 dx = \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2\int_O^H x^2dx = \pi\cdot\left(\frac{R}{H}\right)^2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_O^H =$$

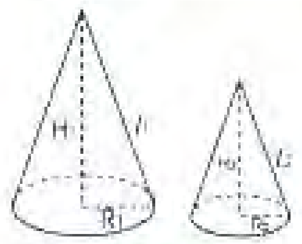
$$= \frac{\pi R^2H^3}{H^2\cdot 3} = \frac{\pi R^2\cdot H}{3} = \frac{S_{асос}\cdot H}{3}.$$

Теорема исбот шуд.

Эзоҳи 1. Теорема барои конуси моил низ дуруст аст. Исботро барои конуси моил намеорем.

Эзоҳи 2. Нисбати ҳаҷмҳои ду конуси рости монанд (расми 84) ба куби нисбати радиусҳояшон ё ба куби нисбати баландиҳояшон, ё ки ба куби нисбати ташкилдиҳандаҳояшон баробар аст:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3.$$



РАСМИ 84

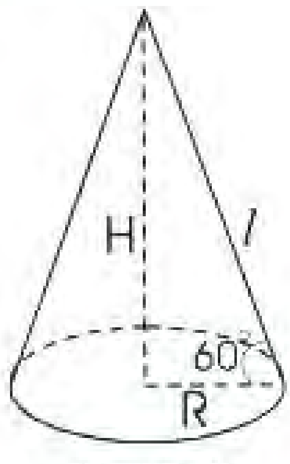
Масъалаи 1. Ташкилдиҳандаи конус 6 см буда, бо ҳамвории асос кунҷи 60^0 –ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми ин конусро меёбем.

Ҳал. Нақшаи заруриро сохта (расми 85) мебинем, ки $\frac{H}{l} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$H = \frac{\sqrt{3}l}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 6}{2} = 3\sqrt{3}$, $\quad \frac{R}{l} = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$,

$R = \frac{l}{2} = \frac{6}{2} = 3$ см. Пас, мувофиқи тасдиқи теорема

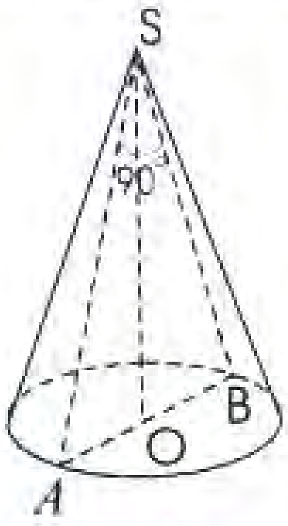
$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi\cdot 3^2\cdot 3\sqrt{3}}{3} = 9\sqrt{3}\pi \text{ см}^3.$$



РАСМИ 85

Масъалаи 2. Буриши тирии конус секунчаи росткунчаи баробарпаҳлуест, ки масоҳаташ 9 м² мебошад. Ҳаҷми конусро меёбем.

Ҳал. Бигзор SAB буриши тирии конус аст (расми 86). SO баландӣ ва $SA=SB$ ташкилдиҳандаҳоянд. Чи тавре медонем (ниг. ба банди 19) асоси секунчаи буриш диаметри асоси конус мебошад. Секунчаи SOB баробарпаҳлу аст, чунки $\angle BSO=\angle OBS=45^0$. Пас $H=SO=OB=R$, яъне баландии конус ба радиуси асос баробар аст. Радиуси асосро меёбем. Мувофиқи шарти масъала



РАСМИ 86

$9м^2 = S_{бур} = \dfrac{AB \cdot SO}{2} = \dfrac{2R \cdot R}{2} = R^2$, яъне

$R=3$ м ва $V = \dfrac{\pi R^2 H}{3} = \dfrac{\pi R^3}{3} = \dfrac{\pi \cdot 3^3}{3} = 9\pi$ м³.

1. Ҳаҷми конуси рост ба чӣ баробар аст? **2.** Магар теорема барои конуси моил дуруст аст? **3**. Формулаи ҳаҷми конуси рост аз баландӣ ва радиуси асос чӣ гуна вобастагӣ дорад? **4**. Магар гуфтан мумкин аст, ки хосияти нисбати ҳаҷмҳои ду конуси монанд хулосаи аломати монандии секунчаҳои росткунчаанд?

291. Баландии конус 10 см ва радиуси давраи асосаш 3 см мебошад. Ҳаҷми конусро ёбед.

292. Баландии конус 9 см, ташкилдиҳандааш 15 см аст. Ҳаҷми ин конусро ёбед.

293. Радиуси яке аз ду конусҳои монанд аз радиуси дигараш 4 маротиба зиёд аст. Нисбати ҳаҷмҳои ин конусҳоро ёбед.

294. Баландии ғарами ғалладона, ки шакли конусро дорад, 2,4 м буда, дарозии давраи асосаш 20 м аст. Дар ғарам чӣ қадар ғалладона ҳаст, агар массаи 1 м³-и ғалладона 750 кг бошад?

295. Регтӯда шакли конусеро дорад, ки радиуси асосаш 2 м ва ташкилдиҳандааш 2,5 м аст. Ҳаҷми регтӯдаро ёбед.

296. Дарозии ташкилдиҳандаи конус l, дарозии давраи асосаш C аст. Ҳаҷми конусро ёбед.

297. Баландии конуси рост аз баландии конуси дигар ду маротиба зиёд аст. Радиуси асоси якум ба нисфи радиуси асоси конуси дуюм баробар аст. Нисбати ҳаҷмҳои ин конусҳоро ёбед.

298. Секунҷаи баробартарафи тарафаш a дар гирди тарафи худ чарх мезанад. Ҳаҷми ҷисми ҳосилшударо ҳисоб кунед.

299*. Секунҷаи росткунҷа, ки катетҳояш a ва b-анд, дар атрофи гипотенуза чарх мезанад. Ҳаҷми ҷисми ҳосилмешударо ёбед.

300*. Секунҷаи росткунҷаи катеташ a, ки кунҷи ба он часпидааш β аст, дар атрофи гипотенуза чарх мезанад. Ҳаҷми ҷисми ҳосилмешударо ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

301. Векторҳои $\vec{a}(6;\ 2;\ 1)$ ва $\vec{b}(0;\ -1;\ 2)$ дода шудаанд. Дарозии вектори $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ёфта шавад.

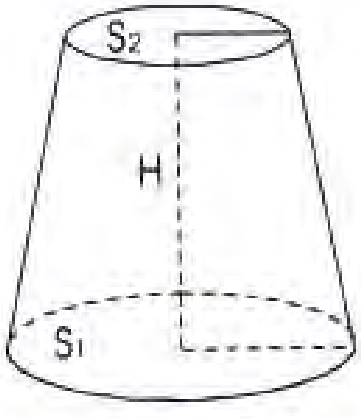
302. Буриши тирии силиндр квадратест, ки диагоналаш ба 4 см баробар аст. Ҳаҷми силиндрро ёбед.

34. ҲАҶМИ КОНУСИ САРБУРИДА

Ду тарзи ҳисоб кардани ҳаҷми конуси сарбуридаро муоина мекунем: ҳисоби ҳаҷм ҳамчун ҷисми чархзанӣ ва ҳисоби ҳаҷм бо истифодаи вобастагиҳои байни ҷисмҳои монанд.

Теоремаи 27. Ҳаҷми конуси сарбурида ба сеяки ҳосили зарби баландӣ бар суммаи масоҳати асосҳо ва масоҳати миёнаи геометрии онҳо баробар аст.

