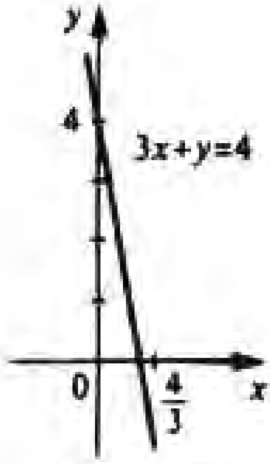
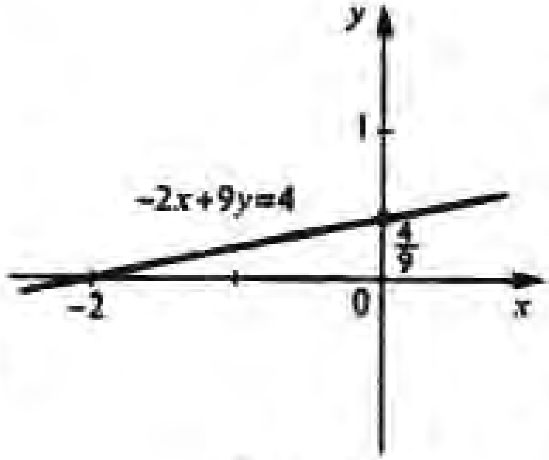
$=-\frac{3}{2}$-ро навишта, аз квадрат ва куби суммаи x_1+x_2 барои б) ва в) ҷавоб ёфтан мумкин аст. а) -4; б) $\frac{37}{4}$; в) $-26{,}875$. **186**. 18. **188**. а) $\frac{15}{64}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1800. **189**. а) $\begin{cases} 3x+6, \text{ барои } x \geq -2; \\ -3x-6, \text{ барои } x < -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2, \text{ барои } x \geq -2; \\ -2x-2, \text{ барои } x < -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-x, \text{ барои } x \in R \setminus (0; 1); \\ -x^2+x, \text{ барои } x \in (0; 1). \end{cases}$ **190**. 7,5 см, 10,5 см, 12 см. **191**. 15 606 сомонӣ. **192**. 8 рӯз. **194**. а) $\forall x \in (-\infty; 42)$; б) $\forall x \in (1; 2) \cup (4; +\infty)$. **195**. а) $x=2$; б) $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}$; в) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $x_{3,4} = \pm 3$; г) $x_1 = -3$, $x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{10}$; д) $x_1=3$; $x_2=-4$; е) $x_{1,2}=\pm 2$; ж) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_3=3$; з) $x_1=-3$, $x_2=2$; и) $x_1=-1{,}5$, $x_2=1$, $x_{3,4}=\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$; к) $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4}=\pm 2$. **196**. а) $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$; б) $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $y_{3,4}=\pm 1$; в) решаҳои ҳақиқӣ надорад; г) $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_{3,4}=\pm 2$; д) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; е) $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{3,4} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; ж) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 4$; з) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 3$; и) $x_{1,2}=\pm 5$, $x_{3,4}=\pm 4$; к) решаи ҳақиқӣ надорад; л) $x_{1,2}=\pm 2$; м) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 3$; н) $y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, $x_{3,4}=\pm 2$; о) решаи ҳақиқӣ надорад; п) $x_{1,2} = - \pm\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2-\sqrt{3}}$; р) $x_{1,2}=\pm 1$.

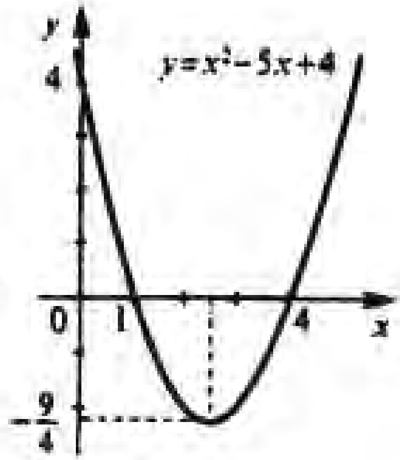
197. а) $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$; б) $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$, $B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$, $C(1; 0)$, $D(-1; 0)$; в) $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $C(3; 0)$, $D(-3; 0)$; г) $A(\sqrt{2}; 0)$, $B(-\sqrt{2}; 0)$, $C(5; 0)$, $D(-5; 0)$; д) $A\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $C(1; 0)$, $D(-1; 0)$; е) $A(1; 0)$; $B(-1; 0)$; ж) $A\left(\sqrt{10}; 0\right)$, $B\left(-\sqrt{10}; 0\right)$, $C(1; 0)$, $D(-1; 0)$, з) $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$. **198**. Ҳа. **199**. Ҳа. **200**. а) $0<k<1$; б) $0<k<1$. **201**. а) $k=\pm\frac{4}{3}$; б) $k=\frac{25}{144}$. **202**. а) $k>-\frac{1}{10}$; б) $k \in (-12; 12)$. **203**. а) $(x-1)(x+1)(9x^2+2)$; б) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(13x^2+16)$; в) $(2x-1)^2(2x+1)^2$; г) $(x-1)(x+1)(7x^2+9)$; **204**. а) Решаи ҳақиқӣ надорад. б) $x_1=2$, $x_2=-2$; в) $x=-1$; г) $x_1=1$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. **205**. а) $2<x<3$; б) $1 \leq x \leq 7$; в) $-2<x<6$; г) $x \in (-3; 1) \cup (2; +\infty)$; д) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; е) $x \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right]$. **206**. $\frac{239}{693}$. **208**. а) $x+2$; б) $\frac{x+4}{3}$; в) $\frac{3}{1-x}$; г) $x-2$. **209**. 5 ва 6. 210. *Нишондод*. Агар суръати ҳаракати яке аз автомобилҳоро бо x ишорат кунем, он гоҳ суръати ҳаракати автомобили дуюм $x+10$ мешавад. Мувофиқи шарт муодилаи $\frac{420}{x} - \frac{420}{x+10} = 1$-ро ҳосил мекунем, ки аз он натиҷаҳои матлубро пайдо кардан мумкин аст. Ҷавоб: 60 км/соат; 70 км/соат. **211**. а) Ҳа; б) не. **212**. в), г), д). **213**. а) Не; б) ҳа; в) ҳа; г) не.



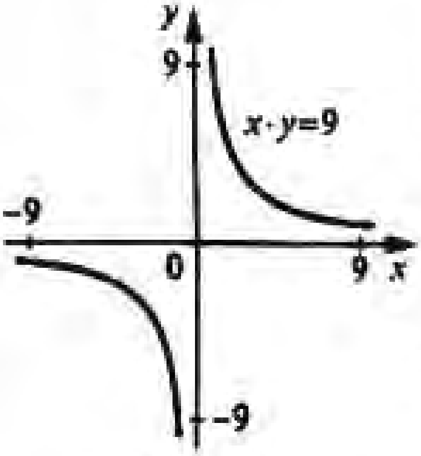
Расми 66



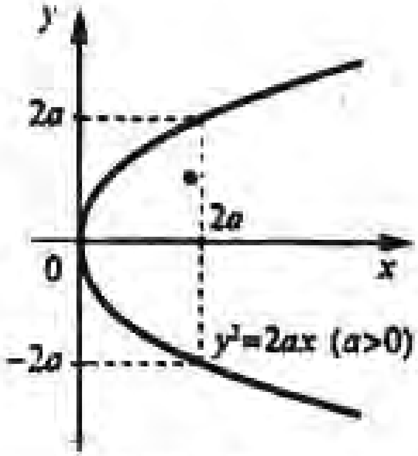
Расми 67



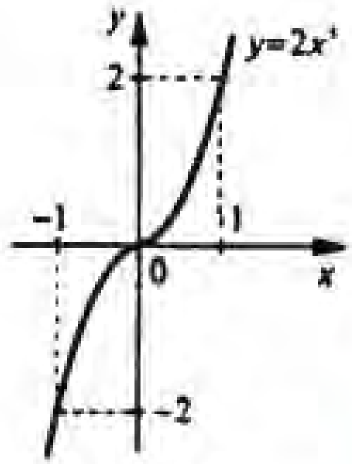
Расми 68



Расми 69

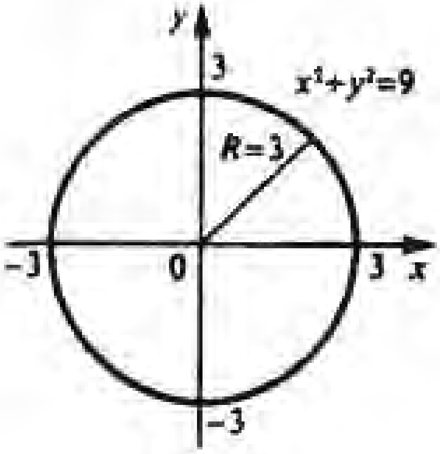


Расми 70

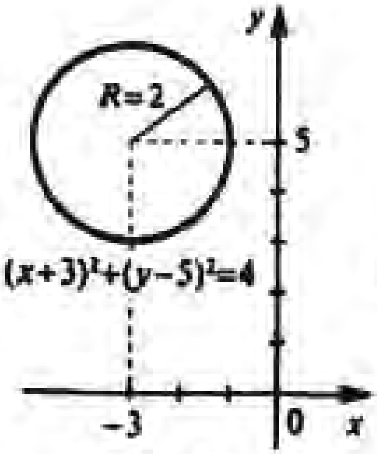


Расми 71

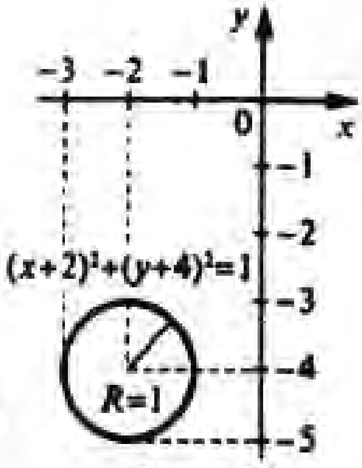
214. а) Расми 66; б) расми 67; в) расми 68; г) расми 69; д) расми 70; е) расми 71. **215**. а) 1; б) 1; в) 2; г) 2; д) 4; е) 6; ж) 6; з) 7; и) 12; к) 3; л) 4; м) 2. **216**. 1. **217**. $\frac{400}{9}$. **218**. а) $(x-1)(x+7)$; б) $(2a-x+y)(2a+x-y)$; в) $6(x+2y)^2$; г) $(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16)$. **219**. 500 000 000 сомонӣ. **220**. Масъала. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 6 ва фарқашон ба 2 баробар аст. Ададро ёбед. (42). **221**. а) $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(0;3)$; б) $x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup[1;+\infty)$; ё $x\in R\setminus\left[-\frac{2}{3};1\right)$. **222**. $x_1=-10$, $x_2=8$. **223**. а) $x=3$ - нули функсия; барои $x<3$ $f(x)$ мусбат ва барои $x>3$ $f(x)$ манфӣ мешавад; б) $x=-4$ - нули функсия; барои $x<-4$ $f(x)$ манфӣ ва барои $x>-4$ $f(x)$ мусбат мешавад. **224**. а) $A_0(2;5)$, $R=2$; б) $A_0(-3;1)$, $R=1$; $A_0\left(11;-\frac{3}{2}\right)$, $R=\frac{3}{\sqrt{2}}$; г) $A_0(-5;1,1)$ $R=1,1$; д) $\left(\frac{16}{9};\frac{25}{4}\right)$, $R=13$; е) $A_0(9;16)$, $R=\frac{25}{3}$; ж) $A_0(-1,44;-0,2)$, $R=0,3$; з) $A_0\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{9}\right)$, $R=\frac{1}{12}$. **225**. а) $A_0\left(\frac{3}{2};0\right)$, $R=\frac{3}{2}$. б) $A_0(0;-2)$, $R=2$; в) $A_0\left(\frac{1}{2};0\right)$, $R=\frac{1}{2}$. г) $A_0(1;-1)$, $R=\sqrt{2}$; д) $A_0\left(-\frac{1}{2};-2\right)$, $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$; е) $A_0\left(2;-\frac{1}{2}\right)$, $R=\frac{3}{\sqrt{2}}$; ж) $A_0(1;-4)$, $R=5$;



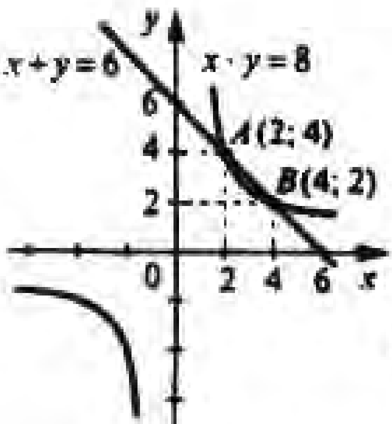
Расми 72



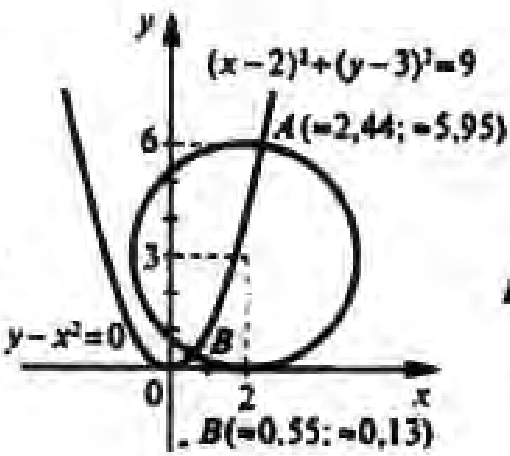
Расми 73



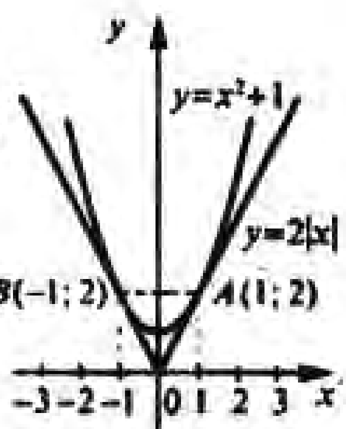
Расми 74



Расми 75



Расми 76



Расми 77

з) $A_0(3;\ 2)$, $R=4$. **226**. а) Расми 72; в) расми 73; г) расми 74. **227**. а) 4; б) 7; в) 2; г) 5; д) 3; е) 5. **228**. Фақат нуқтаи (4; 3) ба давраи муодилааш $x^2+y^2=25$ таалуқ дорад. **229**. а) (1; −1) ва (1; 1); б) (0; 0) ва (2; 0). **230**. а) Не; б) не. **231**. 0,75. **232**. а) 30, б) 4400; в) 23000. **233**. а) $1+\frac{a}{x}$; б) $2-\frac{x}{y}$. **234**. а) (3; −5); б) (1; 11); в)(−7; −7). **235**. $\frac{3}{7}$. **236**. 48 км/соат; 36 км/соат. **237**. а) $x=2$; б) $x=-1$; в) $x=\frac{8}{7}$. **239**. а) Расми 75; л) расми 76; м) расми 77. **241**. $7\frac{1}{9}$. **242**. Дуруст аст. **244**. а) $45^2-31^2>44^2-30^2$; б) $297\cdot 299<298^2$; в) $26^2-24^2>(26-24)^2$; г) $(17+13)^2>17^2+13^2$. **245**. а) (1; 1); б) (2; 1) в) (2;2); г) (5; 4). **246**. 6 км/соат. **248**. а) $x=0$; б) $x=2$; в) $x=3$. **249**. а) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$; б) $x_{1,2}=\pm1$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. **250**. Не. **251**. а) (5; 2), (3; 0); б) (4; 5), (−8; −7); в) (−6; −6), (2; 10); г) (12; −9), (−3; 6); д) $(a;\ -2a)$, $(-2a;\ a)$; е) (3; −5), (−11; 51); ж) $(1-a;\ -a-1)$, $(a+1;\ a-1)$; з) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **252**. а) $\left(-3; -\frac{17}{2}\right)$, (6; 5); б) (−1; 3), (4; −2); в) (−1; 0), (−2; −1); г) $\left(-\frac{10}{7}; -14\right)$, (1; 3); д) (3; 1,2), (5,5; 0,7); е) (−2; 2),

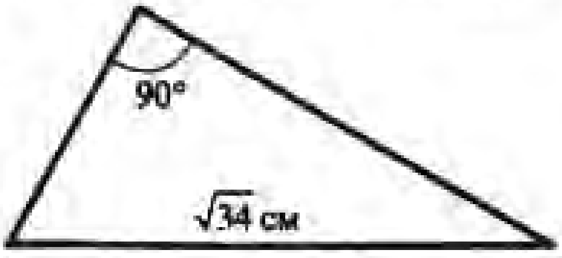
$(3;\ 4{,}5)$; ж) $(-3{,}5;\ 2{,}5)$, $(3{,}5;\ -2{,}5)$; з) $(-5;\ 4)$, $(-3;\ 8)$; и) $(6;\ 2)$, $(-3;\ -1)$; к) $\left(0;\ \frac{5}{2}\right)$; л) $(\pm 8;\ -6)$; м) $(2;\ 1)$. **253**. а) $(-4;\ \pm 3)$, $(4;\ \pm 3)$; б) $(-10;\ \pm 8)$, $(10;\ \pm 8)$; в) ҳал надорад; г) $(-5;\ 0)$, $(4;\ \pm 3)$. **254**. а) $(\pm 4;\ \pm 1)$; б) $(7;\ 7)$, $(8;\ 6)$; в) $\left(\frac{4}{9};-\frac{1}{3}\right)$, $(1;\ -2)$; г) $(\pm 3;\ \pm 1)$; д) $(6;\ -6)$, $(-1;\ 15)$; е) $(0;\ -5)$, $(1;\ -4)$. **255**. а) $(1{,}5;\ -2{,}5)$, $(2{,}5;\ -1{,}5)$; б) $(\pm 3;\ 4)$; в) $(2;\ \pm 3)$, $(9;\ \pm\sqrt{2}\ )$; г) $(-4;\ 2)$; д) $(\pm 3;\ 4)$, $(\pm 4;\ -3)$; е) $(-14;\ -13)$, $(-8;\ -19)$; ж) $(4;\ -7)$; з) $(-1;\ -3)$, $\left(\frac{9}{2};\ 8\right)$. **256**. а) $(2;\ -3)$, $(0{,}6;\ 1{,}2)$; б) $\left(\frac{8}{3};\ \frac{8}{3}\right)$, $(2;\ 4)$; в) $\left(-\frac{1}{3};\ 2\right)$, $\left(-\frac{12}{11};\ -\frac{3}{11}\right)$; г) $\left(-1;\ \frac{1}{4}\right)$; д) $(\pm 3;\ \pm 1)$; е)$(\pm 4;\ \pm 2)$, $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{13}};\ \pm\frac{16}{\sqrt{13}}\right)$. **257**. а) $(4;\ 6)$, $(-5;\ 15)$; б) $(4;\ 0)$, $(2{,}4;\ 3{,}2)$; в) $(1;\ 2)$, $\left(-1\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{4}\right)$; г) $(0;\ 6)$; д) $(-4;\ 0)$; е) $(\pm 3;\ \pm 3)$. **258**. *Нишондод.* Системаи $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 3, \\ 2x + y + 9 = 0 \end{cases}$-ро ҳал карда боварӣ ҳосил намудан мумкин аст, ки он ҳамҷоя нест. **259**. Графики хати рости $y - x = \frac{3}{4}$ бо параболаи $y=x^2-2x+3$ дар як нуқтаи $\left(\frac{3}{2};\ \frac{9}{4}\right)$ ҳамдигарро мебуранд. **260**. а) $(4;\ 3)$, $(3;\ 4)$, $(-3;\ -4)$, $(-4;\ -3)$; б) $(2;\ 8)$, $(8;\ 2)$; в) $(1;\ 1)$, яъне давраҳо дар нуқтаи координатааш $(1;\ 1)$ ба ҳам мерасанд. **261**. а) 0; б) $-\frac{5}{3}$; в) 2,4; г) $\frac{20}{23}$. **262**. а) $D(f) = (-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$; б) $D(f)=R$; в) $D(f)$ $[-3;+\infty)$. **263**. а) 65,625; б) $29\frac{7}{12}$; в) 2,5. **264**. а) $\frac{2a+x}{ax}$; б) $-\frac{y-6}{6y}$. **265**. а) $\forall x \in \left(\frac{1}{2};\ 1\right]$; б) $\forall x \in R \setminus [-2;\ 3]$. **266**. Соати чордаҳу даҳ дақиқа. **267**. $\frac{2}{5}$. Намунаи матни масъала:«Махраҷи каср аз сураташ дида 3 воҳид зиёдтар аст. Агар аз сурат ва махраҷи он мувофиқан 1 ва 3-ро кам кунем, он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки дар сумма бо касри матлуб касри дурусти $\frac{9}{10}$-ро ташкил медиҳад. Касрро ёбед». **268**. $x=7$; $y_{min}=-4$; б) $x=5$; $y_{max}=6$. **270**. а), д), е). **271**. Муодилаҳои пунктҳои а), б), в) ва г) симметрианд. Муодилаҳои пунктҳои д) ва е) симметрӣ шуда наметавонанд, чунки бо иваз кардани x ва y ифода тағйир меёбад. **272**. а) $\left(\frac{2}{3};\ 3\right)$, $\left(-\frac{2}{3};\ -3\right)$; б) $(4;\ 1)$; в) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$; г) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\ \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3};\ \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$; д) $\left(t;\ -\frac{3}{2}t\right)$; е) $(3;\ 1)$, $(1;\ 3)$, $(-1;\ -3)$, $(-3;\ -1)$. **273**. а) $(-2;\ 3)$, $(3;\ -2)$; б) $(1;\ 4)$, $(4;\ 1)$, $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2};\ \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$; в) $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$ г) $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$, $\left(-\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{103}{48}};\ -\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{103}{48}}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{103}{48}};\ -\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{103}{48}}\right)$; д) $(6;\ 12)$, $(12;6)$;

е) (2; 3), (3; 2). **274**. в) (4; 5), (−4; −5); г) $\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{5}{6}; -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}; 1\right), \left(\frac{1}{2}; -1\right)$;

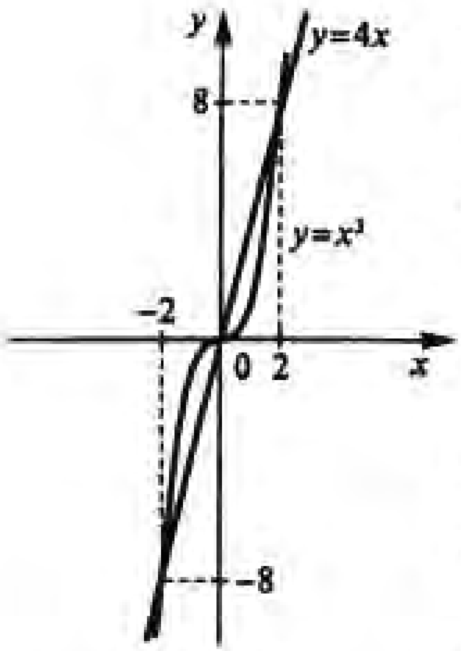
д) (2; 4), (4; 2); ж) (3; 12), (12; 3). **275**. Барои $a>3$ ба $\frac{a}{a+2}$ ва барои ҳамаи $a<-2$ ва $-2<a<3$ ба $-\frac{a}{a+2}$ баробар аст. **276**. а) $x\le0$; б) $x\ge-3$; в) $\forall x \in R$. **277**. а) 5; б) 25; в) 42; г) 24; д) 0,7; е) −0,2. **278**. а) Ҳалли ягона дорад, чунки $\frac{2}{-1} \neq \frac{7}{1}$ ё $-2 \neq 7$ аст; б) ҳал надорад, чунки $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ мешавад; в) ҳалли бешумор дорад, чунки $\frac{1}{4} = \frac{-11}{-44} = \frac{3}{12}$ аст. **279**. (4; 2) **280**. $x\ge7$. **281**. $\frac{2}{3}$. **282**. $y_{min}=47$. **283**. (5; 6), (6; 5). **284**. (5; 2). **285**. (12; 4). **286**. (5; 3), (−5; −3). **287**. (4; 3). **288**. 3 см; 4 см; 5 см. **289**. 12 см; 5 см. **290**. 10 см; 12 см. **291**. 10 см; 8 см. **292**. 16 см². **293**. 4 см; 5 см. **294**. 15 см; 10 см; S=150 см². **295**. 10 см. **296**. 4 см, 3 см ва 3 см, 4 см. **297**. 30 см; 20 см. **298**. 15 см; 10 см. **299**. 11 см, 7 см. **300**. *Нишондод*. Бо x ва y мувофиқан суръати ҳаракати сайёҳро дар роҳи мумфарш ва ноҳамвор ишорат намуда, дар асоси шарти масъала системаи муодилаҳои $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 2$, $x - y = 2$ -ро тартиб додан мумкин аст. Ҷавоб: 4 км/соат. **301**. 5 дастгоҳ. **302**. *Нишондод*. Агар x ва y мувофиқан миқдори сафарҳои пешбинӣ шуда, ва баъдинаро (яъне сафарҳои бо мошини нав амалӣ гардонидашуда) ифода кунанд, он гоҳ ба вобастагиҳои $x-y=4$ ва $\frac{30}{x} + 2 = \frac{30}{y}$ меоем. Баъди ҳалли система собит мекунем, ки бор бо мошини нав дар 6 сафар кашонда мешавад. **303**. *Нишондод*. Аз рӯи шарти масъала системаи муодилаҳои $y-x=3$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{36}$ -ро тартиб додан мумкин аст. Ҷавоб: 9 соат. 12 соат. **304**. 30 соат, 50 соат. **305**. *Нишондод*. Бо x ва y мувофиқан суръати ҳаракати ҷисмҳои якум ва дуюмро ишорат мекунем. Мувофиқи шарти масъала $\sqrt{34}$ см дарозии гипотенуза, $10x$ ва $10y$ дарозиҳои катетҳоро ифода мекунанд (расми 78). Аз ин системаи $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}34, \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$ -ро ҳосил мекунем, ки ҳаллашон x=0,5 м/сон, y=0,3 м/сон мешавад. **306**. 6 км/соат; 7 км/соат. **307**. а) $2-\sqrt{3}$; б) *Нишондод*. Дар навбати аввал $9+4\sqrt{2}$ -ро ба шакли $8+4\sqrt{2}+1=(2\sqrt{2})^2+2\cdot2\sqrt{2}+1^2=(2\sqrt{2}+1)^2$ ва баъд $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$ -ро ба намуди $\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$ овардан зарур аст. Ҷавоб: $\sqrt{2}+1$. **308**. $\sqrt{12}$ ва $\sqrt{17}$.

309. а) 1; б) $53\frac{1}{3}$. **311**. 32. **312**. 8 см, 13 см.

314. (1; 1), (−1; −1), $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}; \frac{6}{\sqrt{11}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}; -\frac{6}{\sqrt{11}}\right)$.



Расми 78



Расми 79

315. а) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm2$; б) $x_1=0$, $x_2=0,1$; в) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm1$; г) $x_{1,2}=\pm5$; д) $x_{1,2}=\pm2$; е) $x_1=1$; ж) $x_1=1$; $x_2=-\frac{1}{2}$; з) $x_1=2$, $x_2=\frac{7}{4}$. **316**. а) $x_1=1$, $x_{2,3}=2$, $x_4=3$, б) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm2$, $x_5=-\frac{3}{2}$; в) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=2,5$, $x_4=5$; г) $x_1=1$, $x_2=2$. **317**. а) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$; б) $x_1=0$; $x_2=-1$; в) $x_1=\frac{a}{4b}$; $x_2=-\frac{a}{2}$; г) $x_{1,2}=\frac{3b\pm2a}{2}$. **318**. а) $\frac{5x-b}{4x+b}$; б) $\frac{4a+1}{3(a+2)}$; в) $\frac{a+13}{a+15}$; г) $\frac{4(x+9)}{3(x-7)}$; д) $\frac{2x-1}{x-4}$; е) $\frac{b\cdot(b-2)}{2b-5}$. **319**. а) $\forall p\in(-\infty;+\infty)$; б) $\forall p\in\left(-\infty;\frac{1}{8}\right)$.

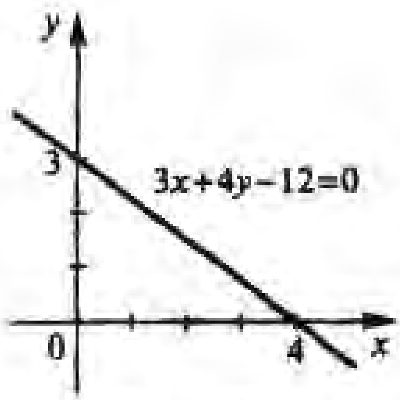
320. а) $\forall q\in\left(\frac{4}{5};+\infty\right)$; б) $\forall q\in(-4\sqrt3;4\sqrt3)$.

321. а) $m=\pm\sqrt{10}$; б) $m=-\frac{1}{168}$. **322**. $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$. Графики функсияҳои $y=x^3$ ва $y=4x$ дар нуктаи (0; 0), (2; 8) ва (−2; −8) ҳамдигарро мебуранд. (Расми 79.) **323**. а) $x=0$; б) $x_1=2$, $x_2=-4$, $x_3=-1$; в) $x_1=1$, $x_2=-4$; г) $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=-3$, $x_4=-4$; д) $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{25}{2}\pm\frac{\sqrt{621}}{2}$; е) $x_1=-1$, $x_2=2$; ж) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=4$; з) $x_1=4$, $x_2=2$, $x_3=6$, $x_4=0$; и) $x_1=4$, $x_2=4,75$, $x_3=5,25$, $x_4=6$; к) $x_1=-1$, $x_2=1$; л) $x_1=-4$, $x_2=2$; м) $x_1=3$, $x_{2,3}=3\pm2\sqrt5$.

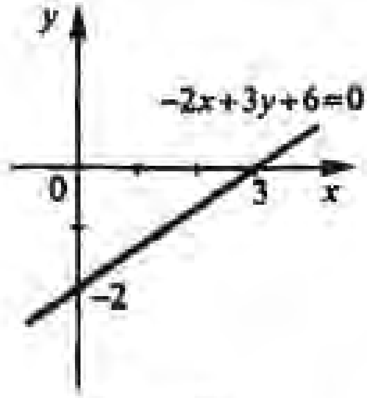
324. а) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$; б) $x_1=-1$, $x_2=2$. **326**. а) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{10}{3}}$; б) $x_{1,2}=\pm1$; в) $x_{1,2}=\pm2$; г) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm2$; д) $x_{1,2}=\pm2$, $x_{3,4}=\pm3$; е) $x_{1,2}=\pm3$, $x_{3,4}=\pm4$; ж) $x_{1,2}=\pm4$, $x_{3,4}=\pm5$; з) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$; и) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{3}$; к) $x_{1,2}=\pm\frac{3}{10}$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{5}$; л) $x_{1,2}=\pm4$, $x_{3,4}=\pm3$; м) $x_{1,2}=\pm a$, $x_{3,4}=\pm b$; н) $x_{1,2}=\pm\frac{a}{2}$, $x_{3,4}=\pm\frac{b}{2}$; о) ҳал надорад; п) $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2}}$; р) $x_{1,2}=\pm\sqrt3$.

327. а) $a\in(0;18)$; б) $a=18$; в) $a\in(18;+\infty)$. **328**. а) Не; б) не; в) не; г) ха. **329**. б) $x=7$, $y=-3$. **330**. а) Расми 80; б) расми 81; в) расми 82; г) расми 83; д) расми 84; е) расми 85. **331**. а) (0; 0), $R=2\sqrt5$; б) (1; 0), $R=\sqrt{11}$; в) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $R=4$; г) (1; −1), $R=5$. **332**. $\left(\frac{-2+3\sqrt6}{5};\frac{6+\sqrt6}{5}\right)$, $\left(\frac{-2-3\sqrt6}{5};\frac{6-\sqrt6}{5}\right)$; б) (2; 3); в) $\left(\frac{3}{2}\sqrt7;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\sqrt7;\frac{1}{2}\right)$.

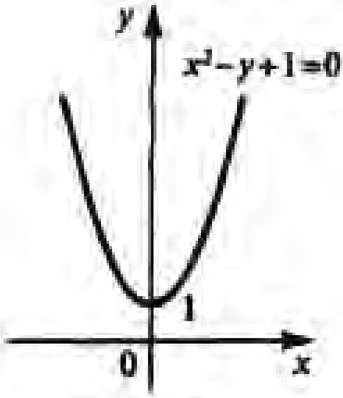
333. а) (1; 1), (5; 29); б) (1; 4,5), $\left(-\frac{3}{4};\frac{9}{2}\right)$; в) (2; 8), (6,4; −5,2); г) (≈1,8; ≈±0,8), (1,4; ±1,5); д) (1; 2), $\left(4;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-4\right)$. **334**. а) (3; −5), (5; −8); б) (−2; 3), (−3; 3,5); в) (−2; −4), (4; 2); г) $\left(\frac{11}{7};-\frac{1}{7}\right)$, (1; 1); д) (15; −13), (1; 1); е) $\left(\frac{1}{3};2\frac{2}{3}\right)$, (2; 1); ж) (3; −3),



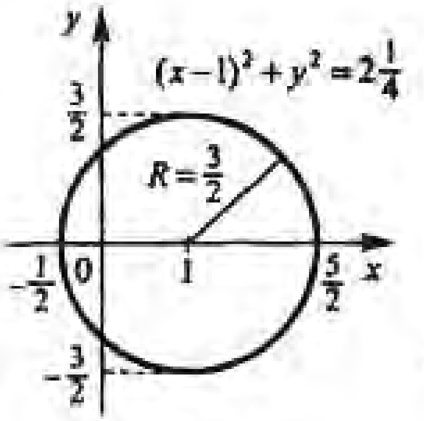
Расми 80



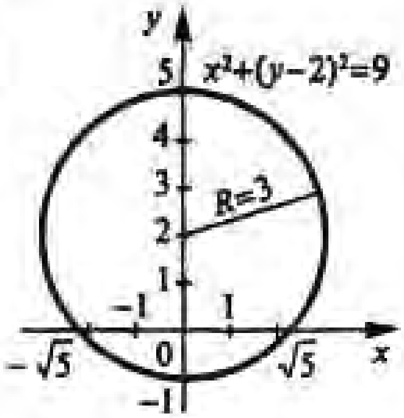
Расми 81



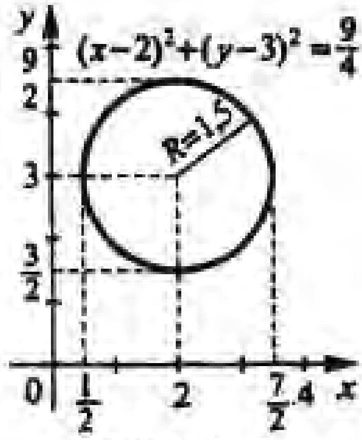
Расми 82



Расми 83



Расми 84



Расми 85

(3; 2), (≈−4,666; ≈1,422), (≈−4,666; ≈−4,222); з) (2; 3), (3; 2), $\left(\frac{7\pm\sqrt{89}}{4}; \frac{-7\mp\sqrt{89}}{4}\right)$;

и) (±1; ±2), к) (4; 5), (−6; −5), $\left(-\frac{9}{2}; -\frac{13}{2}\right)$, $\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right)$; л) (±2; ±3), $\left(\pm 9; \pm\frac{2}{3}\right)$; м) (±4; ±5).

335. б) (3; 2), (2; 3); в) (1; 4), (4; 1); г) (3; 3), д) (3; 3), $\left(\frac{-3(1\pm\sqrt{5})}{4}; \frac{-3(1\mp\sqrt{5})}{4}\right)$; е) (2; 6), (6; 2). **336**. $a=-2$; $b=2$, $-2x^4+5x^3+10x^2+61x-48$ ё $a=2$; $b=8$, $2x^4+5x^3+10x^2+5x-12$. **337**. 15; 5. **338**. 10 м ва 2 м. **339**. 4 м. **340**. 10 см; 8 см. **341**. $\frac{2}{7}$. **342**. *Нишондод*. Адади дуракамаи $\overline{xy}$-ро дар шакли $10x+y$ гиред. Адади матлуб 12 аст. **343**. 35 ва 53. **344**. *Нишондод*. Аз рӯи шарти масъала системаи муодилахои $xy-5=x+y$ ва $\left(\frac{x}{y}\right)^2+4\frac{x}{y}=\frac{57}{16}$-ро тартиб дода, гузориши $\frac{x}{y}=z$-ро татбиқ кардан зарур аст. **345**. 40 км/соат, 50 км/соат. *Нишондод*. 1 соату 48 дақиқаро дар шакли 1,8 соат навиштан зарур аст. **346**. 50 км/соат, 40 км/соат. *Нишондод*. Бигузор x-суръати ҳаракати қатораи якум ва y-суръати ҳаракати қатораи дуюм бошад. Масофаи 600 км-ро қатораи якум дар муддати $\frac{600}{x}$ соат ва қатораи дуюм дар муддати

$\frac{600}{y}$ соат тай мекунад. Мувофиқи шарти масъала вобастагиҳои зеринро ҳосил кардан мумкин аст: $\frac{600}{x}+3=\frac{600}{y}$; $\frac{250}{x}=\frac{200}{y}$. Онро чун система ҳал карда натиҷаи матлубро ҳосил кардан мумкин аст. **347**. 35 км/соат, 30 км/соат. *Нишондод*. Дар ҳолати аввала то воҳӯрӣ велосипедрони якум $10x$ км ва велосипедрони дуюм $10y$ км-ро тай мекунад, ки ба вобастагии $10x+10y=650$ меорад. Дар ҳолати дуюм бошад, велосипедрони якум $8x$ км ва дуюм (8 соат + + 4 соату 20 дақиқа = 12 соату 20 дақиқа = $12\frac{1}{3}$ соат) $12\frac{1}{3}y$ км масофаро тай мекунад. Мувофиқи шарт $8x+12\frac{1}{3}y=650$ мешавад. Системаи муодилаҳои ҳосилшударо ҳал кардан зарур аст. **348**. 9 см ва 10 см. **349**. 3 м ва 4 м. **350**. *Нишондод*. Бигзор адади дурақамаи матлуб $\overline{ab}$ бошад, он гоҳ мувофиқи шарти масъала $\begin{cases}\overline{ab}=4(a+b)+3,\\ \overline{ab}+18=\overline{ba}-18\end{cases}$-ро ҳосил мекунем. Агар ба ҷои $\overline{ab}$ ва $\overline{ab}$ мувофиқан $10a+b$ ва $10b+a$ гирем, он гоҳ баъди баъзе табдилдиҳо системаи ду муодилаи хаттии $\begin{cases}2a-b=1,\\ a-b=-4\end{cases}$ пайдо мешавад. Ҷавоб: 59. **351**. Агар касрро дар шакли $\frac{x}{y}$ гирем, он гоҳ вобастагиҳои $\frac{x+2}{y}=1$ ва $\frac{x}{y+3}=\frac{1}{2}$-ро ҳосил мекунем ($y\neq 0$, $y\neq -3$). Барои ёфтани касри матлуб системаи $\begin{cases}x+2=y,\\ 2x=y+3\end{cases}$-ро ҳал кардан зарур аст. Ҷавоб: $\frac{5}{7}$. **352**. 50 ва 45. *Нишондод*. Агар яке аз ададҳоро бо x ва дигаращро бо y (яъне $y=10a+5$) ишорат кунем, он гоҳ барои ёфтани ададҳои матлуб системаи $\begin{cases}x\cdot(10a+5)=2250,\\ x\cdot(10a+b)=2300\end{cases}$-ро ҳосил мекунем. **353**. 5 км/соат,3 км/соат. **354**. Агар адади матлуби дурақамаро дар намуди $\overline{ab}=10a+b$ гирем, он гоҳ шарти масъала ба системаи $\begin{cases}a=2b,\\ (10a+b)(a+b)=252\end{cases}$ меорад. Ҷавоб: 42. **355**. *Нишондод*. Мувофиқи шарт $x+5=a^2$, $x-11=b^2$ мешавад. Аз ин ҷо $a^2-b^2=(a-b)=16$ шуда, ду ҳолат ба миён меояд: 1) $a+b=8$, $a-b=2$, $a=5$, $b=3$, $x=20$; 2) $a+b=16$, $a-b=1$, $a=\frac{17}{2}$, $b=\frac{15}{2}$, $x=67\frac{1}{4}$. Ҷавоб: 20 ва ё $67\frac{1}{2}$.

Боби III

ПРОГРЕССИЯҲО

§7. ПРОГРЕССИЯИ АРИФМЕТИКӢ

21. Пайдарпаиҳои ададӣ ва тарзи дода шудани онҳо.

Пеш аз он, ки мафҳуми пайдарпаиҳоро дохил кунем, ба мисол муроҷиат мекунем. Агар ададҳои тоқи маҷмӯи ададҳои натуралиро бо тартиби афзуншавиашон пай дар пай нависем, он гоҳ қатори ададҳои

$$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ 15;\ 17;\ 19;\ 21;\dots$$

-ро ҳосил мекунем, ки онро **пайдарпаии ададҳои бутуни мусбати тоқ** ё мухтасар **пайдарпай** меноманд. Мушоҳидаи бевосита нишон медиҳад, ки адади ҳафт дар ҷои чорум, адади 13 дар ҷои ҳафтум ва адади 105 дар ҷои панҷоҳу сеюми пайдарпаии дар боло навишташуда ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, барои адади натуралии дилхоҳи n адади тоқи ба он мувофиқ ба $2n-1$ баробар аст, ки инро мо ҳанӯз дар синфи 6 муқаррар карда будем.

Акнун касрҳои дурусти сураташон ба 2 баробари

$$\frac{2}{3};\ \frac{2}{4};\ \frac{2}{5};\ \frac{2}{6};\ \frac{2}{7};\ \frac{2}{8};\ \frac{2}{9};\ \dots\ -$$

-ро муоина мекунем. Мебинем, ки барои ҳар гуна адади натуралии n чунин каср ба касри $\frac{2}{n+2}$ баробар аст.

Ҳамин тариқ, $\frac{2}{8}$ дар ҷои шашум, $\frac{2}{33}$ дар ҷои сию якум ва $\frac{2}{102}$ дар ҷои садуми пайдарпай меистад.

Ададҳои пайдарпаиро ташкилдиҳанда аз рӯи тартиби ҷойгиршавиашон мувофиқан аъзоҳон якум, дуюм ва ғайраи пайдарпай номида мешаванд.

Масалан, аъзоҳои якум ва панҷуми пайдарпаии ададҳои тоқ ба 1 ва 9, пайдарпаии касрҳои дурусти сураташон 2 мувофиқан ба $\frac{2}{3}$ ва $\frac{2}{7}$

баробар аст. Дар шакли умумӣ аъзоҳои пайдарпаиро бо ҳарфҳои индексдори a_1, a_2, a_3, ... ишорат карда, онҳоро мувофиқан «*а*-и якум, *а*-и дуюм, *а*-и сеюм, ... мехонанд. Бо ибораи дигар индексҳо рақами *тартибии* чойгиршавии аъзоҳоро дар пайдарпай ифода мекунанд. Дар ин ҳолат аъзои пайдарпаии рақамаш *n*-ро (яъне аъзои *n*-уми пайдарпаиро) бо a_n ва худи пйдарпаиро бо рамзи (a_n) ишорат мекунанд.

Аз гуфтаҳои боло бармеояд, ки дар байни пайдарпаиҳои ададӣ ва маҷмӯи ададҳои натуралӣ вобастагии функсионалӣ вуҷуд дорад.

Т а ъ р и ф. **Функсияе, ки соҳаи муайянииаш маҷмӯи ададҳои натуралӣ аст, пайдарпаии ададӣ ном дорад.**

Агар ин функсия маълум бошад, он гоҳ таъриф имконият медиҳад, ки пайдарпаиро бо ёрии формулаи *n*-умаш ифода кунем: $a_n=f(n)$*.

Ҳамин тариқ, пайдарпаии ададҳои тоқ бо формулаи $a_n=2n-1$ ва пайдарпаии касрҳои дурусти сураташон 2 бо формулаи $a_n=\dfrac{2}{n+2}$ ифода карда мешавад.

Пайдарпаиҳои дар боло дида баромадаамон **пайдарпаиҳои беохири ададӣ** буданд, чунки миқдори аъзоҳои онҳо беохир аст. Дар ҳолати охирнок будани шумораи аъзоҳои пайдарпай онро **пайдарпаии охирнок** меноманд. Масалан, пайдарпаии

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ ...,\ 98,\ 99,\ 100$$

охирнок буда сад аъзоро дарбар мегирад. Акнун якчанд мисолҳои диққатҷалбкунандаро дида мебароем.

М и с о л и 1. Аз рӯи формулаи аъзои *n*-уми $a_n=1-2n^2$ аъзоҳои пайдарпаиро барқарор мекунем.

Бо ин мақсад ба ҷои *n* ададҳои натуралии 1, 2, 3, 4, 5 ва ғайраро гузошта

$$a_1=-1,\ a_2=-7,\ a_3=-17,\ a_4=-31,\ a_5=-49,\ ...$$

-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо аъзоҳои аввалини пайдарпаии матлуб

$$-1;\ -7;\ -17;\ -31;\ -49;\ ...$$

мешаванд.

М и с о л и 2. Пайдарпай бо формулаи $a_n=(-1)^n$ дода шудааст. Амалиёти дар мисоли 1 гузаронидаамонро такрор намуда

$$a_1=-1,\ a_2=1,\ a_3=-1,\ a_4=1,\ a_5=-1,\ ...$$

-ро ҳосил мекунем, ки аъзоҳояш фақат аз ду ададҳои пай дар пай такроршавандаи −1 ва 1 иборат аст (аъзоҳои рақамашон тоқ ба −1 ва аъзоҳои рақамашон ҷуфт ба 1 баробаранд). Пайдарпай намуди

* $a_n=f(n)$-ро ин хел ҳам маънидод мекунанд: пайдарпаии ададҳои беохири (a_n) чун функсия дар маҷмӯи ададҳои натуралӣ муайян мебошад.

$$-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \dots\ (-1)^n;\ \dots$$

-ро дорад. Ин гуна пайдарпаиҳо, ки аз ду адади аломаташон муқобили қимати мутлақашон якхела ва паи ҳам омада иборатанд, **пайдарпаии алвончхӯранда** номида мешаванд. Намуди умумии ин гуна пайдарпаиҳоро бо формулаи

$$a_n=(-1)^n k,$$

ки дар он k - адади ҳақиқии дилхоҳ аст, ифода мекунанд. Масалан, агар ба ҷои kададҳои 5 ва $\sqrt{2}$ -ро гирем, он гоҳ пайдарпаиҳои

$$-5;\ 5;\ -5;\ 5;\ -5;\ \dots$$

$$-\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ \dots$$

-ро ҳосил мекунем.

