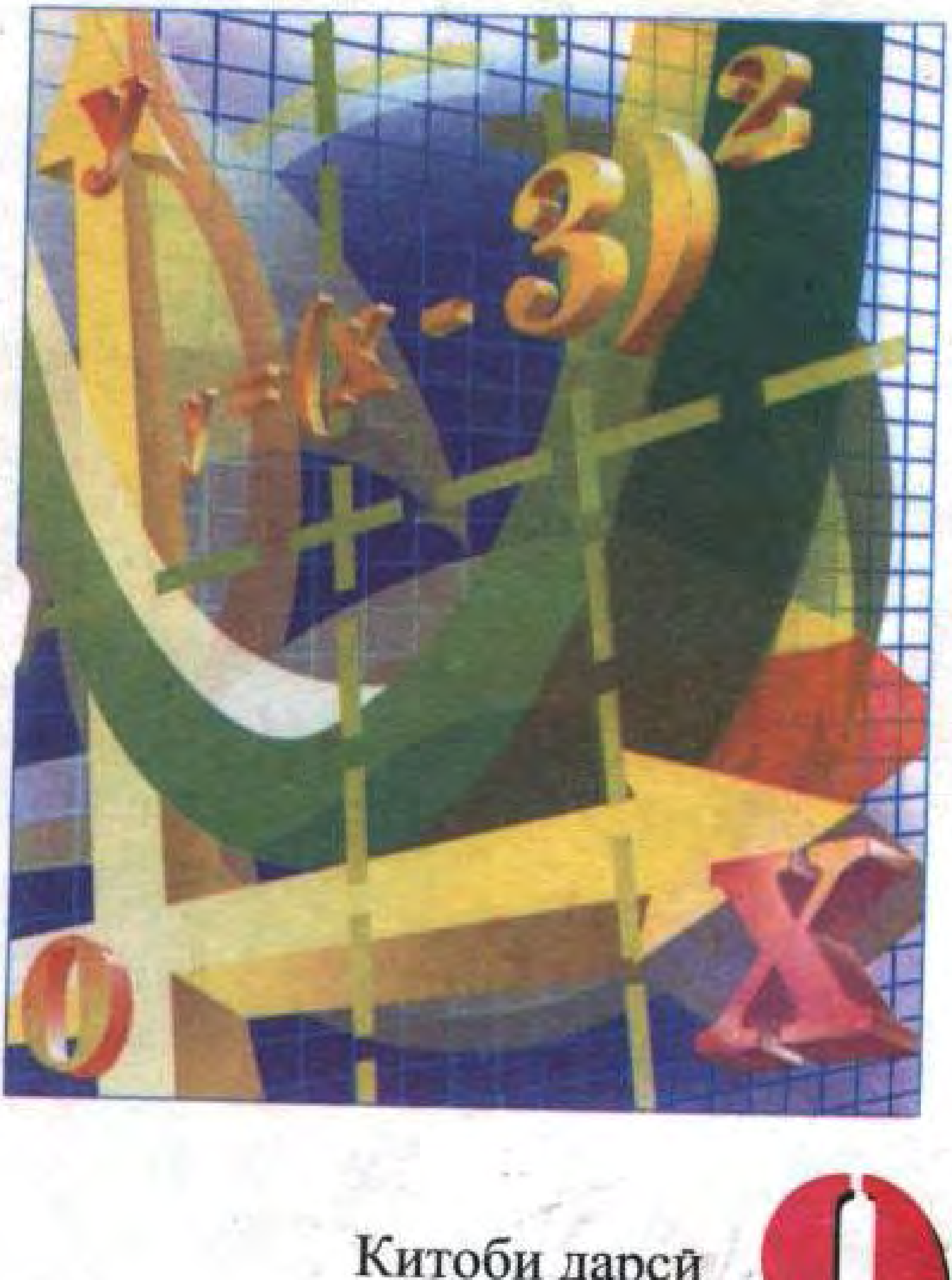
Н. УСМОНОВ, Р. ПИРОВ

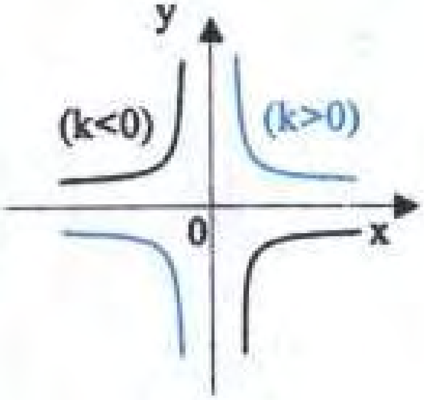
# АЛГЕБРА



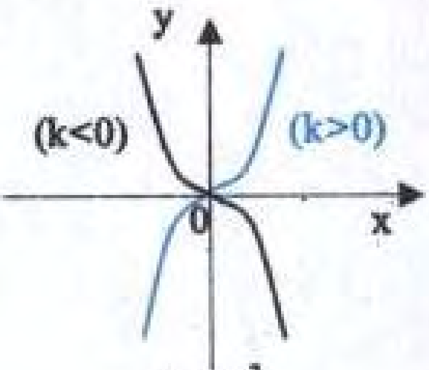

Китоби дарсӣ
барои синфи

9

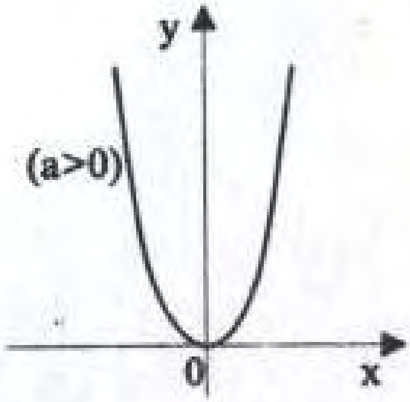
# Графики функсияҳо

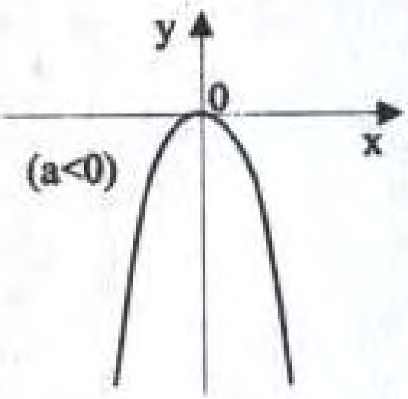



$y = \frac{k}{x}$

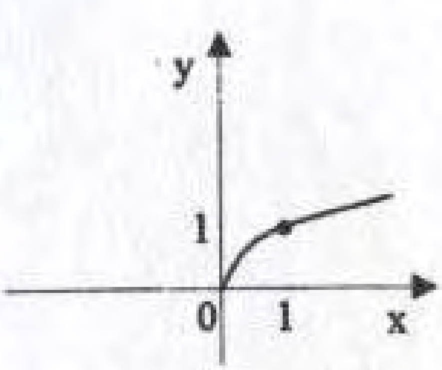



$y=kx^3$

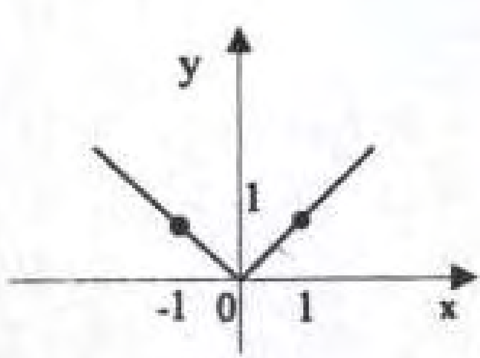



$y=ax^2$




$y=\sqrt{x}$




$y=|x|$

## Прогрессияи арифметикӣ

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in N$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

## Прогрессияи геометрӣ

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \qquad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \qquad S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}$$

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

## Хосиятҳои дараҷа

1). $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ 2). $a^r : a^s = a^{r-s}$

3). $(a^r)^s = a^{rs}$ 4). $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

5). $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

ББК 22.14 Я 72
У–73

## Ҷадвали истифодаи иҷоравии китоб

| № | Ному насаби хонанда | Синф | Соли хониш | Ҳолати китоб (баҳои китобдор) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Аввали сол | Охири сол |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

## Муаллимони мӯҳтарам!

Хоҳишмандем фикру мулоҳизаҳои худро оид ба мазмуни китоби мазкур ба нишонии 734024, ш. Душанбе, кӯчаи Айнӣ 45, Пажӯҳишгоҳи улуми педагогии Тоҷикистон ирсол намоед.

**Усмонов Н., Пиров Р.**
У–73 Алгебра. Китоби дарсӣ барои синфи 9-и мактабҳои таҳсилоти ҳамагонӣ. Соли 2005. 224 саҳифа.

**ISBN 5-670-00875-8**

М $\frac{43060205-12}{504(12)-2005}-2005$

# Боби 1

# ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ



## §1. ФУНКСИЯҲО ВА ХОСИЯТҲОИ ОНҲО

### 1. Бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбанда. Функсия

Татбиқи математика дар омӯзиши қонунҳои табиат ва истифодабарии он дар техника ва дигар соҳаҳо водор месозад, ки дар математика мафҳуми бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбандаро дохил намоем.