Исбот. Бигзор конуси сарбуридаи баландиаш H, радиусҳои асосҳояш R_1 ва R_2 $(R_1 > R_2)$, масоҳати асосҳояш $S_1 = \pi R_1^2$ ва $S_2 = \pi R_2^2$ дода шудааст (расми 87). Нишон медиҳем, ки ҳаҷми он бо формулаи

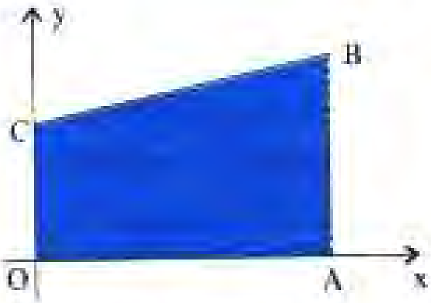


РАСМИ 87

$$V = \frac{H}{3}\left[S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right]$$

ҳисоб карда мешавад. Чӣ тавре қайд кардем, ду тарзи ҳосил кардани ин формуларо меорем.

1). Дар банди 20 нишон дода будем, ки конуси сарбуридаро ҳамчун ҷисме, ки дар натиҷаи чарх занондани трапетсияи росткунҷа дар гирди тарафи паҳлуии ба асосҳо перпендикуляр пайдо мешавад, тасаввур кардан мумкин аст. Агар дар системаи росткунҷаи координатавӣ трапетсияи росткунҷаи $OABC$ – ро (расми 88), ки қуллаҳояш нуқтаҳои $A\ (H;\ 0)$, $B\ (H;\ R_2)$ ва $C\ (0;\ R_1)$ аст, гирифта, онро дар атрофи тири абсисса чарх занонем, он гоҳ конуси сарбуридаи мазкурро ҳосил мекунем. Муодилаи хати рости CB –ро ҳамчун муодилаи хати рости аз болои ду нуқта мегузаштагӣ менависем:



РАСМИ 88

$$\frac{y-R_1}{R_2-R_1} = \frac{x-0}{H-0}, \qquad \text{яъне} \quad y = R_1 + \frac{x}{H}(R_2 - R_1).$$

Мувофиқи формулаи (1)-и банди 32 ҳаҷми конуси сарбурида

$$V = \pi\int_0^H y^2 dx = \pi\int_0^H \left[R_1 + \frac{x}{H}(R_2 - R_1)\right]^2 dx =$$

$$= \pi\int_0^H \left[R_1^2 + \frac{2x}{H}(R_2 - R_1)\cdot R_1 + \frac{x^2}{H^2}(R_2 - R_1)^2\right]dx =$$

$$= \pi\left[\int_0^H R_1^2 dx + \frac{2(R_2 - R_1)\cdot R_1}{H}\cdot\int_0^H x dx + \frac{(R_2 - R_1)^2}{H^2}\cdot\int_0^H x^2 dx\right] =$$

$$= \pi\left[R_1^2 x\Big|_0^H + \frac{2(R_2 - R_1)\cdot R_1}{H}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^H + \frac{(R_2 - R_1)^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H\right] =$$

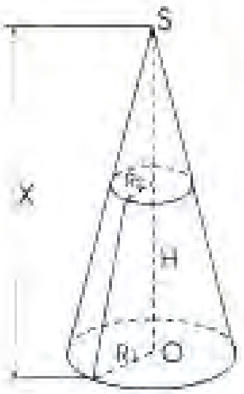
$$= \pi\left[R_1^2 H + (R_2 - R_1)\cdot R_1 \cdot H + \frac{(R_2 - R_1)^2 \cdot H}{3}\right] =$$

$$= \frac{\pi H}{3}\left[R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right].$$

Агар ба эътибор гирем, ки $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$ аст, пас навиштан мумкин, ки

$$V = \frac{H}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

2). Тарзи дигари ҳосил кардани формулаи ҳаҷми конуси сарбурида ба истифодаи хосияти монандии конусҳо асос ёфтааст. (Ин тарз айнан тарзи ҳосил кардани ҳаҷми пирамидаи сарбуридаро мемонад.)



РАСМИ 89

Конуси сарбуридаи додашударо то ҳосил шудани конус пурра менамоем (расми 89). Агар x баландии ин конус бошад, он гоҳ ҳаҷми конуси сарбурида ба фарқи ҳаҷмҳои ду конуси пурра баробар аст: конуси баландиаш x, радиуси асосаш R_1 ва конуси баландиаш x-H, радиуси асосаш R_2. Аз монандии конусҳо бармеояд:

$$\frac{x}{x - H} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{ё} \quad x = \frac{HR_1}{R_1 - R_2}.$$ Барои ҳамин

$$V = \frac{1}{3}\left[\pi R_1^2 \cdot \frac{HR_1}{R_1 - R_2} - \pi R_2^2\left(\frac{HR_1}{R_1 - R_2} - H\right)\right] = \frac{1}{3}\pi H \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} =$$

$$= \frac{\pi H}{3}\cdot\left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right) = \frac{H}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right).$$

Формулаи зарурӣ барои ҳаҷм ҳосил шудааст. Бо ҳамин теоремаро пурра исботшуда ҳисобидан мумкин аст.

Масъалаи 1. Чалак (бушка) шакли силиндрӣ дошта, баландиаш 1,9 м ва диаметри асосаш 1 м аст. Диаметрҳои асосҳои сатил 20 см ва 30 см, баландиаш 25 см мебошад. Муайян мекунем, ки дар чалак чанд сатили пурраи об мегунҷад.

Ҳал. Аввал ҳаҷми чалакро меёбем. Агар R_r, H_r, V_r мувофиқан радиус, баландӣ ва ҳаҷми чалак бошанд, он гоҳ мувофиқи формулаи банди 32

$$V_r = \pi R_r^2 H_r = \pi (50\ см)^2 \cdot 190\ см = 475000\pi\ см^3.$$

Агар H, R_1, R_2 баландӣ, радиуси асосҳои сатил бошанд, он гоҳ мувофиқи шарти масъала $H=25$ см, $R_1=10$ см, $R_2=15$ см мебошанд. Бинобар ин ҳаҷми сатил (ҳамчун ҳаҷми конуси сарбурида)

$$V_c = \frac{\pi H}{3}\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot \left(10^2 + 10 \cdot 15 + 15^2\right) = \frac{11875}{3}\pi\ см^3.$$

Ҳамин тариқ,

$$\frac{V_r}{V_c} = \frac{475000\pi\ см^3}{\frac{11875}{3}\pi\ см^3} = 120.$$

Ҷавоб. Ғунҷоиши чалак ба 120 сатили бо об пур баробар аст.

1. Ҳаҷми конуси сарбурида бо кадом формула ҳисоб карда мешавад? **2.** Ин формуларо бо кадом тарзҳо ҳосил кардан мумкин аст?

303. Радиуси асосҳои конуси сарбурида 4 см ва 6 см, баландиаш 6 см аст. Ҳаҷмашро ёбед.

304. Радиуси асосҳои конуси сарбурида R ва r буда, ташкилдиҳанда бо асос кунҷи 45^0 –ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми конусро ёбед.

305. Ҳаҷми конуси сарбурида 584π см^3 аст. Радиуси асосҳояш 10 см ва 7 см мебошанд. Баландии конусро ёбед.

306. Ҳаҷми конуси сарбурида 248π см^3, баландиаш 8 см, радиуси яке аз асосҳояш 4 см аст. Радиуси асоси дигарашро ёбед.

307*. Трапетсияи баробарпаҳлуи тарафҳои параллелаш 7 см ва 17 см, ки масоҳаташ 144 см^2 аст, дар атрофи баландии аз миёнаҷои паҳлуҳо гузаронидашуда чарх мезанад. Ҳаҷми ҷисми ҳосилмешударо ёбед.