Мисоли 3. Пайдарпаиеро дида мебароем, ки ҳамаи аъзоҳояш ҳамон як адади дилхоҳи c мебошад:

$$c;\ c;\ c;\ c;\ c;\ c;\ \dots .$$

Маълум, ки он бо ёрии формулаи $a_n=c$ муайян мегардад. Дар оянда ин гуна пайдарпаиҳоро **пайдарпаиҳои статсионарӣ** (аз калимаи лотинии statsionaris - беҳаракат) меноманд.

Дар боло мо бо тарзи ошкор дода шудани падарпаии (a_n)-ро муоина намудем. Акнун тарзи дигари дода шудани пайдарпай, ки **рекуррентӣ** (аз калимаи лотинии recurro - баргаштан) ном дорад, дида мебароем.

Аз мисолҳо сар мекунем.

Мисоли 4. Пайдарпаии (a_n), ки дар ин ҷо $a_1=1$ ва $a_n=2a_{n-1}-1$ аст, менависем.

Мувофиқи додашудаҳо $a_2=2\ a_1-1=2\cdot 1-1=1$, $a_3=2\ a_2-1=2\cdot 1-1=1$.

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки барои ҳар гуна адади натуралии n $a_n=1$ аст, яъне пайдарпаии статсионарии

$$1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ \dots\ 1;\ \dots$$

пайдарпаии матлуб аст.

Мисоли 5. Аъзои якум ва дуюми пайдарпай ба 1 ва ҳар як аъзои пасояндаш ба суммаи ду аъзои пешоянда баробар аст. Аъзоҳои ин пайдарпаиро мeёбем.

Аз шарт зоҳиран фаҳмост, ки аъзоҳои пайдарпай барои ҳар гуна n-и натуралӣ формулаи $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$-ро қаноат менамоянд. Аз рӯи ин формула $a_3=a_1+a_2=2$, $a_4=a_2+a_3=3$, $a_5=a_3+a_4=5$, $a_6=a_4+a_5=8$, $a_7=a_5+a_6=13$, $a_8=a_6+a_7=21$, ...-ро ҳосил мекунем.

Пайдарпаии ҳосилшудаи

$$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ \dots$$

-ро ададҳои Фибоначчи (тахаллуси математики итолиёвӣ Леонард Пизанский (1170-1250)) меноманд.

М и с о л и 6. Аъзои якуми пайдарпаии (a_n) ба 1 баробар аст. Ҳар як аъзои пасоянд ба сечандаи куби аъзои пешоянд баробар аст. Аъзоҳои ин пайдарпаиро меёбем.

Мувофиқи шартҳои додашуда $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n^3$. Ин формулаҳо имконият медиҳанд, ки аз рӯи аъзои якуми маълуми он $a_2=3 \cdot a_1^3=$ $=3$-ро, баъд аз рӯи a_2 аъзои сеюм $a_3=3a_2^3=81$ ва ғайраҳоро ҳисоб кунем. Ин ба пайдарпаии

$$1;\ 3;\ 81;\ 1594\,323;\ \ldots$$

меоварад.

Формулае, ки аъзои дилхоҳи пайдарпаиро аз ягон аъзояш сар карда ба воситаи як ё якчанд аъзои пешоянд ифода мекунад, формулаи **рекуррентӣ** меноманд. Формулаҳои дар мисолҳои 5 ва 6 навиштаамон рекуррентианд.

М и с о л и 7. Агар (a_n) пайдарпаии ададҳои натуралии ба 7 каратӣ бошад, он гоҳ

а) чор аъзои аввалааш;

б) аъзои панҷоҳу дуюм ва $3p$-умаш

-ро меёбем.

Аз рӯи шарти масъала маълум аст, ки $a_n=7n$ мешавад.

а) Дар формулаи $a_n=7n$ ба ҷои n ададҳои 1, 2, 3 ва 4-ро гузошта чор аъзои аввали матлуби пайдарпаиро меёбем:

$$a_1=7 \cdot 1=7, \quad a_2=7 \cdot 2=14, \quad a_3=7 \cdot 3=21, \quad a_4=7 \cdot 4=28;$$

б) Тарзи болоии амалиётро такрор карда истода a_{52} ва a_{3p}-ро дар намуди зерин ёфтан мумкин аст:

$$a_{52}=7 \cdot 52=364, \quad a_{3p}=7 \cdot 3p=21p.$$

М и с о л и 8. Формулаи аъзои n-умро барои пайдарпаии

$$2;\ 5;\ 10;\ 17;\ 26;\ \ldots$$

тартиб медиҳем.

Аъзоҳои пайдарпаиро дар шакли зерин менависем: $a_1=2=1^2+1$; $a_2=5=2^2+1$; $a_3=10=3^2+1$; $a_4=17=4^2+1$; $a_5=26=5^2+1$; $a_6=37=6^2+1$; ... .

Мушоҳидаи бевоситаи навиштаҷотҳои болоӣ нишон медиҳанд, ки аъзои n-уми ин пайдарпаӣ бо формулаи $a_n=n^2+1$ ифода мешавад.

?

1. Таърифи пайдарпаии ададиро диҳед. 2. Дар кадом ҳолат барои (a_n) формулаи $a_n=f(n)$, ки a_n аъзои n-уми пайдарпай аст, дуруст мебошад? 3. Оё маҷмӯи ададҳои ҷуфт ва касрҳои мусбати дурусти сураташон ба 1 баробар пайдарпаии ададиро ташкил медиҳанд? 4. Чӣ тавр аз рӯи аъзои n-уми пайдарпай, ки бо формулаи $a_n=f(n)$ ифода мешавад, пайдарпаиро тартиб додан мумкин аст? Мисол оред. 5. Мисолҳои пайдарпаиҳои статсионарӣ ва рекуррентиро оред. 6. Пайдарпаиҳои беохир ва охирнокро шарҳ дода, мисолҳо оред.

356. Аъзоҳои номаълуми пайдарпаии

а) 2; 4; ?; 8; 10; ?; ?; 16; б) 144; ?; 36; 18; ?; ?;? $\frac{9}{8}$ -ро ёбед

357. Пайдарпаии ададии (a_n)

1; 3; 9; 27; 81; 243; 729; 2187; 6561; 19683; 59049

аст. Аъзоҳое, ки дар байни

а) a_1 ва a_4 б) a_3 ва a_6 в) a_5 ва a_9 г) a_9 ва a_{11}

ҷойгиранд ёбед.

358. Агар (b_n) ва пайдарпаии ададҳои натуралии ба 4 каратӣ бошад, он гоҳ

а) шаш аъзои аввалааш;

б) аъзои нуҳум ва саду якумаш;

в) аъзои $2k$-умаш

-ро ёбед.

359. (c_n) пайдарпаиест, ки дар он ҳамаи аъзоҳои индексаш тоқ ба 2 ва аъзоҳои индексаш ҷуфт ба −1 баробар аст.

а) Панҷ аъзои аввалаашро нависед;

б) аъзоҳои c_7, c_{12}, c_{21}, c_{103}, c_{204}, c_{2k-1}, c_{2k}-ро ки $k \in N$ аст, ёбед.

360. (x_n) пайдарпаии аъзоҳояш дучандаи квадрати ададҳои натуралӣ аст.

а) ҳашт аъзои аввалашро нависед;

б) аъзоҳои x_{18}; x_{23}; x_{41} ва x_{2n}-ро ёбед.

361 Формулаи аъзои n-умро барои пайдарпаӣ тартиб диҳед:

а) 1; 2; 3; 4; 5; ... б) $2;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{6}{5};\ ...$

в) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ ...$ г) $\frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{2\cdot 3};\ \frac{1}{3\cdot 4};\ \frac{1}{4\cdot 5};\ ...$

362. Аз рӯи аъзоҳои додашудаи пайдарпаии

а) $\frac{2}{3};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{7};\ \frac{8}{9};\ \frac{10}{11};\ ...$ б) $\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{6};\ \frac{6}{7};\ ...$

формулаи аъзои n-умашро тартиб диҳед.

363. Пайдарпаии ададиро тартиб диҳед, агар:

а) $a_n = 0{,}5n + 2,\ \ 1 \le n \le 6;$ г) $a_n = (1)^n \cdot 12,\ \ 1 \le n \le 10;$

б) $a_n = -n^2 + 1,\ \ 1 \le n \le 3;$ д) $a_n = n^2 + 2n,\ \ 1 \le n \le 4;$

в) $a_n = 4,\ \ 1 \le n \le 5$ е) $a_n = n^2 - 4n + 3,\ \ 1 \le n \le 5;$

бошад

364. Ҳафт аъзои аввали пайдарпаиро, ки бо формулаи:

а) $x_n = 2n^2 - 1;$ г) $x_n = 2n - 5;$ ж) $x_n = 3n^2 + 1;$

б) $x_n = 3n + 2;$ д) $x_n = \frac{2n}{n+1};$ з) $x_n = (-1)^n \cdot 3;$

в) $x_n = \frac{2n-1}{n+1};$ е) $x_n = 3 \cdot 2^{n-3};$ и) $x_n = 0{,}5 \cdot 4^{n+1};$

дода шудааст, ёбед.

365. Пайдарпаии (b_n) бо формулаи $b_n = n^3+2n$ дода шудааст. Аъзоҳои b_4, b_{13} ва b_{61}-и онро ёбед.

366. Аъзоҳои дуюм, сеюм, чорум, панҷум ва шашуми пайдарпаии (c_n)-ро ҳисоб кунед: агар:

а) $c_1=12$ ва ҳар як аъзои пасоянда аз аъзои пешоянда 8 воҳид калон бошад (яъне $c_{n+1}=c_n+8$);

б) $c_1=400$ ва ҳар як аъзои пасоянда аз пешоянда 4 маротиба хурд бошад (яъне $c_{n+1}=c_n : 4$).

367. Агар:

а) $a_1=19,\ a_{n+1}=a_n+1$; д) $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+3$;

б) $a_1=1000,\ a_{n+1}=0{,}01a_n$; е) $a_1=9,\ a_{n+1}=3a_n^2+7$;

в) $a_1=160,\ a_{n+1}=-0{,}5a_n$; ж) $a_1=10,\ a_{n+1}=\dfrac{3}{a_n^2}$;

г) $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n^{-1}$; з) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n^3-1$

бошад, шаш аъзои аввалаи пайдарпаии (a_n)-ро нависед.

368. Агар:

а) $b_1=15,\ b_{n+1}=b_n+5$; д) $b_1=4,\ b_{n+1}=2b_n-3$;

б) $b_1=25,\ b_{n+1}=5b_n-3$; е) $b_1=6,\ b_{n+1}=2b_n^{-1}$;

бошад, панҷ аъзои аввалаи пайдарпаии (b_n)-ро нависед.

369. Аъзои якуми пайдарпаии (x_n) ба 3 баробар буда, ҳар як аъзои пасояндаш ба куби аъзои пешинааш баробар аст ($x_1=3$; $x_{n+1}=x_n^3$). Се аъзои аввалаи пайдарпаиро ёбед.

370. Бигузор $y_1=1$, $y_{n+1}=0{,}5y_n$ бошад. Пайдарпаии (y_n)-ро тартиб диҳед.

371. Аъзои пайдарпаии (a_n)-ро аз рӯи формулаи $a_n=(-1)^n \cdot 7$ ёбед.

Машқҳо барои такрор

372. Ифодаҳои зеринро содда кунед:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

373. Ҳисоб кунед:

а) $(2^2)^3$; в) $-(-2^2)^3$; д) $(4^2-5^2)^2$;

б) $(-2)^5 \cdot 3$; г) $(4^2-3^2)^3$; е) $(3^3-2^3)^2$.

374. Муодилаи $x^2-5x+6=0$-ро ҳал накарда:

а) x_1+x_2; б) $x_1 \cdot x_2$; в) $x_1^2 \cdot x_2+x_1 \cdot x_2^2$

-ро ҳисоб кунед

375. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\dfrac{4}{x+3}+1=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{5}{3-x}$; б) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4}{1-x}=\dfrac{5-x}{x^2-1}$.

376. Қаиқи мотордор дар 4 соат 44 км ба муқобили ҷараёни дарё ва 56 км ба равиши ҷараён шино кард. Агар суръати ҷараёни дарё ба 3 км/соат баробар бошад, он гоҳ суръати қаиқро дар оби ором ёбед?

377. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ 7x - y = -23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2{,}1x + 1{,}3y = 6, \\ y - x = 2. \end{cases}$

378. Функсия бо формулаи $f(x) = \dfrac{x^2 - 7}{x + 1}$ дода шудааст. Ёбед:

а) $f(1)$; б) $f(-1)$; в) $f(0)$; г) $f(1{,}1)$; д) $f(-0{,}5)$.

379. Масъалаи Магнитскийро аз китоби «Арифметика»-аш ҳал кунед: Агар квадрати ададро ба 108 ҷамъ кунем, он гоҳ ададе ҳосил мешавад, ки аз худи адади матлуб 24 маротиба зиёд аст. Ададро ёбед.

22. Таърифи прогрессияи арифметикӣ

Дар пункти 21 ба мафҳуми пайдарпай хеле хуб шинос шудем. Пайдарпаиҳои

$$(a_n)\ 1;\ 6;\ 11;\ 16;\ 21;\ \ldots$$
$$(b_n)\ 2;\ 2{,}1;\ 2{,}2;\ 2{,}3;\ 2{,}4;\ \ldots$$
$$(c_n)\ -1;\ -5;\ -9;\ -13;\ -17;\ \ldots$$

-ро, ки бо баъзе хосиятҳояшон диққатҷалбкунандаанд, дида мебароем. Масалан, пайдарпаии (a_n) пайдарпаии ададҳои натуралиеро ифода мекунад, ки аз аъзои дуюм сар карда ҳангоми ба 5 тақсим кардан дар бақия 1 мемонад. Аз тарафи дигар, ҳар як аъзои ин пайдарпай, аз аъзои дуюм сар карда, дар натиҷаи ба аъзои пешоянд ҷамъ кардани ҳамон як адади $d=5$ ҳосил мешавад. Ногуфта намонад, ки хусусияти охирин барои пайдарпаиҳои дуюм ва сеюм (яъне (b_n) ва (c_n) ҷой дошта барояшон адади дар боло номбаршуда мувофиқан $d=0{,}1$ ва $d=-4$ мебошад. Хулоса, хусусияти фарққунандаи ин пайдарпаиҳо дар он аст, ки барои n-и дилхоҳ аъзои онҳо баробарии $a_{n+1}=a_n+d$-ро қаноат менамоянд. Дар ҳақиқат, барои пайдарпаиҳои интихобкардаамон мувофиқан $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+5$, $b_1=2$, $b_{n+1}=b_n+0{,}1$ ва $c_1=-1$, $c_{n+1}=c_n-4$ мебошанд. Ин пайдарпаиҳо мисоли **прогрессияи арифметикӣ** мебошанд.

Т а ъ р и ф. **Пайдарпаие, ки ҳар як аъзояш аз аъзои дуюм сар карда дар натиҷа ба аъзои пешоянд ҷамъ кардани ҳамон як адад ҳосил мешавад, прогрессияи арифметикӣ* номида мешавад.**

Ба ибораи дигар, иҷрои шарти $a_{n+1}=a_n+d$ шаҳодат медиҳад, ки пайдарпаии (a_n) **прогрессияи арифметикӣ** мебошад. Аз баробарии охирин баробарии

$$a_{n+1}-a_n=d$$

-ро навиштан мумкин аст (он аз худи таъриф ҳам бармеояд), ки маънои зеринро дорад: аз аъзои дуюм сар карда фарқи байни аъзои

* Прогрессия аз калимаи лотинии progressio гирифта шуда, маънояш «ҳаракат ба пеш» аст.

дилхоҳи прогрессияи арифметикӣ аз аъзои пешояндаш ба адади доимии d баробар аст. Адади d-ро **фарқи прогрессияи арифметикӣ** меноманд.

Аз муҳокимарониҳои болой бармеояд, ки **барои тартиб додани прогрессияи арифметикӣ донистани аъзои якум ва фарқи он кифоя аст.**

Масалан, агар $a_1=2$ ва $d=3$ бошад, он гоҳ мувофиқи формулаи $a_{n+1}=a_n+d$ пайдарпаии

$$2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ \ldots$$

-ро ҳосил мекунем, ки вай прогрессияи арифметикӣ аст.

Айнан ҳамин хел ҳангоми $a_1=5$ ва $d=-3$ будан прогрессияи арифметикии

$$5;\ 2;\ -1;\ -4;\ -7;\ -10;\ \ldots$$

ҳосил мешавад. Агар $a_1=1$ ва а) $d=1$, б) $d=2$ бошад, он гоҳ мувофиқан пайдарпаиҳои

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

ва

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$

-ро ҳосил мекунем. Яъне ададҳои натуралӣ ва ададҳои тоқи мусбати бутун прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд.

Пайдарпаии статсионарии

$$5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \ldots$$

низ прогрессияи арифметикиро бо аъзои $a_n=5$ ва фарқи $d=0$ ифода мекунад.

Пайдарпаиҳои

$$1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots$$

ва

$$2,\ 5,\ 8,\ 10,\ 13,\ 15,\ 18,\ \ldots$$

прогрессияи арифметикӣ нестанд, чунки барои якумаш $a_3-a_2=5-3=2$, $a_4-a_3=6-5=1$ ва барои дуюмаш $a_3-a_2=8-5=3$, $a_4-a_3=10-8=2$.

Қайд мекунем, ки агар фарқи прогрессия мусбат бошад, он гоҳ онро **афзуншаванда** ва агар манфӣ бошад, **камшаванда** меноманд.

Масалан прогрессияи

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$$

афзуншаванда буда, прогрессияи

$$4,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4,\ -6,\ \ldots$$

камшаванда аст.

Дар охир таъкид менамоем, ки прогрессияҳои охирнок ва беохир ба монанди пайдарпаиҳои охирнок ва беохир (ниг. ба п. 21) маънидод карда мешаванд. Ин тасдиқот табиатан дуруст аст, чунки чӣ хеле дар боло гуфта гузашта будем, прогрессияҳо як намуди махсуси пайдарпаиҳои ададианд.

Аъзоҳои аввалин ва охирини прогрессияи охирнокро аъзоҳои канорӣ меноманд. Масалан, дар прогрессияи арифметикии

$$9;\ 16;\ 23;\ 30;\ 37;$$

аъзоҳои 9 ва 37 канорианд.

? 1. Таърифи прогрессияи арифметикиро баён карда мисолҳо оред. 2. Фарқи чунин прогрессия гуфта чиро мегӯянд? 3. Аз рӯи аъзоҳои якум ва фарқи прогрессияи арифметикӣ онро чӣ тавр тартиб додан мумкин аст? Мисолҳо оред.

380. Оё пайдарпаӣ прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад:

а) 1; 4; 10; 11; 14; 17; ...
б) −2; −4; −6; −8; −10; −12; ...
в) 3; 3; 3; 3; 3; 3; ...
г) $\frac{1}{3};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{6};\ \frac{5}{7};\ \frac{6}{8};\ ...?$

381. Аз рӯи аъзои якум ва фарқи прогрессия прогрессияи арифметикиро тартиб диҳед:

а) $a_1 = 2,\ d=1;$
б) $a_1=\frac{1}{2},\ d=\frac{1}{2};$
в) $a_1=-7,\ d=3;$
г) $a_1=5,\ d=2;$
д) $a_1=2{,}1,\ d=0{,}2;$
е) $a_1=-1,\ d=0;$
ж) $a_1=0{,}51,\ d=0{,}09;$
з) $a_1=2{,}1,\ d=-0{,}1;$
и) $a_1=3,\ d=0{,}5;$
к) $a_1=1,\ d=9;$

382. Фарқи прогрессия d-ро ёбед, агар прогрессияи арифметикӣ намуди:

а) 2; 4; 6; 8; ...
б) $\frac{1}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{7}{3};\ \frac{10}{3};\ ...$
в) −1; −2; −3; −4; ...
г) 1; 5; 9; 13; ...
д) −10; 0; 10; 20; ...
е) −10; −19; −28; −37; ...
ж) 8; 15; 22; 29; ...
з) $\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ ...$
и) −9; −7; −5; −3; ...
к) 13; 19; 25; 31; ...

-ро дошта бошад.

Машқҳо барои такрор

383. Аз пункти A ба пункти B автомобили боркаш ва баъди 1 соат аз A ба B автомобили сабукрав ба роҳ баромад. Ба пункти B автомобилҳо дар як вақт омада расиданд. Агар автомобилҳо аз пункти A ва B дар як вақт ба пешвози якдигар ба роҳ мебаромаданд, он гоҳ баъди 1 соату 12 дақиқаи ҳаракат вомехӯрданд. Автомобили боркаш масофаи пунктҳои A ва B-ро дар чанд соат тай кардааст?

384. Амалро иҷро кунед:

а) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}};$ б) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1} : \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x^2+x+1}{x}.$

385. Муодиларо ҳал кунед:

а) $|x|+x^3=0$; б) $(2x-1)(|x|+1)=3$.

386. Исбот кунед, ки $3^{2n+2}-8n-9$ ба 64 бебақия тақсим мешавад.

387. Тарафҳои росткунҷаи масоҳаташ ба a см^2 ва кунҷи тези байни диагоналҳояш ба $60°$ баробарро ёбед.

388. Кадоме аз нуқтаҳои $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ -3)$, $C(3;\ 3)$, $D(-2,1;\ 1,2)$, $E\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$, $F\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$ ба графики функсияи $y=2|x|-3$ тааллуқ дорад?

389. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $f(x)=\dfrac{2x}{4-x}$; б) $f(x)=\dfrac{8}{x^2+4}$.

390. Аз рӯи аъзоҳои додашудаи пайдарпаии

а) $\frac{3}{2};\ \frac{6}{3};\ \frac{9}{4};\ \frac{12}{5};\ \frac{15}{6};\ \ldots$ б) $-6;\ 6;\ -6;\ 6;\ -6;\ \ldots$

формулаи аъзои n-умашро тартиб диҳед.

23. Формулаи аъзои n-уми прогрессияи арифметикӣ

Чӣ тавре, ки дар пункти 22 дидем, аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро дониста, пай дар пай (яъне аввал аъзои дуюм, баъд аъзои сеюм ва ҳоказо) аъзои дилхоҳи онро ёфтан мумкин аст. Аммо барои ёфтани аъзои рақами тартибиаш ба қадри имкон калони прогрессия ин тарз муфид набуда, ба ғайр аз ҳисобу китоби зиёд, вақти тулониро талаб менамояд. Бо мақсади ёфтани тарзи вақти каму ҳисоби кӯтоҳро талабкунанда боз як маротиба ба таърифи прогрессия муроҷиат мекунем. Дар асоси он

$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d$$

ва ғайра. Аз таҳлили қонуни тағйирёбӣ маълум мегардад, ки коэффитсиентҳои назди d-и ифодаҳои ҳосилшуда аз индекси аъзои мувофиқи прогрессия як воҳид кам аст:

$$a_2=a_1+\underline{1}\cdot d,\quad a_3=a_1+\underline{2}\cdot d,\quad a_4=a_1+\underline{3}\cdot d,\quad a_5=a_1+\underline{4}\cdot d.$$

Аз ин рӯ барои ёфтани a_n ба a_1 ифодаи $(n-1)\cdot d$-ро ҷамъ кардан кофист, яъне

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

мешавад.

Формулаи охирин ба ёфтани **аъзои n-уми (дилхоҳи) прогрессияи арифметикӣ** имконият медиҳад. Истифодаи онро дар ҳалли мисолҳои мушаххас меорем.

Мисоли 1. Пайдарпаии (a_n) прогрессияи арифметикӣ буда, дар он $a_1=0,32$ ва $d=0,22$ аст. Аъзои бисту сеюми онро меёбем:

$$a_{23}=a_1+(23-1)d=0,32+22\cdot 0,22=0,32+4,84=5,16.$$

Ҷавоб: $a_{23}=5,16$.

М и с о л и 2. Муайян мекунем, ки адади -108 аъзои прогрессияи арифметикии (x_n):

$$18;\ 13{,}8;\ 9{,}6;\ 5{,}4;\ 1{,}2;\ -3;\ \ldots$$

ҳаст ё на.

Бо ин мақсад аз рӯи аъзоҳои прогрессияи додашуда d-ро меёбем: $d=x_2-x_1=13{,}8-18=-4{,}2$. Формулаи аъзои n-уми прогрессияи арифметикии (x_n)-ро тартиб медиҳем:

$$x_n=18+(n-1)(-4{,}2) \quad \text{ё} \quad x_n=22{,}2-4{,}2n.$$

Агар чунин адади натуралии n мавҷуд бошад, ки қимати ифодаи $22{,}2-4{,}2n$ ба -108 баробар шавад, он гоҳ ин адад аъзои прогрессияи арифметикии (x_n) мешавад. Барои муайян кардани ин муодилаи

$$22{,}2-4{,}2n=-108$$

-ро ҳал мекунем:

$$4{,}2n=108+22{,}2, \qquad 4{,}2n=130{,}2, \qquad n=31.$$

Ҳамин тариқ, адади -108 аъзои сию якуми прогрессияи арифметикии додашуда будааст.

Формулаи аъзои дилхоҳи прогрессияи арифметикӣ имконият медиҳад, ки аз рӯи ягон аъзо (яъне a_s) ва фарқаш (d) ё аз рӯи ду аъзо (a_s ва a_k) ҳар гуна аъзои дигари (яъне a_l, ки $l\neq k$, s) он ёфта шавад.

М и с о л и 3. Агар $a_{20}=214$ ва $d=0{,}7$ бошад, a_1-ро меёбем.

Формулаи аъзои n-уми прогрессияи арифметикиро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$a_{20}=a_1+(n-1)d; \qquad a_1=a_{20}-19d=214-19\cdot 0{,}7=214-13{,}3=200{,}7.$$

Аз ин ҷо $a_1=200{,}7$. Ҳамин тарик, прогрессия бо аъзои якуми ба 200,7 баробар *сар* мешавад.

М и с о л и 4. Агар $a_6=32$ ва $a_{19}=123$ бошад, аъзои якум ва фарқи прогрессияи (a_n)-ро меёбем. Дар асоси додашудаҳо системаи муодилаҳои дуномаълумаи

$$\begin{cases} a_6=32, \\ a_{19}=123 \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} a_1+5d=32, \\ a_1+18d=123 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Онро бо тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал мекунем:

$$\begin{cases} a_1+18d=123, \\ -a_1-5d=-32; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+18d=123, \\ 13d=91; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=123-18\cdot 7, \\ d=7; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=-3, \\ d=7. \end{cases}$$

Инак, аъзои якуми прогрессия ба -3 ва фарқаш ба 7 баробар аст.

М и с о л и 5. Агар $a_5=72$ ва $a_{11}=138$ бошад, аъзои понздаҳуми прогрессияи (a_n)-ро меёбем. Дар навбати аввал аз рӯи схемаи ҳалли мисоли 4 амал карда, аъзои якум ва фарқи прогрессияро аз системаи зерин меёбем:

$$\begin{cases} a_5=72, \\ a_{11}=138; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+4d=72, \\ a_1+10d=138; \end{cases} \quad \begin{cases} 6d=66, \\ a_1+4d=72; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=72-4\cdot 11, \\ d=11; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=72-44, \\ d=11; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=28, \\ d=11. \end{cases}$$

Аъзои матлуби понздаҳуми прогрессияи арифметикӣ баъди ба ҷои a_1 ва d гузоштани қиматҳои ёфтаамон ба

$$a_{15}=28+(15-1)\cdot 11=28+14\cdot 11=28+154=182$$

баробар мешавад.

М и с о л и 6. Дар прогрессияи арифметикии (x_n) аъзои якум ба 8,7 ва фарқ ба –0,3 баробар аст. Муқаррар мекунем, ки шартҳои $x_n \geq 0$ ва $x_n<0$ барои кадом аъзоҳои прогрессия иҷро мешаванд.

Ҳ а л. Барои $x_1+(n-1)d$, ки ба x_n баробар аст, ҳосил мекунем:

$$8{,}7+(n-1)(-0{,}3)=8{,}7+0{,}3-0{,}3n=9-0{,}3n.$$

Аз ин ҷо, ҳангоми $x_n \geq 0$ будан нобаробарии $9-0{,}3n \geq 0$ ё $n \leq 30$ ва ҳангоми $x_n<0$ будан нобаробарии $n>30$-ро ҳосил мекунем.

Ҳамин тариқ, 30-тои аъзоҳои аввалаи прогрессия ғайриманфӣ буда, пасояндҳояш (яъне аз аъзои 31-ум сар карда) ададҳои манфианд.

М и с о л и 7. Ҷисми ростхатта ҳаракаткунанда дар соати аввал 13 км масофаро тай кард. Агар он дар ҳар як соати минбаъда назар ба соати пешоянд 1,5 км-ро зиёдтар тай кунад, он гоҳ дар соати ёздаҳуми ҳаракаташ вай кадом масофаро тай мекунад?

Ҳ а л. Ҳаракати муоинашаванда (аз рӯи шарт) ҳаракати ростхаттаи номунтазам аст, чунки дар фосилаҳои баробари вақт масофаи гуногунро тай менамояд. Дар ҳақиқат, ҷисм соати аввал $S_1=13$ км, соати дуюм $S_2=S_1+1{,}5=14{,}5$ км, соати сеюм $S_3=S_2+1{,}5=16$ км, ... масофаро тай мекунад. Хулоса, тағйирёбии вазъияти ҷисм баъди ҳар як соати ҳаракаташ намуди пайдарпаии (S_n)

$$13;\ 14{,}5;\ 16;\ 17{,}5;\ \ldots$$

-ро мегирад, ки он прогрессияи арифметикиро бо нишондодҳои $S_1=13$ ва $d=1{,}5$ ифода мекунад. Аз ин ҷо мо формулаи $S_n=S_1+(n-1)d$-ро навишта метавонем, ки бо ёрии он дар соати дилхоҳи n чанд км масофа тай кардани ҷисмро меёбем. Ҳангоми $n-11$ будан

$$S_{11}=S_1+(11-1)d=13+10\cdot 1{,}5=13+15=28 \text{ (км)}$$

мешавад.

Ҷ а в о б: Ҷисм дар соати ёздаҳуми ҳаракаташ 28 км масофаро тай мекунад.

М и с о л и 8. Дар байни ададҳои 4 ва 40 чунин чор ададеро гузоред, ки онҳо дар якҷоягӣ бо ададҳои додашуда прогрессияи арифметикиро ташкил диҳад.

Ҳ а л. Мувофиқи шарт мо бояд пайдарпаии охирнокӣ ба прогрессияи арифметикии

$$4;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ 40$$

мувофиқояндаро барқарор намоем. Аз қиматҳои маълуми $a_1=4$ ва $a_6=40$ истифода бурда d-ро меёбем:

$$a_6=a_1+5d;\quad 5d=a_6-a_1;\quad 5d=40-4;\quad 5d=36;\quad d=7{,}2.$$

Аз ин ҷо пай дар пай аъзоҳои матлуби

$a_2=4+7{,}2=11{,}2;$ $\qquad a_3=4+2\cdot 7{,}2=18{,}4;$

$a_4=4+3\cdot 7{,}2=25{,}6;$ $\qquad a_5=4+4\cdot 7{,}2=32{,}8$

ҳосил мешаванд.

Ҷ а в о б: 11,2; 18,4; 25,6; 32,8.

М и с о л и 9. Маълум, ки суммаи дучандаи аъзои якум ва панҷуми прогрессияи арифметикӣ ба 7 ва фарқи аъзои сеюму ҳафтум ба 8 баробар аст. Прогрессияро барқарор мекунем.

Ҳ а л. Бо мақсади ёфтани аъзои якум ва фарқи прогрессия аз рӯи шарт системаи

$$\begin{cases}2a_1+a_5=7,\\ a_3-a_7=8;\end{cases}$$

-ро тартиб дода, онро ҳал мекунем:

$$\begin{cases}2a_1+a_1+4d=7,\\ a_1+2d-a_1-6d=8;\end{cases}\quad \begin{cases}3a_1+4d=7,\\ -4d=8;\end{cases}\quad \begin{cases}3a_1=7+8,\\ d=-2;\end{cases}\quad \begin{cases}a_1=5,\\ d=-2.\end{cases}$$

Аз рӯи ин нишондодҳои охирин прогрессияи матлуб

$5;\ 3;\ 1;\ -1;\ -3;\ -5;\ -7;\ \ldots$ мешавад.

Э з о ҳ. Формулаи аъзои n-уми прогрессияро табдил дода ҳосил мекунем:

$$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+n\cdot d-d=n\cdot d+(a_1-d),\quad a_n=n\cdot d+m,$$

ки $m=a_1-d$ аст. *Яъне формулаи аъзои n-уми прогрессияи арифметикиро* дар шакли

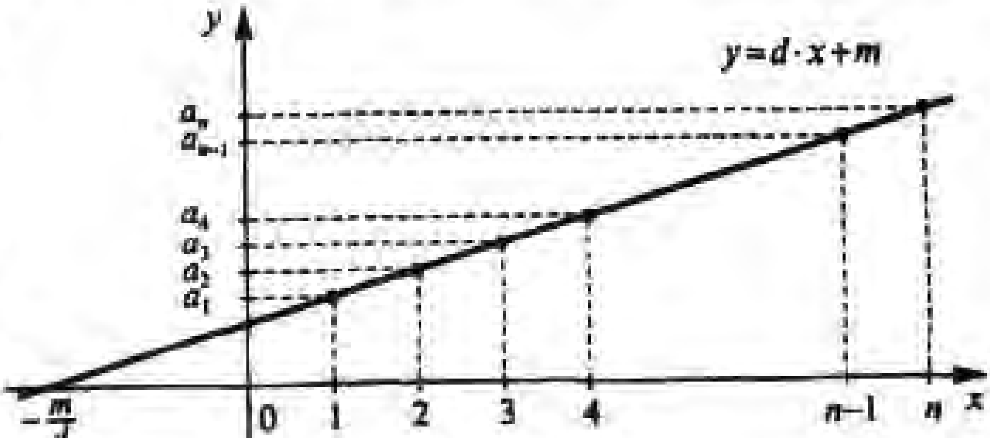
$$a_n=n\cdot d+m$$

ҳам навиштан мумкин аст.

Формулаи охирин муодилаи $y=ax+b$-и хати ростро, ки дар синфи 7 омӯхта шуда буд, ба хотир меорад. Соҳаи муайянии он тамоми нуқтаҳои тири ададӣ аст. Вале соҳаи муайянии $a_n=n\cdot d+m$ бошад фақат маҷмӯи ададҳои натуралиро ташкил медиҳад. Бо тағйирёбии n (яъне қиматҳои 1, 2, 3, ... k, ... адади n) қиматҳои

$a_1=d+m,\quad a_2=2d+m,\quad a_3=3d+m,\quad \ldots\quad a_k=k\cdot d+m,\quad \ldots$

-ро ҳосил мекунем. Нуқтаҳои $(n;\ a_n)$, $n\in N$ координатаҳои маҷмӯи нуқтаҳои дар хати рости $y=x\cdot d+m$ хобандаро, ки аз якдигар дар масофаи ба $\sqrt{1+d^2}$ баробар ҷойгиранд, ифода мекунад. (ниг. ба расми 86).



Расми 86

Шакли нави $a_n=n \cdot d+m$-и навишти аъзои n–уми прогрессияи арифметикии (a_n) аз он шаҳодат медиҳад, ки ҳамаи аъзоҳои прогрессия дар ҳамвории координатавӣ ординатаҳои нуқтаҳои (n; a_n), $n \in N$ мебошад, ки онҳо дар хати рости $y=x \cdot d+m$ меҳобанд.

Ниҳоят қайд мекунем, ки тасдиқоти зерин низ ҷой дорад: *ҳар гуна пайдарпаии (a_n)-и аъзои дилхоҳаш бо формулаи $a_n=n \cdot d+m$ дода шуда, прогрессияи арифметикӣ мебошад.* Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки фарқи $a_{n+1}-a_n$ ба

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)d+m-(n \cdot d+m)=nd+d+m-nd-m=d$$

баробар мешавад: $a_{n+1}-a_n=d.$

Баробарии охирин аз он шаҳодат медиҳад, ки пайдарпаии (a_n) дар ҳақиқат прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад.

Масалан, пайдарпаии (a_n), ки бо формулаи $a_n=2n+1$ дода шудааст, прогрессияи арифметикиро бо фарқи $d=2$ ва аъзои якуми $a_1=1 \cdot d+m=2+1=3$ ифода мекунад.

? 1. Аъзои n-уми прогрессияи арифметикии (a_n)-ро аз рӯи кадом формула меёбанд? 2. Агар a_k ва a_m ($k \neq m$) аъзоҳои прогрессияи арифметикӣ бошанд, он гоҳ a_1 ва d-ро аз рӯи формулаи $a_n=a_1+(n-1)d$ ёфта метавонем? 3. Тасдиқотҳоеро, ки аз формулаи $a_n=n \cdot d+m$ бармеоянд, баён кунед. Мисолҳо оред.

391. (a_n) прогрессияи арифметикиро бо аъзои якуми a_1 ва фарқи d ифода мекунад. Аъзоҳои

а) a_{17}; б) a_{126}; в) a_{281}; г) a_{k+2}; д) a_{k+15}; е) a_{2k+1}-ро ба воситаи a_1 ва d ифода кунед.

392. Пайдарпаии (b_n) прогрессияи арифметикӣ мебошад. Агар:

а) $b_1= 28$ ва $d=3$ бошад, b_5-ро;
б) $b_1=15,8$ ва $d=-1,5$ бошад, b_{21}-ро;
в) $b_1=-3$ ва $d=0,7$ бошад, b_{111}-ро
г) $b_1=108$ ва $d=-0,6$ бошад, b_{216}-ро;
д) $b_1=-1$ ва $d=2$ бошад, b_{31}-ро;
е) $b_1=12,1$ ва $d=-0,1$ бошад, b_{18}-ро;
ж) $b_1=5$ ва $d=2,3$ бошад, b_{23}-ро;
з) $b_1=103$ ва $d=-5$ бошад, b_{57}-ро;
и) $b_1=-41$ ва $d=4$ бошад, b_{19}-ро;
к) $b_1=191$ ва $d=-21$ бошад, b_7-ро ёбед.

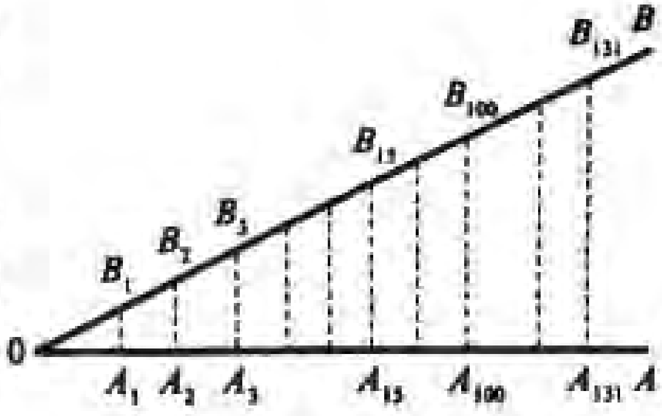
393. Аъзои даҳум, бисту якум ва n-уми прогрессияи арифметикии

а) $\frac{2}{3}$; -2; ... б) 2,3; 1,3; ... в) -15; 10; ...

-ро ёбед.

394. Аъзои 8-ум, 23-юм ва n-уми прогрессияи арифметикии а) $-8,5; -6,5; ...$, б) $10; 7; ...$ в) $15; -10; ...$-ро ёбед.

395. Агар тайёраи аз Душанбе ба Маскав парвозкунанда суръати ҳаракаташро ҳар як дақиқа мунтазам 100 м зиёд кунад, он гоҳ баъди 1 соат ба кадом суръат доро мешавад?



Расми 87

396. Сангпушт соати аввали ҳаракаташ 0,8 км ва ҳар як соати минбаъда назар ба соати пешоянд 0,3 км масофаро зиёдтар тай кард. Сангпушт соати ҳафтуми ҳаракат чӣ қадар масофаро тай мекунад?

397. Қатора аз шаҳри Хуҷанд ба сӯи Конибодом равона шуда, суръаташро ҳар дақиқа 80 м мунтазам зиёд мекард. Суръати қатора дар дақиқаи бисту шашум чӣ қадар мешавад?

398. Кунҷи дилхоҳи AOB дода шудааст. Аз қулла дар тарафи OA порчаҳои баробар ҷудо шуда, аз нуғҳои онҳо хатҳои рости параллел гузарониданд (расми 87). Агар дарозии порчаи A_1B_1 0,5 см бошад, он гоҳ дарозии порчаҳои $A_{15}B_{15}$, $A_{100}B_{100}$ ва $A_{131}B_{131}$ ба чанд баробар мешавад?

399. Агар:

а) $a_{301}=1212$, $d=4$; в) $a_{52}=243$, $d=2$;

б) $a_{145}=908$, $d=-7$; г) $a_{18}=97$, $d=3$

бошад, аъзои якуми прогрессияи арифметикии (a_n)-ро ёбед.

400. Дар прогрессияи арифметикии (y_n):

а) $y_1=13$, $y_{15}=55$; в) $y_1=-4$; $y_{11}=-54$;

б) $y_1=24,5$; $y_{25}=-59,5$; г) $y_1=9$, $y_{37}=63$

аст. Фарқи прогрессияро ёбед.

401. Дар байни ададҳои 15 ва 4,5 шаш ададро чунон гузоред, ки онҳо дар якҷоягӣ бо ададҳои додашуда прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд. Ин ададҳо кадомҳоянд?

402. Дар байни ададҳои 2 ва -28 чунин нӯҳ ададеро гузоред, ки онҳо бо ҳамроҳии ададҳои додашуда прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд.

403. Прогрессияи арифметикии (c_n) дода шудааст. Агар:

а) $c_8=31,5$, $c_{29}=63$; г) $c_3=15$, $c_{17}=85$;

б) $c_{20}=0$, $c_{66}=-92$; д) $c_5=12$, $c_{29}=60$;

в) $c_{10}=-44,2$, $c_{36}=117$; е) $c_7=-93$, $c_{11}=-153$

бошад, он гоҳ аъзои якум ва фарқи прогрессия ёфта шавад.

404. Аъзои a_1-и прогрессияи арифметикии (a_n) ёфта шавад, агар
а) $a_s=17$, $a_k=45$, $s=3$, $k=7$, $l=11$;
б) $a_s=-7$, $a_k=-34$, $s=4$, $k=13$, $l=7$
бошад.

405. Оё дар прогрессияи арифметикии 12; 19; ... адади
а) 320; б) 365 ҳаст?

406. Дар прогрессияи арифметикии −20,8; −19,2; ... чанд аъзо аломати манфӣ дорад? Аъзои мусбати якуми ин прогрессия ба чанд баробар аст?

407. Прогрессияи арифметикии (a_n)-ро аз рӯи вобастагиҳои

а) $\begin{cases} a_2+3a_4=82, \\ 2a_3-a_6=-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2a_4-a_1=26, \\ a_5+4a_2=64; \end{cases}$

тартиб диҳед.

408. Пайдарпаии (a_n) бо формулаи:
а) $a_n=8n+3$; д) $a_n=-2{,}5n+1{,}5$; и) $a_n=5n-3$;
б) $a_n=2n^2-5$; е) $a_n=-9n$; к) $a_n=11n+4$;
в) $a_n=n+14$; ж) $a_n=-14n+7$; л) $a_n=\frac{2}{n}$;
г) $a_n=31n+4$; з) $a_n=2n^2+n-4$; м) $a_n=8$
дода шудааст. Оё ин пайдарпай прогрессияи арифметикӣ аст ва агар бошад, аъзои якум ва фарқи онро ёбед.

Машқҳо барои такрор

409. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 7 баробар аст. Агар ба ҳар як рақами адад 2 воҳидӣ илова кунем, он гоҳ ададе ҳосил мешавад, ки аз дучандаи адади аввала 3 воҳид кам аст. Ададро ёбед.

410. Номаълуми x-ро аз таносуб ёбед:
а) $4{,}25 : 0{,}5=2\frac{1}{3} : x$; б) $(m+2) : (m-2)=(m^2-4) : m^2x$.

411. Нобаробариро ҳал кунед:
а) $4(2x-3)-5x<x+4$; в) $-3(x^2-1)\geq 0$;
б) $\frac{2x}{3}<7$; г) $5\leq\frac{2}{3}\cdot(x-3)$.

412. Муодиларо бо тарзи графикӣ ҳал кунед:
а) $\sqrt{x}=x$; б) $\sqrt{x}=x-2$.

413. Касрро ихтисор кунед:
а) $\frac{a^2-16}{ax+4x}$; б) $\frac{3x^2+15xy}{x+5y}$; в) $\frac{3\cdot(x-2)}{7\cdot(2-x)}$.

414. Ифодаро содда кунед:
$$\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}.$$

415. Муодилаҳои дуномаълумаи

$$а)\ (x-1)^2+(y+3)^2=36$$

ва

$$б)\ 2x+3y=6$$

дар ҳамворни координатавӣ кадом хатҳоро тасвир мекунанд?

416. Аз рӯи формулаи $a_n=n^3-1$ пайдарпай тартиб диҳед.

24. Формулаи суммаи n аъзои аввалаи прогрессияи арифметикӣ

Дар назди худ масъалаи ёфтани суммаи аъзоҳои шумораашон охирноки прогрессияи арифметикиро мегузорем. Нишон медиҳем, ки бе ҷамъкунии бевосита ҳам ҳалли масъалаи гузошташуда имконпазир аст.

Ба сифати мисол суммаи охирноки

$$2+4+6+...+46+48+50,$$

ки пайдарпаии ададҳои ҷуфт мебошад, мегирем. Онро бо S ишорат карда, дар ду намуд бо тартиби афзуншавӣ ва бо тартиби камшавии ҷамъшавандаҳояш менависем:

$$S=2+4+6+...+46+48+50,$$
$$S=50+48+46+...+6+4+2.$$

Онҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ мекунем:

$$2S=(2+50)+(4+48)+(6+46)+...+(46+6)+(48+4)+(50+2).$$

Намоён аст, ки тарафи чап (ниг. ба қавсҳо) аз 25 ҷуфти ададҳои ҳар якеаш ба 52 баробар иборат аст. Пас $2S=52\cdot 25$ ва ё $S=650$-ро ҳосил мекунем.