308. Дар конуси сарбурида радиусҳои асосҳо ва ташкилдиҳанда ҳамчун 4:11:25 нисбат доранд. Ҳаҷм ба

181π м³ баробар аст. Радиусҳои асосҳо ва ташкилдиҳандаро ёбед.

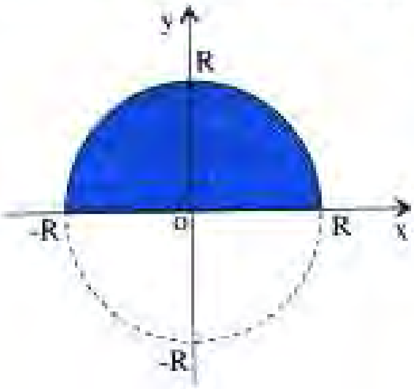
Масъалаҳо барои такрор

309. Калонтарин диагонали призмаи шашкунҷаи мунтазам ба 4 м баробар буда, бо теғаи паҳлуӣ кунҷи 30^0-ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми призмаро ёбед.

310. Дар секунҷаи ABC $BC=3\sqrt{3}$, $AC=15$, $\angle ABC=60^0$ аст. Синуси кунҷи A –ро ёбед.

35. ҲАҶМИ КУРА ВА ҚИСМҲОИ ОН

I. Ҳаҷми кура. Бигзор ҳаҷми кураи радиусаш R -ро ёфтан зарур бошад. Агар нимдоираи радиусаш R -ро гирем (расми 90) ва онро дар атрофи диаметраш чарх занонем, он гоҳ кураи мазкурро ҳосил мекунем (ниг. ба банди 23). Яъне, агар нимдоираро гирему ибтидои системаи декартии координатавиро дар марказаш ҷойгир карда, тири абсиссаро аз рӯи диаметраш равон намоем, он гоҳ кура дар натиҷаи дар атрофи ҳамин тир чарх задани нимдоира ҳосил мешавад (расми 90). Муодилаи нимдоира, ки дар он $y \geq 0$ аст, $x^2+y^2=R^2$ мебошад. Яъне,



Расми 90

$y^2=R^2-x^2$ ё $y=+\sqrt{R^2-x^2}$. Пас, бо истифодаи формулаи (1) –и банди 32 ҳаҷми кураро ёфтан мумкин аст:

$$V=\pi\int_{-R}^{R}y^2(x)dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=$$

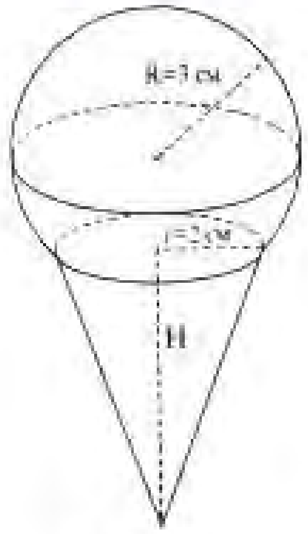
$$=\pi\left(R^2\cdot R-\frac{R^3}{3}-R^2\cdot(-R)+\frac{(-R)^3}{3}\right)=\pi\left(2R^3-\frac{2}{3}R^3\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ҳамин тариқ, дурустии теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 28. Ҳаҷми кураи радиусаш R бо формулаи $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ҳисоб карда мешавад.

Агар ба эътибор гирем, ки диаметри кура $D = 2R$ аст, он гоҳ $V = \frac{1}{6}\pi D^3$ мешавад.

Масъалаи 1. Як лӯнда яхмоси шакли куравии диаметраш 6 см дар болои зарфи яхмосӣ, ки шакли конусро дошта, диаметри асосаш 4 см аст, гузошта шудааст. Баландии ин конусро муайян мекунем, то ки ҳангоми об шудан яхмоси моеъро гунҷонида тавонад.



РАСМИ 91

Ҳал. Дар расми 91 лӯндаи яхмоси (амалан ҳамчун кура) дорои радиуси $R = 3$ см ва конуси радиуси асосаш $r = 2$ см оварда шудаанд. Барои он ки онҳо талаби масъаларо қонеъ намоянд, лозим аст, ки дорои ҳаҷмҳои баробар бошанд, яъне

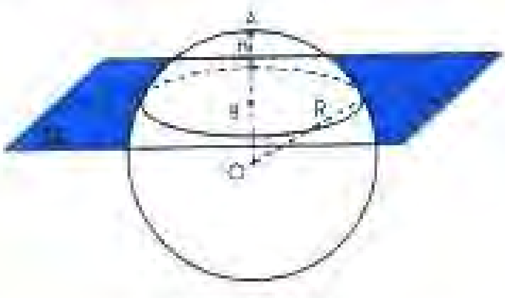
$$V_{кура} = V_{конус} \quad \text{ё} \quad \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H .$$

Додашудаҳои масъаларо истифода карда, ҳосил мекунем:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot H .$$

Аз ин ҷо $H = 27$ см.

Ҷавоб. Барои он ки конус яхмоси обшударо ғунҷонад зарур аст, ки баландиаш 27 см бошад.



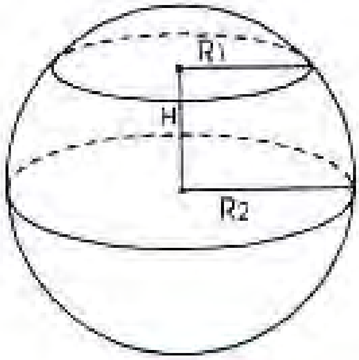
РАСМИ 92

II. Ҳаҷми сегменти куравӣ. Қисми кура, ки бо ягон ҳамворӣ бурида мешавад, *сегменти куравӣ* ном дорад. Ҳамвории бурандаи α, ки аз нуқтаи *B* мегузарад (расми 92), кураро ба ду сегменти куравӣ ҷудо мекунад. Порчаи хати росте, ки ба ҳамвории α перпендикуляр мебошад, *баландии* сегмент ном дорад. Агар радиуси кура R, баландии сегмент H (дар расми 92 $H = AB$) бошад, он гоҳ

$$V_{\text{сег.кур.}} = \pi \int_{R-H}^{R} \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R} =$$

$$= \pi\left[R^2(R-(R-H)) - \frac{1}{3}\left(R^3 - (R-H)^3\right)\right] = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right).$$

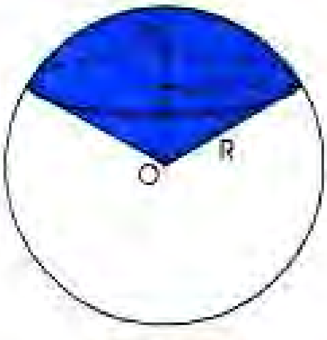
III. Ҳаҷми қабати куравӣ. *Қабати куравӣ* гуфта қисми кураро меноманд, ки дар байни ду ҳамвории кураро буранда ҷойгир аст (расми 93). Давраҳое, ки дар буришҳо пайдо мешаванд, *асосҳои* қабати куравӣ, масофаи байни ҳамвориҳо бошад, *баландии* қабати куравӣ ном дорад. Ҳаҷми қабати куравӣ ба фарқи ҳаҷмҳои ду сегменти куравӣ баробар аст. Нишон додан мумкин аст, ки агар R_1 ва R_2 радиуси асосҳо, H баландии қабати куравӣ бошанд, он гоҳ ҳаҷми қабат бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:



РАСМИ 93

$$V = \frac{\pi H}{6}\left(H^2 + 3R_1^2 + 3R_2^2\right).$$

IV. Ҳаҷми сектори куравӣ (конуси куравӣ). *Сектори куравӣ ё конуси куравӣ* ҷисмест, ки аз сегменти куравӣ ва конус ҳосил мешавад: агар сегменти куравӣ аз нимкура хурд бошад, он гоҳ сегменти куравӣ бо конусе, ки қуллааш дар маркази кура буда, асосаш асоси ҳамин сегмент аст, пурра карда мешавад (расми 94). Рафту агар сегмент аз нимкура калон бошад, он гоҳ конуси қайдшуда аз он хориҷ карда мешавад. Ҳаҷми сектори куравӣ бо воситаи ҷамъ ё тарҳ кардани ҳаҷмҳои мувофиқи сегмент ва конус ҳосил мешавад. Агар R радиуси кура ва H баландии сегменти

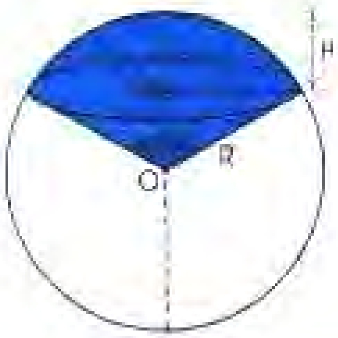


РАСМИ 94

куравӣ бошад, он гоҳ ҳаҷми сектор бо формулаи $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$ ифода меёбад.