Қайд мекунем, ки якхела будани суммаи ҷуфти ададҳои зери якдигарбуда дар ин мисол тасодуф набуда, балки ба ҳар гуна прогрессияҳои арифметикӣ, чӣ тавре ки дар поён мебинем, хос аст.

Акнун ба тарзи ёфтани суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикии дар мисол истифода кардашуда характери умумӣ медиҳем.

Бигузор суммаи n-аъзои аввалаи прогрессияи арифметикии

$$(a_n):\qquad a_1;\ \ a_2;\ \ a_3;\ \ ...;\ \ a_n;\ \ ...$$

-ро ёфтан зарур бошад. Онро бо S_n, яъне $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ ишорат намуда, суммаро дар шаклҳои

$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$ (бо тартиби афзуншавии индексҳо) ва

$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_3+a_2+a_1$ (бо тартиби камшавии индексҳо) менависем. Баъдан, онҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ карда, ҳосил мекунем:

$$2\cdot S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+...+(a_{n-2}+a_3)+$$
$$+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

Нишон медиҳем, ки қимати ҳар як ифодаи дар қавсҳо буда ба a_1+a_n баробар аст:

$$a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+(a_n-d)=a_1+a_n;$$
$$a_3+a_{n-2}=(a_2+d)+(a_{n-1}-d)=a_2+a_{n-1}=a_1+a_n;$$
$$a_4+a_{n-3}=(a_3+d)+(a_{n-2}-d)=a_3+a_{n-2}=a_1+a_n;$$
. . . .

Возеҳ аст, ки шумораи чунин ҷавсҳо (ё ҷуфтҳо) ба n баробар мебошад.

Пас,

$$2S_n=(a_1+a_n)n$$

ва аз он

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \qquad (1)$$

Ин формула **формулаи суммаи n аъзои аввалаи прогрессияи (a_n)** ё кӯтоҳ, **формулаи суммаи прогрессияи арифметикӣ** буда, бо ҳамин ном маъмул аст.

Ҳамин тариқ **суммаи прогрессияи арифметикии охирнок ба ҳосили зарби нимсуммаи аъзоҳои канорӣ бар миқдори аъзоҳо баробар аст.**

Формулаи (1) ба олими Юнони Қадим Диофант* таалluқ дорад.

Формулаи (1)-ро дигар хел ҳам менависанд. Дар он ҷо ба ҷои a_n қиматаш $a_1+(n-1)d$-ро гузошта (ниг. ба пункти 23).

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n \qquad (2)$$

-ро пайдо мекунем. Формулаи (2) имкон медиҳад, ки суммаи дилхоҳи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро аз рӯи аъзои якум ва фарқи он, ёбем.

Мисоли 1. Суммаи панҷоҳ аъзои аввалаи прогрессияи арифметикии

$$5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ \ldots$$

-ро меёбем.

Барои татбиқи формулаи (1) кифоя аст, ки аъзои a_{50}-ро ёбем. Азбаски $a_1=5$ ва $a_2=9$ аст, пас $d=a_2-a_1=9-5=4$ ва аз ин ҷо $a_{50}=a_1+49d= =5+49\cdot 4=5+196=201$ мешавад. Он гоҳ суммаи матлуби S_{50} ба

$$S_{50}=\frac{a_1+a_{50}}{2}\cdot 50=(5+201)\cdot 25=206\cdot 25=5150$$

баробар мешавад.

Мисоли 2. Суммаи чил аъзои аввалаи прогрессияи арифметикии (a_n), ки бо формулаи $a_n=9n-14$ (ниг. ба эзоҳи пункти 23) дода шудааст, меёбем.

---

* Диофант (асри III) - риёзидони Александрия. Дар «Арифметика»-и ӯ ибтидои алгебра оварда шуда, як қатор муодилаҳои дараҷаи гуногун ҳал шудаанд.

Аз формулаи $a_n=9n-14$ ба ҷои n аввал 1 ва баъд 40 гузошта аъзоҳои a_1 ва a_{40}-ро меёбем:

$a_1=9\cdot 1-14=9-14=-5$; $a_{40}=9\cdot 40-14=360-14=346$.

Қиматҳои ёфтаамонро ба формулаи (1) гузошта ҳосил мекунем:

$$S_{40}=\frac{-5+346}{2}\cdot 40=341\cdot 20=6820, \quad S_{40}=6820.$$

Мисоли 3. Суммаи 1+2+3+...+n-ро меёбем.

Дар ин ҷо $a_1=1$ ва $a_n=n$ аст. Дар асоси формулаи (1) ин сумма ба $\frac{n(n+1)}{2}$ баробар мешавад.

Ҳамин тариқ, барои суммаи ададҳои натуралии аз 1 то n формулаи

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$ -ро ҳосил кардем.

Дар мавриди хусусӣ суммаи 100 аъзои аввалаи ададҳои натуралӣ ба

$$S_{100}=\frac{100\cdot(100+1)}{2}=50\cdot 101=5050$$ баробар мешавад*.

Мисоли 4. Суммаи ҳамаи ададҳои натуралии ба нӯҳ каратии аз 500 калон набударо меёбем.

Ададҳои натуралии ба нӯҳ каратиро бо формулаи $a_n=9n$ ифода кардан мумкин аст. Дар асоси пункти 23 ин гуна адад аъзои n-уми прогрессияи арифметикӣ бо фарқи $d=9$ мебошад. Барои муайян кардани миқдори аъзоҳои прогрессия, ки аз 500 калон нестанд, нобаробарии $a_n\le 500$ ё $9\cdot n\le 500$-ро ҳал мекунем.

Аз ин ҷо $n\le 55\frac{5}{9}$ -ро ҳосил карда ба хулоса меоем, ки шумораи аъзоҳои прогрессияи ба суммаи матлуб дохилшаванда 55-то аст (n - адади касрӣ шуда наметавонад). Пас, $a_1=9$, $a_{55}=9\cdot 55=495$ ва

$$S_{55}=\frac{9+495}{2}\cdot 55=\frac{504}{2}\cdot 55=252\cdot 55=13860$$

мешавад.

Ҷавоб: 13860.

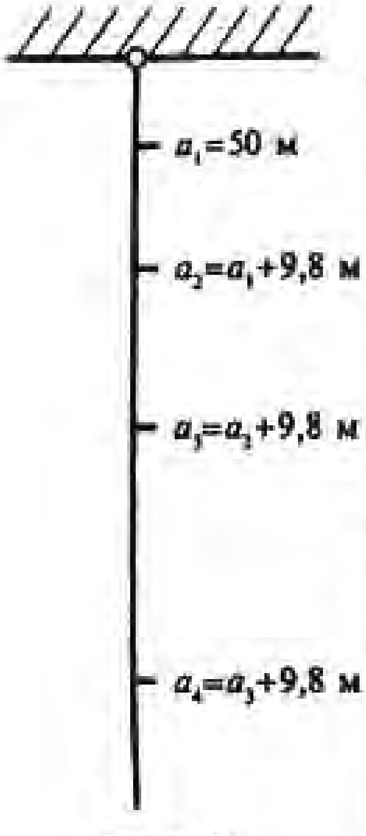
Мисоли 5. Суммаи ҳамаи ададҳои натуралии дурақамаро меёбем.

Суммаи матлуб ба $S=10+11+...+99$ баробар аст. Маълум, ки ҷамъшавандаҳои он прогрессияи арифметикӣ мебошад. Дар он $a_1=10$, $a_n=99$ ва $d=1$ аст. Аз рӯи формулаи $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$ шумораи аъзоҳои прогрессияро меёбем:

$99=10+(n-1)$; $n-1=99-10$; $n=90$.

---

* Риёзидони машҳури олмонӣ Карл Гаусс Фридрих (1777–1855) ҳанӯз дар синни хурди мактабиаш ин суммаро дар муддати як дақиқа ҳисоб карда буд. Баробар будани суммаҳои 1+100, 2+99, ..., 100+1-ро пайхас карда, адади 101-ро ба шумораи умумии суммаҳо 50 зарб кард.



Расми 88

Аз ин ҷо

$S=10+11+12+...99=\frac{10+99}{2}\cdot 90=109\cdot 45=4905\cdot$

Ин натиҷаро бо роҳи дигар ҳам ёфтан мумкин аст.

Маълум, ки $S=S_{99}-S_9=S_{100}-S_9-100$ ҳам мешавад. Азбаски $S_{100}=5050$ ва $S_9=45$ аст (ниг. ба мисоли 3), пас $S=5050-45-100=4905$.

Мисоли 6. Парашутчӣ дар сонияи аввали озодафтиаш 50 м ва дар ҳар як сонияи минбаъда 9,8 м зиёдтар масофаро тай мекунад. Агар парашутчӣ дар 12 сония ба замин омада расида бошад, он гоҳ аз кадом баландӣ ҷаҳиданашро меёбем.

Ҳал. Траекторияи ҳаракати парашутчӣ ба поён ростхатта аст. Мувофиқи шарт ӯ дар ҳар як сонияи минбаъдаи поёнфуроӣ назар ба сонияи пештара 9,8 м зиёдтар масофаро тай мекунад (ниг. ба расми 88).

Тағйирёбии мавқеи парашутчӣ дар ҳар як сонияи озодафтӣ ба пайдарпаии

$$50;\quad 59,8;\quad 69,6;\quad 79,4;\quad ...$$

оварда мерасонад, ки он прогрессияи арифметикиро бо нишондодҳои $a_1=50$ ва $d=9,8$ ифода мекунад. Азбаски

$$a_{12}=a_1+11\cdot d=50+11\cdot 9,8=50+107,8=157,8 \text{ (м)}$$

аст (яъне парашутчӣ дар сонияи 12-ум 157,8 м поён мефарояд), пас баландии матлуб

$$S_{12}=\frac{50+157,8}{2}\cdot 12=207,8\cdot 6=1246,8 \text{ (м)}$$

мешавад.

Ҷавоб: 1246,8 м.

Мисоли 7. Бигузор v_0 - суръати ибтидоӣ, a - шитоб ва t - вақт бошад. Масофаи тайкардаи нуқтаи материалиро дар вақти t-и ҳаракаташ меёбем.

Ҳал. Азбаски a зиёдшавии суръатро дар муддати як сонияи ҳаракат ифода мекунад, пас аз рӯи формулаи $v_t=v_0+at$ пайдарпаии

$$v_1=v_0+a,\qquad v_2=v_0+2a,\qquad v_3=v_0+3a,\qquad v_4=v_0+4a,\qquad ...$$

ҳосил мешавад. Пайдарпаии (v_t), $t\in N$ прогрессияи арифметикиро бо фарқи a ташкил медиҳад. Аз ин ҷо роҳи тайшударо дар муддати t сония бо формулаи (1) меёбем:

$$S=\frac{v_0+v_t}{2}\cdot t=\frac{v_0+v_0+at}{2}\cdot t=\frac{2v_0+at}{2}\cdot t=v_0\cdot t+\frac{a\cdot t^2}{2}.$$

Ин формула дар физика ҳамчун **формулаи ҳаракати собиттезонаи нуқтаи материалӣ** маълум аст.

Мисоли 8. Дар мусобиқаи мактабӣ оид ба футбол 36 бозӣ гузаронида шуд. Агар ҳар як команда бо командаи дигар як маротиба бозӣ карда бошад, дар мусобиқа чанд команда иштирок карданашро меёбем.

Ҳал. Бигузор дар мусобиқа n ($n>0$) команда иштирок карда бошад. Он гоҳ яке аз ин командаҳо бо дигарҳояш $n-1$ бозӣ мекунад. Аз $n-1$ командаи боқимонда якеаш бо дигараш як маротибагӣ бозӣ карда $n-2$ вохурӣ мегузаронад. Возеҳ аст, ки дар охир ду команда мемонад ва бо якдигар як бозӣ мекунанд. Дар асоси муҳокимарониҳоямон прогрессияи арифметикии

$$n-1;\quad n-2;\quad ...;\quad 3;\quad 2;\quad 1$$

-ро ҳосил мекунем, ки мувофиқи шарти масъала суммаи аъзоҳояш ба 36 баробар аст. Яъне мувофиқи формулаи суммаи прогрессияи арифметикӣ

$$36=\frac{(n-1)+1}{2}\cdot(n-1).$$

Аз ин ҷо

$$72=n^2-n$$

ё

$$n^2-n-72=0.$$

Ин муодилаи квадратии ислоҳшударо ҳал карда меёбем:

$$n_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+72}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{289}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{17}{2};\quad n_1=9,\ n_2=-8.$$

Азбаски шумораи командаҳо адади манфӣ шуда наметавонад, пас қимати $n=9$-ро ба инобат мегирему халос.

Ҷавоб: 9 команда.

? 1. Формулаи (1)-ро, ки суммаи n аъзои аввали прогрессияи арифметикиро ифода мекунад, исбот кунед. Мисолҳо оред. **2.** Оё аз рӯи аъзои якум ва фарқи прогрессия суммаи прогрессияи арифметикӣ ёфта мешавад? Агар чунин амалиёт имконпазир бошад, он гоҳ аз рӯи кадом формула амалӣ мегардад? Мисолҳо оред.

417. Суммаи понздаҳ аъзои аввалаи прогрессияи арифметикии (a_n)-ро ёбед, агар $a_1=7$ ва $d=-3$ бошад.

418. Пайдарпаии (x_n) дода шудааст.

а) $x_n=4n+12$; б) $x_n=2n+13$; в) $x_n=n-8$; г) $x_n=-3n+5$.

Суммаҳои панҷоҳ сад ва n аъзои аввали онро ёбед.

419. Суммаро ёбед:

а) $2+4+6+...+(2n-2)+2n+(2n+2)$;

б) $1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)$.

420. Ёбед:

а) суммаи ҳамаи ададҳои натуралии аз 250 калон набударо;

б) суммаи ҳамаи ададҳои натуралии аз 80 то 180-ро;

в) суммаи ҳамаи ададҳои натуралии ба се каратию аз 800 калон набударо;

г) суммаи ҳамаи ададҳои натуралии ба 6 каратию аз 180 калон набударо;

д) суммаи ҳамаи ададҳои натуралии ба 9 каратию аз 210 калон набударо;

е) суммаи ҳамаи ададҳои дурақамаи тақсимкунандаи 4 ва бақияи 1 доштаро;

ж) суммаи $a_{11}+a_{12}+...+a_{44}$ бо аъзои $a_n=7n$-ро.

421. Прогрессияи арифметикиеро ёбед, ки дар он чӣ қадар аъзоҳояшро нагирем, ҳамеша суммааш ба сечанди квадрати шумораи ин аъзоҳо баробар аст.

422. Прогрессияи арифметикии (a_n) дода шудааст. Агар:

а) $a_2=13$ ва $d=3$ бошад, $a_{15}+a_{16}+...+a_{30}$-ро ёбед;

б) $a_1=21$ ва $a_2=20{,}5$ бошад, $a_6+a_7+...+a_{25}$-ро ёбед;

в) $a_8=14$ ва $a_{19}=-35{,}5$ бошад, S_{20}-ро ёбед;

г) $a_1=4{,}2$ ва $a_{12}=18{,}5$ бошад, S_{15}-ро ёбед.

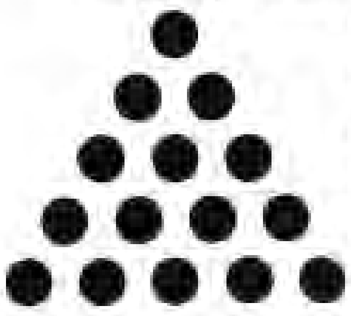
423. Бори аз тайёра бо парашют партофташуда дар сонияи аввали ҳаракат 5,2 м ва дар ҳар як сонияи минбаъда нисбати сонияи пешина 9,8 м зиёд масофаро тай мекунад. Агар бор пас аз 11 сония ба замин расад, пас вай аз кадом баланди партофта шудааст?

424. Ҷисми озодафтанда (яъне $v_0=0$, $a=g=9{,}8$ м/сон^2) дар

а) сонияи даҳуми баъди ибтидои афтиш;

б) даҳ сонияи баъди ибтидои афтиш чӣ қадар масофаро тай мекунад?

425. Дар мусобиқаи шоҳмотбозон 45 бозӣ гузаронида шуд. Ҳар як бозингар бо шоҳмотбозӣ дигар як навбат бозӣ кардааст. Шумораи иштирокчиёни мусобиқаро ёбед?



Расми 89

426. Саққоҳо дар шакли секунҷа ҷойгиранд. Дар қатори якум 1-то, дар қатори дуюм 2-то ва ғайра саққоҳо ҳаст (расми 89).

а) Агар ҳамаи саққоҳо 276 дона бошанд, он гоҳ онҳо дар чанд қатор ҷой мегиранд?

б) Барои тартиб додани секунҷаи дорои 80 қатор чандто саққо лозим мешавад?

427. Оё қимати пайдарпаии ифодаҳои $(a+x)^2$, (a^2+x^2), $(a-x)^2$, ... прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад? Агар бошад, суммаи n-аъзои аввалаашро ёбед.

Машқҳо барои такрор

428. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y=2\sqrt{x-1}+\dfrac{5}{\sqrt{4-x}}$;   г) $y=\dfrac{\sqrt{20+x-x^2}}{x^2-16}$;

б) $y=\dfrac{x-1}{x+2}+\sqrt[3]{x-1}$;   д) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$.

в) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2-1}$;   е) $y=\sqrt{x^2-7x+12}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x-4}}$.

429. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 9 баробар аст. Агар ҷои рақамҳои ин ададро иваз кунем, адади наверо ҳосил мекунем, ки он ба $\dfrac{5}{6}$ ҳиссаи адади аввала баробар аст. Адади дурақамаро ёбед.

430. Периметри росткунҷа ба $2p$ ва масоҳаташ ба S баробар аст. Аз рӯи ин ду нишондод муодилаи квадратии ислоҳшудаи аз бузургии тарафҳои росткунҷа вобастаро тартиб диҳед.

431. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\dfrac{2^8\cdot7^9}{14^{10}}$;   б) $\dfrac{14^{10}}{2^8\cdot7^9}$;   в) $\dfrac{12^5}{2^3\cdot3^4}:\dfrac{10^5}{2^6\cdot5^7}$;   г) $\dfrac{10^5}{2^6\cdot5^7}:\dfrac{12^5}{2^3\cdot3^4}$.

432. Графики функсияро созед:

а) $y=\left|\dfrac{2x-3}{x-2}\right|$;   б) $y=\dfrac{1}{|x-2|}$.

433. Кадоме аз функсияҳои хаттии

а) $y=2x+7$;   б) $y=-4x+3$;   в) $y=0,1x+2$;   г) $y=2-x$

афзуншаванда ва кадомаш камшавандаанд?

434. Нишон диҳед, ки барои қимати дилхоҳи x сеаъзогии $-5x^2+10x-5$ қимати ғайримусбатро мегирад.

§8. ПРОГРЕССИЯИ ГЕОМЕТРӢ

25. Таърифи прогрессияи геометрӣ

Аз мисол сар мекунем. Пайдарпаиҳои

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ \dots \quad \text{ва} \quad 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \dots$$

-ро дида мебароем. Мушоҳидаи бевосита нишон медиҳад, ки дар пайдарпаии якум аз аъзои дуюмаш сар карда ҳар як аъзои пасоянда ду маротиба зиёд ва дар пайдарпаии дуюм ду маротиба кам мешавад. Ин мисолҳо ба мафҳуми *прогрессияи геометрӣ* меоваранд, ки мо ба омӯзиши он шурӯъ мекунем.

Бигузор пайдарпаии
$$(b_n): \quad b_1; \ b_2; \ b_3; \ \dots; \ b_n; \ \dots$$
дода шудааст.

Т а ъ р и ф. **Пайдарпаии аъзоҳояш ғайринулӣ прогрессияи геометрӣ номида мешавад, агар аз аъзои дуюмаш сар карда ҳар як аъзои пасоянлаш ба ҳосили зарби пешоянлаш бар адади доимӣ баробар бошад.**

Дар асоси таъриф барои пайдарпаии (b_n) баробарии
$$b_{n+1}=b_n \cdot q$$
-ро, ки дар ин ҷо q - ягон адад аст, навиштан мумкин аст. Масалан, барои мисолҳои дар боло навиштаамон мувофиқан баробариҳои
$$b_{n+1}=b_n \cdot 2 \quad \text{ва} \quad b_{n+1}=b_n \cdot \frac{1}{2}$$
ҷой доранд.

Қайд мекунем, ки аз таъриф хулосаи муҳими дигар ҳам бармеояд: аз аъзои дуюм сар карда, нисбати аъзои дилхоҳи он бар пешояндаш ба адади доимии q баробар аст:
$$b_{n+1} : b_n=q$$

Адади доимии ғайринулии q-ро махраҷи прогрессияи геометрӣ меноманд. Махраҷҳои прогрессияҳои мисолҳои дар боло зикршуда мувофиқан ба 2 ва $\frac{1}{2}$ баробар мебошанд.

Баробарии $b_{n+1}=b_n \cdot q$ нишон медиҳад, ки барои муайян кардани прогрессияи геометрӣ, яъне ёфтани аъзои дилхоҳи он, донистани аъзои якум ва махраҷи он кифоя аст (чуноне ки барои прогрессияи арифметикӣ донистани аъзои якум ва фарқаш кифоя буд).

Дар ҳақиқат, масалан, агар:

а) $b_1= -1$ ва $q=2$ бошад, он гоҳ
$$(b_n): \quad -1; \ -2; \ -4; \ -8; \ -16; \ -32; \ -64; \ \dots$$
б) $b_1=\frac{1}{3}$ ва $q=1$ бошад, он гоҳ
$$(b_n): \quad \frac{1}{3}; \ \frac{1}{3}; \ \frac{1}{3}; \ \dots; \ \frac{1}{3}; \ \dots$$
в) $b_1=3$ ва $q=-2$ бошад, он гоҳ
$$(b_n): \quad 3; \ -6; \ 12; \ -24; \ 48; \ -96; \ \dots$$
г) $b_1=2$ ва $q = 0{,}2$ бошад, он гоҳ
$$(b_n): \quad 2; \ 0{,}4; \ 0{,}08; \ 0{,}016; \ 0{,}0032; \ \dots .$$

Ба монанди прогрессияи арифметикӣ прогрессияи геометрӣ ҳам вобаста ба шумораи аъзоҳояш *охирнок ва беохир* мешавад. Масалан прогрессияи
$$6; \ -18; \ 54; \ -162; \ 486;$$
охирнок аст, чунки ҳамагӣ панҷ аъзо дорад. Вале прогрессияи геометрии $\left((b_n): b_1=\frac{1}{8}, \ q=\frac{1}{3}\right)$
$$\frac{1}{8}; \ \frac{1}{24}; \ \frac{1}{72}; \ \frac{1}{216}; \ \dots$$
беохир аст, чунки шумораи беохири аъзоҳоро дарбар гирифта аст.

Дар прогрессияи геометрии охирноки

$$-1;\quad -0{,}1;\quad -0{,}001;\quad -0{,}0001$$

аъзоҳои -1 ва $-0{,}0001$-ро *аъзоҳои канорӣ* меноманд.

Ниҳоят қайд мекунем, ки ду аъзои b_s аз b_k-и прогрессияи геометрӣ (он барои прогрессияи арифметикӣ низ дуруст аст) аз аъзои дигари b_l *дар як хел дурӣ* ҷойгир аст, агар шарти

$$|s-l|=|k-l|$$

иҷро гардад. Масалан b_{15} аз b_{10} ва b_{20} дар як хел дурӣ ҷой гирифтааст.

? 1. Чӣ гуна пайдарпаиро прогрессияи геометрӣ меноманд? Мисолҳо оред. 2. Махраҷи прогрессия гуфта кадом ададро меноманд? Якчанд прогрессияи геометриро оварда махраҷашро нишон диҳед. 3. Барои муайян кардани прогрессияи геометрӣ дода шудани чиҳо кифоя аст? 4. Кадом прогрессияҳоро охирнок ва кадомашонро беохир меноманд? 5. Кадом аъзоҳои прогрессияи геометриро аъзоҳои канорӣ меноманд? Мисолҳо оред.

435. Аз рӯи аъзои якум ва махраҷи прогрессияи геометрии (b_n) шаш аъзои аввалашро ёбед:

а) $b_1=2$, $q=2$; г) $b_1=\frac{2}{5}$, $q=3\sqrt{2}$; ж) $b_1=-5$, $q=-2$;

б) $b_1=-18$, $q=\frac{1}{2}$; д) $b_1=1$, $q=\frac{2}{3}$; з) $b_1=-\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{3}$.

в) $b_1=-24$, $q=-2{,}5$; е) $b_1=-4$, $q=9$;

436. Агар:

а) $b_1=0{,}1$, $q=3$; д) $b_1=10$, $q=\frac{1}{2}$; и) $b_1=4$, $q=0{,}2$;

б) $b_1=-\frac{1}{10}$, $q=\frac{1}{10}$; е) $b_1=13$, $q=-2$; к) $b_1=8$, $q=-4$

в) $b_1=-9$, $q=1$ ж) $b_1=12$, $q=0{,}1$;

г) $b_1=11$, $q=-3$; з) $b_1=7$, $q=5$;

бошад, прогрессияи геометрии (b_n)-ро тартиб диҳед.

437. Аз формулаи $b_{n+1}=b_n\cdot 3$ истифода карда прогрессияи геометрии (b_n)-ро тартиб диҳед, агар

а) $b_1=-4$; г) $b_1=11$; ж) $b_1=0{,}02$; к) $b_1=3$;

б) $b_1=-\frac{1}{9}$; д) $b_1=20$; з) $b_1=8$; л) $b_1=0{,}3$;

в) $b_1=1$; е) $b_1=15$; и) $b_1=19$; м) $b_1=-10$

бошад.

438. Аз рӯи аъзои додашудаи прогрессияи геометрӣ ва махраҷаш аъзои пасояндашро ёбед:

а) $b_6=104$, $q=-\frac{1}{2}$; в) $b_3=27$, $q=\frac{1}{9}$;

б) $b_{100}=1000$, $q=\frac{1}{10}$; г) $b_{32}=141$, $q=3$.

439. Агар:

а) $b_3=31$ ва $q=2$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб b_4^2-ро;

б) $b_6=-14$ ва $q=-\frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб $\frac{b_7^2}{49}$-ро;

в) $b_{29}=144$ ва $q=-\frac{1}{12}$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб $32b_{31}$-ро;

г) $b_{61}=169$ ва $q=\frac{1}{13}$ бошад, он гоҳ дар ҷавоб b_{62}-ро нависед.

440. Прогрессияи геометриро то аъзои ҳафтумаш нависед:

а) $0{,}2;\ 0{,}4;\ \ldots;$

б) $\sqrt{2};\ 0{,}3\sqrt{2};\ \ldots;$

в) $7;\ 49;\ 343;\ \ldots;$

г) $5{,}625;\ -39{,}375;\ \ldots;$

д) $\frac{1}{5}\sqrt{7};\ \frac{1}{25}\sqrt{7};\ \ldots;$

е) $\frac{2}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{8};\ \ldots;$

ж) $2;\ 8;\ 32;\ \ldots;$

з) $1{,}4;\ 1{,}82;\ \ldots .$

441. Кадоме аз прогрессияҳои геометрии

а) $-\frac{1}{2};\ 1;\ -2;\ 4;\ -8;$

б) $6;\ 2;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{9};\ \frac{2}{27};$

в) $-3;\ 1;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{3^2};\ -\frac{1}{3^3};$

г) $11;\ 11;\ 11;\ 11;\ \ldots;$

д) $5;\ \frac{5}{4};\ \frac{5}{16};\ \frac{5}{64};\ \frac{5}{256};$

е) $0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002;\ \ldots;$

ж) $\frac{1}{5};\ -\frac{1}{5^2};\ \frac{1}{5^3};\ -\frac{1}{5^4};\ \ldots;$

з) $\frac{1}{81};\ \frac{1}{27};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{3};\ 1;\ 3$

охирнок ва кадомашон беохиранд?

442. Аъзоҳои канории прогрессияи охирнокро ёбед:

а) $6;\ -3;\ \frac{3}{2};\ -\frac{3}{4};$

б) $1;\ 7;\ 49;\ 343;\ 2401;$

в) $\frac{1}{10^2};\ -\frac{1}{10};\ 1;\ -10;\ b_5;$

г) $b_1;\ 3;\ -9;\ 27;\ -81;\ b_6.$

443. Прогрессияи геометрии охирноки

$$b_1;\ b_2;\ b_3;\ \ldots\ b_{20}$$

дода шудааст.

а) Ҷуфти аз аъзои b_7 дар як хел дурӣ ҷой гирифтаи фарқи индексҳояшон ба 3 воҳид баробар бударо ёбед;

б) Аъзоҳои b_2 ва b_6-и (b_n) аз кадомаш дар як хел дурӣ воқеъ аст;

в) Оё аъзоҳои b_3, b_{10} ва b_{15} аз якдигар дар як хел дурӣ ҷойгиранд?

Машқҳо барои такрор

Ду масъалаҳои зерини (№ 444, 445) ал-Қараҷиро ҳал кунед:

444. Масоҳати росткунҷаи асосаш аз баландиаш 2 баробар зиёд ва масоҳаташ ададан ба периметраш баробарро ёбед.

445. Диаметри доираеро ёбед, ки масоҳаташ ба 100 баробар бошад.

446. Исбот кунед, ки суммаи ду адади мусбати ба ҳам чаппа аз 2 хурд нест.

447. Аз рӯи решаҳои додашуда муодилаи квадратӣ тартиб диҳед:

а) 2 ва 3; б) $2-\sqrt{3}$ ва $2+\sqrt{3}$; в) $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

448. Ёбед:

а) 8%-и 20,4 т-ро; в) 62,5%-и $248\frac{3}{4}$ га-ро:

б) $\frac{3}{4}$ %-и 600 т-ро; г) $3\frac{1}{4}$ %-и 1980-ро.

449. Хурдтарин каратнокии умумии ададҳои 750, 600 ва 450-ро ёбед.

450. Графикро насохта абсиссаи нуқтаҳои бурриши хатҳо ва тири Ox-ро ёбед:

а) $y=3x+5$; в) $y=2x+3$; д) $y=x^2-2\frac{1}{4}$;

б) $y=4x-2$; г) $y=2x^2-8$; е) $y=x^2+1$.

451. Дар ифодаи зерин квадрати пурра ҷудо карда шавад:

а) $x^2-8x-13$; б) $2x^2-4x-9$.

452. Касри $\frac{3x^2-5x+2}{(x-1)^2}$ -ро ихтисор кунед.

26. Формулаи аъзои *n*-уми прогрессияи геометрӣ

Бигузор аъзои якум b_1 ва маҳраҷи прогрессияи геометрӣ q дода шуда бошад. Аз рӯи ин додашудаҳо ҳосил мекунем:

$$b_2=b_1\cdot q=b_1\cdot q^{2-1}$$
$$b_3=b_2\cdot q=(b_1\cdot q)\cdot q=b_1\cdot q^2=b_1\cdot q^{3-1},$$
$$b_4=b_3\cdot q=(b_1\cdot q^2)\cdot q=b_1\cdot q^3=b_1\cdot q^{4-1},$$
$$b_5=b_4\cdot q=(b_1\cdot q^3)\cdot q=b_1\cdot q^4=b_1\cdot q^{5-1}.$$

Бо ҳамин тарз пай дар пай аъзоҳои дигари прогрессия $b_6=b_1\cdot q^{6-1}$, $b_7=b_1\cdot q^{7-1}$ ёфта мешаванд. Агар ба қисми рости баробариҳои болоӣ диққат диҳем, он гоҳ мебинем, ки аз аъзои дуюм сар карда дараҷаи q дар онҳо аз рақами индекси қисми чап як воҳид хурд аст. Пас аз рӯи ин нишона барои ёфтани b_n-аъзои якумро ба q^{n-1} зарб задан кофист:

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1} \qquad (1)$$

Ин формуларо формулаи **аъзои *n*-уми прогрессияи геометрӣ** меноманд.

Дар поён ҳалли мисолу масъалаҳоеро меорем, ки истифодаи ин формула самараи хуб додааст.

Мисоли 1. Агар $b_1=\frac{10}{11}$ ва $q=\frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ b_6-и прогрессияи геометрии (b_n)-ро меёбем.

Аз формулаи (1) ҳангоми $n=6$ будан

$$b_6=b_1\cdot q^5=\frac{10}{11}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{11}\cdot\frac{1}{32}=\frac{5}{176}.$$

М и с о л и 2. Дар прогрессияи геометрӣ $b_5=2304$ ва $b_9=589\ 824$ аст. Аъзои дувоздаҳуми онро меёбем.

Дар асоси формулаи аъзои n-ум барои b_5 ва b_9 баробариҳои $b_5=b_1 \cdot q^4$ ва $b_9=b_1 \cdot q^8$-ро навиштан мумкин аст. Нисбати

$$\frac{b_9}{b_5}=\frac{589824}{2304}; \quad \frac{b_1 \cdot q^8}{b_1 \cdot q^4}=\frac{589824}{2304}$$

-ро тартиб дода, аз он $256=q^4$-ро ҳосил мекунем.

Барои ёфтани қимати q муодилаи

$$0=256-q^4=16^2-(q^2)^2=(16-q^2)\cdot(16+q^2)=$$
$$=(4-q)\cdot(4+q)\cdot(16+q^2)$$

-ро ҳал мекунем. Азбаски $16+q^2\neq 0$ аст, пас $(4-q)(4+q)=0$ мешавад. Решаҳои ин муодилаи квадратӣ $q_1=-4$ ва $q_2=4$ мебошанд. Азбаски мувофики таърифи прогрессияи геометрӣ $b_5=b_1 \cdot q^4$ аст, пас ҳангоми $q=\pm4$ будан $b_1=\frac{b_5}{q^4}=\frac{2304}{256}=9$ мешавад.

Ҳамин тариқ ду прогрессия вуҷуд дорад, ки онҳо шарти масъаларо қаноат менамоянд. Агар $q=4$ бошад

$$b_{12}=9\cdot 4^{11}=9\cdot 1048\ 576=37\ 748\ 736$$

ва ҳангоми $q=-4$ будан

$$b_{12}=9\cdot(-4)^{11}=9\cdot(-1048\ 576)=-37\ 748\ 736$$

мешавад.

М и с о л и 3. Пайдарпаии 3; b_2; b_3; 192 прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. b_2; ва b_3-ро меёбем. Аз рӯи таърифи прогрессияи геометрӣ баробариҳои $3q=b_2$, $b_3\cdot q=192$-ро навиштан мумкин аст. Аз онҳо

$$b_3\cdot q=192; \quad b_2\cdot q^2=192; \quad 3q^3=192; \quad q^3=64; \quad q=4$$

-ро ҳосил мекунем. Мувофиқи формулаи (1) $b_2=b_1\cdot q=3\cdot 4=12$ ва $b_3=b_1\cdot q^2=3\cdot 4^2=3\cdot 16=48$-ро пайдо мекунем.

Ҷ а в о б: $b_2=12$; $b_3=48$.

М и с о л и 4. Пайдарпаии (b_n) прогрессияи геометриест, ки аъзои якумаш ба c_1 ва махраҷаш ба q баробар аст. $2c_{18}$ ва $c_2\cdot c_{10}$-ро ба воситаи c_1 ва q ифода мекунем.

Ҳ а л. Формулаи (1) имконият медиҳад, ки баробариҳои

$$c_2=c_1\cdot q, \quad c_{10}=c_1\cdot q^9 \quad \text{ва} \quad c_{18}=c_1\cdot q^{17}$$

-ро нависем. Аз онҳо ҳосил мекунем:

$$2c_{18}=2c_1\cdot q^{17}$$
$$c_2\cdot c_{10}=c_1\cdot q\cdot c_1\cdot q^9=c_1^2\cdot q^{10}$$

М и с о л и 5. Агар бонк хар сол амонатпулии мизоҷонашро 5% зиёд кунад, он гоҳ меёбем, ки 4000 сомонӣ пули гузошташуда баъди панҷ сол чанд сомониро ташкил мекунад?

Ҳ а л. Агар бо b_1 пули гузошташударо ишорат кунем, он гоҳ баъди расо як сол $b_2=4000+4000\cdot 0{,}05=4000\cdot 1{,}05=4200$ сомонӣ мешавад. Дар охири соли дуюм миқдори пул ба $b_3=4200\cdot 1{,}05=4410$

сомонӣ мерасад. Яъне мо бо прогрессияи геометрӣ нишондодҳояш $b_1=4000$, $q=1,05$ сару кор дорем ва аз он $b_6=b_1 \cdot q^5=4000 \cdot (1,05)^5=$ $=4000 \cdot 1,2762815=5105,126$. Ҳамин тариқ баъди 5 сол пули гузошташуда 5105 сомонию 13 дирамро ташкил медиҳад.

? 1. Аъзои n-уми прогрессияи геометриро аз рӯи кадом формула меёбанд? 2. Бо иҷрошавии кадом шарт аъзоҳои прогрессияи геометрӣ ба ҳамдигар баробар мешаванд? 3. Агар а) $b_1<0$, $q<0$ ва б) $b_1>0$, $q<0$ бошад, нисбати аломати аъзоҳои прогрессия чӣ гуна хулосаҳо баровардан мумкин аст? Мисолҳо оред.

453. Пайдарпаии (c_n) прогрессияи геометриест, ки аъзои якумаш ба c_1 ва махраҷаш ба q баробар аст.

а) c_{16}; г) c_k; ж) $3 \cdot c_{41}$; к) $c_7 \cdot c_k$;
б) c_{30}; д) c_{k+8}; з) $2 \cdot c_{83}$; л) $c_{19} : c_{12}+c_1$;
в) c_{126}; е) c_{2k}; и) $c_5 \cdot c_{17}$; м) $c_7 + c_{21}$

-ро ба воситаи c_1 ва q ифода кунед.

454. Пайдарпаии (x_n) прогрессияи геометрӣ мебошад. Агар:

а) $x_1=160$ ва $q=\frac{1}{2}$ бошад, x_8-ро;
б) $x_1=-810$ ва $q=\frac{1}{9}$ бошад, x_4-ро;
в) $x_1=2\sqrt{2}$ ва $q=-\sqrt{2}$ бошад, x_9-ро;
г) $x_1=12\ 500$ ва $q=0,2$ бошад, x_8-ро;
д) $x_1=17$ ва $q=-2$ бошад, x_9-ро;
е) $x_1=10$ ва $q=5$ бошад, x_{11}-ро;
ж) $x_1=-\frac{1}{10}$ ва $q=10$ бошад, x_5-ро;
з) $x_1=\frac{2}{3}$ ва $q=\frac{3}{2}$ бошад, x_6-ро;
и) $x_1=\frac{9}{4}$ ва $q=\frac{2}{3}$ бошад, x_6-ро;
к) $x_1=1,8$ ва $q=\frac{2}{\sqrt{3}}$ бошад, x_4-ро
ёбед.

455. Аъзои ҳафтум ва n-уми прогрессияи геометрии

а) $-2;\ 6;\ -18;\ 54;\ \dots$ д) $4;\ -8;\ 16;\ -32;\ \dots$
б) $80;\ 40;\ 20;\ 10;\ \dots$ е) $5;\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{125};\ \dots$
в) $0,125;\ 0,25;\ \dots$ ж) $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{32};\ \dots$
г) $-12;\ 12;\ -12;\ 12;\ \dots$ з) $a;\ 3a^2;\ 9a^3;\ \dots$

-ро ёбед.

456. Прогрессияи геометрии (b_n) дода шудааст. Агар:

а) $b_8=27$, $q=3$; г) $b_4=\frac{1}{2}$, $q=-4$; ж) $b_6=0{,}32$, $q=0{,}2$;
б) $b_9=\frac{21875}{32}$, $q=-2\frac{1}{2}$; д) $b_9=18$, $q=3$; з) $b_5=14641$, $q=11$
в) $b_7=2$, $q=-3$; е) $b_2=8$, $q=-1$;
бошад, аъзои якуми прогрессияро ёбед.

457. Прогрессияи геометрии (c_n) дода шудааст. Агар:

а) $c_3=-\frac{6}{9}$, $c_5=-6$; в) $c_3=20$, $c_6=-160$;
б) $c_{10}=3{,}24$, $c_8=9$ г) $c_4=192$, $c_{10}=786432$.
бошад, махраҷи прогрессияро ёбед.

458. Пайдарпаии (b_n) прогрессияи геометрӣ мебошад. Агар:
а) $b_2=25$ ва $b_4=1$ бошад, b_6-ро;
б) $b_1=-\frac{2}{9}$ ва $b_5=-18$ бошад, b_7-ро;
в) $b_4=-1$ ва $b_6=-100$ бошад, b_1-ро;
г) $b_5=324$ ва $b_7=2916$ бошад, b_{10}-ро;
д) $b_3=0{,}048$ ва $b_5=0{,}00192$ бошад, b_8-ро; ёбед.

459. Дар байни ададҳои 6 ва 1458 чор ададеро нависед, ки онҳо дар якҷоягӣ бо ададҳои додашудаи канорӣ прогрессияи геометриро ташкил диҳанд.

460. Дар байни ададҳои 1 ва 256 чунин се ададеро нависед, ки пайдарпаии 1; x_2; x_3; x_4; 256 прогрессияи геометриро ташкил диҳад.

461. Прогрессияи геометрии (x_n) аз шаш аъзои

$$\frac{1}{2};\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5;\ \frac{1}{64};$$

иборат аст. Онро ёбед.

462. Аъзои якум ва махраҷи прогрессияи геометрӣ ёфта шавад, агар:
а) $b_3-b_1=9$ ва $b_5-b_3=36$; б) $b_1+b_4=27$ ва $b_2+b_3=18$;
бошад.

463. Агар бонк ҳар сол амонатпулии мизоҷонашро 3%-и зиёд кунад, он гоҳ 1800 сомонӣ пули гузошташуда баъди чор сол чанд сомониро ташкил медиҳад?

Машқҳо барои такрор

464. Муодиларо ҳал кунед:
а) $(x-9)(x+11)=0$; б) $0{,}2x^2-5=0$; в) $x^2-17x+16=0$.

465. Ҷадвалро пур кунед:

x	-3	-2	$-0{,}2$	0	$\frac{2}{3}$	1	$3{,}1$	6	10
x^2									
$\frac{x^2}{x+1}$									

466. Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\frac{a^6-b^6}{a^3-b^3}$; б) $\frac{6c^2-6cn}{12cn-12n^2}$; в) $\frac{mn}{m^2n-n^2m}$.

467. Корхона барои таъмини мунтазами истеҳсолот ҳар рӯз 0,5 т сӯзишворӣ истифода мебарад. Дар ин ҳолат захираи сӯзишворӣ ба 120 рӯз мерасад. Агар корхона ҳар рӯз 0,3 т сӯзишворӣ истифода барад, он гоҳ захира ба чанд рӯз мерасад?

468. Масъалае тартиб диҳед, ки матнаш ба ҳалли муодилаи

$$x\cdot(x+16)=7680$$

меорад.

469. Нуктаи буриши параболаи $y=2x^2-3x+8$-ро бо тири Oy ёбед.

470. Самти равиши шохаҳои параболаро муайян намоед:

а) $y=0{,}2x^2-3x+11$; в) $y=-4x^2-\frac{2x}{3}+\frac{3}{8}$;

б) $y=-3x^2+0{,}3x+0{,}2$; г) $y=x^2-15x$;

471. Суммаи $a^{2000}+\frac{1}{a^{2000}}$ -ро ҳисоб кунед, агар $a^2-a+1=0$ бошад.

472. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}5xy+3x^2=57,\\15xy-x^2=81,\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2=a,\\\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=b.\end{cases}$

27. Формулаи суммаи n аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ

Шарҳи мақсади асосиро аз ҳалли мисол сар мекунем. Бо ин мақсад дар назди худ масъалаи ёфтани суммаи

$$1+2+2^2+\ldots+2^{63}$$

-ро мегузорем.* Суммаи болоиро бо S ишорат карда, баъди ба 2 зарб кардану фарқи $2S-S$-ро тартиб додан ҳосил мекунем:

$$2S-S=(2+2^2+2^3+\ldots+2^{64})-(1+2+2^2+\ldots+2^{63})=2^{64}-1.$$

Яъне $S=2^{64}-1$. Ҳисоб карда шудааст, ки $2^{64}-1$ ба 18446744073709551615 баробар аст.

Тарзи ҳалли масъалаи дар боло зикршуда ба ёфтани суммаи n-аъзои аввали прогрессияи геометрии (b_n), ки махраҷаш q аст, имконият медиҳад. Ба ибораи дигар дар асоси мулоҳизаҳои болоӣ суммаи

$$S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n \qquad (1)$$

-ро ёфтан мумкин аст. Ҳар ду қисми (1)-ро бо q зарб зада

---

* Хонанда ривояти ба ин сумма вобастаро, ки дар саршавии эраи мо чун масъала - қиссаи ихтироъкори шоҳмот дар байни мардум маъруф буд, аз қисми «Маълумоти таърихӣ» ёфта метавонад.

$$q \cdot S_n = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q =$$
$$= b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n \cdot q$$

ё

$$q \cdot S_n = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n \cdot q \qquad (2)$$

-ро ҳосил мекунем. Аз баробариҳои (1) ва (2) истифода бурда фарқи $q \cdot S_n - S_n$-ро тартиб медиҳем:

$$S_n \cdot q - S_n = (b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n \cdot q) - (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) =$$
$$= b_n \cdot q - b_1$$

Инак, $S_n \cdot q - S_n = (b_n \cdot q - b_1)$. Аз ин баробарӣ ҳангоми $q \neq 1$ будан меёбем:

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} \qquad (3)$$

Формулаи (3) суммаи n-аъзои аввалаи прогрессияи геометрии (1)-ро ифода мекунад. Агар $q=1$ бошад (ҳамаи аъзоҳои прогрессия ба аъзои аввала баробаранд), он гоҳ аз (1)

$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} = \underbrace{b_1 + b_1 + b_1 + \cdots + b_1}_{n\text{-то}} = n \cdot b_1$$

ҳосил мешавад.