Масъалаи 2. Сектори доиравии дорои кунҷи 120^0 ва радиуси R дар атрофи диаметре, ки секторро ба ду қисм ҷудо мекунад, чарх мезанад. Ҳаҷми ҷисми дар натиҷаи чархзанӣ ҳосилмешударо меёбем.

Ҳал. Ҷисме, ки дар натиҷаи чунин чархзанӣ ҳосил мешавад, конуси куравӣ мебошад (расми 95). Барои ёфтани ҳаҷми конуси куравӣ зарур аст, ки баландии қишри куравиро донем. Аз сабаби он ки диаметр кунҷи марказиро ба ду ҳисса ҷудо мекунад, дорем



Расми 95

$$H = R - R\cdot\cos 60^0 = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}.$$

Барои ҳамин ҳаҷми конуси доиравӣ ба

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2\cdot H = \frac{2}{3}\pi R^2\cdot\frac{R}{2} = \frac{\pi R^3}{3}$$ баробар аст.

Ҷавоб: $\frac{\pi R^3}{3}$.

---

1. Ҳаҷми кура бо кадом формула ҳисоб карда мешавад? **2.** Чӣ гуна ҷисмро сегменти куравӣ мегӯянд? Формулаи ҳаҷмашро нависед ва онро шарҳ диҳед. **3.** Қабати куравӣ чист? Ҳаҷми ин ҷисм ба фарқи ҳаҷмҳои кадом ҷисмҳо баробар аст? **4.** Сектори куравӣ ё конуси куравӣ чӣ гуна ҷисм аст? Ҳаҷмаш бо кадом формула ҳисоб мешавад?

---

311. Ҳаҷми кура чанд маротиба меафзояд, агар радиуси онро 4 маротиба зиёд намоем.

312. Агар ду кураи чӯянии диаметрашон ба 25 см ва ба 35 см баробарро гудохта, аз онҳо як кура созем, диаметри ин кура ба чанд баробар мешавад?

313. Кураи кӯрғошимии диаметраш 3 см бударо рехтан лозим аст. Барои ин чанд дона кураи кӯрғошимии диаметраш 5 мм зарур аст?

314*. Маълум, ки радиусҳои се кура ҳамчун 1:2:3 нисбат доранд. Исбот кунед, ки ҳаҷми кураи калон аз суммаи ҳаҷмҳои кураҳои хурд се маротиба калон аст.

315. Резервуари (зарфи) об аз нимкураи радиусаш 3,5 м ва силиндри радиуси асосаш ба ҳамин адад баробар иборат аст. Баландии силиндр бояд чӣ қадар бошад, то ки резервуар 200 $м^3$ обро ғунҷонад?

316. Кура аз мавод сохта шуда, диаметри берунааш 18 см, паҳнии деворчаҳо 3 см аст. Ҳаҷми деворчаҳоро ёбед.

317*. Баландии сегменти куравӣ 0,4 ҳиссаи радиуси кураро ташкил медиҳад. Ҳаҷми ин сегмент кадом ҳиссаи ҳаҷми силиндрро, ки ҳамон радиуси асос ва баландиро дорад, ташкил медиҳад?

318. Ҳаҷми сектори куравиро, ки радиуси давраи асоси он 60 см ва радиуси кура 75 см аст, ҳисоб кунед.

319*. Радиуси асосҳои қабати куравӣ ба 3 м ва 4 м баробар аст. Радиуси сатҳи куравии он бошад 5 м мебошад. Ҳаҷми қабатро ёбед.

320*. Дар курае, ки радиусаш 65 см аст, ду ҳамвории ба ҳам параллели аз марказ дар масофаҳои 16 см ва 25 см воқеъбуда гузаронида шудаанд. Ҳаҷми қисми кураро, ки дар байни ҳамвориҳо воқеъ аст, ҳисоб кунед.

321. Ҳаҷми кура 12π $см^3$ аст. Ҳаҷми куберо ёбед, ки масоҳати сатҳаш аз масоҳати доираи калони кураи мазкур 6 маротиба зиёд аст.

Масъалаҳо барои такрор

322. Диагонали куб 3 м аст. Масоҳати сатҳи пурраи онро ёбед.

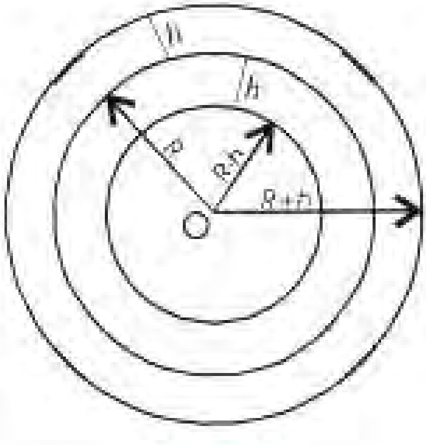
323. Масоҳати секунҷаи баробарпаҳлуи росткунҷаи гипотенузааш 8 см бударо ёбед.

36. МАСОҲАТИ СФЕРА

Аз сабаби он ки сфераро дар ҳамворӣ бурида паҳн кардан номумкин аст, масоҳати сфераро (сатҳи кураро) бо ёрии паҳнкунӣ ёфтан мумкин нест, чуноне ки масоҳати сатҳи паҳлуии силиндру конусро ёфта будем. Бинобар ин барои ёфтани масоҳати ин сатҳ аз таърифи ҷиддии геометрии масоҳати сатҳ истифода мекунем: *Бигзор* F *сатҳи ҷисми додашуда аст. Ҷисми сатҳаш* F_h *–ро месозем,* *ки ҳар як нуқтаи F_h аз ягон нуқтаи F дар масофаи на зиёда аз h ҷойгир аст.* Бигзор V_h ҳаҷми ҷисми сатҳаш F_h мебошад.

Таъриф. *Масоҳати сатҳи F* гуфта бузургиеро, ки ҳангоми ниҳоят хурд будани h нисбати $\frac{V_h}{2h}$ ба он наздик аст (яъне, ҳудуди ин нисбатро ҳангоми ба нул майл кардани h) меноманд.

Ҳамин тариқ, байни масоҳати сатҳ $S_{cam\chi}^{(h)}$ ва ҳаҷм V_h вобастагии $\frac{V_h}{2h} = S_{na\chi\lambda}^{(h)} + C \cdot h^k$, ки дар ин ҷо C доимӣ ва $k > 0$ аст, ҷой дорад. Нишон додан мумкин аст, ки масоҳатҳои сатҳҳои паҳлуии призма, пирамида ва ҷисмҳои чархзанӣ - силиндру конусро бо истифодаи баробарии болоӣ ёфтан мумкин аст.