Дар ҳалли масъалаҳое, ки маълумҳояш аъзои якум ва махраҷи прогрессияро дарбар мегиранд, қулай аст, ки аз формулаи

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \qquad (4)$$

истифода барем. Формулаи (4) баъди ба ҷои b_n гузоштани $b_1 \cdot q^{n-1}$ ҳосил мегардад (ниг. ба формулаи (1)-и п. 26).

Мисоли 1. Суммаи нўҳ аъзои аввалаи прогрессияи геометриро, ки барояш $b_1=2$ ва $q=\frac{1}{3}$ аст, меёбем.

Дар ин ҷо қулай аст, ки аз формулаи (4) истифода барем:

$$S_9 = \frac{2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^9 - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{19683} - 1\right)}{-\frac{2}{3}} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{19683}\right) =$$

$$= 3 \cdot \frac{19682}{19683} = \frac{19682}{6561} = 2\frac{6551}{6561}, \qquad S_9 = 2\frac{6551}{6561}.$$

Мисоли 2. Агар $q=2$ ва $b_{10}=2560$ бошад, он гоҳ суммаи даҳ аъзои аввалаи прогрессияи геометриро меёбем.

Фаҳмост, ки $b_{10} = b_1 \cdot q^9$, $2560 = b_1 \cdot 2^9$, $2560 = 512 \cdot b_1$, $b_1 = 5$ аст. Пас, аз рўи формулаи (3) суммаи матлуб ба

$$S_{10} = \frac{b_{10} \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{2560 \cdot 2 - 5}{2 - 1} = 5120 - 5 = 5115.$$

баробар мешавад.

Ҷавоб: $S_{10} = 5115$.

Мисоли 3. Суммаи ҳашт аъзои аввалаи прогрессияи геометриро меёбем, агар $b_5=3125$ ва $b_7=78125$ бошанд.

Дар ин ҷо ифодакунии b_7 ба воситаи b_5 қулай мебошад: $b_7=b_6\cdot q=b_5\cdot q^2$. Аз ин баробарӣ аввал q^2 ва баъд q-ро меёбем:

$$q^2=\frac{b_7}{b_5}=\frac{78125}{3125}=25, \qquad q=\pm 5.$$

Натиҷаи охирин мавҷудияти ду прогрессияро ифода мекунад, ки шарти масъаларо қаноат менамоянд.

Бигузор $q=5$ бошад, он гоҳ $b_1=\frac{b_5}{q^4}=\frac{3125}{625}=5$,

ва $S_8=\frac{b_8\cdot q-b_1}{q-1}=\frac{b_7\cdot q^2-b_1}{q-1}=\frac{78125\cdot 25-5}{5-1}=\frac{1953125-5}{4}=\frac{1953120}{4}=488280$ мешавад.

Акнун ба ҷои q адади -5-ро мегузорем. Дар ин ҳолат суммаи матлуб (аз формулаи (4) истифода мебарем) ба

$$S_8=\frac{b_1\cdot(q^8-1)}{q-1}=\frac{5\left[(-5)^8-1\right]}{-5-1}=\frac{5\cdot(390625-1)}{-6}=5\cdot(-65104)=-325520$$

баробар мешавад.

Мисоли 4. Суммаи аъзоҳои пайдарпаии $1;\ x;\ x^2;\ \ldots;\ x^{n-1}$ $(x\neq 1)$-ро меёбем.

Дар ҳақиқат, ҷамъшавандаҳои суммаи $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}(x\neq 1)$ аъзоҳои пайдарпаии $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}$ мебошанд. Ин пайдарпай бошад прогрессияи геометриро бо додашудаҳои $b_1=1$, $q=x$ ва $b_n=x^{n-1}$ ифода мекунад. Аз ин рӯ, ҳалли масъала ба ёфтани суммаи n-аъзои аввалаи прогрессияи (x_n) оварда мешавад. Мувофиқи (3)

$$S_n=\frac{x^{n-1}\cdot x-1}{x-1}=\frac{x^n-1}{x-1} \quad \text{ё} \quad 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1} \quad (x\neq 1)$$

мешавад. Аз баробарии охирин якчанд формулаҳои маълумро ҳосил кардан мумкин аст. Бо ин мақсад ду тарафи онро ба $x-1$ зарб мекунем:

$$x^n-1=(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) \tag{5}$$

Ба ҷои n пай дар пай қиматҳои 2 ва 3-ро мегузорем, он гоҳ ҳангоми $n=2$ будан

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

ва ҳангоми $n=3$ будан

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

-ро ҳосил мекунем, ки онҳо формулаҳои зарби мухтасаранд.

Зарурияти дар оянда истифодабарии формулаҳои зеринро ба ҳисоб гирифта, онҳоро пешниҳод менамоем:

$$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1),\ \ (n=4)$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),\ \ (n=5)$$
$$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1),\ \ (n=6)$$

М и с о л и 5. Дар прогрессияи геометрӣ панҷ аъзо ҳаст. Суммаи он бе аъзои якум ба 19,5 ва бе аъзои охирин ба 13 баробар аст. Аъзоҳои канориро меёбем.

Ҳ а л. Аз рӯи додашудаҳои масъала ифодаҳои

$$b_2+b_3+b_4+b_5=19,5$$

ва

$$b_1+b_2+b_3+b_4=13$$

-ро навиштан мумкин аст. Агар ду тарафи баробарии дуюмро бо q зарб кунем, он гоҳ дар тарафи чап суммаи ба тарафи чапи баробарии якум баробарро ҳосил мекунем:

$$q\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4)=13\cdot q; \qquad b_2+b_3+b_4+b_5=13q;$$

$$19,5=13q; \qquad q=19,5:13; \qquad q=1,5.$$

Аз тарафи дигар, аз $b_1+b_2+b_3+b_4=13$ва формулаи (4) пайдо мекунем:

$$\frac{b_1\cdot(q^4-1)}{q-1}=13; \quad \frac{b_1\cdot(1,5^4-1)}{1,5-1}=13; \quad b_1\cdot(5,0625-1)=13\cdot0,5;$$

$$b_1\cdot4,0625=6,5; \qquad b_1=6,5:4,0625; \qquad b_1=1,6.$$

Акнун аз формулаи $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ аъзои панҷумро меёбем:

$$b_5=b_1\cdot q^4=1,6\cdot1,5^4=1,6\cdot5,0625=8,1.$$

Ҷ а в о б: $b_1=1,6$; $b_5=8,1$.

М и с о л и 6. Суммаи ду адад ба 30 ва ҳосили зарбашон ба 144 баробар аст. Ин ададҳо аъзои аввалаи прогрессияи геометрии махраҷаш $q>1$ мебошанд. Суммаи ҳафт аъзои прогрессияро меёбем.

Ҳ а л. Прогрессияи геометриро бо (b_n) ишорат мекунем. Он гоҳ $b_1+b_2=30$ ва $b_1\cdot b_2=144$ мешавад.

Аз системаи $\begin{cases}b_1+b_2=30,\\ b_1\cdot b_2=144;\end{cases}$ b_1 ва q-ро меёбем:

$$\begin{cases}b_1+b_2=30,\\ b_1\cdot b_2=144;\end{cases} \begin{cases}b_2=30-b_1,\\ b_1\cdot(30-b_1)=144;\end{cases} \begin{cases}b_2=30-b_1,\\ b_1^2-30b_1+144=0;\end{cases} \begin{cases}b_1'=6,\ b_1''=24,\\ b_2'=24,\ b_2''=6.\end{cases}$$

Ҳамин тариқ, ду прогрессияҳои

$$6;\ 24;\ 96;\ 284;\ \ldots$$

$$24;\ 6;\ \frac{6}{4};\ \frac{6}{16};\ \ldots$$

ҳосил мешаванд, ки махраҷи якумаш $q=24:6=4>1$ ва дуюмаш $q=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}<1$ аст. Аз ин рӯ, прогрессияи дуюмро аз эътибор соқит намуда, барои якумаш аввал $b_7=b_1\cdot q^6=6\cdot4^6=24576$ ва баъд S_7-ро аз рӯи формулаи (3) меёбем:

$$S_7=\frac{b_7\cdot q-b_1}{q-1}=\frac{24576\cdot4-6}{4-1}=\frac{98298}{3}=32766.$$

? **1.** Формулаҳои суммаи n-аъзои аввали прогрессияи геометриро номбар кунед. **2.** Агар махраҷи прогрессияи геометрӣ ба 1 баробар бошад, он гоҳ суммаи n-аъзои аввалааш чанд аст?

473. Прогрессияи геометрии

а) $2{,}1;\ -4{,}2;\ \ldots$ г) $-2;\ -8;\ \ldots$ ж) $64;\ -16;\ \ldots$

б) $36;\ 54;\ \ldots$ д) $-16;\ -32;\ \ldots$ з) $-3;\ 3^2;\ \ldots$

в) $-1;\ \frac{1}{3};\ \ldots$ е) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots$

дода шудааст. Суммаи чор аъзои аввалаи онро ёбед.

474. Аз рӯи додашудаҳо суммаҳои нишон додашудаи прогрессияи геометриро ёбед:

а) $b_2=8,\ q=\frac{1}{2},\ S_6$ - ?; г) $c_1=-1,\ q=2,\ S_4$ - ?;

б) $b_1=500,\ q=\frac{1}{5},\ S_7$ - ? д) $x_1=4,\ q=-\frac{3}{2},\ S_5$ - ?;

в) $c_1=-4,\ q=-3,\ S_8$ - ? е) $x_1=5{,}5,\ q=0{,}55,\ S_3$ - ?

475. Нишон диҳед, ки пайдарпаии (b_n) прогрессияи геометрӣ аст. Суммаи n-аъзои аввалини онро ёбед.

а) $b_n=9{,}2\cdot 3^n$; в) $b_n=4^{n+1}$; д) $b_n=4\cdot 7^n$;

б) $b_n=8\cdot 2^{n-1}$; г) $b_n=0{,}1\cdot 4^n$; е) $b_n=2\cdot 3^n$.

476. Суммаи n-аъзои аввалини прогрессияи геометриро ёбед:

а) $1;\ 3^2;\ 3^4;\ \ldots;$ ж) $x^2;\ 1;\ \frac{1}{x^2};\ \ldots,\ (x\neq 0,\ x\neq\pm 1)$;

б) $2^2;\ 2^3;\ 2^4;\ \ldots;$ з) $5;\ 5;\ 5;\ \ldots;$

в) $-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ \ldots;$ и) $1;\ -2;\ 4;\ \ldots;$

г) $1;\ -x;\ x^2;\ \ldots;\ (x\neq -1)$; к) $1;\ 2x;\ 4x^2;\ \ldots;\ \left(x\neq\frac{1}{2}\right)$;

д) $1;\ x^2;\ x^4;\ \ldots;\ (x\neq\pm 1)$; л) $1{,}2;\ -3{,}6;\ 10{,}8;\ \ldots$.

е) $1;\ x^3;\ x^6;\ \ldots;\ (x\neq -1)$;

477. Прогрессияи геометрии (b_n) дода шудааст. Агар:

а) $b_5=32{,}4,\ q=1{,}5$ бошад, S_6-ро;

б) $b_7=\frac{64}{81},\ q=\frac{2}{3}$ бошад, S_7-ро;

в) $b_3=10,\ q=\frac{1}{3}$ бошад S_4-ро;

г) $b_5=-364{,}5,\ q=-3$ бошад, S_5-ро

ёбед.

478. Суммаи n-аъзои прогрессияи геометриро ёбед, ки дар он:

а) $a_1=2,\ q=2,\ n=5$; б) $a_1=0{,}5,\ q=3,\ n=4$

бошад.

479. Махраҷ ва суммаи n-аъзои прогрессияи геометриро ёбед, агар

а) $a_1=2$, $n=7$; $a_n=1458$; б) $a_1=76\frac{4}{5}$, $n=6$; $a_n=-\frac{12}{5}$

бошад.

480. Аъзои якум ва суммаи n-аъзои прогрессияи геометриро ёбед, агар

а) $q=1\frac{1}{2}$, $n=6$; $a_n=2\frac{17}{32}$; б) $q=4$, $n=8$, $a_n=49152$

бошад.

481. Аъзои аввала ва охирини прогрессияи геометриро ёбед, агар

а) $n=9$, $q=2$, $S_n=1533$; б) $n=12$, $q=2$, $S_n=4095$

бошад.

482. Дар прогрессияи геометрии аъзоҳояш мусбати (b_n) $b_3=18$ ва $b_7=1458$ аст. Суммаи даҳ аъзои аввалаи онро ёбед.

483. Суммаи аъзоҳои прогрессияи геометрии 1; b_2; b_3; b_4; b_5; b_6; 4096-ро ёбед.

484. Чор ададеро ёбед, ки прогрессияи геометриро бо махраҷи $q>1$ ташкил диҳаду суммаи аъзоҳои канориаш ба 35 ва суммаи ду аъзоҳои боқимондааш ба 30 баробар бошад. Дар ҷавоб панҷяки суммаашонро нависед.

485. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ба 28 ва суммаи се аъзои пасояндааш (яъне b_4; b_5 ва b_6) ба 3,5 баробар аст. Аъзои дуюми прогрессияро ёбед.

486. Суммаи прогрессияи геометриеро ёбед, ки он аз ҳафт аъзо иборат буда, суммаи се аъзои аввалааш ба 26 ва се аъзои охиринаш ба 2106 баробар шавад.

487. Фарқи байни аъзоҳои дуюм ва якуми прогрессияи геометрӣ $(b_n>0)$ ба 20, фарқи байни аъзои чоруму якум бошад ба 140 баробар аст. Суммаи шаш аъзои аввалаи прогрессияро ёбед.

Машқҳо барои такрор

488. Се бригадаи коргарон дар як смена 104 детал тайёр карданд. Деталҳои бригадаи якум аз дуюмаш дида 12-то камтар аст. Деталҳои тайёркардаи бригадаи сеюм бошад $\frac{5}{8}$-ҳиссаи шумораи умумии деталҳои бригадаҳои якум ва дуюмро ташкил медиҳад. Ҳар як бригада чанд деталӣ тайёр карда аст?

489. Дар шакли бисёраъзогии стандартӣ нависед:

а) $2x\cdot(x^2-7x-3)+7$; г) $3y^2-2y\cdot(5+1,5y)+5$;

б) $4b^2\cdot(5b^2-3b+2)+2$; д) $6x^2-3x\left(2x-\frac{2}{3}\right)+1$;

в) $(y^2-1,4y+6)\cdot1,5y-3$; е) $7b\cdot(4c-b)+4c\cdot(c-7b)$.

490. Бо ёрии формулаҳои $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$ қимати:

а) 61^2; б) 999^2; в) $9,9^2$; г) 199^2; д) 702^2; е) $10,2^2$

-ро ёбед.

491. Нишон диҳед, ки

а) $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ ба $\sqrt{7}+\sqrt{6}$; б) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ ба $\sqrt{7}+\sqrt{5}$

баробар аст.

492. Ҳамаи қиматҳои a ва b-ро, ки барояшон системаи

$$\begin{cases}(1+a)\cdot x+(a+b)\cdot y=b-a,\\(5+a)\cdot x+2(a+b)\cdot y=b-1\end{cases}$$

ҳал надорад, ёбед.

493. Нобаробарии

$$\frac{2x+2}{7}-\frac{4x-3}{2}<\frac{2+13x}{14}-1$$

-ро ҳал кунед.

494. Ифодаро ба намуди ҳосили зарб нависед:

а) $2^{n+4}-2^n$; б) $4^{n+1}-4^{n-1}$; в) $5^{2n}+5^n$.

495. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёбед:

а) $y=-2x^2+x$; б) $y=3x^2+6x-15$.

496. Экстремуми функсияи $y=-2x^2+4x-6$-ро ёбед.

497. Қатораи тезгард бо сабабҳои техникӣ 16 дақиқа боздошта шуд. Бо мақсади дар сари вақт ба пункти зарурӣ расидан қатора 80 км-ро бо суръати нисбат ба аввала 10 км/соат зиёдтар ҳаракат намуд. Суръати аввалаи қатораро ёбед.

28. Суммаи прогрессияи геометрии беохири камшаванда

Дар пунктҳои 25-27 мо ба таърифи прогрессияи геометрӣ, ёфтани аъзои n-ум ва суммаи n-аъзои аввалааш шинос шудем. Дар он ҳолатҳо мо ягон маротиба ба табиати афзуншавандагӣ ва камшавандагии (ин мафҳумҳо аз мавзӯъҳои ба прогрессияи арифметикӣ бахшида шуда шиносанд) мисолҳои прогрессияҳои геометрии омӯхтаамон диққат надода будем. Дар ин мавзӯъ ба як синфи прогрессияҳо - прогрессияҳои геометрии беохири камшаванда, ки қариб дар тамоми соҳаҳо татбиқи худро ёфтааст, шинос шуда кӯшиши ёфтани суммаи аъзоёни онро мекунем.

Т а ъ р и ф. **Агар махраҷи прогрессияи геометрии**

$$(b_n)\quad b_1;\ b_2;\ b_3;\ b_4;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots$$

шарти $|q|<1$-ро қаноат намояд, онро прогрессияи геометрии беохири камшаванда меноманд.

Масалан,
$$1;\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{7^2};\ \frac{1}{7^3};\ \ldots;\ \frac{1}{7^{n-1}};\ \ldots$$

прогрессияи геометрии беохири камшаванда мешавад, чунки

$$q=\frac{1}{7}<1 \text{ аст.}$$

Пайдарпаин $\quad -1;\ \frac{1}{6};\ -\frac{1}{6^2};\ \frac{1}{6^3};\ -\frac{1}{6^4};\ \ldots$

низ прогрессияи геометрии беохири камшаванда шуда метавонад, чунки барояш шарти $|q|=\left|-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}<1$ иҷро мешавад.

Акнун гузориш ва шарҳи масъаларо аз масъалаи геометрии зерин сар мекунем. Дар расм (ниг. ба расми 90) порчаи дарозиаш ба 1 воҳид баробари

Расми 90

AB дода шудааст. Бо B_1 - миёнаҷои порчаи AB, бо B_2 - миёнаҷои порчаи B_1B, бо B_3 - миёнаҷои порчаи B_2B-ро ишорат мекунем. Амалиётро ҳамин тавр давом дода дарозии порчаҳои AB_1, B_1B_2, B_2B_3 ва ғайраро ҳосил мекунем, ки он прогрессияи геометрии беохирро бо махраҷи $q=\frac{1}{2}$ ташкил медиҳад:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \ldots \qquad (1)$$

Аз формулаи (4)-и п. 27 суммаи n-аъзои аввалинашро меёбем:

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-1}=1-\frac{1}{2^n},\qquad S_n=1-\frac{1}{2^n}.$$

Маълум, ки

агар $n=5$ бошад, он гоҳ $\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$;

агар $n=15$ бошад, он гоҳ $\frac{1}{2^{15}}=\frac{1}{32768}$;

агар $n=25$ бошад, он гоҳ $\frac{1}{2^{25}}=\frac{1}{34834432}$ мешавад.

Ададҳои ҳосилшудаи $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{32768}$ ва $\frac{1}{34834432}$ аз он шаҳодат медиҳанд, ки бо зиёд шудани шумораи ҷамъшавандаҳо қимати касри $\frac{1}{2^n}$ хеле хурд шуда ба нул майл мекунад. Бинобарон, ҳангоми беохир зиёд шудани n фарқи $1-\frac{1}{2^n}$ ба адади 1 хеле наздик мешавад ва ё ба он майл мекунад, мегӯянд. Дар ин ҳолат адади 1-ро суммаи прогрессияи геометрии беохири камшавандаи (1) номида, чунин менависанд:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

Суммаи дарозии порчаҳои AB_1, B_1B_2, B_2B_3 ... ба дарозии порчаи AB баробар аст. Ин аст маънои геометрии масъалаи ҳал кардаамон*. Барои прогрессияи геометрии дилхоҳи

$$b_1;\quad b_1\cdot q;\quad b_1\cdot q^2;\quad b_1\cdot q^3;\quad \ldots$$

шарти $|q|<1$-ро қонеъгардонанда суммаи n-аъзои аввалаашро меёбем:

$$S_n=\frac{b_1\cdot(q^n-1)}{q-1}=\frac{b_1\cdot q^n-b_1}{q-1}=\frac{b_1-b_1\cdot q^n}{1-q}=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n,$$

$$S_n=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n.$$

Ҳангоми $|q|<1$ будан ва беохир зиёд шудани аъзоҳои прогрессия зарбкунандаи q^n ва аз ин ҳосили зарби $\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$ ҳам ба 0 наздик мешавад (инро мо бевосита ҳангоми ёфтани суммаи аъзоҳои пайдарпаии мушаххаси (1) мушоҳида карда будем). Ин бошад ба хулосаи он ки $S_n\approx\frac{b_1}{1-q}$ ** ё адади $\frac{b_1}{1-q}$ ба суммаи прогрессияи геометрии беохир камшавандаи (b_n) бо махрачи $|q|<1$ баробар аст, меорад.

Инро дар шакли

$$b_1+b_1\cdot q+b_1\cdot q^2+\ldots=\frac{b_1}{1-q}$$

навишта, баъди тарафи чапро бо S ишорат намудан, формулаи

$$S=\frac{b_1}{1-q} \qquad (2)$$

-ро ҳосил мекунем.

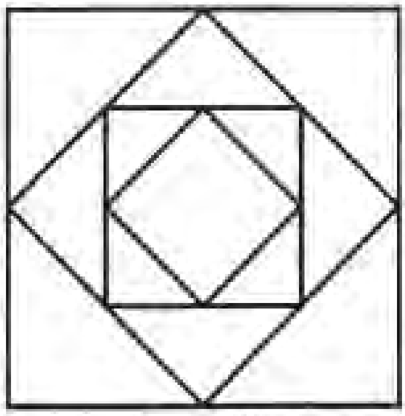
Ҳангоми дар прогрессия $|q|\geq 1$ будан бо афзудани n суммаи аъзоҳояш ба ягон адад наздик намешаванд. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки прогрессия сумма надорад.

Дар поён якчанд мисол меорем, ки бо ёрии формулаи (2) ҳал мешаванд.

---

* Агар дар шарти масъала дарозии порчаи AB-ро ба 2 воҳид баробар мегирифтем, он гоҳ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$ ҳосил мекардем.

** Бо афзудани n суммаи S_n ба $\frac{b_1}{1-q}$ майл мекунад.



Расми 91

М и с о л и 1. Квадрати тарафаш a см дода шудааст. Миёнаҷои тарафҳои он қуллаҳои квадрати дуюм, миёнаҷои квадрати дуюм қуллаҳои квадрати сеюм ва ғайра мебошанд (расми 91). Суммаи масоҳати ҳамаи квадратҳоро меёбем.

Ҳ а л. Аз масъала намоён аст, ки масоҳати ҳар як квадрати пасоянд ба нисфи масоҳати квадрати пешоянд баробар аст.

Пайдарпаии масоҳати квадратҳо прогрессияи геометриро бо $b_1=a^2$ ва $q=\frac{1}{2}<1$ ифода мекунад, ки суммаашон ба

$$S=a^2:(1-\frac{1}{2})=a^2:\frac{1}{2}=a^2\cdot 2=2a^2$$

баробар аст. Ҳамин тариқ, суммаи масоҳатҳои ҳамаи квадратҳо ба $2a^2$ (см^2) баробар буданашро ҳосил мекунем.

Пеш аз ҳалли мисоли навбатӣ қайд мекунем, ки ҳар як адади ратсионалиро ба намуди касри даврии даҳии беохир ифода кардан мумкин аст. Адади ратсионалии $\frac{m}{n}$ (m-адади бутун ва n-адади натуралӣ)-ро бо роҳи тақсимкунии сурат ба махраҷ ба намуди касри даҳии беохир меоранд. Баръакс, ҳар як касри даҳии даврии беохир адади ратсионалиро ифода мекунад. Ин ду маълумоти мухтасар ба мо аз синфи ҳаштум маълум аст. Бо ёрии суммаи прогрессияи геометрии беохири камшаванда нишон додан мумкин аст, ки касри *даврии даҳии беохирро ба намуди $\frac{m}{n}$ овардан мумкин аст.*

Дар синфи 8 (ниг. ба боби 2, §4, п. 11) ҳангоми касри davrиро ба касри ратсионалӣ гардонидан аз қоидаи зерин истифода мекардем: *«Аз адади то даври дуюм буда, адади то даври якум бударо тарҳ карда дар сурат менависем. Дар махраҷ бошад, ҳамон миқдор 9 менависем, ки ба шумораи рақамҳои давр баробар бошад. Ба он ҳамон миқдор нул илова мекунем, ки он ба миқдори рақамҳои то давр буда баробар аст».*

Акнун ин қоидаро дар мисоли касрҳои даврии даврашон аз ду адад иборат асоснок мекунем. Бигузор $A=0,\overline{abc}\,(\overline{df})$ чунин каср аст. Азбаски $A=0,\overline{abc}+0{,}000(\overline{df})$ мебошад, пас кифоя аст, ки тарзи баргардонидани касри $B=0,(\overline{df})$-ро нишон диҳем. Мувофиқи таъриф

$$B=0,(\overline{df})=0,\ df+0{,}00df+0{,}0000df+0{,}000000df+\ldots$$

мешавад, ки он суммаи беохирро ифода мекунад.

Тафтиши бевосита шаҳодати он аст, ки суммаи мазкур прогрессияи геометрии беохир камшавандаро бо махраҷи q=0,01 ташкил медиҳад.

Аз ин ҷо, дар асоси формулаи (2) ҳосил мекунем:

$$B=0,(\overline{df})=\frac{0,df}{1-0,01}=\frac{0,df}{0,99}=\frac{df}{99}.$$

Н а т и ҷ а. *Касри даврии беохири даҳии дилхоҳро бо ҳамин тарз дар шакли касри оддӣ навиштан мумкин аст.*

М и с о л и 2. Касри даврии даҳии беохири 0,(81)-ро ба намуди касри оддӣ менависем.

Маълум, ки ин адад суммаи беохири ($\overline{df}$ =81)

$$0,81+0,0081+0,000081+0,00000081+...$$

мебошад. Аъзоҳои сумма прогрессияи геометрии беохир камшавандаро, ки дар он b_1=0,81 ва q=0,01<1 аст, ифода мекунанд. Пас, ин сумма ба

$$S=\frac{81}{99}=\frac{9}{11}, \quad \text{яъне} \quad 0,(81)=\frac{9}{11}$$

баробар мешавад.

М и с о л и 3. Суммаи прогрессияи беохири камшавандаро меёбем, агар суммаи аъзоҳои якуму чорум ба 54 ва дуюму сеюм ба 36 баробар бошад.

Ҳ а л. Дар асоси шарти масъала системаи

$$\begin{cases} b_1+b_4=54, \\ b_2+b_3=36 \end{cases}$$

-ро доро ҳастем, ки он бо осонӣ ба шакли

$$\begin{cases} b_1\cdot(1+q^3)=54, \\ b_1\cdot q\cdot(1+q)=36 \end{cases}$$

оварда мешавад. Муодилаи якумро ба дуюм тақсим карда ҳосил мекунем:

$$\frac{1-q+q^2}{q}=\frac{3}{2} \quad \text{ё} \quad 2q^2-5q+2=0.$$

Азбаски шарти мисол ёфтани суммаи прогрессияи геометрии беохири камшавандаро тақозо мекунад, пас аз байни решаҳои муодилаи квадратии охирин, ки q_1=2 ва $q=\frac{1}{2}$ мебошанд, $q=\frac{1}{2}$<1-ро мегирем. Қимати интихобкардаи q-ро ба муодилаи дилхоҳи система гузошта b_1=48-ро ҳосил мекунем. Аз рӯи қиматҳои маълуми b_1 ва q суммаи матлубро меёбем:

$$S=\frac{48}{1-\frac{1}{2}}=\frac{48}{\frac{1}{2}}=96, \quad S=96.$$

М и с о л и 4. Суммаи прогрессияи геометрии беохири

$$25;\ -5;\ 1;\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{25};\ -\frac{1}{125};\ \dots$$

-ро ҳисоб мекунем.

Маълум, ки махраҷи прогрессия $q=-\frac{1}{5}$ аст. Пас, прогрессия камшаванда будааст. $b_1=25$ буданашро ба назар гирифта аз рӯи формулаи (2) ҳосил мекунем:

$$S=\frac{25}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{25}{1+\frac{1}{5}}=\frac{25}{\frac{6}{5}}=\frac{25\cdot 5}{6}=\frac{125}{6}.$$

Яъне, $25-5+1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\dots=\frac{125}{6}$ мешавад.

? 1. Прогрессияи геометрии беохири камшаванда чист? 2. Дар кадом ҳолат аз формулаи $S_n=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$ формулаи $S\approx\frac{b_1}{1-q}$-ро ҳосил мекунанд? 3. Оё бо ёрии прогрессияи геометрии беохири камшаванда касри даҳии даврии беохирро ба намуди касри оддӣ овардан мумкин аст? Мисолҳо оред.

498. Иҷрои шарти $|q|<1$-ро барои прогрессияи геометрии зерин санҷида, суммаашонро ёбед:

а) $27;\ 9;\ 3;\ 1;\ \dots;$ ж) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1};\ \frac{1}{2-\sqrt{2}};\ \frac{1}{2};\ \dots;$

б) $-8;\ 2;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ \dots;$ з) $\sqrt{3}(\sqrt{3}-2);\ \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\ \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}};\ \dots;$

в) $4;\ \frac{4}{5};\ \frac{4}{25};\ \frac{4}{125}\ \dots;$ и) $\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3^2};\ \frac{2}{3^3};\ -\frac{2}{3^4};\ \dots;$

г) $-3;\ \sqrt{3};\ -1;\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \dots;$ к) $16;\ 4;\ 1;\ \frac{1}{4};\ \dots;$

д) $4\sqrt{2};\ 2;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{4};\ \dots;$ л) $-6;\ -2;\ -\frac{2}{3};\ \dots;$

е) $15;\ 3\sqrt{5};\ 3;\ \frac{3\sqrt{5}}{5};\ \dots;$ м) $5;\ -1;\ \frac{1}{5};\ -\frac{1}{5^2};\ \dots.$

499. Суммаи прогрессияи геометрии беохирро ёбед:

а) $-24;\ 6;\ -\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \dots;$ в) $\frac{1}{a};\ 1;\ a;\ a^2;\ \dots\ (|a|<1,\ a\neq 0);$

б) $-1;\ \frac{2}{3};\ -\frac{4}{9};\ \frac{8}{27};\ \dots;$ г) $-\frac{1}{a};\ 1;\ -a;\ a^2;\ \dots\ (|a|<1,\ a\neq 0).$

500. Суммаҳоро ёбед:

а) $1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\ldots;$ г) $5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots;$

б) $-\frac{1}{a^2}+a-a^4-a^7-a^{10}+\ldots(|a|<1,\ a\neq 0);$ д) $12+8+\frac{16}{3}+\frac{32}{9}+\ldots;$

в) $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\ldots;$ е) $1-\frac{1}{11}+\frac{1}{121}-\frac{1}{1331}+\ldots.$

501. Суммаи прогрессияи геометрии беохири камшавандаи аъзоҳояш мусбатро ёбед, агар аъзои якумаш ба 4 ва фарқи байни аъзои сеюму панҷумаш ба $\frac{32}{81}$ баробар бошад.

502. Суммаи аъзоҳои прогрессияи геометрии беохири камшаванда ба 56, суммаи квадратҳои аъзоҳои ҳамон прогрессия ба 448 баробар аст. Аъзои якум ва махраҷи прогрессияро ёбед.

503. Прогрессияи геометрии беохири (b_n)-ро бо махраҷи $|q|<1$ ёбед, агар аъзои дуюмаш ба 6 ва суммааш ба ҳаштяки суммаи квадратҳои аъзоҳояш баробар бошад. Дар ҷавоб (агар прогрессия мавҷуд бошад) се аъзои аввалаашро нависед.

504. Дар дохили давраи радиусаш ба R см баробар секунҷаи мунтазам чунон кашида шудааст, ки куллаҳояш дар давра меҳобанд. Дар дохили секунҷаи мунтазам бошад давраи дарункашидашудаи секунҷа сохта шудааст; дар дохили давраи дарункашидашуда боз секунҷаи нави мунтазами куллаҳояш дар давра воқеъгардида кашида шудааст ва ин амал беохир давом мекунад. Суммаи дарозии давраҳо ва масоҳати доираҳоро ёбед.

505. Дар дохили квадрат доираи дарункашидашуда сохта шудааст, дар дохили доира бошад квадрати нави қуллаҳояшро дарбаргиранда кашида шудааст; дар дохили квадрати дуюм боз доираи дарункашидашуда сохта шудааст ва ҳамин тавр протсесс давом мекунад. Агар дарозии тарафи квадрати якум ба b см баробар бошад, он гоҳ суммаи масоҳатҳои ҳамаи доираҳо ба чӣ баробар мешавад?

506. Махраҷи прогрессияи геометрии беохир камшавандаро, ки аъзои якумаш ба 2 ва сечанди суммааш ба 10 баробар аст, ёбед.

507. Аъзои панҷуми прогрессияи геометрии беохири камшавандаро ёбед, агар махраҷаш ба $\frac{1}{8}$ ва суммааш ба $3\frac{3}{7}$ баробар бошад.

508. Суммаи прогрессияи геометрии камшавандаи беохир ба 25 ва суммаи ду аъзои аввалааш ба 9 баробар аст. Прогрессияро ёбед.

509. Ададҳоро ба намуди касри оддӣ нависед:

а) 0, (8); д) 0,2 (3); к) 0,4 (6); о) 0,13 (12);
б) 0, (3); е) 0,82 (45); л) 0,01 (12); п) 0,21 (22);
в) 0, (26); ж) 0, (5); м) 0,1 (3); р) 0,13 (11);
г) 2, (71); з) 1, (72); н) 2, (1); с) 0,2 (52).

Машқҳо барои такрор

510. Амалҳоро иҷро кунед:

а) $\frac{2y^3+2y^2}{y^4+y^3+y^2}\cdot\frac{y^3+y^2+y}{4y^4+4y^3}$; б) $\frac{2(a^3-b^3)}{3ab(a+b)}:\frac{a^2-b^2}{a^2b+ab^2}$.

511. Исбот кунед, ки барои $a>0$ ва $b>0$ нобаробарии

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

ҷой дорад.

512. Махраҷро аз радикал озод намоед:

а) $\frac{4}{3-\sqrt{3}}$; б) $\frac{5}{3+\sqrt{3}}$; в) $\frac{6}{5-\sqrt{2}}$.

513. Ҷуфт ва тоқии функсияҳои зеринро муайян кунед:

а) $f(x)=x^3-3x$; в) $f(x)=-2(x^4-2x^2+1)$;
б) $f(x)=x^4-8x^2$; г) $f(x)=x+\frac{5}{x}$?

514. Периметри росткунҷа ба 8 см баробар аст. Масоҳати росткунҷаро чун функсияи тарафаш ифода кунед.

515. Суръати ҳаракати катер ба муқобили ҷараёни оби дарё 20,1 км/соат ва суръати об 1,5 км/соат аст. Суръати катерро дар оби ором ва самти ҷараёни дарё ҳисоб кунед?

516. Графики функсияҳои $y=2x^2-5$ ва $y=2x^2+3x-5$-ро дар як ҳамвории координатавӣ созед.

517. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $3x^2-7x+4<0$; б) $-3x^2+27\geq0$.

§9. БАЪЗЕ ХОСИЯТҲОИ ДИГАРИ ПРОГРЕССИЯҲО. ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ ҲАР ДУ НАМУДИ ПРОГРЕССИЯҲОРО ДАРБАРГИРАНДА

Бигузор прогрессияи арифметикии (a_n) ва геометрии (b_n) дода шуда бошанд. Чанд хосияти нави ин прогрессияҳоро меорем.

I. Барои прогрессияи арифметикӣ.

1. Ҳар як аъзои (a_n) ба миёнаи арифметикии ду аъзои дар як хел дурӣ ҷойгирбуда, баробар аст. Яъне

$$2a_k=a_{k+m}+a_{k-m}, \quad (1)$$

ки дар ин ҷо k ва m ададҳои натуралианд ва $k>m$ аст.

Дар ҳақиқат, мувофиқи таърифи прогрессия

$$a_{k+m}=a_1+d\cdot(k+m-1), \qquad a_{k-m}=a_1+d\cdot(k-m-1),$$

мешавад.

Ин баробариҳоро ҷамъ карда ҳосил мекунем:

$$a_{k+m}+a_{k-m}=2a_1+d\cdot(k+m-1+k-m-1)=2a_1+2d\cdot(k-1)=2a_k.$$

2. Агар $k+l=r+s$ бошад, он гоҳ $a_k+a_l=a_r+a_s$.

Дар ҳақиқат,

$$a_k+a_l=a_1+d\cdot(k-1)+a_1+d\cdot(l-1)=2a_1+d\cdot(k+l-2),$$
$$a_r+a_s=a_1+d\cdot(r-1)+a_1+d\cdot(s-1)=2a_1+d\cdot(r+s-2)$$

аст. Ҳангоми $k+l=r+s$ будан тарафҳои рости ҳар ду баробарӣ якхелаанд. Пас тарафҳои чапи онҳо низ якхела мешаванд.

Барои прогрессияҳои охирнок, масалан, дорои n-аъзо, аз шарти $1+n=k+(n-k+1)$ дурустии

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n \qquad (2)$$

бармеояд.

II. Барои прогрессияи геометрӣ.

1. Квадрати ҳар як аъзо ба ҳосили зарби ду аъзои аз он дар як хел дурӣ воқеъбуда баробар аст:

$$b_k^2=b_{k-m}\cdot b_{k+m} \qquad (3)$$

ки дар ин ҷо k, m - ададҳои натуралианд ва $k>m$ аст.

Барои ба дурустии тасдиқоти болоӣ боварӣ ҳосил кардан кофист, ки баробариҳои $b_{k+m}=b_1\cdot q^{k+m-1}$ ва $b_{k-m}=b_1\cdot q^{k-m-1}$-ро мувофиқи таърифи прогрессия навишта, ҳосили зарбашонро ёбем:

$$b_{k-m}\cdot b_{k+m}=b_1^2\cdot q^{k-m-1+k+m-1}=b_1^2\cdot q^{2(k-1)}=(b_1\cdot q^{k-1})^2=b_k^2$$

2. Агар $k+l=r+s$ бошад, он гоҳ

$$b_k\cdot b_l=b_r\cdot b_s. \qquad (4)$$

Муқоисаи тарафҳои росту чапи баробариҳои

$$b_k\cdot b_l=b_1\cdot q^{k-1}\cdot b_1\cdot q^{l-1}=b_1^2\cdot q^{k-1+l-1}=b_1^2\cdot q^{k+l-2},$$
$$b_r\cdot b_s=b_1\cdot q^{r-1}\cdot b_1\cdot q^{s-1}=b_1^2\cdot q^{r-1+s-1}=b_1^2\cdot q^{r+s-2}$$

дурустии (4)-ро нишон медиҳад.

Барои прогрессияи геометрии охирноки $b_1;\ b_2;\ ...;\ b_n$ шарти (4) намуди

$$b_k\cdot b_{n-k+1}=b_1\cdot b_n \qquad (5)$$

-ро мегирад $(k+(n-k+1)=n+1)$.

Қайд мекунем, ки на ҳар гуна пайдарпаии ададӣ, ки дорои хосиятҳои 1 ва 2 аст, прогрессияи арифметикӣ ё геометрӣ шуда метавонанд. Масалан, пайдарпаии

$$1;\ 2;\ 4;\ 5;$$

прогрессияи арифметикӣ нест, ҳол он ки шартҳои (1) ва (2) барояш ҷой доранд. Пайдарпаии

$$1;\ 2;\ 3;\ 6$$

прогрессияи геометрӣ намешавад, гарчанде он шартҳои (3) ва (4)-ро қаноат намоянд.

III. Акнун масъалаҳоеро ҳал мекунем, ки дар матнашон ҳар ду намуди прогрессияҳо вомехӯранд.

Масъалаи 1. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_2=14$ ва $a_3=16$ аст. Чунин прогрессияи геометриро меёбем, ки махраҷаш ба фарқи прогрессияи арифметикӣ баробар буда, суммаи се аъзои аввалаи ҳар ду прогрессия якхела мебошад.

Ҳал. Аз рӯи шарт $d=a_3-a_2=16-14=2$, $a_1=14-d=14-2=12$ ва $a_1+a_2+a_3=12+14+16=42$. Аз ин ҷо, барои прогрессияи геометрии матлуб

$$q=2, \quad 42=b_1+b_1\cdot q+b_1\cdot q^2=b_1\cdot(1+q+q^2)=b_1\cdot(1+2+4)=7b_1.$$

Пас, $b_1=6$.

Инак, (b_n): 6; 12; 24; ... .

Масъалаи 2. Дар прогрессияи арифметикии (a_n) ва геометрии (b_n)-и мусбат аъзоҳои якум (яъне a_1 ва b_1) ба 3 баробаранд. Аъзоҳои сеюм низ бо ҳам баробаранд ($a_3=b_3$). Ин прогрессияҳоро нависед, агар аъзои дуюми прогрессияи арифметикӣ аз аъзои дуюми прогрессияи геометрӣ 6 воҳид зиёд бошад.

Ҳал. 3; $3q$; $3q^2$ аъзоҳои прогрессияи геометрӣ мебошанд. Аз рӯи шарт $a_1=3$, $a_2=3q+6$. Азбаски $a_3-a_2=a_2-a_1$ аст, пас $a_3=2a_2-a_1=6q+9$. Аъзои сеюми прогрессияи геометрӣ ба $3q^2$ баробар аст. Пас, мувофиқи шарт $6q+9=3q^2$. Аз ин ҷо $3q^2-6q-9=0$. Адади мусбати $q=3$ решаи мусбати ин муодила аст. Ҳамин тариқ прогрессияҳои

$$(a_n):\quad 3;\ 15;\ 27;\ 39;\ 51;\ \ldots$$
$$(b_n):\quad 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 243;\ \ldots$$

ҳалли масъалаанд.

?

1. Нишон диҳед, ки агар аъзоҳои пайдарпаии (a_n) формулаи $2a_k=a_{k+m}+a_{k-m}$-ро ва пайдарпаии (b_n) формулаи $b_k^2=b_{k-m}\cdot b_{k+m}$-ро қаноат намоянд, он гоҳ (a_n) - прогрессияи арифметикӣ ва (b_n) -прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. **2.** Формулаҳои (1), (2), (3) ва (4) барои кадом намуди прогрессияҳо ҷой доранд. **3.** Дар мисолҳои мушаххас нишон диҳед, ки иҷрои хосиятҳои дуюм боиси прогрессия будани пайдарпай намешавад.

518. Дар прогрессияи арифметикӣ бо фарқи бутун 11-то аъзо ҳаст. Аъзои якум ба 24 баробар мебошад. Аъзои якум, панҷум ва ёздаҳум прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. Ҳамаи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро ёфта дар ҷавоб суммаашро нависед.

519.* Се адад прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. Агар аъзои дуюмро ба 8 воҳид зиёд кунем, он гоҳ прогрессияи арифметикӣ ва агар аъзои сеюми прогрессияи арифметикиро ба 64 воҳид зиёд намоем боз прогрессияи геометрӣ ҳосил мешавад. Ин ададҳоро ёбед.

520. Суммаи се адад ба 114 баробар аст. Ин ададҳоро ҳамчун се аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ё ҳамчун аъзои якум, чорум ва бистуманчуми прогрессияи арифметикӣ бо фарқи ғайринулӣ дида баромадан мумкин аст. Ададҳоро ёбед.

521. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи геометрии афзуншаванда ба 91 баробар аст. Агар ба ин аъзоҳо мувофиқан ададҳои 25, 27 ва 1-ро илова кунем прогрессияи арифметикиро ҳосил мекунем. Аъзои ҳафтуми прогрессияи геометриро ёбед.

522. Се адади x, y ва z прогрессияи геометрӣ ва ададҳои x; $2y$; $3z$ прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд. Махраҷи прогрессияро ёбед.

523. Се ададҳои аз нул фарққунанда прогрессияи арифметикӣ ва квадратҳояшон бо ҳамон тартиб прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Махраҷи прогрессияи геометриро ёбед.

524. Прогрессияҳои арифметикӣ ва геометриро ёбед, агар

—суммаи се аъзоҳои аввалаашон мувофиқан ба 15 ва 35 баробар бошад;

—аъзои якуми прогрессияи арифметикӣ аз аъзои якуми прогрессияи геометрӣ 2 воҳид кам ва аъзои дуюми прогрессияи арифметикӣ ба аъзои якуми прогрессияи геометрӣ баробар бошад.

525. Чор адад прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. Агар аз онҳо мувофиқан ададҳои 2; 3; 7; ва 17-ро тарҳ кунем, он гоҳ ададҳои ҳосилшуда прогрессияи арифметикии афзуншавандаро ташкил медиҳад. Панҷ аъзои аввалаи прогрессияҳоро ёбед.

526. Нишон диҳед, ки пайдарпаии 1; 2; 6; 7-и хосиятҳои иловагии прогрессияи арифметикиро қаноаткунанда прогрессия нест.

527. Нишон диҳед, ки пайдарпаии 1; 3; 4; 12-и хосиятҳои иловагии прогрессияи геометриро қаноаткунанда, прогрессия шуда наметавонад.

Машқҳо барои такрор

528. Аз як варақ тунукаи квадратшакл қитъаи бараш 20 мм бударо буриданд. Агар масоҳати росткунҷаи ҳосилшуда ба 1000 $мм^2$ баробар бошад, он гоҳ ченакҳои аввалаи тунукаро ёбед.

529. Суммаи квадратҳои ду адади пай дар паи бутун аз дучанди адади хурдтараш 51 воҳид калон аст. Ададҳоро ёбед.

530. Исбот кунед, ки барои n-и қимматҳои бутуни ғайриманфӣ ифодаи 7^n+3n-1 ба 9 тақсим мешавад.

531. Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\frac{a^2-3a+2}{a^2+5a-6}$; б) $\frac{a^4-2a^2+2^2}{a^6+8}$; в) $\frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}$; г) $\frac{x^6-1}{x^4+x^2+1}$.

532. Бо методи фосилаҳо нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\frac{x+1}{2x-4}\ge 0$; б) $(x^2-1)(x-3)<0$.

533. Нули функсияро ёбед :

а) $f(x)=\frac{2x-8}{x^2}$; б) $f(x)=2x^2-11x+9$; в) $f(x)=\frac{2}{x-3}$.

534. Ду насос якҷоя об кашида ҳавзро дар 12 соат пур мекунанд. Насоси якум назар ба дуюм ҳавзро 10 соат зудтар пур мекунад. Насоси дуюм ҳавзро дар чанд соат пур мекунад?

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

Мафҳуми пайдарпаии ададӣ то пайдоиш ва эҷодшавии таълимот оиди функсияҳо ба вуҷуд омадааст, чунки пайдарпаиҳои зеринро аз қадим медонистанд: пайдарпаии ададҳои натуралӣ; пайдарпаии ададҳои ҷуфт; пайдарпаии ададҳои тоқ, пайдарпаии квадрати ададҳои натуралӣ; пайдарпаии ададҳои содда ва пайдарпаии ба ададҳои натуралӣ чаппа.

Ҳамаи пайдарпаиҳои номбаршудаи боло, ғайр аз панҷумаш, додашуда ҳисобида мешаванд, чунки барои ҳар кадомаш аъзои n-ум маълум аст. Дар асри III пеш аз эраи мо Эратосфен (аз Александрия) тарзи ҳосилкунии аъзои n-уми пайдарпаии ададҳои соддаро нишон додааст, ки он «галбери Эратосфен» ном гирифта аст.

Прогрессияҳо, чун мавриди хусусии пайдарпаиҳои ададӣ, дар ёддоштҳои 2000 сол пеш аз мелод қайдшуда ва то имрӯз омада расида вомехӯранд. Масъалаҳои зиёди ба прогрессия вобаста дар эҷодиёти вавилониҳо ва мисриёни қадим ҳастанд. Ба сифати мисол масъалаеро аз папируси Ахмес меорем: «Ба Шумо гуфтем: 10 чен ҷавро ба 10 шахс чунон тақсим кунед, ки фарқи чени ҷави ҳар як шахсу ҳамсояаш ба $\frac{1}{8}$ чен баробар шавад». Дар ҳалли ин ва масъалаҳои ба он монанд юнониҳои қадим аз формулаҳое истифода мебурданд, ки бо рамзҳои ҳозира намуди $a_1=\frac{S}{n}-(n-1)\frac{d}{2}$ -ро дораду ба формулаи $S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ баробарқувва аст (пайдоиши ин формула то ҳоло маълум нест. Эҳтимол он характери эмпирикиро дошта бошад). Умуман, дар масъала сухан дар бораи прогрессияи арифметикӣ, ки суммааш ба 10 ва фарқаш ба $\frac{1}{8}$ баробар аст, мераваду ёфтани a_1; a_2; ...; a_{10} талаб карда мешавад.

Масъалаи дигари папируси Ахмес ёфтани суммаи прогрессияи геометрии $1+2+2^2+...+2^9$ мебошад. Ҳал ва ҷавоби масъала дар шакли

$$S=512+(512-1)$$

омада аст, ки он аз формулаи

$$S_n=2^n+(2^n-1)$$

(пайдоиши он то ҳоло маълум нест) истифода бурдани муаллиф шаҳодат медиҳад.

Масъалаҳои ба прогрессия вобаста дар китобҳои хитоиҳои қадим ва ҳинд, ки бештар мазмуни ҳаётӣ, ба монанди тақсимоти моводи хӯрока, мерос ва ҳоказоро доштанд, низ мушоҳида карда мешаванд.

Мушоҳидаи бевоситаи вавилониҳо ба моҳ (аз саршавӣ то пуррашавиаш) ба хулосаи зерин оварда буд: баъди 5 рӯзи ибтидои саршавӣ дараҷаи равшаншавии калони моҳ аз рӯи қонуни прогрессияи геометрӣ бо махраҷи 2 ба амал меояд.

Қиссаи ҳиндуҳо оиди кашфи шохмот мисоли навбатӣ шуда метавонад. Подшохи Ҳинд Шерам ихтироъкор Сетро, ки аз фуқарои худаш буд, ба наздаш хонда майли ба ӯ мукофот доданро мекунад. Сет бошад бо мақсади мазоққунии шоҳаш аз ӯ барои хонаи якуми тахта 1 дона гандум, барои хонаи дуюмаш ду маротиба зиёд (яъне 2 дона гандум), барои хонаи сеюмаш (назар ба дуюмаш) боз ду маротиба зиёд (яъне, 4 дона гандум), барои хонаи чорумаш (назар ба пештара) ду маротиба зиёдтар (яъне 8 дона гандум) ва ғайра талаб мекунад. Баъдтар маълум мешавад, ки подшоҳ ҳеҷ гоҳ ин хоҳиши «хоксорона»-и Сетро иҷро карда наметавонад*. Ҳақиқати ҳол дар он буд, ки дар талабот сухан дар бораи суммаи шасту чор аъзои прогрессияи геометрии $1;\ 2;\ 2^2;\ 2^3;\ ...;\ 2^{63}$ меравад (шасту чор аъзои прогрессия ба шумораи 64 хоначаи тахтаи шохмот вобаста аст). Ҳисоб карда шудааст, ки миқдори донаҳои талабкардаи гандум ба 18446744073709551615 баробар аст. Вазни ин миқдор гандум аз триллион тонна зиёдтар буда онро фақат аз сайёраи гундоштан мумкин аст, ки сатҳаш аз тамоми сайёраи Замин 2000 маротиба калонтар аст (инсоният аз даврони пайдоиш то ҳоло ин миқдор гандумро ҷамъоварӣ накарда аст).

Акнун якчанд сухан дар бораи рафти тараққиёти таълимот оиди прогрессияҳо гуфта мегузарем. Маълумотҳои назариявии ба прогрессияҳо алоқадор аввалин маротиба дар ҳуҷҷатҳои ба мо расидаи Юнони қадим воҳӯрдаанд. Дар асри V пеш аз милод юнониҳо прогрессияҳо ва суммаҳои ба онҳо мувофиқи зеринро медонистанд:

$$1)\ 1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2};\quad 2)\ 2+4+6+...+2n=n\cdot(n+1);$$

$$3)\ 1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2.$$

* Ногуфта намонад, ки ин масъала дар корҳои Абурайҳони-Берунӣ ҳам ёфт шудаанд.

Архимед аввалин шуда прогрессияҳои арифметикию геометрии

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots \quad \text{ва} \quad 10;\ 10^2;\ 10^3;\ 10^4;\ 10^5;\ \ldots$$

-ро муқоиса карда, алоқаи байни онҳоро нишон медиҳад. Масалан, ӯ $10^3 \cdot 10^5 = 10^{3+5} = 10^8$-ро навишта нишон медиҳад, ки барои ҳосили зарби ду аъзои прогрессияи геометрӣ аъзоҳои мувофиқи прогрессияи арифметикиро ҷамъ намуда, суммаи ҳосилшударо ба сифати нишондиҳандаи адади 10 гирифтан кофист. Муаллифи римӣ Боэтсий (асри VI) аввалин шуда истилоҳи «прогрессия»-ро (чун пайдарпаии махсуси ададии беохир) ба илм дохил кардааст. Номҳои «арифметикӣ» ва «геометрӣ» бошад, аз назарияи таносубҳои бефосила, ки юнониҳои қадим меомӯхтанд, ба прогрессия илова карда шуданд. Дар ҳақиқат, юнониҳо баробариҳои $a_{k-1}-a_k=a_k-a_{k+1}$ ва $b_{k-1} : b_k = b_k : b_{k+1}$-ро мувофиқан таносубҳои арифметикӣ ва геометрии бефосила меноманд. Аз онҳо баробариҳои $2a_k=a_{k-1}+a_{k+1}$ ва $b_k=\sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$ ки мувофиқан хосиятҳои прогрессияҳои арифметикӣ ва геометриро ифода мекунанд, бармеоянд.*

Олими Юнони қадим Диофант (асри III) формулаи суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро исбот карда буд.

Дар «Ибтидо»-и Евклид теоремае омада аст, ки тадқиқоти он ба формулаи

$$S_n = \frac{l \cdot q - a}{q-1} \tag{1}$$

баробарқувва буда, суммаи ба мо шиноси n-аъзои прогрессияи геометриро ифода мекунад. Яке аз исботҳои Архимед, ки дар асараш «Квадратураи парабола» ҷой дода шудааст, ба ҷамбандии прогрессияи беохири геометрии

$$a+\frac{a}{4}+\frac{a}{4^2}+\frac{a}{4^3}\ldots=\frac{a}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}a \tag{2}$$

оварда мерасонад. Архимед инчунин барои ҳалли баъзе масъалаҳои механикаю геометрия (аз он ҷумла барои ёфтани масоҳат ва ҳаҷми ҷисмҳо) формулаи суммаи квадратҳои ададҳои натуралии охирнокро дар шакли

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{3}$$

ҳосил намуд**.

---

* Прогрессияи арифметикиро бо символи ÷ ва геометриро бо символи ∺ ҳам ишорат мекунанд. Ин символҳо аввалин маротиба дар корҳои риёзидони англис Барроу истифода шудаанд.

** Тадқиқотҳо нишон додаанд, ки формулаи (3)-ро пеш аз Архимед ҳам истифода мебурдаанд.

Бисёр формулаҳои ба прогрессияҳои арифметикию геометрӣ вобаста ба олимони ҳинд маълум буданд. Ариабхатта (асри V) формулаи аъзои n-ум ва суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро медонист. Магавира (асри IX) дар корҳояш формулаи (3) ва баъзе суммаҳои мураккаби охирнокро истифода мебурд. Вале коидаи ёфтани суммаи аъзоҳои прогрессияи арифметикии дилхоҳ дар «Китоби абак»-и Леонардо Пизанский* (с. 1202) дучор мешавад.

Қоидаи умумии ҷамбандии прогрессияҳои геометрии беохир камшавандаи дилхоҳро Н. Шюке дар китоби «Илм дар бораи ададҳо» (с. 1484) меорад.

Ногуфта намонад, ки риёзидонони асрҳои XV-XVII Осиёи Миёна низ мафҳуми прогрессияро медонистанд. Ин дар ҳалли масъалаи зерин баръало намоён аст: «Ҷамоае ба боғ даромаданд. Шахси аввал як анор канд, дуюм ду анор, сеюм се анор ва ҳоказо бо тафосили воҳид. Баъд маҷмӯи анорро ҷамъ карданд ва баробар тақсим намуданд. Ба ҳар кадом ҳафт анор расид. Бигӯ, он ҷамоа ва анор чанд буданд?» Агар ҳалли суханини ин масъаларо, ки муаллифонаш Қозилкузот Муҳаммад Наҷмиддин Алихон аст, ба намуди ишорати ҳарфии ҳозира нависем, он гоҳ дар ҳолати миқдори шахсони ҷамоаро бо x ва анорҳоро бо y ишорат кардан, дар охир ифодаи зерин ҳосил мешавад:

$$\left(\frac{1+x}{2}\cdot x\right):x=7.$$

Аз он $14x=x^2+x$ ва ё $x^2=13x$ пайдо мешавад. Пас $x=13$ (миқдори шахсон) ва $y=\frac{1}{2}(13+1)\cdot 13=7\cdot 13=91$ (миқдори анорҳо) аст.

Дар ҳалли ин масъала Наҷмиддин чунин ҳисоббаробариҳоро нисбати прогрессияҳои арифметикӣ истифода мебарад:

1) $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ ва аз он $\frac{S}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}$;

2) гузоштани $a_1=1$, $a_n=x$ ва $\frac{S}{n}=7$ ва ҳосил кардани муодилаи $\frac{1+x}{2}=7$-ро, ки $x=13$ решаи он аст;

3) барои ёфтани ҷамъи анорҳо формулаи $S=\frac{n(n+1)}{2}$-ро.

Ниҳоят қайд мекунем, ки формулаи ҷамъбандии прогрессияи геометрии беохири камшаванда ба П. Ферма (1601-1665) ва чанде аз риёзидонони асри XVII маълум буд.

* Л. Пизанский бештар бо тахаллусси «Фибоначчӣ» (Fibonacci - калимаи кӯтохшудаи «Filus Bonacci», яъне писари Боначчӣ ба аҳли илм маълуму маъруф аст.

Машқҳои иловагӣ ба боби III

Ба параграфи 7

535. Шаш аъзои аввалаи пайдарпаиро нависед, агар аъзои умумиаш дар намуди зерин дода шуда бошад.

а) $a_n=n+7$; д) $a_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-3}$; п) $a_n=\frac{1}{n^3}$;

б) $a_n=2^n+1$; е) $a_n=-\left(-\frac{1}{n}\right)^n$; к) $a_n=(n-2)^2$;

в) $a_n=\frac{1}{2^n}-1$; ж) $a_n=\frac{n^2\cdot(n+1)}{2}$; л) $a_n=(-1)^n\cdot 4^n$;

г) $a_n=\frac{5}{n}$; з) $a_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$; м) $a_n=-n^3+1$.

536. Аъзои умумии пайдарпаии ададӣ бо формулаи $a_n=2n^3+3$ ифода ёфта аст. Оё ададҳои −7; 5; 19; 21; 57; 131; 178; 217; 305; 297; 401 аъзои пайдарпай шуда метавонанд? Агар тавонанд, он гоҳ рақами тартибиашро муайян кунед.

537. Масъалаи 536-ро барои $a_n=2n^2-3$ ва ададҳои 15; 23; 180; 197; 335; 447; 609; 781 ҳал кунед.

538. Оё ададҳои 1,3 ва −3,3 аъзои прогрессияи арифметикии

20,7; 18,3; ...

мебошанд?

539. Формулаи аъзои n-уми пайдарпаиро нависед, агар:

а) 1; 4,5; 8; 11,5; ... б) 0; 1; 3; 7; 15; 31; ...

бошад.

540. Аз пайдарпаиҳои зерин прогрессияҳои арифметикӣ ташкилдиҳандаашро ҷудо карда, фарқашро ёбед:

а) 47; 44; 41; ... з) 2; 6; 10; 14; ...
б) 7,5; 6; 4,5; ... и) 4; 11; 18; 25;
в) −10; −7; −4; ... к) 3; 6; 12; 24; ...
г) 9,6; 4,6; −0,4; ... л) 10; 8; 6; 4; ...
д) −1; −1,1; −1,2; ... м) 11; 17; 27; 31; ...
е) 1,5; 1,7; 1,8; 1,9; ... н) 4,1; 9; 10,5; ...
ж) 3; 7; 18; 19; ... о) 3,3; 6,6; 9,9; ...

541. Аъзои якуми прогрессияи арифметикиро ёбед, агар $a_{13}=113$ ва $d=9$ бошад.

541. Аз рӯи прогрессияҳои арифметикии додашуда a_n-ро ёбед;

а) 4; 8; ... $n=8$; в) a; 4a; ... $n=81$;
б) 7; 11; ... $n=31$; г) 0,009; 0,012; ... $n=20$.

543. Аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:

а) $a_{13}=54$, $a_{19}=84$; г) $b_{10}=15$, $b_{13}=-21$;
б) $a_7=41$, $a_{11}=53$; д) $c_8=29$, $c_{15}=57$;
в) $a_1=9$, $a_{14}=-3$; е) $x_2=-8$, $x_5=-29$

бошад.

544. Аъзои охирини прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
а) $a_1=7$, $d=5$, $n=31$; б) $a_1=0{,}8$, $d=-0{,}4$, $n=301$;
в) $a_1=4{,}8$, $d=-1{,}2$, $n=91$
бошад.

545. Фарқи прогрессияи арифметикии (a_n)-ро ёбед, агар:
а) $a_1=80$, $a_n=-4$, $n=21$ ва б) $a_1=1$, $a_{19}=42$ бошад.

546. Шумораи аъзоҳои прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
а) $a_n=200$, $d=5$ ва $a_1=10$ бошад.

547. Суммаи n-аъзои прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
а) $a_1=-6$, $a_n=106$, $n=18$; б) $a_1=-3$, $a_n=180$, $n=12$ бошад.

548. Аъзои якум ва суммаи n-аъзои аввалаи прогрессияи арифметикиро ёбед, агар:
а) $d=3$, $a_n=200$, $n=20$; б) $d=-0{,}25$, $a_n=32$, $n=50$
бошад.

549. Муодиларо ҳал кунед:
а) $1+5+9+...+x=861$; б) $1+7+13+...+x=280$.

550. Прогрессияи арифметикии (a_n)-ро ёбед, агар:
а) $\begin{cases} a_2-a_3=10-a_5, \\ a_1+a_6=17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_1+a_4=-5, \\ a_2+a_5=-11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a_1+a_5=24, \\ a_2\cdot a_3=60; \end{cases}$
бошад.

551. Суммаи прогрессияи арифметикӣ, ки аз 30 аъзо иборат аст, ба 3645 ва аъзои якумаш ба 20 баробар аст. Аъзои ҳафтумашро ёбед.

552. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи арифметикӣ ба 66 ва ҳосили зарби аъзои дуюм бар сеюмаш ба 528 баробар аст. Суммаи 40 аъзои аввалаи прогрессияро ёбед.

553. Маълум, ки дар прогрессияи арифметикии (a_n) $a_4=9$ ва $a_9=-6$ аст. Чанд аъзои онро гирифтан зарур аст, то ки сумаашон 54 шавад?

554. Суммаи аъзои якуму панҷуми прогрессияи арифметикии афзуншаванда ба 14 ва ҳосили зарби аъзои дуюм бо чорумаш ба 45 баробар аст. Суммаи чанд аъзои ин прогрессия ба 24 баробар аст?

555. Пайдарпаии (a_n) дода шудааст. Агар
а) $a_n=2n-7$; б) $a_n=8n$; в) $a_n=-n+5$
бошад, формулаи суммаи n-аъзои аввалаи пайдарпаиро нависед.

556. Прогрессияи арифметикӣ дода шудааст. Агар:
а) $S_{15}=225$, $S_{40}=1680$; б) $S_{13}=-52$, $S_{21}=-168$
бошад, S_{45}-уми онро ёбед.

557. Дар байни ададҳои 17 ва 32 панҷ ададро чунон нависед, ки онҳо дар якҷоягӣ прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд. Суммаашонро ёбед.

558. Дар прогрессияи арифметикӣ, ки аз чор аъзо иборат аст, суммаи се аъзои аввалааш ба −21 ва суммаи се аъзои охиринаш ба −6 баробар аст. Суммаи ин прогрессияро ёбед.

559. Пайдарпаии (a_n) дода шудааст. Маълум, ки суммаи n-аъзои аввалаи он бо формулаи $S_n = \frac{1}{2}(3n^2 - 19n)$ ҳисоб мешавад. Магар ин пайдарпаӣ прогрессияи арифметикӣ аст?

560. Чанд аъзои прогрессияи арифметикии 5; 9; 13; 17; ...-ро гирифтан зарур аст, то сумаашон ба 11 475 баробар шавад?

Ба параграфи 8

561. Нишон диҳед, ки пайдарпаии ададҳои ҳақиқии аъзоҳояш якхела ҳам прогрессияи арифметикӣ ва ҳам прогрессияи геометриро ташкил медиҳад.

562. Кадоме аз пайдарпаиҳои зерин прогрессияи геометрӣ мешаванд:

а) 4; 12; 18; 28; ... в) 1,5; 3; 6; 12; 24; ...

б) −3 ; 2; 0; 5; 17,1; ... г) 6; 3; 1,5; 0,75; ...?

563. Аъзои якуми прогрессияи геометриро ёбед, агар :

а) $b_6=486$, $q=3$; д) $b_9=768$, $q=2$;

б) $b_7=192$, $q=2$; е) $b_5=170{,}1$, $q=3$;

в) $b_6=-\frac{4}{27}$, $q=-\frac{1}{3}$; ж) $b_6=\frac{243}{64}$, $q=1{,}5$

г) $b_8=\frac{2187}{128}$, $q=\frac{3}{2}$; з) $b_5=512$, $q=2$

бошад.

564. Махраҷи прогрессияи геометриро ёбед, агар:

а) $b_1=1{,}5$ ва $b_4=96$; б) $b_1=1$, $b_6=32$;

в) $b_1+b_4=14$, $b_2+b_5=42$

бошад.

565. Аъзои якум ва махраҷи прогрессияи (b_n) ёфта шавад, агар:

а) $\begin{cases} b_4 - b_2 = 18, \\ b_2 - b_3 = 36; \end{cases}$ в) $\begin{cases} b_1 + b_3 = 15, \\ b_4 - b_2 = 18; \end{cases}$ д) $\begin{cases} b_1 + b_5 = 17, \\ b_4 + b_8 = 136. \end{cases}$

б) $\begin{cases} b_1 - b_3 + 25b_5 = -150, \\ b_1 + b_2 = -180; \end{cases}$ г) $\begin{cases} b_2 + b_4 = 56, \\ b_2 + b_3 = 24; \end{cases}$

566. Ададеро ёбед, ки дар байни ададҳои 2,1 ва 18,9 воқеъ бошаду дар якҷоягӣ бо онҳо прогрессияи геометриро ташкил диҳад.

567. Ададеро ёбед, ки дар байни ададҳои 3 ва 243 воқеъ бошаду дар якҷоягӣ бо онҳо прогрессияи геометриро ташкил диҳад.

568. Дар байни ададҳои 1 ва 16 се ададро ҳамин хел гузоред, ки дар якҷоягӣ бо ададҳои додашуда прогрессияи геометриро ташкил диҳад.

569. Прогрессияи геометрии (b_n)-ро ёбед, агар:

а) $\begin{cases} b_2 - b_1 = 20, \\ b_4 - b_3 = 140; \end{cases}$ б) $\begin{cases} b_5 + b_1 = -561, \\ b_6 - b_4 = 792; \end{cases}$ в) $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21, \\ b_4 + b_5 + b_6 = 168 \end{cases}$

бошад.

570. Аъзои якуми прогрессияи геометрии камшавандаро ёбед, агар $S_n = 4$ ва $q = \frac{1}{2}$ бошад.

571. Суммаи аъзоҳои прогрессияи геометрии камшаванда ба 9 ва суммаи квадрати аъзоёни он ба 40,5 баробар аст. Аъзои якум ва махраҷи прогрессияро ёбед.

572. Суммаи беохирро ҳисоб кунед:

а) $2+1+\frac{1}{2}+...;$ б) $32+8+2+....$

573. Барои прогрессияҳои

а) 3; 6; 12; 24; ...; б) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ...; $\frac{1}{2^{n-1}}$.

S_{10} ва S_n ёфта шавад.

574. Дар прогрессияи геометрии беохир камшаванда $b_2=21$ ва $S=84$ аст. b_4 ёфта шавад.

575. Дар прогрессияи геометрии аъзоҳояш мусбат $b_1=2$ ва $b_2+b_3=1,5$ аст. S_4 ёфта шавад.

576. Суммаи шаш аъзои аввалаи прогрессияи геометриро ёбед, агар $b_1=4$ ва $q=\frac{1}{2}$ бошад.

577. Суммаи даҳ аъзои аввалаи прогрессияи геометрии 2; 8; 32; 128; ...-ро ёбед.

578. Суммаи шаш аъзои аввалаи прогрессияи геометриро ёбед, агар аъзои шашумаш ба 2048 ва махраҷаш ба 4 баробар бошад.

579. Касрҳои даврии беохири зеринро дар шакли касри оддӣ нависед:

а) 0,58 (3); в) 1,3 (32); д) 0, (7);

б) 3,2 (54); г) 12,08 (3); е) 0,2 (31).

580. Дар дохили секунҷаи баробартараф бо тарафи a секунҷаи нав кашида шудааст, ки қуллаҳояш дар миёнаҷоҳои тарафҳои секунҷаи аввала ҷой доранд. Бо ҳамин тарз дар дохили секунҷаи дуюм секунҷаи баробартарафи дигар ҷойгир аст ва ҳоказо. Исбот кунед, ки пайдарпаии масоҳатҳои секунҷаҳо прогрессияи геометриро ташкил медиҳад. Суммаи онро ёбед.

581. Чор адади мусбат прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Ҳосили зарби ададҳои якум ва чорум ба решаи калони муодилаи $x^2-10000=0$ ва суммаи квадратҳои ададҳои дуюму сеюм ба 250 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

582. Чор адади прогрессияи геометрӣ ташкилкунандаро ёбед, ки дар он суммаи аъзоҳои канорӣ ба 27 ва ҳосили зарби аъзоҳои мобайнӣ ба 72 баробар бошанд.

*583. Прогрессияи геометриеро бо махраҷи манфӣ ёбед, ки аъзои сеюмаш ба −1, суммаи се аъзои аввалааш ба −73 ва b_1, b_2, b_4, b_5 вобастагии $b_4+b_5=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}$-ро қаноат намоянд.

584. Аъзои сеюми прогрессияи геометрии беохирро ёбед, агар аъзои дуюмаш ба 72 ва суммааш ба 378 баробар бошад.

Ба параграфи 9

585. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1=5$ ва $a_2=7$ аст. Чунин прогрессияи геометриеро ёбед, ки махраҷаш аз фарқи прогрессияи арифметикӣ панҷ воҳид зиёд буда, суммаи чор аъзои аввалааш ба 400 баробар бошад.

586. Дар прогрессияи арифметикии мусбати (a_n) ва геометрии мусбати (b_n) аъзоҳои дуюм ба 4 ва аъзоҳои якум низ ба ҳам баробаранд. Прогрессияҳоро нависед, агар аъзои сеюми прогрессияи арифметикӣ аз аъзои сеюми прогрессияи геометрӣ 9 воҳид кам бошад.

*587. Дар прогрессияи геометрӣ аъзои якум, сеюм ва панҷумаш мувофиқан ба аъзои якум, чорум ва шонздаҳуми ягон прогрессияи арифметикӣ баробар аст. Аъзои чоруми прогрессияи арифметикиро ёбед, агар аъзои якуми он ба 5 баробар бошад.

588. Се адад, ки суммаашон ба 28 баробар аст, прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Агар ба адади якум 3, ба дуюм 1 илова карда аз сеюмаш 5-ро кам кунем, он гоҳ ададҳои ҳосил шуда прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд. Ин ададҳоро ёбед.

589. Чор ададеро ёбед, ки сетои аввалааш прогрессияи геометрӣ ва сетои охиринаш прогрессияи арифметикиро ташкил диҳад. Маълум аст, ки суммаи аъзоҳои канориаш ба 14 ва суммаи аъзоҳои мобайниаш ба 12 баробаранд.

590. Масъалаи 589-ро ҳангоми суммаи аъзоҳои канорӣ ба 21 ва мобайнӣ ба 18 баробар будан, ҳал намоед.

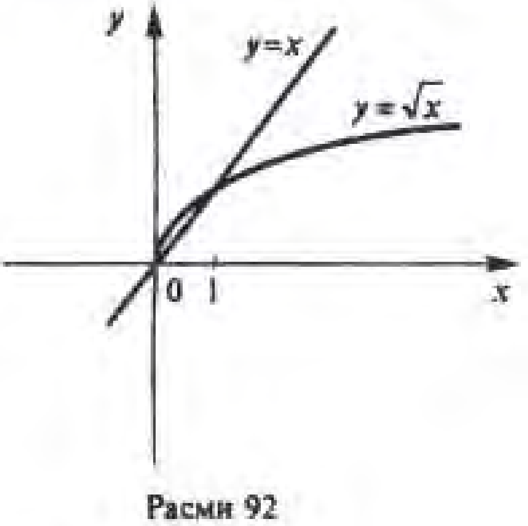
591. Суммаи се аъзои аввалаи прогрессияи афзуншавандаи арифметикӣ ба 21 баробар аст. Агар аз аъзоҳои он мувофиқаи ададҳои 2,3 ва 2-ро кам кунем, он гоҳ се аъзои аввалаи прогрессияи геометриро ҳосил мекунем. Прогрессияҳоро ёбед.

591. Чор адад прогрессияи камшавандаи геометриро ташкил медиҳад. Агар аз ду адади аввала мувофиқан ададҳои 13 ва 4-ро кам карда, ба ададҳои сеюму чорумаш мувофиқаи 9 ва 30-ро илова кунем, он гоҳ ададҳои нави ҳосилшуда прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад. Прогрессияҳоро ёбед.

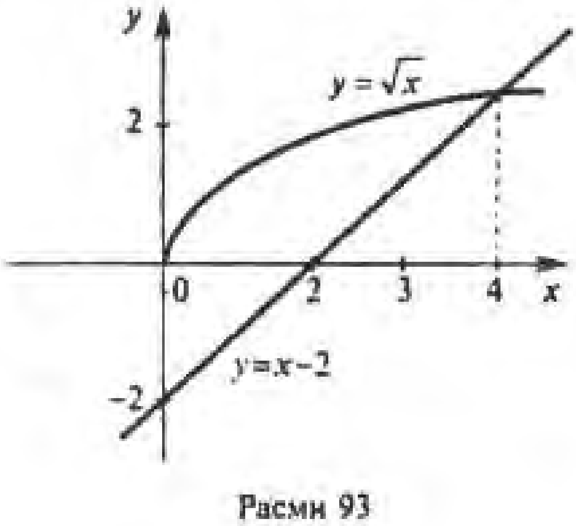
ҶАВОБҲО

356. а) $a_5=6$; $a_6=12$; $a_7=14$; б) $a_2=72$; $a_3=9$; $a_6=\frac{9}{2}$; $a_7=\frac{9}{4}$. **357.** а) 3; 9; б) 27; 81; в) 243; 729; 2187; г) 19683. **358.** а) 4; 8; 12; 16; 20; 24; б) $a_9=36$; $a_{101}=404$; в) $a_{2k}=8k$. **359.** а) 2; –1; 2; –1; 2; б) $c_7=c_{21}=c_{103}=c_{2k-1}=2$; $c_{12}=c_{314}=c_{2k}=-1$. **360.** а) 2; 8; 18; 32; 50; 72; 98; 128; б) $x_{18}=648$; $x_{23}=1058$; $x_{41}=3362$; $x_{2n}=8_n^2$. **361.** а) $a_n=n$; б) $a_n=\frac{1}{2^n}$; в) $a_n=\frac{n+1}{n}$; г) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. **362.** а) $a_n=\frac{2n}{2n+1}$; б) $a_n=\frac{n}{n+1}$. **363.** а) 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; б) 0; –3; –8; в) 4; 4; 4; 4; г) –12; 12; –12; 12; –12; 12; –12; 12; –12; 12; д) 3; 8; 15; 24; е) 0; –1; 0; 3; 8. **364.** а) 2; 8; 18; 32; 50; 72; 98; 128; б) 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; в) $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{13}{8}$; г) –3; –1; 1; 3; 5; 7; 9; д) 1; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{7}{4}$; е) $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{2}$; 3; 6; 12; 24; 48; ж) 4; 13; 28; 49; 76; 109; 148; з) –3; 3; –3; 3; –3; 3; –3; и) 8; 32; 128; 512; 2048; 8192. **365.** $b_4=72$; $b_{13}=2223$; $b_{61}=227103$. **366.** а) c_2=20; c_3=28; c_4=36; c_5=44; c_6=52; б) c_2=100; c_3=25; $c_4=\frac{25}{4}$; $c_5=\frac{25}{16}$; $c_6=\frac{25}{64}$. **367.** а) 19; 20; 21; 22; 23; 24; б) 1000; 10; 10^{-1}; 10^{-3}; 10^{-5}; 10^{-7}; в) 160; –80; 40; –20; 10; –5; г) 3; $\frac{2}{3}$; 3; $\frac{2}{3}$; 3; $\frac{2}{3}$; д) 3; 9; 21; 45; 93; 189; з) 2; 7; 342; 40001687. **368.** а) 15; 20; 25; 30; 35; 40; б) 25; 122; 697; 3482; 17407; 87032; в) 4; 5; 7; 11; 19; 35; г) 6; $\frac{1}{3}$; 6; $\frac{1}{3}$; 6; $\frac{1}{3}$. **369.** а) 3; 27; 19683. **370.** 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; …; $\frac{1}{2^{n-1}}$. **371.** –7; 7; –7; … . **372.** а) $2+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}-1$; в) $(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{2}$; г) $\sqrt{5}-2$. **373.** а) 64; б) –96; в) 64; г) 343; д) 81; е) 361. **374.** а) 5; б) 6; в) 30. **375.** а) $x_1=-9$; $x_2=1$; б) $x=\frac{1}{2}$. **376.** 25 км/соат. **377.** а) (–2; 9); б) (1; 3). **378.** а) –3; б) вуҷуд надорад, в) –7; г) $-\frac{193}{7}$; д) –13,5. **379.** 18 ва 6. **380.** а) Не; б) ха; в) ха; г) не. **381.** а) 2; 3; 4; 5; …; $(n+1)$; …; б) $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; $\frac{5}{2}$; …; в) –7; –4; –1; 2; 5; …; г) 5; 7; 9; 11; 13; …; д) 2,1; 2,3; 2,5; 2,7; …; е) –1; –1; –1; –1; …; ж) 0,51; 0,6; 0,69; 0,78; …; з) 2,1; 2; 1,9; 1,8; …; и) 3; 3,5; 4; 4,5; 5; …; к) 1; 10; 19; 28; 37; … . **382.** а) 2; б) 1; в) –1; г) 4; д) 10; е) –9; ж) 7; з) 0; и) 2; к) 6. **383.** 3 соат. **384.** а) $x-1$ мешавад, агар $x>0$ ва $x\neq1$ бошад; б) $x+1$ мешавад, агар $x\neq0$ ва $x\neq1$ бошад. **385.** а) 0; –1; б) $\frac{1}{4}(\sqrt{33}-1)$. **387.** $\sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$ ва $\sqrt[4]{3a^2}$. **388.** C; D; E; F. **389.** а) $x\neq4$; б) $\forall x\in R$. **390.** а) $a_n=\frac{3n}{n+1}$; б) $a_n=(-1)^n6$. **391.** а) a_1+16d; б) a_1+125d; в) a_1+280d; г) $a_1+(k+1)d$; д) $a_1+(k+14)d$; е) a_1+2kd. **392.** а) b_8=40; б) b_{21}=–14,2; в) b_{111}=74; г) b_{316}=–21; д) b_{31}=59; е) c_{18}=10,4; ж) c_{23}=55,6; з) c_{57}=–177; и) c_{19}=31; к) c_7=65.

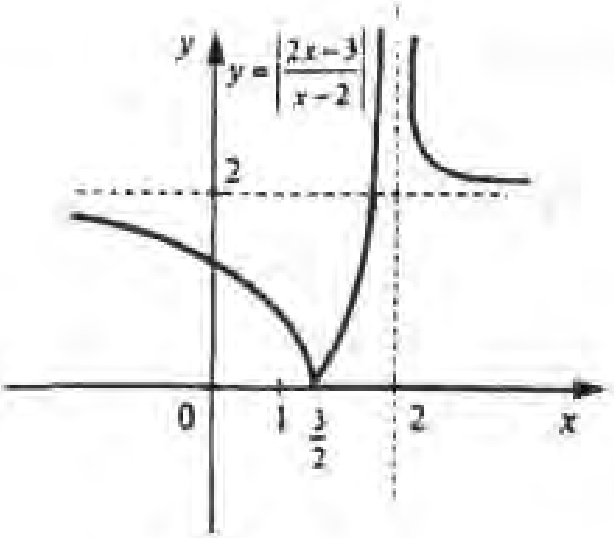
393. а) $a_{10}=-\frac{70}{3}$; $a_{21}=\frac{158}{3}$; $a_n=\frac{2}{3}-\frac{8}{3}(n-1)$; б) $a_{10}=-6,7$; $a_{21}=-17,7$; $a_n=3,3-n$; в) $a_{10}=210$; $a_{21}=485$; $a_n=25n-40$. **394**. а) $a_8=5,5$; $a_{23}=35,5$; $a_n=2n-10,5$; б) $a_8=-11$; $a_{23}=-56$; $a_n=13-3n$; в) $a_8=-160$; $a_{23}=-535$; $a_n=-25n+40$. **395**. 360 км/соат. **396**. 2,6 км/соат. **397**. 124,8 км/соат. **398**. $A_{15}B_{15}=7,5$ см; $A_{100}B_{100}=50$ см; $A_{131}B_{131}=65,5$ см. *Нишондод*. Аз рӯи хосияти хати миёнаи секунҷа ва трапетсия истифода бурда прогрессияи арифметикии аъзои якум ва фаркаш ба 0,5 см баробарро хосил кардан мумкин аст. **399**. а) 12; б) 100; в) 141; г) 46. **400**. а) 3; б) −3,5; в) −5; г) 1,5. **401**. 13,5; 12; 10,5; 9; 7,5; 6. **402**. −1; −4; −7; −10; −13; −16; −19; −22; −25. **403**. а) $c_1=21$, $d=1,5$; б) $c_1=38$, $d=-2$; в) $c_1=-100$, $d=6,2$; г) $c_1=5$, $d=5$; д) $c_1=4$, $d=2$; е) $c_1=-3$, $d=-15$. **404**. а) $a_{11}=73$; б) $a_7=-16$. **405**. а) Ҳа; б) не. **406**. Сездах аъзои аввали прогрессия ададхои манфӣ мебошанд. $a_{14}=0$, $a_{15}=1,6>0$; ... . **407**. а) $a_n=7n-4$; б) $a_n=3n+5$. **408**. а) Ҳа; $a_1=11$, $d=8$; б) не; в) ҳа; $a_1=15$, $d=1$; г) ҳа; $a_1=35$, $d=31$; д) ҳа; $a_1=-1$, $d=-2,5$; е) ҳа; $a_1=-9$, $d=-9$; ж) ҳа; $a_1=-7$, $d=-14$; з) не; и) ҳа; $a_1=2$; $d=5$; к) ҳа; $a_1=15$, $d=11$; л) не; м) ҳа; $a_1=8$, $d=0$. **409**. 25. *Нишондод*. Бо x раками якуми ададро ишорат мекунем, он гох $7-x$ раками дуюми адад мешавад $(x\le 7)$. Мувофики шарт $\overline{(x+2)(7-x)}=2\cdot\overline{x(7-x)}-3$ ё $10(x+2)+(7-x)=2[10x+(7-x)]-3$ мешавад, ки аз он x=2-ро ёфтан мумкин аст. **410**. а) $\frac{14}{51}$; б) $\left(1-\frac{2}{m}\right)^2$. **411**. а) $-\infty<x<8$; б) $-\infty<x<10,5$; в) $-1\le x\le 1$; г) $x\ge 7$. **412**. а) $x_1=0$, $x_2=1$ (расми 92); б) x=4 (расми 93). **413**. а) $\frac{a-4}{x}$; б) $3x$; в) $-\frac{3}{7}$. **414**. 1. **415**. а) Давраи радиусаш ба 6 ва марказаш дар нуктаи $(1;-3)$ чойгирифта; б) хати рости тири Ox-ро дар нуктаи (3; 0) ва Oy-ро дар нуктаи (0; 2) буранда. **416**. 0; 7; 26; 255; ... . **417**. $S_{15}=-210$. **418**. а) $S_{30}=5700$; $S_{100}=21400$; $S_n=2n\cdot(n+7)$; б) $S_{30}=3200$; $S_{100}=11400$; $S_n=n\cdot(n+14)$; в) $S_{30}=875$; $S_{100}=4250$; $S_n=0,5n\cdot(n-15)$;



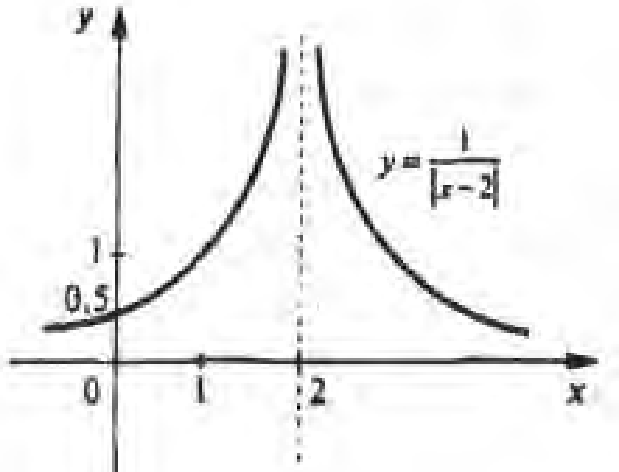
Расми 92



Расми 93



Расми 94



Расми 95

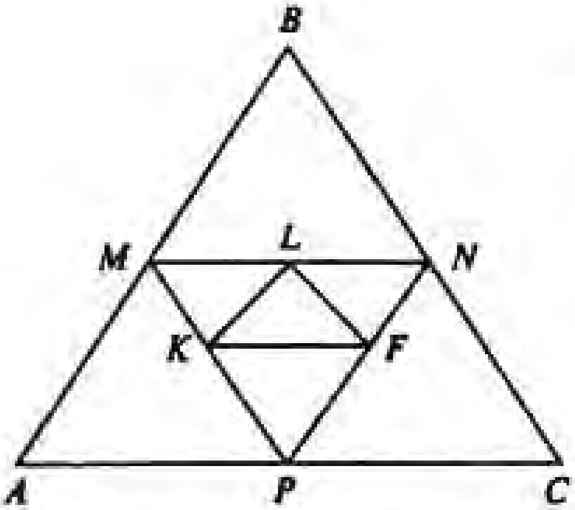
г) $S_{30}=-3575$; $S_{100}=-14650$; $S_n=0{,}5n\cdot(7-3n)$. **419**. а) $(n+1)(n+2)$; б) $(n+1)^2$. **420**. а) 31375; б) 13130; в) 106533; г) 5580; д) 2484; е) 1210; ж) 6545. **421**. *Нишондод*. Мувофики шарт $S_n=3n^2$ аст, ки аз он $a_1=S_1=3$ ва $a_1+a_2=S_2=12$ мебарояд. Аз ин баробариҳо $a_1=3$ ва $d=6$-ро хосил кардан мумкин аст. Ҷавоб: 3; 9; 15; 21; 27; ... . **422**. а) 1192; б) 275; в) 55; г) 199,5. **423**. 651,2 м. **424**. *Нишондод*. Аз натиҷаи масъалаи 7-и дар саҳ. 140 ҳалгашта ($v_0=0, a=g=9{,}8$ м/сон²) истифода баред. Ҷавоб: а) 98 м; б) 490 м. **425**. 10 шоҳмотбоз. **426**. а) 23 қатор; б) 3240 саккo. **427**. Ҳа; $S_n=n\cdot\left[a^2+ax\cdot(3-n)+x^2\right]$. **428**. а) $1\le x<4$; б) $x\ne-2$; в) $x=1$; г) $-4<x<4$, $4<x\le5$; д) $\forall x\in R$; е) $x\le3, x>4$. **429**. 54. **430**. $x^2-px+s=0$. **431**. в) 19200. **432**. а) Расми 94; б) расми 95. **433**. а), в) – афзуншаванда; б), г) – камшаванда. **434**. *Нишондод*. 5-ро аз кавс бароварда ба даруни кавс формулаҳои зарби мухтасарро татбиқ намоед. **435**. а) 2; 4; 8; 16; 32; 64; б) −18; −9; $-\frac{9}{2}$; $-\frac{9}{4}$; $-\frac{9}{16}$; в) −24; 60; −150; 375; −937,5; 2343; 75; г) $\frac{2}{5}$; $\frac{6\sqrt{2}}{5}$; $\frac{36}{5}$; $\frac{108\sqrt{2}}{5}$; $\frac{648}{5}$; $\frac{1944\sqrt{2}}{5}$; д) 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{8}{27}$; $\frac{16}{81}$; $\frac{32}{243}$; е) −4; −36; −324; −2916; −26144; −235296; ж) −5; 10; −20; 40; −80; 160; з) $-\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{12}$; $-\frac{1}{36}$; $-\frac{1}{108}$; $-\frac{1}{324}$. **436**. б) $-\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10^2}$; $-\frac{1}{10^3}$; ...; г) 11; −33; 99; −297; ...; е) 13; −26; 52; −104; ...; з) 7; 35; 175; 875; ...; и) 4; 0,8; 0,16; 0,032; ...; к) 8; −32; 128; ... . **437**. а) −4; −12; −36; −108; ...; в) 1; 3; 9; 27; 81; ...; д) 20; 60; 180; ...; ж) 0,02; 0,06; 0,18; 0,54; ...; и) 19; 57; 171; 513; ...; м) −10; −30; −90; ... . **438**. а) −52; б) 100; в) 3; г) 423. **439**. а) 3844; б) 7; в) 32; г) 13. **441**. а) б) в) д) з) – охирнок; г) е) ж) – беохир **442**. а) 6 ва $-\frac{3}{4}$; б) 1 ва 2401; в) $\frac{1}{100}$ ва 100; г) −1 ва 243. **443**. а) b_4 ва b_{10}; б) b_4; в) не. **444**. 18 воҳ. кв. **445**. $d^2=\frac{1400}{11}$. Муаллиф ба ҷои адади π адади $\frac{22}{7}$ (яъне қимати Архимедро) гирифта аст

$d=\frac{20}{\sqrt{\pi}}$. **446.** *Нишондод.* Бигузор онҳо намуди $\frac{a}{b}$ ва $\frac{b}{a}$ -ро дошта бошанд. Он гоҳ дар асоси нобаробарии $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ҳосил кардан мумкин аст: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq$ $\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2\cdot\sqrt{1}=2\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2(a>0, b>0)$. **447.** а) $x^2-5x+6=0$; б) $x^2-4x+1=0$; в) $4x^2-4x+1=0$. **448.** а) 1,632 т; б) 4,5 т; в) ≈155,5 га; г) 64,35. **450.** а) $-\frac{5}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{2}$; г) ±2; д) $\pm\frac{3}{2}$; е) график тири Ox-ро намебурад. **451.** а) $(x-4)^2-28$; б) $2(x-1)^2-11$. **452.** $\frac{3x-2}{x-1}$. **453.** а) $c_{16}=c_1\cdot q^{15}$; б) $c_{30}=c_1\cdot q^{29}$; в) $c_{126}=c_1\cdot q^{125}$; г) $c_k=c_1\cdot q^{k-1}$; д) $c_{k+8}=c_1\cdot q^{k+7}$; е) $c_{2k}=c_1\cdot q^{2k-1}$; ж) $3c_1\cdot q^{40}$; з) $3c_1\cdot q^{80}$; и) $c_1^2\cdot q^{20}$; к) $c_1^2\cdot q^{k+5}$; л) $c_1+\cdot q^7$; м) $c_1\cdot q^6\left(1+q^{14}\right)$. **454.** а) $\frac{5}{4}$; б) $-\frac{10}{9}$; в) $32\sqrt{2}$; г) 1,6; д) 4352; е) 97656250; ж) −1000; з) $\frac{81}{16}$; и) $\frac{8}{27}$; к) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$. **455.** а) $b_7=1458$, $b_n=(-2)\cdot(-3)^{n-1}$; г) $b_7=-12$, $b_n=-12\cdot(-1)^{n-1}$; е) $b_7=\frac{1}{48828125}$, $b_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-3}$; з) $b_7=729a^7$, $a_n=3^{n-1}\cdot a^n$. **456.** а) $\frac{1}{81}$; б) $\frac{56}{125}$; в) $\frac{2}{729}$; г) $-\frac{1}{128}$; д) $\frac{2}{729}$; з) 1. **457.** а) 3 ё −3; б) 0,6 ё −0,6; в) −2; г) 4. **458.** а) $\frac{1}{25}$; б) −162; в) −0,001; ё 0,001; г) 78732; д) 0,00001536. **459.** 18; 54; 162; 486. **460.** 4; 16; 64. **461.** $x_2=\frac{1}{4}$; $x_3=\frac{1}{8}$; $x_4=\frac{1}{16}$; $x_5=\frac{1}{32}$. **462.** а) 3; ±2; б) 3; 2 ё 24; $\frac{1}{2}$. **463.** ≈2025 сомонниву 92 дирам. **464.** а) 9 ва −11; б) ±5 в) 1 ва 16. **466.** а) a^3+b^3; б) $\frac{c}{2n}$; в) $\frac{1}{m-n}$. **467.** 200 рӯз. **468.** Намунаи матн. Дарозии росткунҷа аз бараш дида 16 м дарозтар буда масоҳати ба 7680 м² баробарро дорад. Бари росткунҷаро ёбед. **469.** (0; 8). **470.** а). г) – ба боло; б). в) – ба поён. **471.** *Нишондод.* Маълум, ки ҳангоми $a\neq 0$ будан $a^2-a+1=0$ -ро ба намуди $a+\frac{1}{a}=1$ овардан мумкин аст. Азбаски $a^3+1=(a+1)\left(a^2-a+1\right)=0$ мешавад, пас $a^3=-1$. Аз ин ҷо, $a^{2000}+\frac{1}{a^{2000}}=\left(a^3\right)^{666}\cdot a^2+\frac{1}{\left(a^3\right)^{666}\cdot a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=-1$. Ҷавоб: −1. **473.** а) −10,5; б) 292,5; в) $-\frac{20}{27}$; г) −170; д) −240; е) $\frac{15}{8}$; з) 60. **474.** а) $\frac{63}{2}$; б) 624,992; в) 6560; г) −15; д) 13,75; е) 10,18875. **475.** а) $13{,}8\cdot\left(3^n-1\right)$; б) $8\cdot\left(2^n-1\right)$; г) $\frac{2}{15}\cdot\left(4^n-1\right)$; е) $3\cdot\left(3^n-1\right)$. **476.** а) $\left(3^{2n}-1\right):8$; в) $S_n=\frac{1}{3}\left[(-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}-2\right]$; д) $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$; ж) $\frac{x^4\cdot\left(x^{-2n}-1\right)}{1-x^2}$; и) $-\frac{1}{3}\left[(-2)^n-1\right]$; д) $-0{,}3\left[(-3)^n-1\right]$. **477.** а) 133; б) $25\frac{34}{81}$;

в) $\frac{400}{3}$; г) $-274,5$. **478**. а) 62; б) 20. **479**. а) $q=3$; $S_7=2186$; б) $q=-\frac{1}{2}$; $S_6=50,4$. **480**. а) $a_1=\frac{1}{3}$; $S_6=6\frac{89}{96}$; б) $a_1=3$; $S_8=65535$. **481**. а) $a_1=3$; $a_9=768$; б) $a_1=1$; $a_{12}=2048$. **482**. $S_{10}=59048$. **483**. $S_7=5461$. **484**. 13. **485**. $b_2=8$. **486**. 2186. **487**. $S_6=1260$. **488**. 26 детал; 38 детал ва 40 детал. **489**. а) $2x^3-14x^2-6x+7$; б) $20b^4-12b^3+8b^2+2$; в) $1,5y^3-3,6y^2+9y-3$; г) $-10y+5$; д) $2x+1$; е) $-7b^2+4c^2$. **490**. а) 3721; б) 998001; в) 98,01; г) 39601; д) 492804; е) 104,4. **492**. Ҳангоми $a=3$, $b\neq5$ будан система ҳамҷоя нест, вале ҳангоми $a=3$ ва $b=5$ будан дорои ҳалли бешумор мешавад. **493**. $x\in(1;+\infty)$. **494**. а) $15\cdot2^n$; б) $15\cdot4^{n-1}$; в) $5^n(5^n+1)$. **495**. а) $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$ - афзуншаванда. $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$ - камшаванда; б) $(-\infty;-1)$ - камшаванда. $(-1;+\infty)$ - афзуншаванда. **496**. $x_{max}=1$, $y_{max}=-4$. **497**. 50 км/соат. **498**. а) $\frac{81}{2}$; б) $-6,4$; в) 5; г) $-\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$; д) $\frac{16}{2\sqrt{2}-1}$; е) $\frac{15\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$; ж) $4+3\sqrt{2}$; з) $\frac{3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-1}$; и) $\frac{1}{2}$; к) $\frac{64}{3}$; л) -9. **499**. а) $\frac{96}{5}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $\frac{1}{a(1-a)}$; г) $-\frac{1}{a(a+1)}$. **500**. а) $\frac{9}{5}$; б) $-\frac{1}{a^2(1+a^2)}$; в) $\frac{4}{7}$; г) $\frac{25}{4}$; д) 36; е) $\frac{11}{12}$. **501**. $S=6$ ё $S=12\cdot(3+2\sqrt{2})$.