РАСМИ 96

Ҳоло аз ин баробарӣ истифода карда, масоҳати сфераро меёбем. Ба сифати ҷисми сатҳаш F_h, ки дар бораи дар таъриф сухан меравад, қабати дар байни ду сфераи консентрикӣ (яке дар дохили дигаре) бударо, ки радиусҳояшон $R+h$ ва $R-h$ мебошанд, гирифтан мумкин аст (расми 96). Дар ин ҷо R радиуси кура мебошад. Ҳаҷми ин ҷисм ба фарқи байни ҳаҷмҳои кураҳои радиусашон $R+h$ ва $R-h$ баробар аст:

$$V_h = \frac{4\pi}{3}\left[(R+h)^3 - (R-h)^3\right] = \frac{4\pi}{3}\left(6hR^2 + 2h^3\right).$$

Аз ин ҷо

$$\frac{V_h}{2h} = \frac{4\pi}{3 \cdot 2h}\left(6hR^2 + 2h^3\right) = 4\pi\left(R^2 + \frac{h^3}{3}\right) = 4\pi R^2\left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right).$$

Ин баробарӣ нишон медиҳад, ки нисбати $\dfrac{V_h}{2h}$ -ро бо саҳеҳии дилхоҳ ба адади $4\pi R^2$ наздик кунонидан мумкин аст. Инак, **масоҳати сфераи радиусаш R ба $4\pi R^2$ баробар аст: $S = 4\pi R^2$.**

Эзоҳи 1. Формулаи $S = 4\pi R^2$ нишон медиҳад, ки $S = S(R)$ ба ҳосилаи ҳаҷм $V = V(R) = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ нисбати радиус баробар аст, яъне

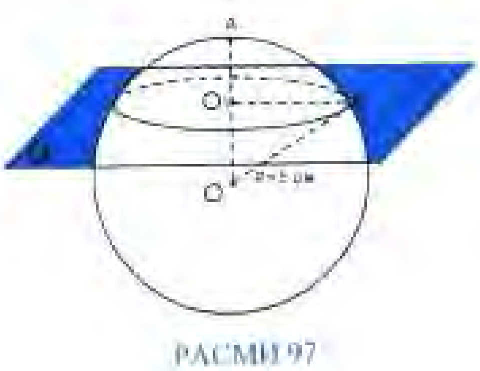
$$V' = V'(R) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = \frac{4}{3}\pi\left(R^3\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 = 4\pi R^2 = S(R) = S.$$

Аз ин ҷо, агар таърифи интегралро ба ёд орем, низ бармеояд, ки

$$V = V(R) = \int_0^R S(R)dR.$$

Эзоҳи 2. Масоҳати сегменти сферавӣ (сатҳи сегменти куравӣ) (ниг. ба расми 92) бо формулаи $S = 2\pi RH$; масоҳати қабати сферавӣ (сатҳи қабати куравӣ) (ниг. ба расми 93) бо формулаи $S = 2\pi RH$ (бе масоҳати асосҳои поёнӣ ва болоӣ); масоҳати сектори сферавӣ (сатҳи сектори куравӣ) (ниг. ба расми 94) бо формулаи $S = \pi R(2H + r)$ ҳисоб карда мешавад.

Масъала. Сфераи радиусаш 5 см бо ҳамворие, ки аз маркази сфера дар масофаи 3 см воқеъ аст, бурида мешавад. Масоҳати пурраи сегменти сферавии асоси хурдро меёбем.



РАСМИ 97

Ҳал. Аввал баландии қабати сферавӣ ва радиуси давраи хурдро, ки онро ҳамворӣ ҷудо менамояд меёбем. Мувофиқи додашудаҳои масъала $OA=OB=R=5$ см, $OO_1 = 3$ см, ки дар ин ҷо O маркази сфера ва O_1 маркази давраи хурд аст (расми 97). Пас,

$H = OA - OO_1 = 5 - 3 = 2$ см. Аз рӯи теоремаи Пифагор аз секунҷаи OO_1B $r = O_1B = \sqrt{OB^2 - OO_1^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ см. Масоҳати пурраи сегменти сферавӣ

$$S = S_{кабат} + S_{доира} = 2\pi RH + \pi r^2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 2 + \pi \cdot 4^2 = 36\pi \text{ см}^2.$$

1. Таърифи геометрии масоҳати сатҳро баён намоед. **2**. Масоҳати сфера бо кадом формула ҳисоб карда мешавад? **3.** Дар байни масоҳати сфера ва ҳаҷми он чӣ гуна алоқамандӣ мавҷуд аст? **4**. Масоҳати қисмҳои сфера – сегменти сферавӣ, кабати сферавӣ ва сектори сферавӣ бо кадом формулаҳо дода мешаванд?

324. Масоҳати сфера 225 π м² аст. Ҳаҷми кураро, ки сатҳи он ин сфера аст, ёбед.

325. Агар радиуси сфераро 4 маротиба зиёд кунем, масоҳати он чӣ тавр тағйир меёбад?

326. Дар як нимсфера дуто буриш гузаронида шудааст, ки масоҳати онҳо 49 π дм² ва 4 π м² буда, масофаашон 9 дм аст. Масоҳати тамоми сфераро ёбед.

327*. Баландии минтақаи сферавӣ 7 см, радиусҳои асосҳояш 16 см ва 33 см аст. Масоҳати сатҳи минтақа ёфта шавад.

328. Ҳаҷми кура (бо воҳидҳои кубӣ) ва масоҳати сатҳи он (бо воҳидҳои квадратӣ) ба ҳамдигар баробаранд. Радиуси чунин кураро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

329. Дар конус масоҳати асос $\frac{64}{\pi}$ см² ва масоҳати буриши тирӣ 30 см² аст. Ҳаҷми конусро ёбед.

330. Нишон диҳед, ки агар α, β, γ кунҷҳои секунҷа ва b тарафи ба кунҷи β муқобили он бошад, он гоҳ масоҳати секунҷа $S = \dfrac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2\sin\beta}$ аст.

ОЧЕРКИ ТАЪРИХӢ

Геометрия, мисли илмҳои дигари табиӣ , аз талаботи амалии одамон пайдо шудааст. Масалан, ҳангоми сохтани олоти меҳнат ва манзил зарурияти муайян кардани шакл ва андозаҳои предмет ба миён меояд. Манбаҳои то замони мо расида гувоҳӣ медиҳанд, ки мисриён ва бобулиён ҳанӯз 4000 сол пеш маълумоти васеи геометрӣ доштанд. Пирамидаҳои мисрӣ (қабрҳои фараонҳо) бо шаклҳои мунтазами ҳайратангез аз ҳамдигар фарқ мекунанд. Бе донишҳои геометрӣ сохтани чунин пирамидаҳо мумкин набуд. Дар папирусҳои мисриёни қадим (папирус – номи растанӣ аз ҷинси най. Масолеҳи хатнависӣ, ки мисриён ва дигар халқҳои қадим аз ин растанӣ тайёр мекарданд.), ки ба солҳои 2000-1700 то милод мутааллиқанд, ҳалли чандин масъалаҳои геометрӣ оварда шудаанд.

Баъд аз Миср маркази ғункунӣ, системакунонӣ ва тадқиқоти геометрӣ ба Юнони Қадим мекӯчад. Исботи аввалин натиҷаҳои геометрӣ ба Фалес (639-548 то милод) аз Милетск тааллуқ доранд. Чунин теоремаҳо ба монанди «диаметр доираро ба ду қисми баробар ҷудо мекунад», «кунҷҳои амудӣ баробаранд», «кунҷҳои назди асоси секунҷаи баробарпаҳлу баробаранд» ба ӯ мансубанд. Инчунин ҳисоб карда мешавад, ки исботи нишонаҳои баробарии секунҷаҳо, исботи теорема дар бораи баробарии порчаҳое, ки хатҳои рости параллел онҳоро дар ду хат ҷудо менамоянд, низ азони Фалес мебошанд.

Ҳисоб карда мешавад, ки исботи қисми зиёди далелҳои геометрӣ ба Пифагор (564-473 то милод) тааллуқ доранд. Вале теоремаи Пифагор, ки ниҳоят машҳур аст, кайҳо боз, пеш аз ӯ ҳам маълум буд. Маълум нест, ки аввалин шуда ин теоремаро кӣ исбот кардааст ва кадоме аз исботҳои мавҷуда ба худи Пифагор мансуб аст.

Баъди дар шакли 13 китоб пайдо шудани «Ибтидо»-и машҳури Уқлидус (Евклид) (365-300 то милод) геометрия ҷиддан ба илм мубаддал гардид. (Дар ин бора дар «Геометрия-10» маълумоти заруриро оварда будем. Ниг. ба саҳ. 93-95.)

Бузургтарин математики дунёи қадим Архимед (287-212 то милод) аз Сиракузи Юнон тадқиқоти Уқлидусро назариявӣ асоснок намуда, онро пурра кардааст. Аз байни кашфиёти зиёди Архимед чен кардани дарозии давра ва масоҳати доира, ёфтани ҳаҷми ҷисмҳо, аз он ҷумла ҳаҷми силиндр ва кураро қайд кардан лозим аст. Маҳз вай дар дунё аввалин шуда нишон додааст, ки адади 22:7 –ро ҳамчун қимати тақрибии нисбати дарозии давра бар диаметр қабул кардан мумкин аст. Архимед ватанпарвари барҷаста буд. Ӯ ҳангоми ҳамлаи мусаллаҳонаи румиҳо дар сангарҳо ҳамроҳи шаҳрвандони оддӣ ҷангида фавтидааст. Архимед васият карда буд, ки дар болои қабраш кураи сангиеро, ки дар силиндр дарункашида аст, гузоранд. Исботи он ки ҳаҷми чунин кура ба $\frac{2}{3}$ ҳиссаи ҳаҷми силиндр баробар аст, яке аз кашфиёти барҷастаи геометрии Архимед мебошад.

Ҳамаи бисёрруяҳое, ки мо онҳоро омӯхтем, аз он ҷумла бисёррӯяҳои мутлақо мунтазам, дар Юнони Қадим маълум буданд. Китоби охирини 13-уми «Ибтидо» ба ҳамин бисёррӯяҳо бахшида шудааст. Далели мавҷудияти фақат 5 чунин бисёррӯя, ки онро файласуфи Юнони Қадим Афлотун (429-348 то милод) тахмин карда буд, ҳайратовар менамуд, чунки дар ҳамворӣ миқдори бисёркунҷаҳои гуногуни мунтазам беохир аст. Танҳо соли 1794 франсуз Анри Лежандр (1752-1823) аз теоремаи Эйлер, ки мо онро дар ибтидои ин курс овардаем, истифода намуда, исбот кард, ки бисёррӯяи мутлақо мунтазами шашум вуҷуд надорад. Яъне, чунин бисёррӯяҳо танҳо панҷтоянду халос.

Дар асрҳои II ва I –и пеш аз милод якчанд асарҳо, ки ба қоидаҳои ҳисоб дар геометрия бахшида шудаанд, нашр гардиданд. Масалан, дар китоби «Метрика»-и Герон (асри I пеш аз милод) аз Александрия қоидаҳои ҳисоби масоҳатҳо ва ҳаҷмҳо оварда шудаанд. (Формулаи ҳисоби масоҳати секунҷа аз рӯи се тараф, ки ҳамчун формулаи Герон машҳур аст, аввалин маротиба дар ҳамин китоб вомехӯрад.)

Пас аз пош хӯрдани давлатҳои ғуломдории Дунёи қадим марказҳои илмӣ дар асрҳои миёна ба мамолики Шарқ-Осиёи Марказӣ, давлатҳои араб, Ҳиндустон мекӯчад. Дар асрҳои V-XII дар Ҳиндустон геометрияи ҳисобӣ тараққӣ мекунад. Ҳиндуҳо ба масъалаи ҳисоби масоҳати сатҳ ва ҳаҷми ҷисмҳо диққати калон медоданд. Натиҷаҳои илмии ҳиндуҳо, хитоиҳо ва юнониҳоро арабҳо моҳирона истифода карданд. Тамоми асарҳои Уқлидус, Архимед ва дигар донишмандони Юнони Қадим то охири асри IX ба арабӣ тарҷума шуда буданд. Ин имконият дод, ки на танҳо донишмандони араб, балки олимоне низ, ки дар ҳудудҳои забткардаи арабҳо умр ба сар мебурданд, на ин ки аз натиҷаҳои илмии қадима воқиф гарданд, балки худ ба масъалаҳои илмие низ, ки диққати олимони атиқаро ҷалб карда буд, машғул шаванд. (Доир ба саҳми олимони Осиёи Марказии ин давра дар масъалаи рушди назарияи параллелӣ ва перпендикулярӣ ниг. ба «Геометрия-10», саҳ. 93-95.) Чандин олимони Шарқ, ба мисли бузургтарин олими табииёти асрҳои XI-XII дар дунё, математики барҷаста ва шоири машҳур Умари Хайём (1048-1131), барҷастатарин риёзидони асри XIII -и ҷаҳон Насируддини Тӯсӣ (1201-1272) назарияи нодири хатҳои рости параллел, назарияи геометрии таносубҳо, усулҳои графикии ҳалли муодилаҳои кубиро пешниҳод кардаанд.

Пас аз арабӣ ба лотинӣ тарҷума шудани «Ибтидо» аз асрҳои миёна сар карда дар Аврупо тадқиқоти математикӣ аз нав авҷ мегирад. Региомонтан (1436-1476) дар китоби соли 1461 чопкардааш барои ҳалли масъалаҳои геометрӣ усулҳои алгебраро истифода кардааст. Файласуф ва математики франсуз Рене Декарт (1596-1650) дар «Геометрия»-и худ аввалин шуда бузургихои тағйирёбандаро дар математика дохил кардааст. Дере нагузашта аз рӯи ин бузургиҳо олими англис Исаак Нютон (1643-1727) ва олими немис Готфрид Лейбнитс (1646-1716) бунёди асосҳои ҳисоби дифферентсиалӣ ва интегралиро ба итмом расониданд. Кашфиёти Декарт, Нютон ва Лейбнитс инқилобе буд дар илми математика. Бо ёрии ин кашфиёт ҳалли бисёр масъалаҳои геометрӣ ба осонӣ ёфта шуд. Масалан, ҳалли чунин масъалаҳо, ба монанди масъалаи гузаронидани расанда ба хати каҷи дилхоҳ, масъалаи ҳисоби масоҳати сатҳ ё ҳаҷми ҷисм. Бо истифодаи натиҷаҳои ин кашфиёт ёфтани ҳаҷми ҷисми геометриро мо дар мисоли ёфтани ҳаҷмҳои силиндр, конус ва кура муоина кардем.

Франсуз Гаспар Монж (1746-1818) ва швейтсарӣ Леонард Эйлер (1707-1783), ки солҳои зиёд дар Россия кор ва эъҷод кардааст, дар кори омӯхтани хосиятҳои геометрии фигураҳо тарзи истифода кардани ҳосиларо нишон доданд. Бо ҳамин онҳо ба пайдо шудани шохаи нави математика- геометрияи дифферентсиалӣ асос гузоштаанд.

Дар асри XIX аз сабаби зарурияти ҳалли масъалаҳои геометрия, физика, механика ҳисоби векторӣ офарида шуд. Асосгузори ин ҳисоб (назарияи векторҳо) англис Виллям Гамилтон (1805-1865) ва амрикоӣ Ҷозеф Гиббс (1839-1903) мебошанд.