502. $b_1=14$, $q=\frac{3}{4}$. **504**. $4R\pi$ см ва $\frac{4\pi R^2}{3}$ см^2. *Нишондод*. Вобастагии байни радиуси давраи дарункашидашуда ва берункашидашударо бо тарафи секунҷаи мунтазам $(a=\sqrt{3}R,\ a=2\sqrt{3}r,\ R=2r)$ ба ҳисоб гирифта барои дарозии давраҳо ва масоҳати доираҳо прогрессияҳои беохири геометрии $2\pi R$; $\frac{2\pi R}{2}$; $\frac{2\pi R}{4}$; … $\left(q=\frac{1}{2}\right)$ ва πR^2; $\frac{\pi R^2}{4}$; $\frac{\pi R^2}{16}$; … $\left(q=\frac{1}{4}\right)$-ро ҳосил кардан мумкин аст. Суммаҳои ин прогрессияҳо суммаҳои матлубро ифода мекунанд. **505**. $\frac{\pi b^2}{2}$ см^2. *Нишондод*. Азбаски вобастагии радиуси давраи дарункашидашуда бо тарафи квадрат $r=\frac{a}{2}$ аст, пас барои масоҳатҳои ҳаман доираҳо прогрессияи геометрии $\frac{\pi b^2}{4}$; $\frac{\pi b^2}{8}$; $\frac{\pi b^2}{16}$; … $\left(q=\frac{1}{2}\right)$-ро ҳосил мекунем, ки ёфтани суммааш талаботи масъаларо қонеъ мегардонад. **506**. $q=\frac{2}{5}$. **507**. $b_5=3\cdot8^4=\frac{3}{4096}$. **508**. 5; 4; $\frac{16}{5}$; $\frac{64}{25}$; … ва 45; -36; $\frac{144}{5}$; …. **509**. а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{26}{99}$; г) $2\frac{71}{99}$; д) $\frac{7}{30}$; е) $\frac{907}{1100}$; ж) $\frac{5}{9}$; з) $1\frac{8}{11}$; к) $\frac{7}{15}$; л) $\frac{37}{3300}$; о) $\frac{433}{3300}$; р) $\frac{59}{450}$. **510**. а) $\frac{1}{2y^2}$; б) $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. **511**. *Нишондод*. Фарқи $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$-ро ба намуди $\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2\cdot(a+b)$ оварда боварӣ ҳосил кардан мумкин аст, ки он ғайриманфист. **512.** а) $\frac{2}{3}(3+\sqrt{3})$; б) $\frac{5}{6}(3-\sqrt{3})$; в) $\frac{6}{23}(5+\sqrt{2})$ **513.** а) тоқ; б) ҷуфт; в) ҷуфт; г) тоқ. **514.** $S(x)=4x-x^2$. **515.** 21,6 км/соат; 23,1 км/соат. **517.** а) $\forall x\in\left[1;\frac{4}{3}\right]$; б) $\forall x\in[-3;\ 3]$. **518.** 429. **519*.** $a=4$; $b=12$; $c=36$ ё $a=\frac{4}{9}$; $b=-\frac{20}{9}$; $c=\frac{100}{9}$. *Нишондод.* Бигузор ададҳои матлуб a, aq ва aq^2 бошанд. Он гоҳ мувофиқи шарти масъала ба системаи дуномаълумадори муодилаҳои $2(aq+8)=a+aq^2$, $(aq+8)^2=a\cdot(aq^2+64)$ меоем. **520.** 2; 14; 98. **521.** 7; 21; 63; $b_7=5103$. **522.** $q=\frac{1}{3}$. **523.** *Нишондод.* Бигузор $\div a$, b, c ва $\div\div a^2$, b^2, c^2 бошанд. Бо дигар ибора $2b=a+c$ ва $b^4=a^2\cdot c^2$. Агар муодилаи якумро ба квадрат бардошта, муодилаи дуюмро дар шакли $b^2=|a\cdot c|$ нависем, он гоҳ муқоисаи тарафҳои чапи муодилаҳои ҳосилгашта ба $a^2+2ac+c^2=4|a\cdot c|$ меорад. Агар a ва c аломатҳои якхела дошта бошанд, он гоҳ $a=c$ ва аз ин ҷо прогрессияи геометрӣ дорои махраҷи ба 1 баробар мешавад. Агар a ва c аломатҳои гуногун дошта бошанд, он гоҳ $a^2+6ac+c^2=0$ ва ё $\left(\frac{c}{a}\right)^2+6\cdot\left(\frac{c}{a}\right)+1=0\ (a\neq 0)$ -ро ҳосил мекунем. Онро ҳал карда $\frac{c}{a}=-3\pm\sqrt{8}$ -ро меёбем. Азбаски $\frac{c^2}{a^2}=q^2$ аст, пас $q^2=\left(-3\pm\sqrt{8}\right)^2$ мешавад. Ададҳои a^2, b^2, c^2 мусбатанд, пас q низ калон аз 0 мешавад. Аз ин ҷо $q_{2,3}=-3\pm\sqrt{8}$ ҳосил мегардад. Ҷавоб: $q_1=1$; $q_{2,3}=-3\pm\sqrt{8}$. **524.** $\div 3$; 5; 7; ...; $\div\div 5$; 10; 20; ... . **525.** $\div\div 3$; 6; 12; 24; ...; $\div 1$; 3; 5; 7; ... . **528.** 50 мм. **529.** 5 ва 6 ё –5 ва –4. **531.** а) $\frac{a-2}{a-6}$; б) $\frac{1}{a^2+2}$; в) $\frac{x^4+1}{x+1}$; г) x^2-1. **532.** а) $\forall x\in(-\infty;-1]\cup(2;+\infty)$; б) $\forall x\in(-\infty;-1]\cup(1;3)$. **533.** а) 4; б) 1; $\frac{9}{2}$; в) вуҷуд надорад. ***534.** *Нишондод.* Бигузор насоси якум ҳавзро бо об дар x соат пур кунад. Пас вай дар 1 соат $\frac{1}{x}$ - ҳиссаи ҳавзро пур мекунад. Насоси дуюм бошад $\frac{1}{x+10}$ - ҳиссаи ҳавзро пур мекунад. Азбаски мувофиқи шарт ҳар ду насос дар як соат $\frac{1}{12}$ - ҳиссаи ҳавзро пур мекунанд, пас $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}$ мешавад. Ҷавоб: 30 соат. **535.** а) 8; 9; 10; 11; 12; 13; ...; б) 3; 5; 9; 17; 33; 65; в) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{7}{8}$; $-\frac{15}{16}$; $-\frac{31}{32}$; $-\frac{63}{64}$; г) 5; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$; 1; $\frac{5}{6}$; д) 1; 2; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{216}$; е) 1; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{27}$; $-\frac{1}{256}$; $\frac{1}{3125}$; $-\frac{1}{46656}$; ж) 1; 6; 18; 40; 75;

126; з) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; и) 1; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{216}$; к) 1; 0; 1; 4; 9; 16; л) −4; 16; −64; 256; −1024; 4096; м) 0; −7; −26; −63; −124; −215. **536.** $a_1 = 5$, $a_2 = 19$, $a_3 = 57$; $a_4 = 131$. Ададхои −7; 178; 217; 305; 397; 401 ба пайдарпаии (a_n) тааллуқ надоранд. **537.** $a_3 = 15$; $a_{10} = 197$; $a_{13} = 335$; $a_{15} = 447$. **538.** Адади −1,3 аъзои пайдарпаи шуда наметавонад, вале −3,3 аъзои ёздаҳуми прогрессия аст: $a_{11} = -3,3$. **539.** а) $a_n = 3,5n - 2,5$; б) $a_n = 2^{n-1} - 1$. **540.** а) Ҳа; d=−3; б) ҳа; d=−1,5; в) ҳа; d=3; г) ҳа; d=−5; д) ҳа; d=−0,1; е) ҳа; d=0,2; ж) не; з) ҳа; d=4; и) ҳа; d=7; к) не; л) ҳа; d=−2; м) не; н) не; о) ҳа; d=3,3. **541.** $a_1 = 5$. **542.** а) $a_8 = 32$; б) $a_{31} = 127$; в) $a_{81} = 241a$; г) $a_{30} = 0,066$. **543.** а) $a_1 = -6$; d=5; б) $a_1 = 23$; d=3; в) $a_1 = 10$; d=−1; г) $b_1 = 123$; d=−12; д) $c_1 = 1$; d=4; е) $x_1 = -1$; d=−7. **544.** а) $a_{31} = 157$; б) $a_{301} = -119,2$. **545.** а) $d = -4,2$; б) $d = 2\frac{5}{18}$. **546.** n=39. **547.** а) $S_{18} = 900$; б) $S_{12} = 1062$. **548.** а) $a_1 = 143$, $S_{30} = 3430$; б) $a_1 = 44,25$, $S_{50} = 1906,25$. **549.** а) x=81. *Нишондод.* Тарафи чапи муодила суммаи прогрессияи арифметикиро бо нишондодҳои $a_1 = 1$, $a_n = x$ ва d=4 ифода мекунад. Барои ёфтани n муодилаи $x = 1 + (n-1) \cdot 4$-ро ҳосил мекунем. Аз он $n = \frac{x+3}{4}$ мебарояд. Муодила ба муодилаи баробаркуввам $\frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+3}{4} = 861$ иваз мешавад, ки аз он муодилаи ислоҳшудаи $x^2 + 4x - 6885 = 0$ пайдо мегардад; б) x=55. **550.** а) 1; 4; 7; 10; 13; ...; б) 2; −1; −4; −7; −10; ...; в) −2; 5; 12; 19; .... **551.** 62. **552.** 2360. **553.** n=4. **554.** n=4. **555.** а) $S_n = (n-6) \cdot n$; б) $S_n = 4n \cdot (n+1)$; в) $S_n = \frac{n}{2} \cdot (9-n)$. **556.** а) $S_{45} = 2133$; б) $S_{45} = -900$. **557.** ÷17; 19,5; 22; 24,5; 27; 29,5; 32; $S_7 = 171,5$. **558.** ÷−12; −7; −2; 3; $S_4 = -18$. **559.** Ҳа; $a_n = 3n - 11$. d=3. 560. n=75. **562.** а) Не; б) не; в) ҳа; г) ҳа. **563.** а) b_1=2; б) b_1=3; в) b_1=36; г) b_1=-1; д) b_1=3; е) b_1=2,1; ж) b_1=0,5; з) b_1=32. **564.** а) q=4; б) q=2; в) q=3. **565.** а) $b_1 = -\frac{48}{5}$, $q = -\frac{3}{2}$; б) b_1=−150, q=5; в) $b_1 = \frac{375}{61}$, $q = \frac{6}{5}$; г) $b_1 = 2$, $q = 3$ ё $b_1 = 54$, $q = \frac{1}{3}$; д) b_1=1, q=2. **566.** ±6,3. **567.** b_2=27 ё b_2=−27. **568.** b_2=2, b_3=4, b_4=8. **569.** а) 20; 40; 80; ...; б) −33; 66; −132; 264; ...; в) 3; 6; 12; 24; ... . **570.** b_1=2. **572.** а) 4. **573.** $S_{10} = 3069$, $S_n = 3(2^n - 1)$; б) $S_{10} = \frac{1023}{512}$, $S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. **574.** $b_4 = \frac{21}{4}$. **575.** $S_4 = \frac{15}{4}$. **576.** $S_6 = \frac{63}{8}$. **577.** $S_{10} = 699050$. **578.** $S_6 = 2730$. **579.** А) $\frac{7}{12}$. *Нишондод.* Касри додашударо дар шакли $0,58(3) = \frac{58}{100} + \left(\frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + ...\right)$ менависем. Ифодаи



Расми 96

дар дохили қавс буда прогрессияи геометрии беохири камнашавандаро бо $b_1 = 0{,}003$ ва $q = 0{,}0003 : 0{,}003 = 0{,}1$ ифода мекунад. Аз ин чо $0{,}58(3) = \frac{58}{100} + \frac{0{,}003}{1-0{,}1} = \frac{58}{100} + \frac{0{,}003}{0{,}9} = \frac{58}{100} + \frac{0{,}03}{9} = \frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{175}{300} = \frac{7}{12}$ мешавад; б) $3\frac{14}{55}$; в) $1\frac{329}{990}$; г) $12\frac{1}{12}$; д) $\frac{7}{9}$; е) $\frac{229}{990}$. **580**. *Нишондод*. Ба расми 96 диққат намуда, меёбем: $S_1 = S\Delta_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_2 = S\Delta_{MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$, $S_3 = S\Delta_{KLF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$; $\dots$, $S_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4^n}$; $S_{n+1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}$; $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{4} = const$. Пас пайдарпаии (S_n) прогрессияи геометрӣ бо махраҷи $q = \frac{1}{4} < 1$ мешавад. Аз ин чо $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$-ро ҳосил мекунем. **581**. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; $5\sqrt{2}$; $10\sqrt{2}$; $20\sqrt{2}$. **582**. 3; 6; 12; 24. **583***. ÷ −81; 9; −1; $\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{81}$; ... . **584**. $b_1 = 18$. **585**. ÷1; 7; 49; ... . **586**. ÷1; 4; 7; 10; 13; ...; ÷1; 4; 16; 64; ... . **587***. 20. **588**. 4; 8; 16. **589**. 2; 4; 8; 12 ё 12,5; 7,5; 4,5; 1,5. **590**. $\frac{75}{4}$; $\frac{45}{4}$; $\frac{27}{4}$; $\frac{9}{4}$; ё 3; 6; 12; 18. **591**. ÷4; 7; 10; ÷÷2; 4; 8. **592**. ÷ −4; −8; −16; −32 ва ÷ −17; −12; −7; −2.

БОБИ IV

ИФОДАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ ВА ТАБДИЛДИҲИИ ОНҲО

ДАРАҶАИ НИШОНДИҲАНДААШ РАТСИОНАЛӢ

§10. ФУНКСИЯИ ТРИГОНОМЕТРИИ КУНҶИ ДИЛХОҲ

29. Кунҷҳо, камонҳо ва ченкунии онҳо

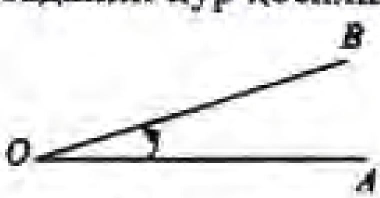
Фигурае, ки дар натиҷаи аз як нуқта баромадани ду нур ташкил ёфтааст, **кунҷ** номида мешавад.

Ҳар гуна кунҷ ҳангоми дар-атрофи ягон нуқтаи ҳамворӣ, ки нуқтаи аввала ном дорад, гардиш додани нур ҳосил шуда метавонад. Масалан, ҳангоми нурро дар атрофии нуқтаи O аз вазъияти аввалаи OA то вазъияти охирини OB гардиш додан. кунҷи AOB ҳосил мешавад (расми 97).

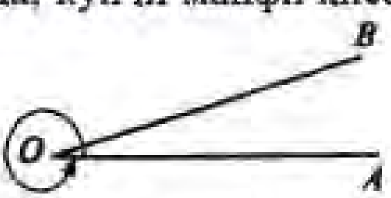
Кунҷ ҳамчун қисми ҳамворӣ ҳисоб карда мешавад, ки вайро нур дар атрофи нуқтаи аввалааш дар ҳамворӣ давр зада, тай кардааст.

Дар вақти гардиш додани нур кунҷе ҳосил шуданаш мумкин аст, ки вай аз кунҷи кушод калон аст (расми 98). Гардиши нур аз якчанд давраҳои пурра ва кунҷи қисми давраро ташкилдиҳанда иборат шуда метавонад (расми 99).

Яке аз ду самти имконпазири гардишро дар ҳамворӣ мусбат ва дигари онро манфӣ ҳисоб мекунем. Кунҷи дар натиҷаи ба муқобили самти ҳаракати ақрабаки соат даврзании нур ба вуҷуд омада, кунҷи мусбат ва кунҷи дар натиҷаи самти ҳаракати ақрабаки соат давр задании нур ҳосилшуда, кунҷи манфӣ ҳисоб карда мешавад.

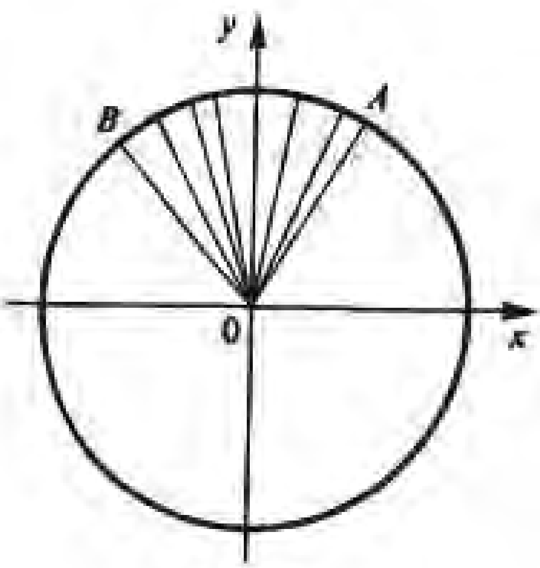


Расми 97

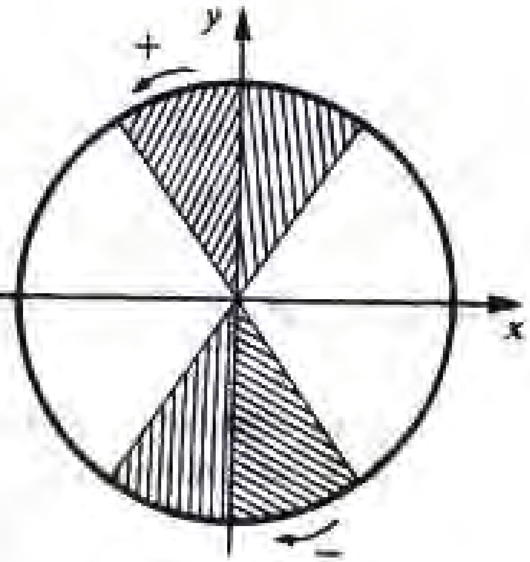


Расми 98

Расми 99



Расми 100



Расми 101

Самтро ҳамчун самти мусбати даврзанӣ қабул мекунем, ки вай ба самти ҳаракати ақрабаки соати дар ҳаворӣ гузошташуда муқобил буда, сиферблаташ ба мушоҳидакунанда нигаронида шуда бошад.

Вазъияти аввалаи нури даврзананда тарафи аввалини кунҷи мувофиқи гардиш ва вазъияти охирини нур тарафи охирини кунҷ номида мешавад.

Ба ҳар гуна кунҷе, ки бо ду радиуси давра ташкил ёфтааст, камони бо нӯгҳои ин радиусҳо маҳдудшудаи давра мувофиқ меояд (расми 100).

Агар радиуси OA дар атрофии маркази O давр занад, он гоҳ нӯги радиуси OA дар рӯи давра давр мезанад. Мегӯянд, ки нуқта дар рӯи давра ба самти мусбат (самти манфӣ) ҳаракат мекунад, ба шарте, ки радиуси нуқтаро ба марказ пайвасткунанда ба самти мусбат (манфӣ) ҳаракат кунад.

Камоне, ки дар натиҷаи аз рӯи давра ба самти мусбат ҳаракат кардани нуқта ба вуҷуд омадааст, камони мусбат ва камоне, ки дар натиҷаи аз рӯи давра ба самти манфӣ ҳаракат кардани нуқта ташкил мeёбад, камони манфӣ ҳисоб карда мешавад (расми 101).

Камонҳое ҳастанд, ки адади дилхоҳи давраҳои пурраи мусбат ва манфиро дарбар мегиранд. Ба ин гуна камон ресмони ба ғалтак печонидашуда мисол шуда метавонад: вай метавонад адади дилхоҳи печҳои ба ин ё он тараф печонидашударо дар бар гирад.

Барои чен кардани кунҷҳо ягон кунҷи муайянро ҳамчун воҳиди ченак қабул карда, ба ёрии вай дигар кунҷҳоро чен мекунанд.

Кунҷи дилхоҳро ҳамчун воҳиди ченак қабул кардан мумкин аст. Дар амалия бисёр вақт кунҷҳоро ба градусҳо чен мекунанд. Воҳиди ченак-градус 1° буда, ба $\frac{1}{360}$ ҳиссаи гардиши пурра баробар аст.

Барои чен кардани кунчҳои ченакашон градуси нопурра дақиқаҳо ва сонияҳо истифода карда мешаванд. Як дақиқа ба $\frac{1}{60}$ ҳиссаи градус ва як сония ба $\frac{1}{60}$ ҳиссаи дақиқа баробар аст. Градус ба таври зерин ишорат карда мешаванд:

$$1' = \frac{1}{60^{0}}; \qquad 1'' = \frac{1}{60'};$$

Бузургии кунҷи мусбат бо адади мусбат ва кунҷи манфӣ бо адади манфӣ ифода карда мешавад.

Дар вақти чен кардани камонҳои давраи додашуда ҳамчун воҳид камонеро қабул менамоянд, ки ба он кунҷи марказии ба воҳиди ченак қабулкардашуда такя мекунад. Дар ин маврид бузургии кунҷи марказӣ ба бузургии камоне, ки ба вай ин кунҷ такя мекунад, дар воҳидҳои кунҷӣ ва камонӣ (мувофиқан) бо як хел адад ифода карда мешавад.

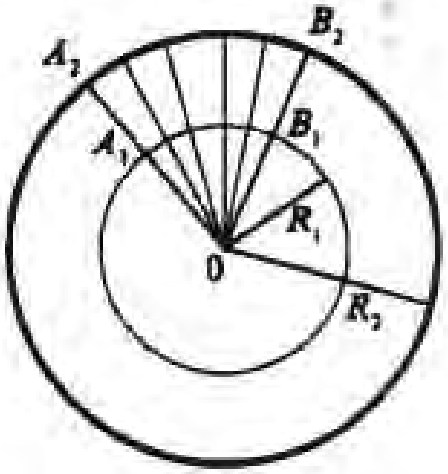
Агар як кунҷи марказӣ бо камонҳои ду давра такя кунад, он гоҳ дарозии камонҳои ин ду давра ҳамчун дарозии радиусҳои онҳо нисбат доранд (расми 102).

Инак, дар вақти ягона будани кунҷи марказӣ нисбати дарозии камони давра ба радиуси он ба бузургии радиус вобаста нест.

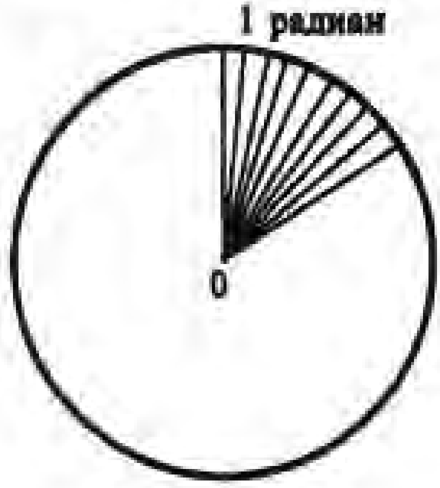
Т а ъ р и ф. **Нисбати дарозии камони давра, ки барои он кунҷи додашуда кунҷи марказӣ аст, ба дарозии радиуси ҳамин давра ченаки радиании кунҷ номида мешавад.**

Дар вақти ченкунии радиании кунҷҳо ҳамчун воҳиди ченаки кунҷи марказии мусбат қабул карда мешавад, ки вай ба камони дарозиаш ба радиус баробар такя мекунад. Ин кунҷ *радиан* номида мешавад (расми 103).

Барои ченкунии радиани камонҳои давра радиани камонӣ ҳамчун воҳид қабул карда шудааст; ин камонест, ки аз ҷиҳати дарозӣ ба радиус баробар мебошад.



Расми 102



Расми 103

Ченаки радиании гардиши пурра ба нисбати дарозии давра бар радиус баробар аст. $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6,283185...$

Хотиррасон мекунем, ки қимати радиани $\pi \approx 3,14$ мебошад. Ченаки радиании $1°$ ба $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0,1017453...$ баробар аст.

Агар кунҷ $A°$ бошад, он гоҳ андозаи радиании вай α ва $\alpha = \frac{A°\pi}{180°} = \frac{A\pi}{180}$ баробар аст.

$$1' = \frac{1}{60}(\text{градус}) = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180}(\text{радиан}) = 0,00029088\,(\text{радиан}).$$

Аз баробарии $\alpha = \frac{A°\pi}{180°}$ маълум аст, ки кунҷи ба α радиан баробар чунин мешавад: $A° = \alpha\frac{180°}{\pi}$.

Аз он ҷумла 1 радиан$=\frac{180°}{\pi} \approx 57,295(\text{градус}) \approx 3438' \approx 206265'' \approx$ $\approx 57°17'45''$ Барои ифода намудани андозаи радиании кунҷҳо ва камонҳо бузургии кунҷ (ё камон) ба радианҳо ифода карда мешавад. Ба ҷои калимаҳои «кунҷи ба адади α чен кардашаванда» мухтасар «кунҷи α» мегӯянд. Масалан, кунҷи бузургиаш ба 0,5 радиан нагуфта «кунҷи 0,5» мегӯянд.

Мисоли 1. Андозаи радиании $A=150°$-ро меёбем.

Ҳал. $150° = 150 \cdot \frac{\pi}{180}$ радиан$=\frac{5\pi}{6}$ радиан.

Мисоли 2. Андозаи градусии $\alpha=4,5$ радианро меёбем.

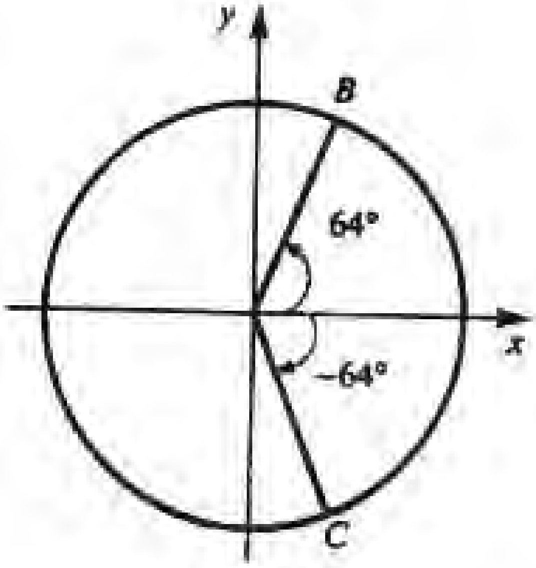
Ҳал. 4,5 радиан$=4,5 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 258°$.

Мисоли 3. Дарозии камони даврае, ки радиусаш ба 16 см баробар буда, камонаш $\frac{\pi}{4}$ радианро ташкил медиҳад, меёбем.

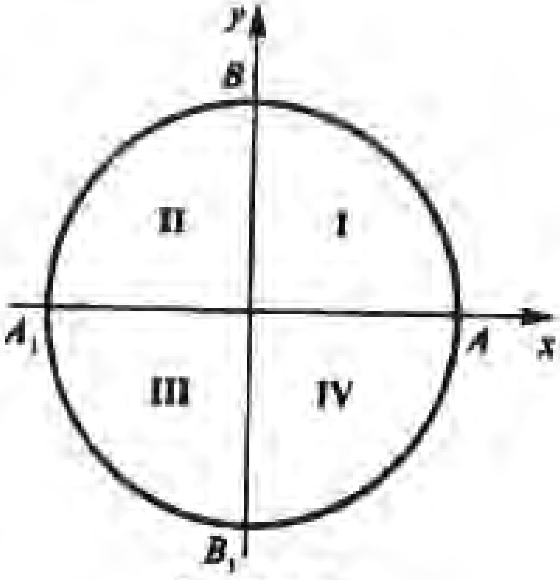
Ҳал. Дарозии камоне, ки дорои k-радиан аст бо формулаи $C = k \cdot R$ ҳисоб карда мешавад, бинобар $C = 16 \cdot \frac{\pi}{4} = 4$ см.

Андозаи радиании баъзе кунҷҳое, ки бисёр вомехӯранд. Дар ҷадвали зерин нишон медиҳем:

Градус	30°	45°	60°	90°
Радиан	$\frac{\pi}{6} \approx 0,5236$	$\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$	$\frac{\pi}{3} \approx 0,0472$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,5708$
Градус	180°	270°	360°	
Радиан	$\pi \approx 3,1416$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4,7124$	$2\pi \approx 6,2832$	



Расми 104



Расми 105

Дар ҳаморӣ самти мусбати даврзаниро муайян карда, дар вай тирҳои координатаҳоро интихоб мекунем. Дар тири Ox аз рости ибтидои координатаҳо нуқтаи A-ро нишона мекунем ва аз он давраи марказаш дар нуқтаи 0-ро мегузаронем (расми 104). Радиуси OA-ро радиуси ибтидоӣ меномем.

Радиуси ибтидоиро дар атрофии нуқтаи O ба муқобили ҳаракати ақрабаки соат ба 64° гардиш медиҳем. Ин радиус ба радиуси OB бадал мешавад. Кунҷи гардиш ба 64° баробар аст. Агар радиуси ибтидоиро дар атрофии O бо самти ақрабаки соат ба 64° гардиш диҳем, он гоҳ он ба радиуси OC бадал мешавад. Дар ин ҳолат кунҷи гардиш ба −64° баробар аст. Ин кунҷҳо дар расм бо тирчаҳо нишон дода шудааст.

Аз курси геометрия маълум аст, ки кунҷ ба ҳисоби градусҳо бо ададҳои аз 0 то 180° ифода карда мешавад. Кунҷи гардиш ба ҳисоби градусҳо бо ададҳо $-\infty$ то $+\infty$ ифода карда мешавад. Масалан. Агар радиуси ибтидоиро ба муқобили самти ҳаракати ақрабаки соат ба 180° ва боз ба 50° гардиш диҳем, он гоҳ кунҷи гардиш ба 230° баробар мешавад. Агар радиуси ибтидоӣ ба муқобили ҳаракати ақрабаки соат як гардиши пурра кунад. Он гоҳ кунҷи гардиш ба 360° баробар мешавад, агар ин радиус ба ҳамон самт якуним гардиш кунад, он гоҳ кунҷи гардиш ба 540° баробар мешавад ва ҳоказо.

Агар тарафи охирини кунҷ дар дохили ягон чоряки ҳамворӣ бошад, он гоҳ мегӯянд, ки кунҷи додашуда дар ҳамин чоряк тамом мешавад.

Чорякҳои I ва II якҷоя нимдоираи болоӣ, чорякҳои III ва IV нимдоираи поёниро ташкил мекунанд. Чорякҳои I ва IV нимдоираи рост, чорякҳои II ва III нимдоираи чапро ташкил медиҳанд (расми 105). Агар $0° < \alpha < 90°$ бошад, он гоҳ α кунҷи чоряки I аст; агар $90° < \alpha < 180°$ бошад, он гоҳ α кунҷи чоряки II аст; агар $180° < \alpha < 270°$ бошад, он гоҳ α кунҷи чоряки III аст. Ҳангоми ба кунҷ ҷамъ шудани адади бутуни гардишҳо кунҷи ҳамон чорякҳо ҳосил мешавад. Масалан, кунҷи 430° кунҷи чоряки I мебошад, чунки $430°=360°+70°$ ва $0° < 70° < 90°$ аст, кунҷи 920° кунҷи чоряки III аст, чунки $920°=360° \cdot 2+200°$ ва $180°<200°<270°$ мебошад.

Кунҷҳои $0°$, $\pm 90°$; $\pm 180°$; $\pm 270°$; $\pm 360°$, ... ба ҳеҷ як чоряк тааллуқ надоранд.

? 1. Андозаи ченакҳои кунҷро номбар кунед. **2.** Бузургии кунҷ ба k градус баробар аст. Бузургии ин кунҷро бо радиан ифода кунед. **3.** Бузургии кунҷ ба k радиан баробар аст. Бузургии ин кунҷро бо градус ифода кунед. **4.** Кунҷҳои 1800°, 3600°-ро бо радианҳо ифода намоед.

Машқҳо барои такрор

593. Қимати ифодаи $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}} \cdot \dfrac{xy^2}{x+y}$-ро ҳангоми $x=0,12$ ва $y=0,5$ будан ёбед.

594. Муодиларо ҳал намоед:

а) $\dfrac{2}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x^3+1}$; б) $\dfrac{3x-30}{x^3-8}-\dfrac{10}{x^2+2x+4}+\dfrac{2}{x-2}=0.$

595. Суммаи прогрессияи беохири 2; $-\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{2}{9}$; $-\dfrac{2}{27}$ ...-ро ёбед.

30. Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи дилхоҳ

Ба мо маълум аст, ки агар дар секунҷаи росткунҷаи ABC-и дода шуда α кунҷи тези ба гипотенуза часпида бошад (расми 106), он гоҳ

$$\sin\alpha=\frac{b}{c};\quad \cos\alpha=\frac{a}{c};\quad tg\alpha=\frac{b}{a};\quad ctg\alpha=\frac{a}{b}.$$

Акнун таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенсро ҳангоми дилхоҳ будани кунҷи α меорем.

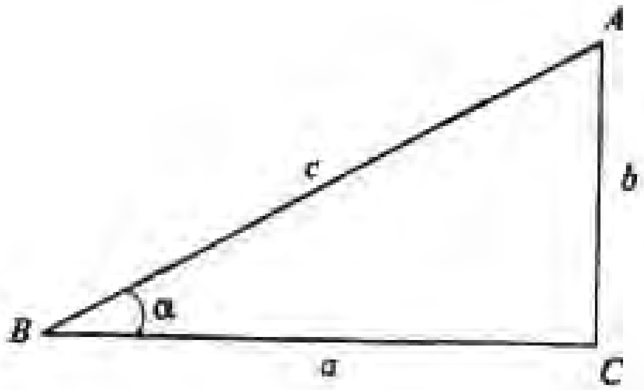
Бигузор ҳангоми дар атрофи нуқтаи O ба кунҷи α гардиш додани радиуси ибтидоии OA он ба радиуси OB бадал шавад (расми 107).

Нисбати ординатаи нуқтаи B ба дарозии радиус синуси кунҷи α номида мешавад:

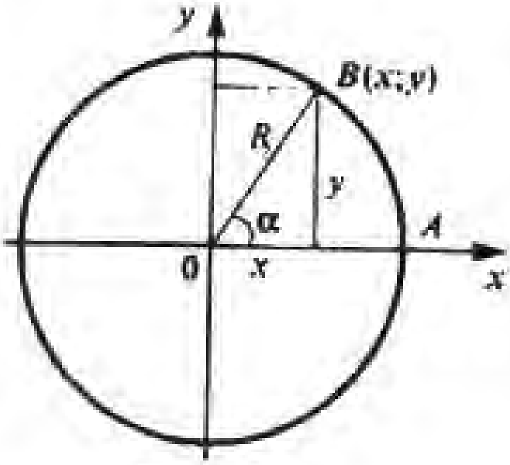
$$\sin\alpha=\frac{y}{R}$$

Нисбати абсиссаи нуқтаи B ва дарозии радиус косинуси кунҷи α номида мешавад:

$$\cos\alpha=\frac{x}{R}$$



Расми 106



Расми 107

Нисбати ординатаи нуктаи *B* ба абсиссаи он тангенси кунҷи α номида мешавад:

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Нисбати абсиссаи нуктаи *B* ба ординатаи он котангенси кунҷи α номида мешавад:

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

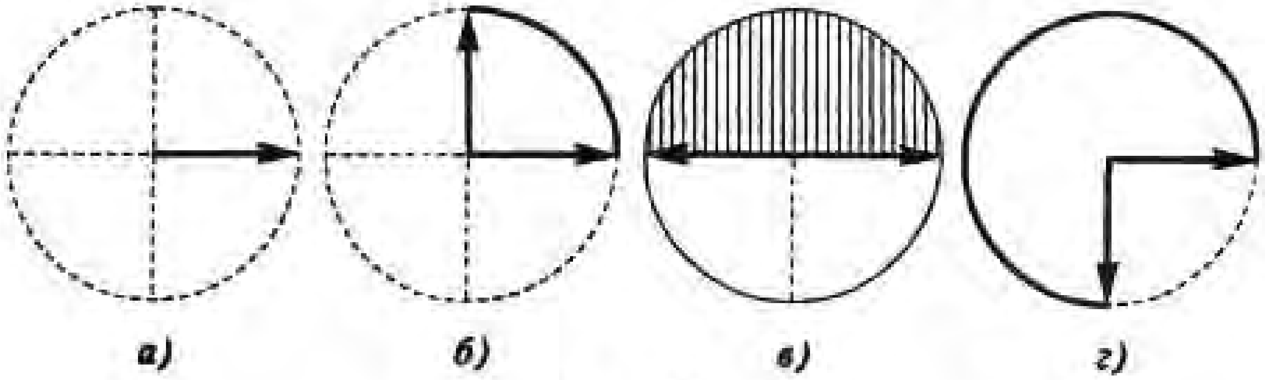
Функсияҳои синус, косинус, тангенс ва котангенсро *функсияҳои тригонометрӣ* меноманд; кунҷи α аргументи онҳо ном дорад. Ифодаҳои $sin\alpha$ ва $cos\alpha$ барои қиматҳои дилхоҳи α муайян мебошад, чунки барои кунҷи дилхоҳи гардиш қиматҳои мувофиқи касрҳои $\frac{y}{R}$ ва $\frac{x}{R}$-ро ёфтан мумкин аст. Ифодаи $tg\alpha = \frac{y}{x}$ ҳамон вақт тартиб дода мешавад, ки агар $x \neq 0$ бошад.

Агар $x=0$ бошад, пас ин нисбатро тартиб додан имконнопазир аст (ба нул тақсим кардан маъно надорад); дар ин маврид тарафи охирини кунҷ ба дарозии тири ордината равон мешавад ва $d = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ё бо ифодаи градусӣ $\alpha = 90° + 180°k$ (k - адади дилхоҳи бутун аст).

Барои кунҷҳои $k\pi$ (ё бо градусҳои $180° \cdot k$) тарафи охирин ба дарозии тири абсисса равон мешавад: нисбати $\frac{x}{y}$ маънои худро гум мекунад, чунки $y=0$ мешавад; барои ин кунҷҳо котангенс вуҷуд надорад.

Қиматҳои функсияҳои тригонометрии баъзе кунҷҳоро дида мебароем. Агар кунҷи α=0 бошад (расми 108, а) он гоҳ $x=1$, $y=0$ мешавад. Бинобар ин $cos0=1$, $sin0=0$, $tg\,0 = \frac{y}{x} = 0$, $ctg0$ вуҷуд надорад.

Агар кунҷи $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ё бо градусҳои α=90°) мебошад, он гоҳ $x=0$, $y=1$ мешавад (расми 108, *б*). Бинобар ин $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$; $tg\frac{\pi}{2} = tg90°$ вуҷуд надорад: $ctg\frac{\pi}{2} = ctg90° = 0$.



Расми 108

Агар $\alpha=\pi$ (расми 108, в) бошад, он гоҳ $x=-1$; $y=0$ мешавад, бинобар ин $\cos\pi=\cos 180°=-1$; $\sin\pi=\sin 180°=0$, $tg\pi=tg180°=0$; $ctg\pi=ctg180°$ вуҷуд надорад.

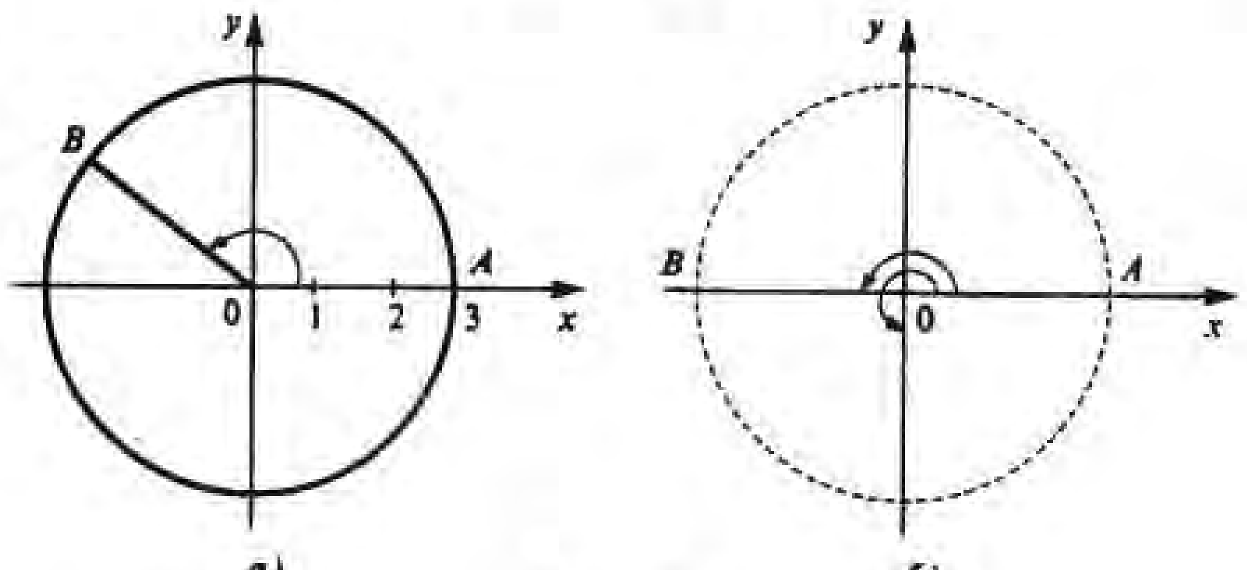
Агар $\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ (расми 108, г) бошад, он гоҳ $x=0$; $y=-1$ мешавад, бинобар ин $\cos\dfrac{3}{2}\pi=\cos 270°=0$; $\sin\dfrac{3}{2}\pi=\sin 270°=-1$; $tg\dfrac{3}{2}\pi=tg270°$ вуҷуд надорад; $ctg\dfrac{3}{2}\pi=ctg270°=0$ аст.