Дар ҳамин давра тадқиқот доир ба асоснокунии аксиомаҳои Уқлидус, хусусан доир ба аксиомаи 5-умаш, дар Россия ва дигар мамолики Аврупо давом доштанд. Дар ин роҳ ба олими бузурги рус Николай Лобачевский (1792-1856), олими маҷор Янош Бойя (1802-1860) ва математики барҷастаи немис Карл Гаусс (1777-1855) муяссар шуд, ки исботнашаванда будани постулати 5-уми Уқлидусро нишон дода, геометрияи ғайриэвклидиро офаранд. (Мо дар ин бора дар «Геометрия – 10» муфассал сухан ронда будем.) Ҳамин тариқ, номукаммал будани системаи аксиомаҳои Уқлидус муайян гардид.

Ин буд, ки олимони немис Давид Гилберт (1862-1943), Г. Вейл , олими рус Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987) системаи аксиомаҳои худро пешниҳод карданд, ки хосиятҳои пурраги, ноҳамзидлӣ ва новобастагиро доранд, яъне мукаммаланд. Ин системаҳо дар зоҳир гуногун намоянд ҳам, ба ҳамдигар баробарқувваанд, яъне як системаи аксиомаҳо хулосаи дигарӣ аст ва баръакс. Нишон дода шудааст, ки аз рӯи ҳар яке аз ин системаҳо натиҷаҳои математикаро асоснок кардан мумкин аст. Геометрияе, ки мо дар мактаб, дар синфҳои 7-11 омӯхтем ба системаи аксиомаҳои академик А.Н.Колмогоров асос карда шудааст.

Дар Тоҷикистон дар Пажӯҳишгоҳи математикаи Академияи фанҳо тадқиқоти илмӣ доир ба геометрия гузаронида мешаванд. Пажӯҳишро академик Зафар Усмонов сарварӣ менамояд.

ҶАВОБҲО ВА НИШОНДОДҲО БА ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

5. На. **6.** 1,17 м. **7.** Ҳамворие, ки ба порчаи охирҳояш ин ду нуқта буда, перпендикуляр аст ва ин порчаро ба 2 ҳиссаи баробар ҷудо мекунад. **8.** На. **9.** 15 м. **10.** 90 см; 80 см. **12.** 5. Ин призма 6 қулла, 9 теға ва 3 теғаи паҳлуӣ дорад. Вай секунҷа аст. **13.** а) 14 қулла, 9 рӯя, 21 теға; б) 20 қулла, 12 рӯя, 30 теға; в) 2n қулла, n+2 рӯя, 3n теға. **14.** 11-кунҷа. **15.** а) На, чунки муодилаи 2n=13 ҳалли бутун надорад; б)ҳа, 5- кунҷа; в) ҳа, 21-кунҷа. **16.** а) 0; б) 4; в)10; г) n(n-3). **17.** а) 30; б) 15. **18.** 2 м. Миёнаҷои перпендикуляррро бо охирҳои моил пайваст кунед. **19.** На. **20.** 6м. **21.** На. **22.** 2; 3; призма. **23.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **27.** 30^0. **28.** 13 м. **29.** 2 м. **30.** 4 м. **31.** $\sqrt{2}:1$. **32.** $\frac{\sqrt{3}}{2}d$. **33.** 580 см². **34.** 75 см². **35.** $32(1+2\sqrt{2})$ см². **36.** 7,5 см. **37.** 66 м². **38.** 5 см. **39.** 120 см². **40.** 52 рӯя, 150 теға. **41.** 16 см. **43.** Ҳа. **45.** 188 м². **46.** 2 м², 3 м². **47.** 2 м. **48.** 12 см. **49.** 15,9 см ва 13 см. **50.** 3,4 см. **51.** 2a, $\sqrt{2}a$. **52.** 26 см. **53.** 2016 см². **54.** 5 см, 12 см, 13 см. **55.** а) 31; б) 13. **56.** $7\sqrt{3}$ м. **57.** а) 90^0; б) 45^0. **58.** $\arccos\frac{1}{3}$. **59.** а) $\sqrt{185}$ см; б) 52 см². **60.** 2 м². **61.** 40 см ва 9 см. **62.** 7 м². **63.** 2 м. **65.** 124 см². **67.** 94 м². **68.** 70 м². **69.** 10 м. **70.** 84 м². **71.** 40 см. **72.** 3 см. **73.** 12 см. **74.** 5 см ва 6 см. **75.** 3 см. **76.** 9 см. **77.** 5 см. **79.** Пирамидаи секунҷа. **84.** 12 м². **85.** 15 см. **86.** 245 см². **87.** 11 м. **88.** 35 см. **89.** 39 м ва 51 м. **90.** 16 см². **91.** 50 м². **92.** 672 см². **93.** 18 см. **94.** 1,8 м ва 4 м. **95.** $\sqrt{265,5}$ см. **96.** $\sqrt{\sqrt{4H^2+S^2}-2H^2}$. **97.** 16 см ва 6 см ё 12 см ва 8 см. **98.** 18 см. **99.** $\frac{ab}{4}$. **100.** 48 см ва 724 см². **101.** $36\sqrt{3}$ см². **102.** $S_1=\frac{3\sqrt{3}}{4}H^2$; $S_2=3\sqrt{3}H^2$. **103.** 10; $n(n-3)$. **104.** 6 см. **105.** 2 см ва 10 см. **106.** 36 см². **107.** 1 м². **108.** 9 м². **109.** 5 см. **110.** Масъала ду ҷавоб дорад: $\frac{1}{3}$ ва 3. **112.** $\frac{2}{3}$. **113.** $36\sqrt{10}$ м². **115.** 18 см. **116.** Ин ҳамвориест, ки аз миёнаҷои теғаҳои призма гузашта, ба ҳамвориҳои асос параллел аст.

117. Се тири симметрия ва чор ҳамвории симметрия; панҷ тири симметрия ва панҷ ҳамвории симметрия. **118.** Не; ҳа. **119.** Як тири симметрия, як ҳамвории симметрия. Агар асосаш ромб бошад, он гоҳ се тир ва се ҳамвории симметрия. **120.** Се тир ва се ҳамвории симметрия. Агар асосаш квадрат бошад, он гоҳ панҷ тир ва панҷ ҳамвории симметрия. **121.** Нӯҳ тири симметрия. **122.** 12 см². **123.** 96 см². **124.** $\arccos\frac{1}{3}$. **127.** Хатҳои аз байни теғаҳои муқобил гузаранда тири симметрияанд. Ҳамвории аз рӯи теға гузаранда, ки ба теғаи муқобил перпендикуляр аст, ҳамвории симметрия мебошад. Ҳамин тариқ, тетраэдри мутлақо мунтазам дорои се тири симметрия ва шаш ҳамвории симметрия аст. **128.** $2\sqrt{3}d^2$. **129.** $\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$. **130.** $\frac{a^2}{4}$. **131.** $(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -1)$. **132.** 17 см ва 16 см. **133.** 336. **134.** 8 см ва 15 см. **135.** 24 см. **136.** 432 π см². **137.** $\sqrt{5\pi}$ м. **138.** 8 см. **139.** 15 см. **140.** 90^0. **141.** 90 см². **142.** 512 см². **143.** 6 см. **144.** 4 см. **145.** R. **146.** $\frac{S}{\pi}$. **147.** πQ. **148.** 1,5 R. **149.** 74 π см². **150.** $2\sqrt{2\pi}$ см². **151.** 1,125 π кг. **152.** 0,82 π м². **153.** $4S\,ctg\,\varphi$. **154.** $\frac{d}{8\pi}$. **155.** 6 маротиба. **156.** 3 см. **157.** 62^0, 62^0, 56^0. **158.** 5 м. **159.** $5\sqrt{3}$ м. **160.** 10 см, 5 см, 60^0. **161.** 1416 см². **162.** 3 см. **163.** R^2. **164.** 45^0. **165.** $\frac{H}{\sqrt{2}}$. **166.** $\frac{1}{4}\pi R^2$. **167.** 500 см². **168.** $\pi l^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}$. **169.** $\sqrt{\frac{Q}{\pi}\left(l^2 - \frac{Q}{\pi}\right)}$. **170.** $\frac{3l}{4}$. **171.** 6 м². **172.** $\sqrt{\frac{2}{15}}$. **173.** 5 м. **174.** 20 см. **175.** $2H$. **176.** 30 см². **177.** 9 м². **178.** 9 дм². **179.** Ба $\frac{1}{2}$ қисм, агар аз асоси калон ҳисоб кунем. **180.** 6 м². **181.** 1,5. **182.** 80π. **183.** 24π. **184.** ≈ 25,3 м². **185.** ≈ 38 дона. **186.** ≈ 17,1 м. **187.** 240 см². **188.** 11 см, 11 см, 8 см. **189.** 136 см². **190.** 13 см. **191.** $2\pi\left(R^2 - r^2\right)$. **192.** 100 π см². **193.** 15 м. **194.** 28 см ва 12 см. **195.** 2,55 π кг. **196.** ≈ 1,04 м². **197.** $SR^2(R_2 - r^2)$. **198.** 2(Q-q). **199.** $\frac{SH}{\pi\, l}$. **200.** $\frac{1}{\pi}\sqrt{S^2 - (Q-q)^2}$.