Доир ба ҳисоб кардани қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ мисолҳо меорем.

Мисоли 4. Қиматҳои тақрибии $\sin 110°$, $\cos 110°$, $tg110°$ ва $ctg110°$-ро бо ёрии нақша меёбем.

Давраи марказаш ибтидои координатаҳои радиусаш $OA=R=3$-ро месозем (расми 109). Радиуси OA-ро ба $110°$ гардиш медиҳем. Радиуси OB ҳосил мешавад. Координатаҳои нуқтаи B, яъне x ва y-ро аз расм меёбем:

$$x=-1{,}05, \qquad y=2{,}80.$$



Расми 109

Аз ин ҷо:

$$sin110° = \frac{y}{R} = \frac{2,80}{3} \approx 0,93, \qquad tg110° = \frac{y}{x} = \frac{-2,80}{1,05} \approx -2,7,$$

$$cos110° = \frac{x}{R} = \frac{-1,05}{3} \approx -0,35, \qquad ctg110° = \frac{y}{x} = \frac{-1,05}{2,80} \approx -0,38.$$

Акнун ҷадвали қиматҳои функсияҳои тригонометриро барои баъзе кунҷҳо меорем.

α	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$2\frac{\pi}{3}$ (120°)	$3\frac{\pi}{4}$ (135°)	$5\frac{\pi}{6}$ (150°)	π (180°)
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	вуҷуд надорад	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	вуҷуд надорад	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\sqrt{3}$	вуҷуд надорад

α	0	$7\frac{\pi}{6}$ (210°)	$5\frac{\pi}{4}$ (225°)	$4\frac{\pi}{3}$ (240°)	$3\frac{\pi}{2}$ (270°)	$5\frac{\pi}{3}$ (300°)	$7\frac{\pi}{4}$ (315°)	$11\frac{\pi}{6}$ (330°)	2π (360°)
sin α	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	вуҷуд надорад	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	вуҷуд надорад	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\sqrt{3}$	вуҷуд надорад

Мисоли 5. Аломати ҳосили зарбро муайян мекунем.

$$\sin67° \cdot \cos267° \cdot \cos375° \cdot \sin(-68°) \cdot \cos(-68°) \cdot \sin2.$$

Ҳал. $\sin67°>0$ чунки кунҷи 67° дар чоряки якум ҷойгир аст, синус дар чоряки якум мусбат мебошад.

$\cos267°<0$ чунки кунҷи 267° кунҷи чоряки се аст, косинус дар ин чоряк манфӣ мебошад.

$\cos 375°>0$, чунки кунҷи $375°$ кунҷи чоряки якум мебошад, косинус дар ин чоряк мусбат.

$\sin(-68°)<0$ чунки кунҷи $-68°$ кунҷи чоряки чорум аст, синус дар ин чоряк манфӣ мебошад.

$\cos(-68°) > 0$ чунки кунҷи $-68°$ дар чоряки чорум чойгир аст, косинус дар ин чоряк мусбат.

$\sin 2>0$ чунки кунҷе, ки бузургиаш ба 2 радиан баробар аст, кунҷи чоряки дуюм мебошад, синус дар чоряки дуюм мусбат. Бинобар ин ҳосили зарб мусбат мебошад.

? 1. Радиан чист? 2. Кунҷҳои 30°, 45°, 60°, 90°-ро бо радианҳо ифода намоед. 3. Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи α-ро гӯед. 4. Ифодаҳои $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ барои кадом қиматҳои α маъно доранд?

596. Кунҷи додашударо бо радианҳо ифода намоед.
а) 1°; в) 45°; д) 120°; з) 320°; к) 1000°.
б) 15°; г) 70°; ж) 150°; и) 315°;

597. Кунҷи додашударо бо градусҳо ифода намоед:
а) $\frac{\pi}{15}$; б) $-\frac{\pi}{8}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{11\pi}{6}$; д) $0{,}25\pi$; ж) $-\frac{31}{6}\pi$.

598. Кунҷи зерин дар кадом чоряк тамом мешавад:
а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{2\pi}{3}$; в) $21\frac{\pi}{4}$.

599. Қимати ифодаро ёбед:
а) $a^2\sin\frac{\pi}{2}+b^2\cos 0+2ab\cos\pi$; в) $2\cos\pi+6ctg\frac{3}{2}\pi-5\sin 2\pi$;
б) $3\cos\frac{\pi}{2}-4\sin^3\frac{3\pi}{2}+8\operatorname{tg}\pi$; г) $2\operatorname{tg}0+\sin\pi-\cos\frac{3}{2}\pi-\operatorname{ctg}\pi$.

600. Ҳисоб кунед.
а) $2\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{6}+tg\frac{\pi}{6}$; в) $a\sin\pi+b\cos\pi+\operatorname{tg}\pi$;
б) $2\cos\pi+3\cos 3\frac{\pi}{2}+6tg\frac{\pi}{3}$; г) $m\cos\frac{\pi}{2}+n\cos\pi+p\sin 3\frac{\pi}{2}+qtg2\pi$.

601. Ҳисоб кунед.
а) $2\cos 60°+\sqrt{3}\cos 30°$; г) $3\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}60°$;
б) $5\sin 30°-\operatorname{ctg}45°$; д) $4\operatorname{tg}60°\cdot\sin 60°$;
в) $2\sin 30°+6\cos 60°-4\operatorname{tg}45°$; е) $12\sin 60°\cdot\operatorname{ctg}60°$.

602. Якчанд қиматҳои α-ро ёбед, ки барои онҳо:
а) $\cos\alpha=0$; б) $\sin\alpha=1$; в) $\operatorname{ctg}\alpha=0$
бошад.

603. Якчанд қиматҳои φ-ро ёбед, ки барои онҳо:
а) $\sin\varphi=\frac{1}{2}$; б) $\cos\varphi=1$; в) $\cos\varphi=0$; г) $\operatorname{tg}\varphi=0$
бошад.

604. Дар давраи воҳидӣ нуқтаи $P_\alpha(x_\alpha;\ y_\alpha)$-*ро* тасвир кунед, ки:
а) $x_\alpha>0$, $y_\alpha>0$; б) $y_\alpha>0$, $x_\alpha<0$; в) $y_\alpha<0$, $x_\alpha<0$; г) $y_\alpha<0$, $x_\alpha>0$
бошад.

605. Аломати ҳосили зарбро муайян кунед:
$\sin 67° \cdot \cos 267° \cdot \cos 375° \cdot \sin(-68°)\cos(-68°) \cdot \sin 2$.

606. Якчанд кунҷи α-ро ёбед, ки дар онҳо ифодаи:
а) $\operatorname{tg}\alpha$ маъно надорад; б) $\operatorname{ctg}\alpha$ маъно надорад.

607. Оё $\cos\alpha$ қиматҳои
а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$-ро қабул карда метавонад?

608. Магар адади α-и баробариҳои зеринро қонеъгардонанда вуҷуд дорад?
а) $\sin\alpha=\frac{7}{25}$; $\cos\alpha=\frac{24}{25}$; в) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{7}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{4}$.
б) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$;

609. Агар:
а) $\alpha=0°$; б) $\alpha=45°$; в) $\alpha=90°$; г) $\alpha=180°$
бошад, қимати ифодаи $\sin\alpha+\cos\alpha$-ро ёбед.

610. Ҳисоб кунед:
а) $2\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$; в) $a\sin\pi+b\cos\pi+\operatorname{ctg}\pi$.
б) $2\cos\pi+3\cos 3\frac{\pi}{2}+6\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

611. Агар:
а) $\alpha=15°$; б) $\alpha=30°$; в) $\alpha=90°$
бошад, қимати ифодаи $\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$-ро ёбед

Машқҳо барои такрор

612. Ифодаро содда кунед:
$$\left[\frac{2}{(-a)^3}\right]^2+\left[\left(-\frac{2}{a}\right)^3\right]^2+\left(-\frac{2}{a^3}\right)^3-2\left(-\frac{2}{a^3}\right)^2-\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{a}\right)^2\right]^3.$$

613. Ҳисоб кунед:
а) (3,52 : 1,1+6,2) · (7,2–4,62 :2,2);
б) (2,86 : 2,6–0,8)–(3,4+7,04 : 3,2).

614. Нуқтаи буриши хати рости $x+y=2$ ва давраи $x^2+y^2=100$-ро ёбед.

615. Муодиларо ҳал кунед:
$$x-7-9x=4x-3-8x.$$

616. Нобаробариҳоро ҳал кунед:
а) $x^2<16$; б) $x^2\geq 2$.

617. Асоси росткунҷа ба 8 см баробар буда, баландии он аз асосаш 2 см зиёд аст. Периметр ва масоҳати росткунҷаро ёбед.

618. Прогрессияи арифметикӣ бо формулаи $a_n=3n+2$ дода шудааст. Суммаи 20 аъзои аввалаи онро ёбед.

§11. АЙНИЯТҲОИ АСОСИИ ТРИГОНОМЕТРӢ ВА ТАТБИҚИ ОНҲО

31. Баъзе хосиятҳои функсияҳои тригонометрӣ

Аломати функсияҳои синус, косинус, тангенс ва котангенсро дар чорякҳои гуногун муайян менамоем.

Бигузор ҳангоми радиуси $OA=R$-ро ба кунҷи α гардиш додан нуқтаи A ба нуқтаи $B(x;y)$ табдил ёбад. (Расми 110.)

Мувофиқи таъриф $\sin\alpha=\frac{y}{R}$ бинобар ин аломати $\sin\alpha$ аз y вобаста аст. Қимати синус барои кунҷҳои дар чунин чорякҳо тамомшаванда мусбат мешавад, ки дар ин чорякҳо ординатаи нуқтаҳо мусбат мебошанд.

Бинобар ин, **синусҳои дар нимҳамвории болой (чорякҳои I ва II) тамомшаванда мусбат ва синусҳои кунҷҳои дар нимҳамвории поёнӣ (чорякҳои III ва IV) тамомшаванда манфӣ мебошанд.**

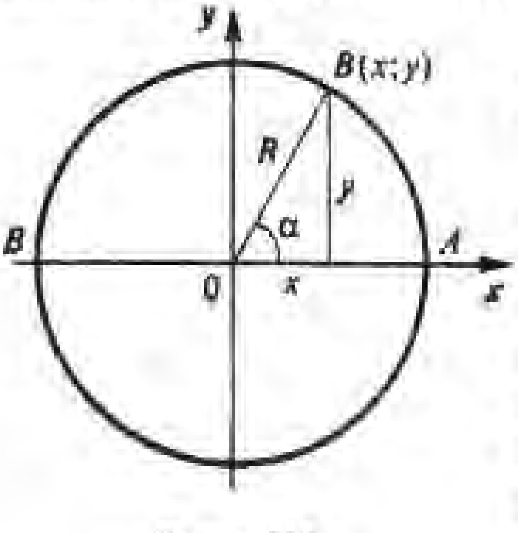
Азбаски $\cos\frac{x}{R}$ аст, бинобар ин аломати $\cos\alpha$ аз аломати x вобаста аст, қимати косинус барои кунҷҳои дар чунин чорякҳо тамомшаванда мусбат мешаванд, ки дар ин чорякҳо абсиссаҳои нуқтаҳо мусбат мебошанд.

Аз ин рӯ, **косинусҳои кунҷҳои дар нимҳамвории рост (чорякҳои I ва IV) тамомшаванда мусбат, косинусҳои кунҷҳои дар нимҳамвории чап (чорякҳои II ва III) тамомшаванда манфӣ мебошанд.**

Азбаски $tg\ \alpha=\frac{y}{x}$ $ctg\ \alpha=\frac{x}{y}$ аст, пас аломатҳои $tg\ \alpha$ ва $ctg\ \alpha$ аз аломатҳои x ва y вобаста мебошанд.

Бинобар ин, **тангенс ва котангенсҳои кунҷҳои дар чорякҳои I ва III тамомшаванда мусбат, тангенс ва котангенсҳои кунҷҳои дар чорякҳои II ва IV тамомшаванда манфӣ мебошанд.**

Аломатҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс дар ҳар яки ин чорякҳо дар расми 111 нишон дода шудаанд.

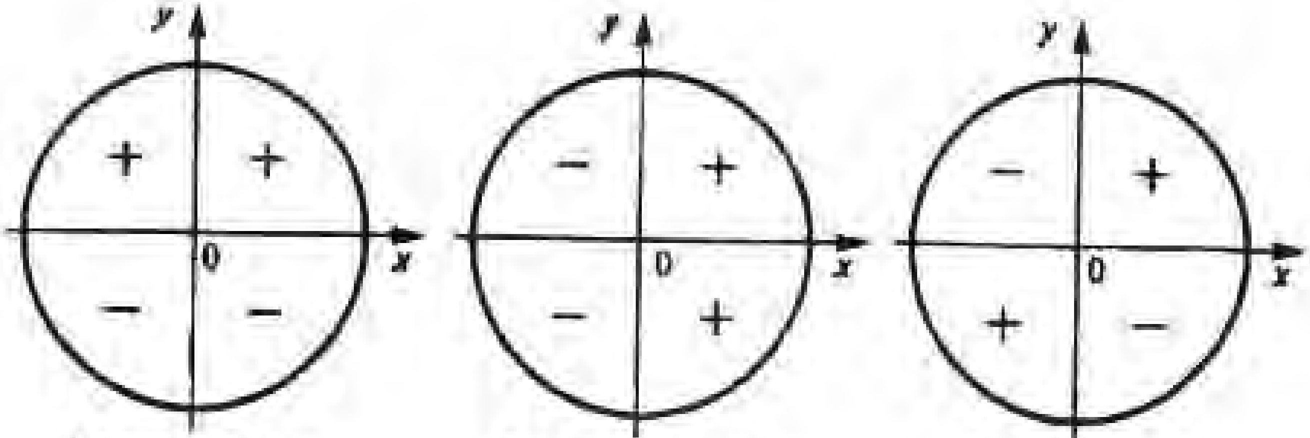


Расми 110

Акнун масъалаи ҷуфт ва тоқ будани функсияҳои тригонометриро аниқ мекунем.

Чӣ тавре дида будем (ниг. ба §1-и п. 3), агар қимати функсия дар вақти ба қимати муқобилаш иваз кардани аргумент тағйир наёбад, функсияро ҷуфт меноманд, яъне агар $y=y(x)$ функсия бошад, пас вай ҷуфт аст, агар $y(-x)=y(x)$ бошад. Функсияи $y=x^2$ мисоли оддитарини функсияи ҷуфт аст, зеро

$$y(-x)=(-x)^2=x^2=y(x).$$



Аломати синус

Аломати косинус

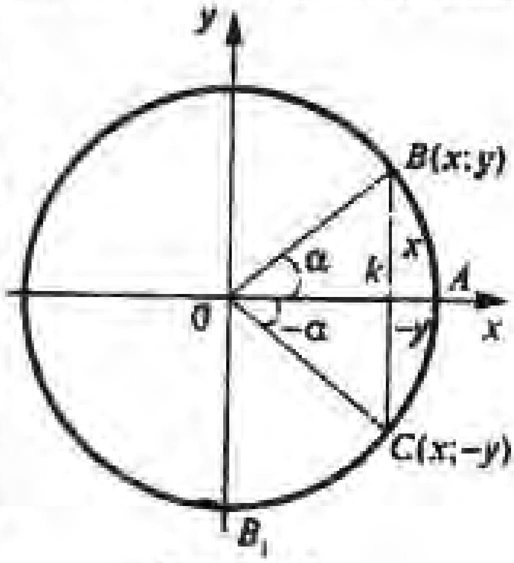
Аломати тангенс ва котангенс

Расми 111

Агар ҳангоми ба адади муқобил иваз кардани аргументи функсия қимати он ба адади муқобилиаш иваз шавад, яъне $y(-x)=-y(x)$ бошад, он гоҳ функсияро тоқ номида будем. Функсияи $y=x^3$ мисоли функсияи тоқ аст, зеро $(-x)^3=-x^3=-y$.

Фарз мекунем, ки кунҷи α дода шудааст. Кунҷи α-ро дида мебароем. Кунҷҳои ба ҳам муқобили α ва $-\alpha$ дар натиҷаи аз вазъияти аввалини OA ба самтҳои ба ҳам муқобил як хел гардиш додани радиуси ҳаракатнок ташкил меёбанд.

Ҳангоми ба кунҷи α гардиш додан радиуси OA он ба радиуси OB бадал мешавад ва ҳангоми ба кунҷи $-\alpha$ гардиш додани ҳамон радиуси он ба радиуси OC бадал мешавад (расми 112). Нуқтаҳои B ва C-ро бо порча пайваст карда, секунҷаи баробарпаҳлӯи BOC-ро ҳосил менамоем. OA биссектрисаи кунҷи BOC мебошад. Пас, порчаи Ok медиана ва баландии секунҷаи BOC аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки нуқтаҳои B ва C нисбат бо тири абсисса симметрианд.



Расми 112

Координатаҳои нуқтаҳои $B(x;\ y)$ ва $C(x;\ -y)$-ро муқоиса карда ҳосил мекунем:

$$\sin(-\alpha)=\frac{-y}{R}=-\frac{y}{R}=-\sin\alpha; \qquad \cos(-\alpha)=\frac{y}{R}=\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{y}{x}=-\frac{y}{x}=-\operatorname{tg}\alpha; \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ҳамин тавр:

Косинус функсияи ҷуфт:

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

синус, тангенс ва котангенси функсияҳои тоқ мебошанд:

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\quad\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$; $\quad\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$

Масалан:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$.

2) $\cos(-135°)=\cos 135°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(-135°)=-\sin 135°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\mathrm{tg}(-135°)=-\mathrm{tg}135°=1$; $\mathrm{ctg}(-135°)=-\mathrm{ctg}135°=1$.

?

1. Синус, косинус, тангенс ва котангенс дар ҳар яки чорякҳои координатавӣ чӣ хел аломат доранд? 2. Кадоме аз функсияҳои тригонометрӣ, функсияи ҷуфт ва кадомашон тоқ мебошанд? 3. Нуқтаҳои ба тири ордината симметрӣ буда мутааллиқи кадом кунҷҳо мебошанд?

619. Агар: а) $\alpha=45°$; б) $\alpha=120°$; в) $\alpha=365°$; г) $\alpha=310°$; д) $\alpha=275°$ бошад, аломати $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$-ро муайян кунед.

620. Аломати ифодаи зеринро муайян намоед:
а) $\sin 67°$; б) $\cos 267°$; в) $\cos 375°$; г) $\sin(-68°)$; д) $\cos(-68°)$.

621. Ин ифода чӣ гуна аломат дорад:
а) $\sin 325°$; б) $\cos 275°$; в) $\mathrm{tg}420°$; г) $\mathrm{ctg}420°$; д) $\sin 25°$?

622. а) $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$; б) $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$; в) $\cos\alpha$ ва $\mathrm{tg}\alpha$ дар кадом чорякҳо аломати якхела доранд?

623. Қимати ифодаро ёбед:
а) $\sin 45°$; б) $\cos(-90°)$; в) $\sin 210°$; г) $\sin 180°$; д) $\cos(-45°)$.

624. Қимати ифодаҳои зеринро ёбед:
а) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$-ро ҳангоми $\alpha=30°$ будан:
б) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{3}$-ро хангоми $\alpha=90°$ будан.

Машқҳо барои такрор

625. Ҳисоб кунед:
а) $\frac{2\cdot 5^{22}-9\cdot 5^{21}}{25^{10}}$; б) $2\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{12}$.

626. Нобаробариро ҳал кунед:
а) $x^2-3x>0$; б) $(x-5)x+4x>2$.

627. Адади 336-ро ба зарбкунандаҳои содда ҷудо намоед.

628. Прогрессияи геометрии (b_n) дода шудааст. Агар:
а) $b_n=72{,}9$, $q=1{,}5$; б) $b_n=\frac{16}{9}$, $q=\frac{2}{3}$
бошад, суммаи ҳафт аъзои аввалаи онро ёбед.

32. Муносибатҳои байни функсияҳои тригонометрии як кунҷ

Муносибатҳои асосиеро муқаррар мекунем, ки бо онҳо қиматҳои чор функсияи тригонометрии аргументи додашуда алоқаманданд.

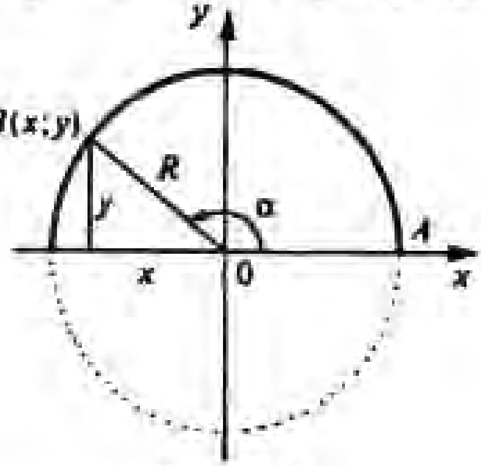
Бигзор ҳангоми ба кунҷи α дар атрофи нуқтаи O гардиш додани радиуси OA радиуси OB ҳосил шавад (расми 113). Мувофиқи таърифи синус ва косинус

$$\sin\alpha=\frac{y}{R}, \qquad \cos\alpha=\frac{x}{R}$$

ки дар ин ҷо x - абсиссаи нуқтаи B, y - ординатаи нуқтаи B, R -радиуси давра мебошад. Азбаски нуқтаи B муталлиқи давра мебошад, бинобар ин координатҳои он муодилаи давраи

$$x^2+y^2=R^2$$

-ро қаноат мекунанд. Ба ҷои x ва y ифодаҳои $R\cos\alpha$ ва $R\sin\alpha$-ро гузошта ҳосил менамоем:



Расми 113

$$(R\cos\alpha)^2+(R\sin\alpha)^2=R^2, \qquad R^2\cos^2\alpha+R^2\sin^2\alpha=R^2.$$

Ҳар ду қисми баробариро ба R^2 тақсим намуда ҳосил менамоем:

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \qquad (1)$$

Суммаи квадратҳои косинус ва синуси як хел аргумент ба як баробар аст. Мувофиқи таърифи тангенс ва котангенс

$$tg\alpha=\frac{y}{x}=\frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{ва} \quad ctg\alpha=\frac{x}{y}=\frac{R\cos\alpha}{R\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

агар $\cos\alpha\neq0$ ва $\sin\alpha\neq0$ бошад.

Ҳамин тариқ,

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

Айнияти (2)-ро аъзо ба аъзо зарб намуда, ҳосил мекунем:

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1 \qquad (3)$$

Баробарии (3) чӣ тавр ба якдигар алоқаманд будани тангенс ва котангенси кунҷи α-ро нишон медиҳад. Ин баробарӣ барои ҳамон қиматҳои α, ки барояшон $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ маъно дорад, дуруст аст.

Айнияти (1)-ро аввал ба $\cos^2\alpha$ баъд ба $\sin^2\alpha$ аъзо ба аъзо тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{ва} \quad \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

ё

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{ва} \quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (4)$$

Баробариҳои (1)-(4) айниятҳои асосии тригонометрӣ ном доранд.

Ҳар гуна айнияти тригонометрӣ барои ҳамаи қиматҳои имконпазири аргумент, яъне барои ҳамаи он қиматҳои аргументе, ки тарафи рост ва чап маъно дорад, дуруст аст. Ин айниятҳо имконият медиҳанд, ки ҳангоми дода шудани қимати яке аз функсияҳои тригонометрӣ қиматҳои боқимонда ёфта шаванд.

Мисолҳоро дида мебароем.

Мисоли 1. Маълум, ки $\cos\alpha=-0,6$ ва $90°<\alpha<180°$ аст. $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$-ро меёбем.

Ҳал. Аз айнияти (1) ҳосил мекунем: $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Азбаски синус дар чоряки II мусбат мебошад, бинобар ин пеш аз реша аломати плюс гирифтан лозим аст. Ҳамин тариқ,

$$\sin\alpha=\sqrt{1-0,36}=\sqrt{0,64}=0,8;$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0,8}{-0,6}=-\frac{4}{3}; \qquad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-0,6}{0,8}=-\frac{3}{4}.$$

Мисоли 2. Бигузор $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ва $90°<\alpha<180°$ бошад. $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$-ро меёбем.

Ҳал. Кунҷи α дар чоряки II тамом мешавад, ки дар он косинус, тангенс ва котангенс манфӣ мебошанд, бинобар ин

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}; \qquad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4};$$

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$$

? **1.** Айниятҳои асосии тригонометриро номбар намуда онҳоро исбот кунед. **2.** Барои кадом кунҷҳо айниятҳои (2) ва (3) дурустанд? **3.** Имконияти истифодаи ин айниятҳо дар чӣ зоҳир мегардад?

629. Қимати функсияҳои тригонометрии кунҷи α-ро ёбед, агар маълум бошад, ки

а) $\sin\alpha=0,6;\quad 0°<\alpha<90°$;

б) $tg\alpha=2;\quad 0°<\alpha<270°$;

в) $\sin\alpha=\frac{1}{k};\quad 180°<\alpha<270°$.

630. Ифодаро содда кунед:

а) $1-\cos^2\alpha$;

б) $\sin^2\alpha-1$;

в) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+ctg^2\alpha$;

г) $\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$;

д) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;

е) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;

ж) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;

з) $\frac{\cos^2\alpha-ctg^2\alpha}{tg^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

631. Ифодаро табдил диҳед:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$; б) $ctg\alpha-\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

632. Ифодаҳоро табдил диҳед:

а) $\dfrac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}$; б) $\dfrac{\sin\alpha\cdot ctg\alpha}{\cos^2\alpha}-tg\alpha\cdot\sin\alpha$;

б) $\left(1-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)$; г) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}:\left[1+\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\right]$.

633. Маълум, ки $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ аст. Агар:

а) $\cos\alpha=-0,6$ бошад, $\sin\alpha$-ро; в) $\cos\alpha=-\dfrac{15}{17}$ бошад, $tg\alpha$-ро;

б) $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ бошад, $\cos\alpha$-ро; г) $ctg\alpha=-2$ бошад, $\sin\alpha$-ро ёбед.

634. Қимати функсияҳои тригонометрии кунҷи α-ро ёбед, агар маълум бошад, ки

а) $\sin\alpha=0,96$; $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; д) $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\sin\alpha=-0,8$; $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; е) $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$; $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

в) $\sin\alpha=0,6$; $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; ж) $\cos\alpha=0,6$; $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

г) $\sin\alpha=-0,3$; $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$; з) $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$; $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Машқҳо барои такрор

635. Ифодаро содда кунед:

а) $\sqrt{242}-\sqrt{200}+\sqrt{8}$; б) $\sqrt{75}-0,1\sqrt{300}+\sqrt{27}$; в) $\sqrt{98}-\sqrt{72}+0,5\sqrt{8}$.

636. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\sqrt{5x-10}$ ҳангоми $x=2$; $x=2,2$; $x=5,2$; $x=22$;

б) $\sqrt{6-2y}$ ҳангоми $y=1$; $y=-1,5$; $y=-15$; $y=-37,5$;

в) $\sqrt{2a-b}$ ҳангоми $a=0$; $b=0$; $a=4$; $b=7$;

г) $\sqrt{m-4n}$ ҳангоми $m=0$; $n=-1$; $m=33$; $n=2$.

637. Касрро ихтисор намоед:

а) $\dfrac{(3x-6)^2}{(2-x)^2}$; б) $\dfrac{a^2+8a+16}{(2a+8)^2}$.

638. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}<5$; б) $\dfrac{3y}{2}-\dfrac{y}{3}\geq 2$.

639. Як адад назар ба дигараш 4,5 маротиба калонтар аст. Агар аз адади калон 54-ро тарҳ кунему ба адади хурд 72-ро ҷамъ кунем, ададҳои баробар ҳосил мешаванд. Ин ададҳо ба чанд баробаранд?

640. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}x+y=8,\\ xy=-20;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y=0,8,\\ xy=2,4.\end{cases}$

33. Табдилдиҳии ифодаҳои тригонометрӣ

Ифода тригонометрӣ номида мешавад, агар вай дар таркиби худ функсияҳои тригонометриро дошта бошад.

Масалан: $\sin x+\cos x$, $(\sin^2 x+1)\cdot \mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}^2 x+\dfrac{1}{1+\sin^2\alpha}+3$, $a^2+2ab\cos x$ ифодаҳои тригонометрианд.

Мо аллакай баъзе табдилоти соддатарини ифодаҳои тригонометриро ба монанди $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$.

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ муоина кардем. Ҳоло бошад мисолҳои нисбатан мураккабро дида мебароем.

Мисоли 1. Ифодаи $\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$-ро табдил медиҳем.

$$tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\alpha=\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\sin^2\alpha=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=tg^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Мисоли 2. Ифодаи $\mathrm{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)$-ро содда мекунем. Аз формулаҳои $\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ ва $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ истифода карда ҳосил мекунем: $\mathrm{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}(-\sin^2\alpha)=-\cos^2\alpha$.

Мисоли 3. Ифодаи $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ -ро содда мекунем.

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{2+2\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$

Мисоли 4. Айнияти $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$-ро исбот мекунем. Қисми чапи ин баробариро табдил медиҳем:

$$tg^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)=\sin^2\alpha(1+tg^2\alpha-1)=$$

$$=tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Мисоли 5. Айнияти $\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^2$-ро исбот мекунем.

Қисми рости ин баробариро табдил медиҳем.

$$(tg\alpha+ctg\alpha)^2=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\left(\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}\right)^2=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}.$$

? 1. Кадом формула алоқамандии байни функсияҳои $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$-ро ифода мекунад? 2. Ҳамаи он айниятҳои тригонометрие, ки ба шумо маълум аст номбар кунед. 3. Аломати қимати $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$-ро нишон диҳед, агар кунҷи α дар а) чоряки якуми координатҳо б) дар чоряки дуюми координатаҳо; в) дар чоряки сеюми координатҳо; г) дар чоряки чоруми координатӣ ҷойгир бошад.

641. Ифодаро содда кунед:

а) $1-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1$; в) $1-\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{ctg\alpha}$; г) $\dfrac{tg\alpha\cdot ctg\alpha-\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$.

642. Ифодаро табдил диҳед:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$; в) $(tg\alpha+1)^2+(tg\alpha-1)^2$; д) $ctg\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

б) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$; г) $(ctg\beta+1)^2+(ctg\beta-1)^2$; е) $tg\beta+\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$.

643. Айниятро исбот кунед:

а) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=\sin^2\alpha$; в) $1+\cos\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha$;

б) $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=2\sin^2\alpha$; г) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1$.

644. а) Ифодаи $1+tg^2\alpha$ ба чӣ баробар аст?

б) Ифодаи $1+ctg^2\alpha$ ба чӣ баробар аст?

в) Ифодаи $tg\alpha\cdot ctg\alpha$ ба чӣ баробар аст?

645. Оё синуси α ба а) $\dfrac{2}{3}$; б) 0,8; в) $\dfrac{3}{2}$; г) 2; д) 1; е) 3 баробар мешавад?

646. Айниятро исбот кунед:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; б) $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

647. Ифодаро содда кунед:

а) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot ctg^2\alpha$; б) $(tg\alpha-\sin\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2$.

Машқҳо барои такрор

648. Касрро ихтисор намоед:

$$\frac{6a^2-7a-3}{2a^2-a-3}.$$

649. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}2x+3y=-4,\\3x+8y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=-2,\\x^2+y^2=100.\end{cases}$

650. Қаиқи мотордор, ки суръаташ 20 км/соат аст, барои рафтуомади байни ду истгоҳи дарё 6 соату 15 дақиқа вақт сарф мекунад. Суръати оби дарёро ёбед, агар масофаи байни истгоҳҳо 60 км бошад.

651. Қубури якум ҳавзро нисбат ба қубури дуюм 3 соат зудтар бо об пур мекунад. Барои бо об пур кардани ҳавз ҳарду қубурро кушоданд ва баъд аз 10 соат қубури якумро бастанд; баъд аз он қубури дуюм дар алоҳидагӣ ҳавзро баъд аз 5 соату 45 дақиқа пур кард. Ҳар як қубур дар алоҳидагӣ дар чанд соат ҳавзро бо об пур карда метавонад?

652. Оё нуқтаи а) $M(1,5; -225)$; б) $N(-3; -90)$ ба графики функсияи $y=-100x^2$ тааллуқ дорад?

§12. ФОРМУЛАҲОИ МУВОФИҚОВАРӢ

Формулаҳои мувофиқоварӣ гуфта формулаҳоеро меноманд, ки дар онҳо функсияҳои тригонометрӣ аз аргументҳои

$$-\alpha; \quad \frac{\pi}{2}\pm\alpha; \quad \pi\pm\alpha; \quad \frac{3}{2}\pi\pm\alpha; \quad 2\pi\pm\alpha$$

ба воситаи функсияи аргументи α ифода карда мешаванд, дар ин ҷо α қимати дилхоҳи (имконпазири) аргумент мебошад.

Аввал фомулаҳои мувофиқоварии синус ва косинусро ҳосил мекунем.

Исбот мекунем, ки барои α-и дилхоҳ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \quad \text{ва} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha. \qquad (1)$$

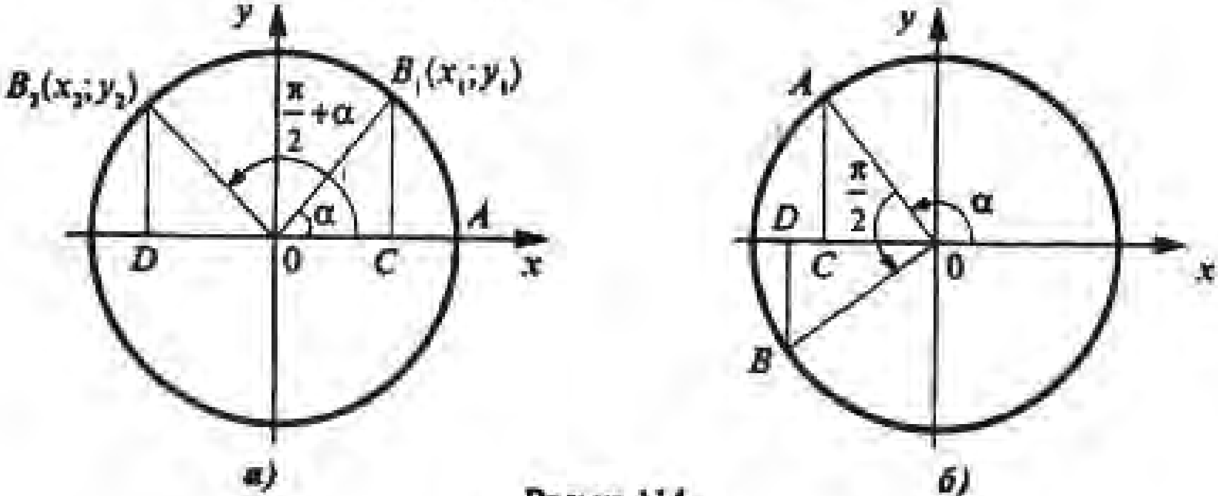
Радиуси OA-ро ки дарозиаш ба R баробар аст, ба кунҷи α ва ба кунҷи $\frac{\pi}{2}+\alpha$ гардиш медиҳем. Дар ин ҳолат радиуси OA мувофиқан ба радиусҳои OB_1 ва OB_2 бадал мешавад (расми 114, *а*). Аз нуқтаҳои B_1 ва B_2 ба тири Ox перпендикулярҳои B_1C ва B_2D-ро мегузаронем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=B_2D; \qquad \cos\alpha=OC.$$

Секунҷаҳои OB_1C ва OB_2D баробаранд; бинобар ин $B_2D=OC$.

Аз ин ҷо $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ агар кунҷи α дар чоряки II тамом шуда бошад, он гоҳ кунҷи $\frac{\pi}{2}+\alpha$ бояд дар чоряки III тамом шавад (расми 114, *б*)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-BD; \qquad \cos\alpha=-OC.$$



Расми 114

Секунчаи OAC ва BOD баробаранд: бинобар он $BD=AC$. Пас -$BD=OC$ ё $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

Аз айнияти исботшудаи (1) як қатор айниятҳои асосӣ ҳосил мешавад. Дар ифодаи (1) α - ро ба -α иваз карда ҳосил мекунем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha \qquad (2)$$

Барои $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ҳосил кардани чунин формула дар ифодаи (2) α -ро бо $\frac{\pi}{2}-\alpha$ иваз мекунем. Дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \text{ ёки } \sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Инак, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$. (3)

Аз ифодаҳои (2) ва (3) ҳосил мешавад:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\alpha, \quad tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha.$$

Ҳамин тавр, $ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}tg\alpha, \ ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$

Ҳамаи формулаҳои мувофиқовариро дар ҷадвал менависем. Аз ҷадвал қонуниятe, ки барои формулаҳои мувофиқоварӣ ҷой дорад, намоён аст. Ин қонуният имконият медиҳад, ки қоидае баён карда шаваду бо ёрии он формулаи дилхоҳи мувофиқоварӣ бе ёрии ҷадвалҳо навишта шавад.

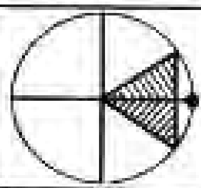
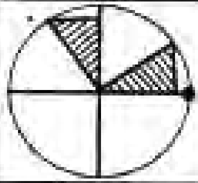
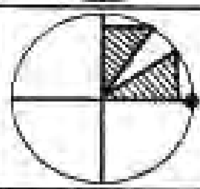
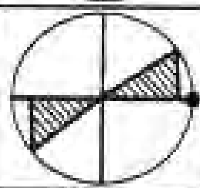
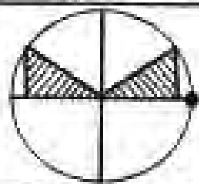
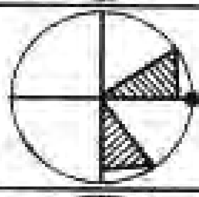
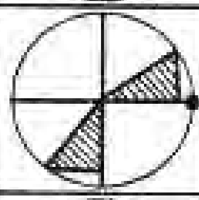
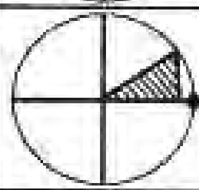
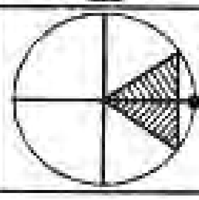
Агар кунҷи α кунҷи чоряки I бошад, аломати функсияи қисми рости баробарӣ бо аломати функсияи аввала якхела мешавад; барои кунҷҳои $\pi\pm\alpha$ ва $2\pi\pm\alpha$ номи функсияи аввала нигоҳ дошта мешавад; барои кунҷи $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ва $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ номи функсияи аввала иваз мешавад (синус ба косинус, косинус ба синус, тангенс ба котангенс, котангенс ба тангенс).

Мисоли 1. cos ($90^0+\alpha$)- ро ба воситаи функсияҳои кунҷи α ифода мекунем.

Ҳал. $\cos(90^0+\alpha)=\cos[90^0-(-\alpha)]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

Мисоли 2. tg($90^0+\alpha$) - ро ба воситаи функсияҳои тригонометрии кунҷи α ифода мекунем.

Ҳал. $tg(90^0+\alpha)=tg[90^0-(-\alpha)]=ctg(-\alpha)=-ctg\alpha$.

	Функсия / Аргумент Радиано (градусҳо)	cos	sin	tg	ctg	
1	$-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	
2	$\frac{\pi}{2}+\alpha(90^0+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	
3	$\frac{\pi}{2}-\alpha(90^0-\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	
4	$\pi+\alpha(180^0+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	
5	$\pi-\alpha(180^0-\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	
6	$\frac{3}{2}\pi+\alpha(270^0+\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	
7	$\frac{3}{2}\pi-\alpha(270^0-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	
8	$2\pi+\alpha(360^0+\alpha)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	
9	$2\pi-\alpha(360^0-\alpha)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	

? **1.** Формулаҳоеро нависед, ки онҳо алоқамандии байни синус ва косинуси як кунҷро ифода намоянд. Онҳоро исбот намоед. **2.** Формулаҳоеро нависед, ки онҳо тангенс ва котангенсро ба воситаи синус ва косинус ифода менамоянд. Онҳоро исбот намоед. **3.** Формулаҳои мувофиқовариро барои кунҷҳои $\frac{\pi}{2}+\alpha$ ва $\pi-\alpha$ нависед.

653. Бо функсияи тригонометрии кунҷи α иваз намоед:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; д) $tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; ж) $ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; е) $tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; з) $ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

654. Ба намуди функсияи тригонометрии кунҷи α оред:

а) $\cos(90^0-\alpha)$; в) $tg(90^0-\alpha)$; д) $\cos(90^0+\alpha)$; ж) $tg(90^0+\alpha)$;

б) $\sin(90^0-\alpha)$; г) $ctg(90^0-\alpha)$; е) $\sin(90^0+\alpha)$; з) $ctg(90^0+\alpha)$.

655. Қимати функсияҳои зеринро ёбед:

а) $\sin 240^0$; б) $\cos(-210^0)$; в) $tg 300^0$.

656. Функсияҳои тригонометрии додашударо ба функсияҳои тригонометрии аргументи мусбати аз 45^0 хурд оред:

а) $\sin 146^0$, $\cos 132^0$, $tg 174^0$, $ctg 164^0$;

б) $\sin 665^0$, $\cos 208^0$, $tg 350^0$, $ctg 365^0$;

в) $\sin(-343^0)$, $\cos(-454^0)$, $tg(-312^0)$, $ctg(-275^0)$;

г) $\sin(-1364^0)$, $\cos(-10742^0)$, $tg(-5600^0)$, $ctg(-3000^0)$.

657. Ифодаро табдил диҳед:

а) $\dfrac{tg(180^0-\alpha)\cos(180^0-\alpha)tg(90^0-\alpha)}{\sin(90^0+\alpha)ctg(90^0+\alpha)tg(90^0+\alpha)}$;

б) $\sin^2(26^0+\alpha)+\sin^2(244^0-\alpha)+tg(113^0+\alpha)\cdot ctg(67^0-\alpha)$.

658. Ифодаро содда кунед:

а) $\cos(\alpha-90^0)+\sin(\alpha-180^0)+tg^2(180^0-\alpha)+ctg^2(\alpha-180^0)$;

б) $\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

в) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^4\alpha$; д) $(tg\alpha+ctg\alpha)^2-(tg\alpha-ctg\alpha)^2$;

г) $\dfrac{\cos\alpha\cdot tg\alpha}{\sin^2\alpha}-ctg\alpha\cdot\cos\alpha$; е) $\dfrac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha}-\dfrac{ctg\alpha}{1+ctg^2\alpha}$.

659. Ифодаҳоро табдил диҳед:

а) $ctg\left(3\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg(7\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)$;

б) $\dfrac{\cos(-\alpha)\cos(180^0+\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^0+\alpha)}$; в) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{tg(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}$.

660. Исбот кунед, ки:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; в) $tg(45^0-\alpha)=ctg(45^0+\alpha)$;

б) $\cos(45^0+\alpha)=\sin(45^0-\alpha)$.

661. Ифодаҳоро содда кунед:

а) $\cos^2(\pi+x)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$;

б) $\sin(\pi+x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-\cos(2\pi-x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$;

в) $\dfrac{ctg^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{ctg^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}$; г) $\dfrac{ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{1-tg^2(\alpha-\pi)}\cdot\dfrac{ctg^2(2\pi-\alpha)-1}{ctg(\pi+\alpha)}$;

д) $tg^2(\alpha-360^0)\sin^2(\alpha-270^0)+\cos^2(360^0+\alpha)$.

Машқҳо барои такрор

662. Методи фосилаҳоро истифода бурда нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $(x+8)(x-5)>0$; б) $(x-14)(x+10)<0$.

663. Ҳисоб кунед:

а) $(-3^{-3})^2\cdot 27^3$; б) $\left(2\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{8}{15}-\dfrac{5}{9}$

664. Системаҳоро ҳал намоед:

а) $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y=10,\\ x-3y=5.\end{cases}$

665. Ғунҷоиши зарф 60 л буда, он бо кислота пур карда шудааст. Аз зарф миқдори муайяни кислотаро рехта, онро бо об пур карданд. Баъд, аз зарф боз ҳамон қадар маҳлул рехтанд. Дар маҳлули боқимондаи зарф 15 л кислота монд. Барои якум аз зарф чанд литр кислота рехтанд?

666. Барои аз майдони додашуда ғун доштани ҳосил ба бригадаи якум 12 рӯз ва ба бригадаи дуюм 75%-и ин вақт лозим аст. Баъд аз он ки бригадаи якум 5 рӯз кор карда, ба он бригадаи дуюм ҳамроҳ шуда, корро якҷоя тамом карданд. Бригадаҳо якҷоя чанд рӯз кор карданд?

§13 ДАРАҶАИ НИШОНДИҲАНДААШ РАТСИОНАЛӢ

34. Решаи дараҷаи n-ум ва хосиятҳои он

Решаи квадратӣ аз адади a ададест, ки квадраташ ба a баробар аст. Решаи дараҷаи n -ум аз адади a, ки дар ин ҷо n- адади натуралии дилхоҳи аз 1 калон мебошад, айнан ҳамин тавр муайян карда мешавад.

Т а ъ р и ф и 1. **Решаи дараҷаи n-ум аз адади a гуфта ададеро меноманд, ки дараҷаи n-уми он ба a баробар аст.**

М и с о л и 1. Решаи дараҷаи сеюм аз адади 125 ба 5 баробар аст, чунки $5^3=125$. Ададҳои 2 ва –2 решаҳои дараҷаи шашум аз адади 64 мебошанд, чунки $2^6=64$ ва $(-2)^6=64$ аст.

Мувофиқи ин таъриф решаи дараҷаи n-ум аз адади a аз ҳалли дилхоҳи муодилаи $x^n=a$ иборат аст. Функсияи $y=x^n$-ро дида мебароем. Маълум аст, ки дар фосилаи $[0;\infty)$ ин функсия дар қимати дилхоҳи n меафзояд ва тамоми қиматҳоро аз фосилаи $[0;\infty)$ қабул мекунад.

Аз тасдиқоти маълуми зерин истифода мебарем: бигзор функсияи f дар фосилаи I афзуншаванда (камшаванда) ва a қимати дилхоҳи он дар ин фосила бошад. Он гоҳ муодилаи $f(x)=a$ дар I решаи ягона дорад. Мувофиқи ин тасдиқот муодилаи $x^n=a$ барои ҳар гуна $a\in[0;\infty]$ решаи ғайриманфӣ дорад ва ин реша ягона аст. Решаро решаи арифметикии дараҷаи n-ум аз адади a меноманд ва ба намуди $\sqrt[n]{a}$ ишорат мекунанд. Адади n-ро нишондиҳандаи реша, худи адади a-ро ифодаи тахтирешагӣ меноманд.

Т а ъ р и ф и 2. **Решаи арифметикии дараҷаи n-ум аз адади a гуфта адади ғайриманфиеро меноманд, ки дараҷаи n-уми он ба a баробар аст.**

М и с о л и 2. Решаҳои арифметикии $\sqrt[3]{27}$ ва $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ -ро меёбем.

Ҳал. а) $\sqrt[3]{27}=3$, чунки $3^3=27$ ва $3>0$ аст; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}$, чунки $\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$ ва $\frac{3}{2}>0$ аст.

Барои қиматҳои ҷуфти n функсияи $y=x^n$ ҷуфт аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки агар $a>0$ бошад, муодилаи $x^n=a$ ғайр аз решаи $x_1=\sqrt[n]{a}$ боз решаи $x_2=-\sqrt[n]{a}$-ро дорад. Агар $a=0$ бошад, реша ягона аст: $x=0$; агар $a<0$ бошад, ин муодила реша надорад, чунки нишондиҳандаҳои ҷуфти дараҷаҳои ҳар гуна адад адади ғайриманфӣ аст.

Инак, ҳангоми ҷуфт будани n ду решаи дараҷаи n-ум аз адади дилхоҳи мусбати a вуҷуд дорад; решаи дараҷаи n-ум аз адади 0 ба нул баробар аст; решаи дараҷаи ҷуфт аз ададҳои манфӣ вуҷуд надорад.

Мисоли 3. Муодилаи $x^4=81$ ду реша дорад: ададҳои 3 ва –3. Хулоса, ду решаи дараҷаи чорум аз 81 мавҷуданд. Дар айни ҳол $\sqrt[4]{81}$ адади ғайриманфӣ аст, яъне $\sqrt[4]{81}=3$.

Барои қиматҳои тоқи n функсияи $y=x^n$ дар тамоми хати рости ададӣ меафзояд, соҳаи муайянии он маҷмӯи тамоми ададҳои ҳақиқӣ мебошад. Дар асоси тасдиқоти болоӣ меёбем, ки муодилаи $x^n=a$ барои қиматҳои дилхоҳи a, аз ҷумла ҳангоми $a<0$ будан низ, расо як реша дорад. Ин решаро барои қимати дилхоҳи a (аз он ҷумла дар қимати манфии a низ) бо $\sqrt[n]{a}$ ишорат мекунанд.

Инак, ҳангоми тоқ будани n -решаи дараҷаи n-ум аз адади дилхоҳи a вуҷуд дорад ва ягона аст. Барои решаҳои дараҷаи тоқ баробарии $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ дуруст аст. Ҳақиқатан $\left(-\sqrt[n]{a}\right)^n=(-1)^n\cdot\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=$ $=-1\cdot a=-a$, яъне адади $-\sqrt[n]{a}$ решаи дараҷаи n-ум аз $-a$ мебошад. Вале чунин реша барои қимати тоқи n ягона, яъне $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ аст. Баробарии $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ (ҳангоми тоқ будани n) имконият медиҳад, ки решаи дараҷаи тоқро аз адади манфӣ ба воситаи решаи арифметикии худи ҳамон дараҷа ифода намоем. Масалан, $\sqrt[5]{-25}=-\sqrt[5]{25}$; $\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5$.

Барои x-и дилхоҳ $\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}|x|\ \text{агар } n \text{ ҷуфт бошад,}\\ x,\ \text{агар } n \text{ тоқ бошад.}\end{cases}$

Чунон, ки мо алакай медонем, решаи дараҷаи дуиададро **решаи квадратӣ** меноманд ва нишондиҳандаи решаи 2-ро наменависанд (масалан, решаи квадратӣ аз 5 чун $\sqrt{5}$ навишта мешавад). Решаи дараҷаи сеюмро **решаи кубӣ** меноманд.

Мисоли 4. Муодилаҳои $x^5=-13$ ва $x^8=9$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Мувофиқи таърифи решаи дараҷаи n-ум адади x решаи дараҷаи панҷум аз –13 мебошад. Нишондиҳандаи реша адади тоқи 5 мебошад, бинобар ин чунин реша вуҷуд дорад ва ягона

аст: $\sqrt[5]{-13}=-\sqrt[5]{13}$. Ҷавобашро ин тавр менависанд: $x=-\sqrt[5]{13}$.

Мувофиқи таърифи решаи дараҷаи n-ум ҳалли муодилаи $x^8=9$ адади $\sqrt[8]{9}$ мебошад. Азбаски 8-адади ҷуфт аст, $-\sqrt[8]{9}$ низ ҳалли ин муодила мебошад. Инак, $x_1=\sqrt[8]{9}$, $x_2=-\sqrt[8]{9}$. Ҷавоб: $x=\pm\sqrt[8]{9}$.

Хосиятҳои асосии решаҳои арифметикии дараҷаи n-умро баён мекунем.

Барои ҳар гуна ададҳои натуралии n ва k, ки аз 1 калонанд ва ҳар гуна ададҳои ғайриманфии a ва b баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$1^0.\ \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\quad 2^0.\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq 0)\ ;\quad 3^0.\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}\ ;$$

$$4^0.\ \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}\ ;\quad 5^0.\ \sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k.$$

Хосияти 1^0-ро исбот мекунем. Мувофиқи таъриф $\sqrt[n]{ab}$ адади ғайриманфиест, ки дараҷаи n –уми он ба ab баробар аст. Адади $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ ғайриманфӣ аст. Бинобарин $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=a\cdot b$-ро санҷидан кофист, ки он аз хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандааш натуралӣ ва таърифи решаи дараҷаи n -ум бармеояд:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab.$$

Се хосияти зерин ба монанди 1^0 исбот карда мешаванд:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\geq 0 \text{ ва } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b};\quad \sqrt[n]{a}\geq 0 \text{ ва } \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k=a^k;$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\geq 0 \text{ ва } \left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k=\left(\sqrt[k]{a}\right)^k=a.$$

Акнун хосияти 5^0-ро исбот мекунем. Барои ин нишон медиҳем, ки дараҷаи n -уми адади $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k$ ба a^k баробар аст:

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn}=\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k=a^k.$$

М и с о л и 5. Ифодаҳоро табдил медиҳем:

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; в) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; г) $\sqrt[21]{128}$; д) $\sqrt[7]{128^3}$;

Ҳал. а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{32}=2$; (хосияти 1^0) б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}$ (хосияти 2^0) в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}=\sqrt[15]{7}$ (хосияти 3^0) г) $\sqrt[21]{128}=\sqrt[21]{2^7}=\sqrt[3]{2}$ (хосияти 4^0) д) $\sqrt[7]{128^3}=\left(\sqrt[7]{128}\right)^3=2^3=8$.

6^0. Барои ададҳои дилхоҳи a ва b, ки шарти $0<a<b$-ро қонеъ менамоянд, баробарии $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ ҷой дорад.

Исбот. Баръакс фарз мекунем, ки $\sqrt[n]{a}\geq\sqrt[n]{b}$ аст. Он гоҳ мувофиқи хосияти дараҷаҳои нишондиҳандаашон натуралӣ

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \ge \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$, яъне $a \ge b$ мешавад. Ин ба шарти $a<b$ мухолиф аст.

М и с о л и 6. Ададҳои $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[5]{3}$-ро муқоиса мекунем.

Ҳал. $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[5]{3}$ -ро ба намуди решаҳои нишондиҳандаашон якхела ифода мекунем: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32}$ ва $\sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{27}$.
Аз нобаробарии 32>27 ва хосияти 6^0 $\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$ бармеояд.

М и с о л и 7. Нобаробарии $x^6>20$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Ин нобаробарӣ ба нобаробарии $x^6-20>0$ баробарқувва аст. Аз методи фосилаҳо истифода мебарем. Муодилаи $x^6-20=0$ ду реша дорад: $\sqrt[6]{20}$ ва $-\sqrt[6]{20}$. Ин ададҳо хати ростро ба се фосила ҷудо мекунанд. Азбаски ҳангоми $x=0$ будан $x^6-20<0$ аст, пас фосилаи $\left(-\sqrt[6]{20};\ \sqrt[6]{20}\right)$ ҳалли нобаробарӣ нест. Ҷавоб: $\left(-\infty;-\sqrt[6]{20}\right)\cup\left(\sqrt[6]{20};\infty\right)$

? Таърифи решаи дараҷаи n-умро диҳед. 2. Решаи арифметики дараҷаи n - ум гуфта чиро мегӯянд? 3. Хосиятҳои асосии решаи арифметикиро баён кунед.

667. Ҳаққонӣ будани баробарии зеринро санҷед:

а) $\sqrt[4]{16} = 2$; б) $\sqrt[3]{-1}=-1$; в) $\sqrt[4]{625}=5$; г) $\sqrt[12]{1} = 1$; д) $\sqrt[20]{0} = 0$; е) $\sqrt[5]{-243}=-3$.

668. Ҳисоб кунед:

а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[4]{81}$; г) $\sqrt[6]{64}$; д) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$.

669. Содда кунед:

а) $\left(-\sqrt[4]{11}\right)^4$; б) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5$; в) $\left(3\sqrt[3]{-3}\right)^3$; г) $\sqrt[7]{-3^7}$; д) $7\sqrt[8]{(-3)^8}$.

670. Ҳисоб кунед:

а) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; б) $\sqrt[4]{48\cdot 27}$; в) $\sqrt[3]{160\cdot 625}$; г) $\sqrt[3]{75\cdot 45}$; д) $\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{9}$.

671. Ададҳоро муқоиса кунед:

а) $\sqrt[3]{7}$ ва $\sqrt[6]{40}$; б) $\sqrt{5}$ ва $\sqrt[8]{500}$; в) $\sqrt[3]{4}$ ва $\sqrt[10]{87}$.

672. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x^3=4$; б) $x^3+4=0$; в) $x^4=10$; г) $x^6=5$; д) $x^5=3$.

673. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $x^3<5$; б) $x^4<3$; в) $x^7\ge 11$; г) $x^{10}>2$; д) $x^6>2$.

Машқҳо барои такрор

674. Содда намоед:

а) $2^2\cdot 4^2\cdot 8^2\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2$; б) $5^3\cdot 15^3\cdot 25^3\cdot\left(\frac{1}{125}\right)^3$; в) $(49)^4\cdot\left(-\frac{1}{343}\right)^4\cdot 21^4$.

675. Ҳалли системаро ҳамчун функсияи параметри a ёбед:

а) $\begin{cases} 5ax-y=8, \\ -ax+y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x+2ay=1, \\ 5x+4ay=2. \end{cases}$

35. Дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ ва хосиятҳои он

Хосиятҳои дараҷаи адади нишондиҳандааш бутунро хотиррасон мекунем.

Барои ададҳои дилхоҳи a ва b, ададҳои бутуни ихтиёрии m ва n баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ a^m : a^n = a^{m-n}\ (a\neq 0),\ (a^m)^n = a^{m\cdot n},$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n,\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ (b\neq 0),\ a^1 = a,\ a^0 = 1\ (a\neq 0)$$

Агар $m>n$ бошад, ҳангоми $a>1$ будан $a^m>a^n$ ва ҳангоми $0<a<1$ будан $a^m<a^n$ аст.

Дар ин банд ба ифодаҳои намуди $2^{0,3}$, $8^{\frac{5}{7}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$ва ғайра маъно бахшида, мафҳуми дараҷаи ададро ҳангоми адади дилхоҳи ратсионалӣ будани он муайян менамоем.

Бигузор $r=\frac{m}{n}$ адади ратсионалӣ, яъне m адади бутун ва n адади натуралӣ бошад. Қимати ифодаи $a^r=a^{\frac{m}{n}}$- ро ҳамчун ададе, ки дараҷаи n -уми он ба a^m баробар аст, яъне $(a^{\frac{m}{n}})^n=a^m$ аст, муайян мекунем. Мувофиқи таърифи решаи дараҷаи n -ум ин чунин маъно дорад, ки адади a решаи дараҷаи n -ум аз адади a^m мебошад. Хулоса, таърифи зерин ҷой дорад.

Т а ъ р и ф. **Дараҷаи адади $a>0$-и нишондиҳандааш ратсионалии $r=\frac{m}{n}$ гуфта адади $\sqrt[n]{a^m}$-ро меноманд, ки ин ҷо m -адади бутун, ва n -адади натуралӣ (n>1) аст.**

Инак, мувофиқи таъриф $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Дараҷаи адади 0 фақат барои нишондиҳандаҳои мусбат муайян карда шудаанд, мувофиқи таъриф барои $r>0$-и дилхоҳ $0^r=0$ аст.

М и с о л и 1. Мувофиқи таърифи дараҷаи нишондиҳандааш касрӣ: $7^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7}$; $2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32}$; $a^{-\frac{7}{15}}=\sqrt[15]{a^{-7}}$.

М и с о л и 2. Қимати ифодаҳои ададии $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $128^{-\frac{2}{7}}$-ро меёбем.

Ҳал. Аз таърифи дараҷаи нишондиҳандааш касрӣ ва хосиятҳои решаҳо истифода карда, ҳосил мекунем:

$$8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8},\quad 8^{\frac{1}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}=2;\ 81^{\frac{3}{4}}=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^3=27;$$

$$128^{-\frac{2}{7}} = (\sqrt[7]{128})^{-2} = (\sqrt[7]{2^7})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

Аз таърифи дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ бармеояд, ки барои адади мусбати дилхоҳи a ва адади ратсионалии дилхоҳи r адади a^r мусбат аст.

Адади ратсионалии дилхоҳро ба намуди каср бо тарзҳои гуногун навиштан мумкин аст, чунки барои ададҳои натуралии дилхоҳи k баробарии $\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}$ ҷой дорад. Қимати a^r низ аз шакли навишти адади ратсионалии r вобаста нест. Ҳақиқатан, аз хосиятҳои решаҳо бармеояд, ки

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \left(\sqrt[nk]{a^{m}}\right)^{k} = \sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Ҳангоми $a<0$ будан a^r муайян карда намешавад. Инро дар мисоли зерин нишон медиҳем. Бигзор $(-8)^{\frac{1}{3}}$ дода шуда бошад. Маълум, ки он ба $(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-\sqrt[3]{2^3}=-2$ баробар мешавад. Вале, агар ба ҷои $\frac{1}{3}$ касри ба он баробари $\frac{2}{6}$ -ро гузорем $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$ ба мухолифат омада мерасем.

Барои ададҳои ратсионалии дилхоҳи r,s ва ададҳои мусбати дилхоҳи a ва b баробариҳои зерин ҳақонианд:

1^0. $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$; 2^0. $a^r:a^s=a^{r-s}$; 3^0. $(a^r)^s=a^{rs}$;

4^0. $(ab)^r=a^r b^r$; 5^0. $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$.

Хосиятҳои 1^0, 3^0 ва 4^0-ро исбот мекунем. Дурустии хосияти 2^0 бевосита аз 1^0 бармеояд, чунки $a^r=a^{r-s+s}=a^{r-s}\cdot a^s$. Пас, $a^r:a^s=\frac{a^r}{a^s}=\frac{a^{r-s}\cdot a^s}{a^s}=a^{r-s}$. Бигузор $r=\frac{m}{n}$ ва $s=\frac{p}{q}$ бошад, ки ин ҷо n ва q- ададҳои натуралӣ, m ва p ададҳои бутунанд.

$$a^r\cdot a^s=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{r+s}$$

$$(a^r)^s=\sqrt[q]{(a^r)^p}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}=\sqrt[nq]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{rs}$$

$$(ab)^r=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^m b^m}=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m}=a^r\cdot b^r$$

Мисоли 3. Қимати ифодаи $\left(\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\right):5^{-\frac{3}{4}}$ –ро меёбем.

Ҳал. $(\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}):5^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3\cdot 5}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[4]{5}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=$

$$=\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{5}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=10$$

Мисоли 4. Ифодаро табдил медихем:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{a^{1,2}-b^{2,3}}{a^{0,8}+a^{0,4}\cdot b^{0,7}+b^{1,4}}$.

Ҳал.

а) $$\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}$$

б) $$\frac{a^{1,2}-b^{2,3}}{a^{0,8}+a^{0,4}\cdot b^{0,7}+b^{1,4}}=\frac{\left(a^{0,4}\right)^3-\left(b^{0,7}\right)^3}{\left(a^{0,4}\right)^2+a^{0,4}\cdot b^{0,7}+\left(b^{0,7}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left[a^{0,4}-b^{0,7}\right]\left[\left(a^{0,4}\right)^2+a^{0,4}\cdot b^{0,7}+\left(b^{0,7}\right)^2\right]}{\left(a^{0,4}\right)^2+a^{0,4}\cdot b^{0,7}+\left(b^{0,7}\right)^2}=a^{0,4}\cdot b^{0,7}$$

6⁰. Бигузор r-адади ратсионалӣ ва $0<a<b$. Он гоҳ ҳангоми $r>0$ будан $a^r<b^r$ аст, ҳангоми $r<0$ будан $a^r>b^r$ мешавад.

7⁰. Барои ададҳои ратсионалии дилхоҳи r ва s аз нобаробарии $r>s$ бармеояд, ки ҳангоми $a>1$ будан, $a^r>a^s$ аст, ҳангоми $0<a<1$ будан $a^r<a^s$ аст.

Мисоли 5. Ададҳои $\sqrt[5]{8}$ ва $2^{\frac{2}{3}}$-ро муқоиса мекунем. $\sqrt[5]{8}$-ро ба намуди дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ менависем:

$\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$. Аз рӯи хосияти 7⁰ $2^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{3}{5}}$-ро ҳосил мекунем, чунки $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$ аст. Инак, $2^{\frac{2}{3}}>\sqrt[5]{8}$ мешавад.

Мисоли 6. Ададҳои 2^{300} ва 3^{200}-ро муқоиса мекунем:

Ин ададҳоро ба намуди дараҷаҳои нишондиҳандаашон баробар менависем:

$2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}$; $3^{200}=(3^2)^{100}=9^{100}$. Азбаски $8<9$ аст, пас аз рӯи хосияти 6⁰ ҳосил мекунем: $8^{100}<9^{100}$, яъне $2^{300}<3^{200}$.

? 1. Таърифи дараҷаи адади нишондиҳандааш ратсионалиро диҳед. 2. Хосиятҳои дараҷаи адади нишондиҳандааш бутунро номбар кунед. 3. Хосиятҳои дараҷаи адади нишондиҳандааш ратсионалиро баён кунед.

676. Ифодаро ба намуди дарачаи нишондиҳандааш ратсионалӣ нависед:

а) $\sqrt{11}$; б) $\sqrt[3]{5^5}$; в) $\sqrt[7]{3^{17}}$; г) $\sqrt[9]{6^{21}}$; д) $\sqrt[3]{5^2}$; е) $\sqrt[3]{7^{-11}}$; ж) $\sqrt[5]{2^{-15}}$.

677. Ифодаро ба намуди реша аз адад нависед:

а) $7^{\frac{4}{7}}$; б) $4^{1,25}$; в) $3\cdot 2^{-\frac{3}{5}}$; г) $2\cdot 8^{\frac{2}{11}}$; д) $a^{\frac{3}{8}}$; е) $2b^{-\frac{2}{3}}$; ж) $b^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{2}{7}}$.

678. Қимати ифодаи ададиро ёбед:

а) $16^{\frac{5}{4}}$; б) $243^{0,4}$; в) $8^{3\frac{1}{3}}\cdot 81^{0,25}$; г) $8^{\frac{1}{2}}:\left(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right)$; д) $\left(\frac{27^{2}}{125^{6}}\right)^{\frac{3}{9}}$.

679. Кадоме аз ададҳои зерин калон аст:

а) $\sqrt[7]{3^3}$ ё $3^{\frac{19}{43}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$ ё $\sqrt[7]{\frac{1}{32}}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{7}}$ ё $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{14}}$.

680. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{a-b}{a^{0,5}+b^{0,5}}$; б) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$; в) $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$; г) $\frac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+z}$.

Машқҳо барои такрор

681. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x-3}$; б) $\frac{a}{x-2}=\frac{x+1}{x^2-4}$; в) $\frac{2}{x-3}=\frac{x+5}{x^2-9}$.

682. Коргар кореро дар 12,5 соат ичро карда метавонад, аммо рафиқи ӯ 0,03 қисми ин корро дар 1,5 соат ичро мекунад. Ҳамаи корро ҳар дуи онҳо якҷоя дар чанд вақт ичро карда метавонанд?

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

Истилохи «тригонометрия» аз калимаи юнонӣ «тригон»-секунча ва «метрия»-чен мекунам пайдо шудааст ва дар якҷоягӣ маънои «чен кардани секунҷа»-ро дорад.

Дар инкишофи тригонометрия математикҳои Ҳиндустон дар асрҳои V-XII ҳиссаи муҳим гузоштаанд. Ба онҳо муносибатҳое маълум буданд, ки бо ифодаҳои ҳозира чунин навишта мешаванд: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\cos\alpha=\sin(90^0-\alpha)$

Теоремаи синусҳо аз тарафи математики ҳиндустонӣ Брахмагупай (598-660) нашр шудааст. Онро Насуруддини Тӯсӣ (1201-1274) исбот кардааст.

Назарияи тригонометрияро Ҷамшеди Кошонӣ (вафоташ с.1430) ва Алоуддини Қушчӣ (1402-1474) дар асарҳои худ низ инкишоф додаанд. Масалан, Қушчӣ барои ҳисоб кардани элементҳои секунча аз теоремаи синуси косинусҳо истифода бурдааст.

Дар расадхонаи Улуғбек (Самарқанд) Қушчӣ усули хеле саҳеҳи тартиб додани ҷадвалҳои тригонометрӣ кор карда баромада буд. Ҷадвалҳои қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ, ки аз тарафи олимони ин расадхона сохта шудаанд, чунон саҳеҳанд, ки онҳо аз ҷадвалҳои ҳозиразамон танҳо бо рақами нуҳум пас аз вергул фарқ мекунанд.

Ба туфайли асарҳои риёзидонони Осиёи Миёна тригонометрия ба фанни мустақил табдил ёфт, ки дар он на танҳо масъалаҳои геометрия, балки муносибатҳои алгебравии байни функсияҳои тригонометрӣ пайваста тадқиқ гардидаанд.

Далели равшани он тадқиқотҳои таърихшинос Браунмюл (1853-1908) шуда метавонад. Ӯ асарҳои доир ба риёзиёт навиштаи Баттонӣ, Абулвафои Бузаҷонӣ, Насуриддини Тусӣ ва олимони мактаби илмии Улуғбек-Қозизодаи Румӣ, Ҷамшеди Кошонӣ ва Алоуддини Қушчиро ба фикри он ки гӯё олимони Осиёи Миёна дар фан ягон навигарие дохил накардаанд муқобил баромада, хотиррасон мекунад, ки Насуриддини Тусӣ 200 сол пештар аз Аврупоӣ Региомонтан (1436-1476) мафҳуми тригонометрияро пешниҳод карда дар асари худ «Рисола оид ба чортарафаи пурра» ба чоп мерасонад. Истилоҳи «синус»-ро бори аввал ҳиндуҳо дохил карданд. Онҳо нисфи хордаро, ки камонро дарбар мегирад, хати синус номида ба вай номи «ҷива» дода буданд. Дар асри IX риёзидони Осиёи Миёна «ҷива»-и ҳиндуҳоро «ҷайб» тарҷума намуданд. Олимони Аврупои Ғарбӣ бошанд ба калимаи охирин «sinuc» ном гузоштаанд. Эйлер баъди якчанд аср аввалин шуда барои мухтасарӣ ба ҷои «sinuc» «sin»-ро қабул кард.

Дар асрҳои IX-XV математика дар Осиёи Миёна вобаста ба зарурияти ҳалли масъалаҳои амалии астрономия, ҷуғрофия ва геодезия тараққӣ мекард. Олимони Осиёи Миёна шаш хатти тригонометрии синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косекансро муҳокима карданд. Барои ҳалли масъалаи муайян кардани баландии офтоб астрономи араб Баттонӣ (852-929) ҷадвали на он қадар калони қиматҳои котангенсро тартиб дода буд. Астроном ва математик Абулвафои Бузаҷонӣ бо калимаҳо муносибатҳои алгебравии байни функсияҳои тригонометриро ифода карда буд, вай ҷадвали синусҳоро бо фосилаи 10 то саҳеҳи (1:60^{0}) ва инчунин ҷадвали тангенсҳоро тартиб дода аст. Бояд қайд кард, ки Абулвофои Бузаҷонӣ ва Баттониро асосгузори тригонометрия номидаанд. Ба хотири кашфиётҳои нуҷумияш ба яке аз тануравҳои Моҳ номи Абдулвафоро гузоштаанд.

Машқҳои иловагӣ ба боби IV

Ба параграфи 10

683. Ифодаро содда кунед:

а) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

б) $\dfrac{\sin^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha - 1} + tg\alpha \cdot ctg\alpha$; в) $\dfrac{\sin^2\alpha - tg^2\alpha}{\cos^2\alpha - ctg^2\alpha}$.

684. Айниятро исбот кунед.

а) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; б) $\frac{\cos^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-1}=tg^2\alpha$

в) $(1+tg^2\alpha)\cos^2\alpha+1$; г) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{tg^2\alpha}=1$.

685. Қимати синус ва косинуси α-ро ёбед, агар:

1) $\alpha=750^0$; 2) $\alpha=1260^0$; 3) $\alpha=810^0$; 4) $\alpha=390^0$.

686. Чӣ гуна аломат доранд:

1) $\sin181^0$; 2) $\cos280^0$; 3) $\mathrm{tg}175^0$; 4) $\mathrm{ctg}358^0$; 5) $\cos(-116^0)$.

687. Қимати ифодаро ёбед:

а) $5\sin\frac{\pi}{2}+4\cos0-3\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\pi$; б) $\sin(-\pi)-\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+2\sin2\pi-tg\pi$;

в) $3-\sin^2\frac{\pi}{3}+2\cos^2\frac{\pi}{2}-5tg^2\frac{\pi}{4}$; г) $3\sin^2\frac{\pi}{2}-4tg^2\frac{\pi}{4}-3\cos^2\frac{\pi}{6}+3ctg^2\frac{\pi}{2}$.

Ба параграфи 11

688. Исбот кунед, ки ин баробариҳо айният мебошанд:

а) $tg^2\alpha-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\cdot tg^2\alpha$; б) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{tg^2\alpha+1}{tg^2\alpha-1}$;

в) $\frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=ctg\alpha-tg\alpha$; г) $\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\frac{1}{1+ctg^2\alpha}=1$.

689. Чунин қиматҳои α-ро муайян намоед, ки барояш ифодаҳои зерин маъно надоранд:

а) $\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$; б) $\cos\alpha\cdot tg\alpha$; в) $\frac{ctg\alpha-1}{tg\alpha-1}$; г) $tg\alpha\cdot ctg\alpha$.

690. Ифодаро содда кунед:

а) $\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha}+\frac{2}{1-\cos\alpha}}$; б) $1-\frac{\sin^2\alpha}{1+ctg\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha}$.

691. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha-\sin^2\alpha$; в) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-ctg^2\alpha(1+\sin^2\alpha)$;

б) $\sin^2\beta+\cos^2\beta-\frac{1}{\sin^2\beta}$; г) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha(\cos^2\alpha+1)$.

692. Айниятро исбот кунед:

а) $\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha=\cos\alpha\cdot ctg\alpha$; в) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

б) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{ctg^2\alpha}=1$; г) $\frac{\sin a}{\cos a\cdot tg^2a}=ctga$.

Ба параграфи 12

693. Ифодаро содда кунед:

а) $\sin(\alpha-90^0)$; б) $\cos(\alpha-\pi)$; в) $tg(\alpha-270^0)$;

г) $ctg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; д) $tg(360^0-\alpha)\cdot ctg(180^0-\alpha)$.

694. Ифодаро содда кунед:

а) $\sin\alpha+\sin(90^0+\alpha)+\sin(180^0+\alpha)+\sin(270^0+\alpha)+\sin(360^0+\alpha)$;

б) $\cos(\alpha+40^0)+\cos(\alpha+130^0)+\cos(\alpha+220^0)+\cos(\alpha+310^0)$;

в) $\cos(90^0+\alpha)\cos(180^0+\alpha)[tg(180^0+\alpha)+tg(270^0+\alpha)]$;

г) $\sin 25^0\cos 65^0+\sin^2 115^0-\cos^2 245^0+\sin^2 295^0\cos^2 335^0$.

695. Кадомаш калон?:

а) $\sin 26^0$ ё $\cos 40^0$; б) $\sin 51^0$ ё $\cos 22^0$.

696. Айниятро исбот кунед:

а) $\sin(45^0+\alpha)=\cos(45^0-\alpha)$; б) $\cos(45^0+\alpha)=\sin(45^0-\alpha)$;

в) $\cos(45^0+\alpha)\cos(45^0-\alpha)-\sin(45^0+\alpha)\sin(45^0-\alpha)=0$;

г) $\sin 15^0+tg30^0\cos 15^0=\frac{\sqrt{6}}{3}$; д) $0{,}5(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)=\sin(30^0+\alpha)$.

697. Ифодаро содда кунед.

а) $\frac{ctg\,\alpha-1}{ctg\,\alpha+1}-ctg\,(45^0+\alpha)$; б) $\frac{3-tg^2 15^0}{3tg^2 15^0-1}$; в) $\frac{tg(45^0-\alpha)+tg\alpha}{1-tg(45^0-\alpha)+tg\alpha}$.

Ба параграфи 13

698. Ҳисоб кунед.

а) $\sqrt[3]{3^{12}}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[4]{255^4}$; г) $\sqrt{-\frac{1}{7}}$;

д) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{24}}$; е) $\sqrt[3]{-34^3}$; ж) $\sqrt[4]{-8^7}$; з) $\sqrt[3]{343\cdot 0{,}125}$.

699. Аз хосиятҳои асосии реша истифода бурда ҳисоб кунед.

а) $\left(\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}\right):\sqrt[3]{250}$; б) $\left(\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}\right):\sqrt[4]{5}$;

в) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$; г) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$.

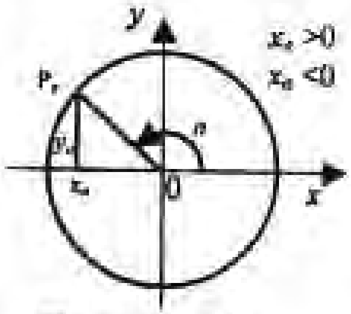
700. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; б) $\frac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}$; в) $\left(a^4\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$.

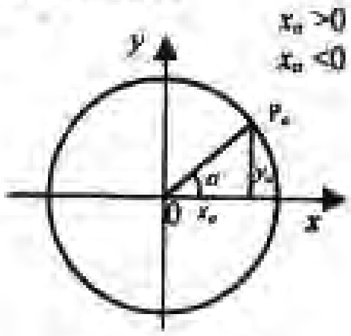
ҶАВОБҲО

593. 0,5. **594.** а) 2, –1; б) $-\frac{1}{2}$, 2; **595.** $s=\frac{3}{2}$. **596.** а) $\frac{\pi}{180}$; б) $\frac{\pi}{12}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{7\pi}{18}$; д) $\frac{2\pi}{3}$; ж) $\frac{5}{6}\pi$; з) $\frac{16}{9}\pi$; и) $\frac{7}{4}\pi$; к) $\frac{50}{9}\pi$. **597.** а) 12^0; б) $22^030'$; в) 120^0. **598.** а) Дар чоряки I: б) дар чоряки III; в) дар чоряки III. **599.** а) $(a-b)$; б) 4; в) -2; г) ифодаи додашуда муайян нест, $ctg\pi$ вуҷуд надорад. **600.** а) $\frac{7}{3}\sqrt{3}$; б) $6\sqrt{3}-2$; в) $-b$; г) $-(n+p)$.

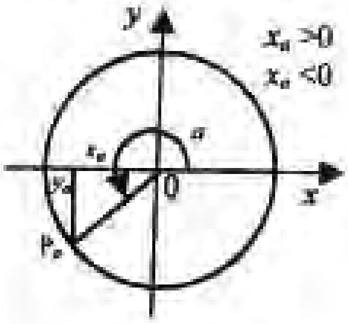
601. а) 2,5; б) 1,2; в) 0; г) $3\sqrt{3}$; д) 6; е) 6. **602.** а) $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\alpha=\frac{5\pi}{2}$; $\alpha=\frac{9\pi}{2}$; б) $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\alpha=\frac{5\pi}{2}$; $\alpha=\frac{9\pi}{2}$; в) $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\alpha=\frac{3\pi}{2}$; $\alpha=\frac{5\pi}{2}$. **603.** а) $\varphi=\frac{\pi}{6}$; $5\frac{\pi}{6}$; б) $\varphi=0$; 2π; в) $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$; г) $\varphi=0, \varphi=\pi, \varphi=2\pi$. **604.** а) Расми 115; б) расми 116; в) расми 117; г) расми 118.



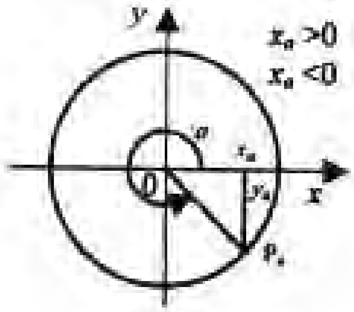
Расми 115



Расми 116



Расми 117



Расми 118

605. $\sin 67^0>0$, $\cos 267^0<0$, $\cos 375^0>0$, $\sin(-68^0)<0$, $\cos(-68^0)>0$, $\sin 2>0$ ҳосили зарб мусбат. **606.** а) $\alpha=\frac{\pi}{2}(90^0)$; $\alpha=3\frac{\pi}{2}(270^0)$; б) $\alpha=0$; $\alpha=\pi(180^0)$; $2\pi(360^0)$. **607.** а) Ҳа; б) не; в) ҳа; г) не. **608.** а) Ҳа; б) ҳа; в) ҳа. **609.** а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) 1; г) –1. **610.** а) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$; б) $6\sqrt{3}-2$; в) $-b$.

611. а) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) -1. **512.** $\frac{76a^3-8}{a^9}$. **613.** а) 47,94; б) 1,68. **614.** (8;–6), (–6;8) **615.** –1. **616.** а) (–4;4); б) $\left(-\infty;\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};\infty\right)$. **617.** P=36см; S=80см^2. **618.** 670. **619.** $\sin\alpha$ -мусбат; $\cos\alpha$ -мусбат; $\mathrm{tg}\,\alpha$ -мусбат; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ -мусбат, б) $\sin\alpha$ -мусбат; $\cos\alpha$ -манфя; $\mathrm{tg}\,\alpha$ -манфя; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ -манфя, в) $\sin\alpha$ -мусбат; $\cos\alpha$ -мусбат; $\mathrm{tg}\,\alpha$ -мусбат; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ -мусбат; г) $\sin\alpha$ -манфя; $\cos\alpha$ -манфя; $\mathrm{tg}\,\alpha$ -мусбат; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ -мусбат; д) $\sin\alpha$ -манфя; $\cos\alpha$ -мусбат; $\mathrm{tg}\,\alpha$ -манфя; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ -манфя. **620.** а) $\sin67^0>0$; б) $\cos267^0<0$; в) $\cos375^0>0$, г) $\sin(-68^0)<0$; д) $\cos(-68^0)>0$. **621.** а) $\sin325^0<0$; б) $\cos275^0>0$; в) $\mathrm{tg}420^0>0$; г) $\mathrm{ctg}420^0>0$; д) $\sin25^0>0$. **622.** а) I; б) I; II; III; V, в) I; II. **623.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0; в) $-\frac{1}{2}$; г) 0; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **624.** а) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **625.** а) 5; б) $13\sqrt{3}$. **626.** а) $(-\infty;0)\cup(3;\infty)$; б) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(2;\infty)$. **627.** $2^2\cdot3\cdot7$. **628.** а) 205,9; б) $25\frac{34}{81}$. **629.** а) $\cos a$=0,8; $\mathrm{tg}\,\alpha$ =0,75; $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{4}{3}$ ctg, б) $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha=-\frac{1}{5}$; $\mathrm{tg}\,\alpha$ =0,5; в) $\mathrm{ctg}\,\alpha=k$, $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\cos\alpha=-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$. **630.** а) $\sin^2\alpha$; б) $-\cos^2\alpha$; в) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; г) $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot ctg\beta$; д) $\mathrm{ctg}^2\alpha$; е) $1+a$; ж) $1+a$; з) $-\mathrm{ctg}^2\alpha$. **631.** а) 2; б) $\frac{ctg\alpha}{1+\sin\alpha}$. **632.** а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; б)1; в) $\cos\alpha$; г) $0{,}5\sin\alpha$. **633.** а)0,8; б) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $-\frac{8}{15}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **634.** а) $\cos\alpha$=0,28; $\mathrm{tg}\,\alpha$=3,43; $\mathrm{ctg}\,\alpha$=–0,29; б) $\cos\alpha$=0,6 ; $\mathrm{tg}\,\alpha=-1\frac{1}{6}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$=0,75; в) $\cos\alpha$=0,8; $\mathrm{tg}\,\alpha$=0,75; $\mathrm{ctg}\,\alpha=1\frac{1}{3}$; г) $\cos\alpha$=–0,95; $\mathrm{tg}\,\alpha$=0,32; $\mathrm{ctg}\,\alpha$=3,18, д) $\sin\alpha$=0,866; $\mathrm{tg}\,\alpha$=–1,73; $\mathrm{ctg}\,\alpha$=–0,577, е) $\sin\alpha=-0{,}8$; $\mathrm{tg}\,\alpha=-1\frac{1}{3}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$, ж) $\sin\frac{\alpha}{2}$=0,94 ; $\mathrm{tg}\,\alpha$=8,6 ; $\mathrm{ctg}\,\alpha$= –0,35, з) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\mathrm{ctg}a=\frac{2}{\sqrt{5}}$. **635.** а) $3\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{2}$. **636.** а) 180; б) 48; в)6; г) 24. **637.** 9; $\frac{1}{4}$. **638.** а) $(-\infty;6)$; б) $\left[1\frac{5}{7};\infty\right)$. **639.** (36 ва 152). **640.** а) (10; –2);

(–2;10), б) (2;1,2); (–1,2; –2). **641.** а) $-\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $\cos^2\alpha$; г) $\frac{1}{2}\sin\alpha$. **642.** а) $\frac{2}{\sin\alpha}$; б) $\frac{2}{\cos\beta}$; в) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; г) $\frac{2}{\sin^2\beta}$; д) $\frac{1}{\sin\alpha}$; е) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **644.** а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; в) 1. **645.** а), б), в), в), д), ҳа г) ва е) не.

в), д), ҳа г) ва е) не. **647.** а) $\sin^2\alpha$; б) $\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)^2$. **648.** $\frac{3a+1}{a+1}$ **649.** а) (–5;2); б) (6; –8); (–8;6). **650.** Нишондод $\frac{60}{20+x}+\frac{60}{20-x}=\frac{25}{4}$; **651.** $\left(\frac{10}{x}+\frac{10}{x+3}+\frac{23}{4(x+3)}=1\right)$ (24 соат ва 27 соат). **652.** а) ҳа; б) не. **653.** а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $-\sin^2\alpha$; г) $\cos\alpha$; д) $\operatorname{ctg}\alpha$; е) $-\operatorname{ctg}\alpha$; ж) $\operatorname{tg}^2\alpha$; з) $-\operatorname{tg}\alpha$ **654.** $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha$; д) $-\sin\alpha$; е) $\cos\alpha$; ж) $-\operatorname{ctg}\alpha$; з) $-\operatorname{tg}\alpha$. **655.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\sqrt{3}$. **656.** а) $\sin 34^0$, $-\sin 42^0$, $-\operatorname{tg}6^0$, $-\operatorname{ctg}14^0$, б) $-\cos 5^0$, $\cos 28^0$, $-\operatorname{tg}10^0$, $-\operatorname{ctg}4^0$; в) $-\sin 4^0$, $\operatorname{ctg}42^0$, $\operatorname{tg}5^0$; г) $\cos 14^0$, $\sin 32^0$, $-\operatorname{tg}20^0$, $\operatorname{tg}30^0$. **657.** а) 1; б) 2. **658.** а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) 1; в) $\sin^2\alpha$; г) $\sin\alpha$; д) 4; е) 0. **659.** а) $\sin\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. **661.** а) 1; б) 1; в) 1; г) 1; д) 1. **662.** а) $(-\infty; -8)\cup(5; \infty)$; б) (–10;14). **663.** а) 27; б) $1\frac{7}{9}$. **664.** а) (1;4), (4;1); б) (4;3).

665. Нишондод $x+\frac{60-x}{60}x=40$, $x=30$л

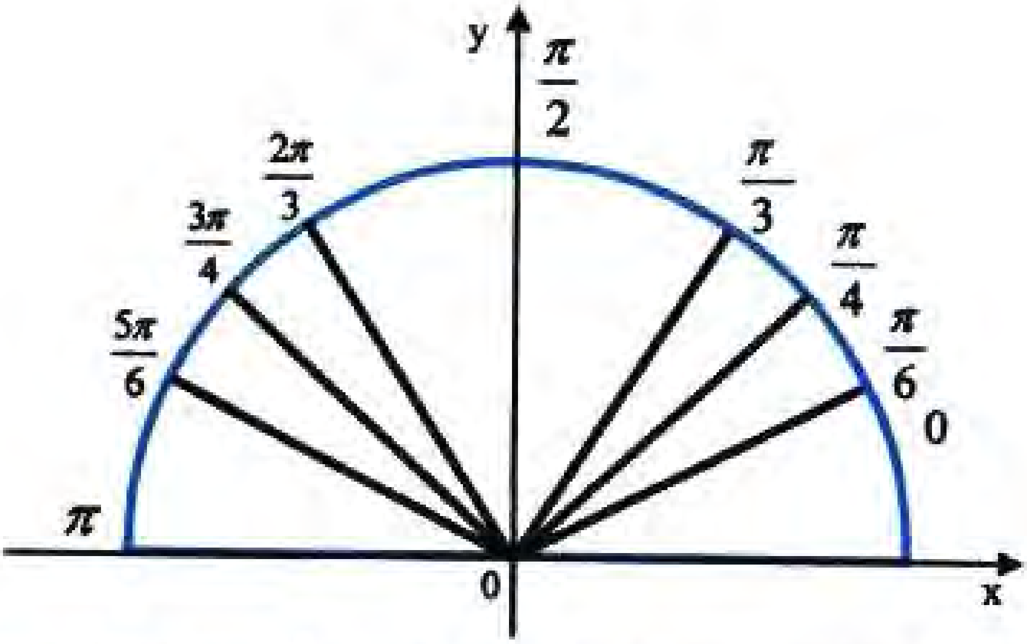
666. Нишондод. Матни масъала ба ҳалли муодилаи зерин меорад: $\frac{5}{12}+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{9}\right)x=1$. **668.** а) 3; в) 3; д) $-\frac{3}{2}$; **669.** а) 11; в) 729; д) 21; **670.** а) 6; в) 10. **673.** а) $\left(-\infty; \sqrt[3]{5}\right)$; в) $\left(\sqrt[3]{11}; \infty\right)$; д) $(8; \infty)$; ж) [0;81]. **676.** а) $11^{\frac{1}{3}}$ $3^{\frac{17}{7}}$. **678.** а) 32; в) 3072; д) $\frac{9}{625}$. **680.** а) $a^{0,5}-b^{0,5}$; б) $\frac{1}{x^2+4}$; в) $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}$; г) $z^{\frac{1}{3}}-12$.

МУНДАРИЧА

Муҳаррир Б.Алиев
Тарроҳ Абдураҳмонов Юлдош
Мусаҳҳеҳ Ҳамидов Асрор

Ба чопаш 15.11.2005 имзо шуд. Андозаи коғаз 60x90 1/16.
Коғази офсетӣ. Гарнитураи Times New Roman Tj. Чопи офсетӣ.
Ҳаҷм 14 ҷузъи чопии аслӣ. Адади нашр 60000.
Супориши №742.

Ҷамъияти саҳҳомии «Матбуот»-и Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон.
734025, ш.Душанбе, хиёбони Рӯдакӣ, 37.



Қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ барои баъзе кунҷҳо

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Муайян нест	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	Муайян нест	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Муайян нест

Формулаҳои мувофиқоварӣ

	Функсия / Аргумент Радиано (градусҳо)	Cos	sin	tg	ctg
1	$-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$
2	$\frac{\pi}{2}+\alpha(90^0+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$
3	$\frac{\pi}{2}-\alpha(90^0-\alpha)$	$Sin\,\alpha$	$\cos\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
4	$\pi+\alpha(180^0+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
5	$\pi-\alpha(180^0-\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$
6	$\frac{3}{2}\pi+\alpha(270^0+\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$
7	$\frac{3}{2}\pi-\alpha(270^0-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
8	$2\pi+\alpha(360^0+\alpha)$	$Cos\,\alpha$	$\sin\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
9	$2\pi-\alpha(360^0-\alpha)$	$Cos\,\alpha$	$-\sin\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$