201. 0,6. **202.** 72 см². **203.** а) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$; б) $(x-2)^2+y^2+(z+3)^2=3$. **204.** $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=46$; б) $x^2+(y+3)^2+(z+1)^2=30$. **205.** а) Ҳа; б) ҳа. **206.** а) $O(1; -2; 3)$, $R=1$; б) $O(-3; 1; -4)$, $R=4$. **207.** а) $O(1; 0; 0)$, $R=2$; б) $O(4; -2; 0)$, $R=\sqrt{20}$. **208.** 18 см². **209.** 6 см. **210.** а) Нуқта; б) давра; в) ҳамворӣ сфераро намебурад. **211.** 16 π м². **212.** $\frac{1}{4}\pi R^2$. **213.** πR. **214.** 785 км. **215.** 12 см. **216.** 24π. **217.** 480π см². **218.** 12π. **219.** 27 см². **220.** 10 см². **221.** 3 см. **222.** 8 см. **223.** $\frac{R}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. **224.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **225.** 1 см. **226.** 8 см. **227.** 80°. **228.** 120 см². **229.** 20 см. **230.** а) 1980; б) 300. **231.** 27 см³. **232.** 192 см³. **233.** 30 м. **234.** 1,8 $\frac{г}{см^3}$. **235.** 2 маротиба меафзояд. **236.** 12 см. **237.** $729\sqrt{2}$ см³. **238.** 60 см³. **239.** 36 см³. **240.** 200 дм³. **241.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **242.** 242. **243.** 12 см. **244.** $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см³. **245.** $\frac{a^3}{8}$. **246.** 3 м³. **247.** а) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$; б) a^3; в) $1{,}15\sqrt{3}a^3$. **248.** $\approx 192{,}72$ кг. **249.** 3,4 м; 3,4м; 3,2 м. **250.** 12 см³. **251.** 35200 м³. **252.** 100 м³. **253.** 3060 м³. **254.** 84 м². **255.** 48 см². **256.** 84 см³. **257.** $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$ ва $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3(b^2-a^2)}$. **258.** 32 м³. **259.** $\frac{H^3}{\sqrt{3}}$. **260.** $S_{пасл}=a^3\sqrt{3}$, $V=\frac{\sqrt{2}a}{12}$. **261.** $\frac{S}{36}\sqrt{2S\sqrt{3}}$. **262.** $2{,}6\cdot10^6$ м³. **263.** 360 м³. **264.** 420 см³. Нишондод. Асоси баландии пирамида маркази давраи берункашида асоси пирамида аст. **265.** $\sqrt{11}$ см³. **266.** $\frac{8}{3}$ см³. **267.** $16(\sqrt{21}+6)$ см³. **268.** $85\cdot10^3$ м². **269.** 16π. **270.** 1520 л. **271.** $10\frac{1}{3}$ м³. **272.** 2325 м³. **273.** 20 м² ва 45 м². **274.** 5 м. **275.** 8 м². **276.** 2 см² ва 8 см². **277.** 128 м² ва 50 м². **278.** 1900 м³. **279.** Барои $\alpha=-4$. **280.** 18 м³. **281.** а) $\frac{\pi}{5}$; б) $\frac{128\pi}{7}$; в) $\frac{163\pi}{14}$. **282.** а) 245π см³; б) 36π м³. **283.** 8 см ва 64π см². **284.** $ctg\alpha$. **285.** $\left(120\pi-90\sqrt{3}\right)$ см³. **286.** $\approx 0{,}75$ мм. **287.** ≈ 61 кг. **288.** $\arccos\frac{4}{9}$. **289.** 144 см³. **290.** $\frac{1}{2}$. **291.** 30π см³. **292.** 432π см³. **293.** 64. **294.** ≈ 19 т. **295.** 2π м³. **296.** $\frac{C^2}{24\pi}\sqrt{4\pi^2l^2-C^2}$. **297.** 2. **298.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **299.** $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. Нишондод. Ҷисми дар натиҷаи чархзанӣ ҳосилшаванда аз ду конусҳои асоси умумидошта иборат аст, ки катетҳо ташкилдиҳандаҳои онҳо мебошанд. Радиуси асоси умумӣ ба яке аз катетҳо баробар аст. **300.** $\frac{\pi a^3}{3}\cdot\sin\beta tg\beta$. **301.** 13. **302.** $4\sqrt{2\pi}$ см³. **303.** 152π см². **304.** $\frac{1}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)$. **305.** 8 см. **306.** 7 см. **307.** 457π см³. **308.** 2 м; 5,5 м; 2,5 м. **309.** 7,5 м³. **310.** 0,3. **311.** 64 маротиба. **312.** 39 см. **313.** 216 дона. **315.** $\approx 2{,}9$ м. **316.** ≈ 2148 см³. **317.** $\frac{13}{24}$. **318.** $112{,}5\pi$ дм³ ё 450π дм³. **319.** $12\frac{2}{3}\pi$ м³ ё $144\frac{2}{3}\pi$ м³. **320.** 34182π см³ ≈ 107 дм³. **321.** $9\pi\sqrt{\pi}$ см³. **322.** 18 м². **323.** 16 см². **324.** $562{,}5\,\pi$ м³. **325.** 16 маротиба меафзояд. **326.** 25π м². **327.** 910π см². **328.** 3. **329.** 80 см³.

МУНДАРИЧА

БОЙМУРОД АЛИЕВ

ГЕОМЕТРИЯ – 11

(давоми стереометрия) китоби дарсӣ барои синфи 11

Муҳаррир: *Маҳмадсалим Абдукаримов*
Мусаҳҳеҳ: *Марҳабо Алиева*
Ҳуруфчин ва саҳифабанд: *Зафар Ташрифов*

POLYGRAPH GROUP ©
C O M P A N Y

Ба чопаш 16.12.06 имзо шуд. Андозаи 60x90/16. Қоғази офсетӣ № 1.
Гарнитураи "Times New Roman Tj". Ҷузъи чопии шартӣ 8.
Адади нашр 62.000 нусха