*Бузургии тағйирёбанда гуфта, ҳамин гуна бузургиеро меноманд, ки дар шарти масъалаи додашуда қиматҳои гуногунро қабул менамояд.*

Агар бузургӣ дар шарти масъала қиматашро тағйир надиҳад, онро бузургии доимӣ меноманд.

Ҳамон як бузургӣ дар як масъала тағйирёбанда ва дар масъалаи дигар доимӣ шуда метавонад.

М и с о л. Бузургиҳои зерин доимианд:

а) нисбати дарозии давра, ба диаметраш $\left(\dfrac{c}{d}=\pi\right)$; ($\pi\approx3,14$);

б) суммаи кунҷҳои даруни секунҷа (180°);

в) суръати ҳаракати мунтазам $V$, ки қонунаш бо формулаи $S=V\cdot t$, $V=\dfrac{s}{t}$, ки дар он $S$ – масофа, $t$ – вақт;

г) шитоби қувваи вазнинӣ $g$, ки ба 9,81 м/сония$^2$ баробар аст.

Бузургиҳои зерин тағйирёбанда мебошанд:

а) масофаи байни парашютчии аз тайёра ҷаҳида то сатҳи замин;

б) кунҷи биниш, ки дар таҳти он предмети (қатора, одам, танк ва ғайраҳо) аз мушоҳид дуршаванда дида мешавад.

в) суръате, ки дар вақти тағйирёбии фишор бо он моеъ аз сӯрохии зарф мечакад;

г) ҳарорати ҳаво дар ҳар як соати шабонарӯз.

Одатан бузургиҳои тағйирёбандаро бо ҳарфҳои охири алифбои лотинӣ $x$, $y$, $z$... ва бузургиҳои доимиро бо ҳарфҳои аввалаи алифбои лотинӣ $a$, $b$, $c$... ишорат мекунанд.

**Мегӯянд, ки ду бузургии тағйирёбандаи $x$ ва $y$ бо ҳамдигар функсионалӣ вобастаанд, агар ба ҳар як қимати якеи онҳо як ё якчанд қимати муайяни дигараш мувофиқ ояд.**

Масалан, дарозии давра ва радиуси он ($S = 2\pi R$) масофаи тайшуда ва суръати ҳаракати мунтазам дар вақти додашуда ($S=V \cdot t$), бо ҳам функсионалӣ вобастаанд.

Т а ъ р и ф. **Чунин вобастагии тағйирёбандаи $y$ аз тағйирёбандаи $x$, ки дар он ба ҳар як қимати тағйирёбандаи $x$ қимати муайяни тағйирёбандаи $y$ мувофиқ меояд, функсия номида мешавад.**

Тағйирёбандаи $x$ *тағйирёбандаи новобаста ё аргумент* номида мешавад. Тағйирёбандаи $y$ *тағйирёбандаи вобаста* ном дорад. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки тағйирёбандаи $y$ функсияи тағйирёбандаи $x$ мебошад. Қиматҳои тағйирёбандаи вобастаро *қиматҳои функсия* меноманд.

Агар вобастагии тағйирёбандаи $y$ аз тағйирёбандаи $x$ функсия бошад, онро мухтасар ин тавр менависанд: $y=f(x)$ (игрек баробар аст ба эф аз икс). Навишти $y=f(x)$ қонун ё қоидаи ба ҳар як қимати додашудаи $x$ мувофиқ омадани қимати муайяни $y$-ро ифода мекунад.

Масалан агар $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ бошад, он гоҳ барои ёфтани қимати $y$:

а) қимати аргументи $x$-ро ба квадрат бардошта;

б) ба квадрати аргумент 1-ро ҷамъ карда;

в) $x$-ро ба суммаи $1+x^2$ тақсим кардан лозим аст.

Мисолҳои болоро муоина намуда, чунин хулоса карда метавонем:

а) масофаи байни парашютчӣ ва сатҳи замин функсияи вақт аст;

б) кунҷе, ки зери он аз нуқтаи маълум предмет дида мешавад, функсияи масофаи байни мушоҳидачӣ ва предмет аст.

Акнун ду мисоли ҳисоби қиматҳои функсияро муоина мекунем. Чӣ тавре, ки дар боло қайд кардем, барои ин дар формулаи $y=f(x)$ ба ҷои $x$ қимати мувофиқашро гузоштан лозим аст.

1) Агар функсия бо формулаи $f(x)=2x^2-6$ дода шуда бошад, он гоҳ барои қиматҳои $x$-и ба 1; 2,5; −3 баробар қиматҳои мувофиқи $f(x)$ ба $f(1)=2 \cdot 1^2-6=2-6=-4$; $f(2,5)=2 \cdot (2,5)^2-6=6,5$; $f(-3)=2 \cdot (-3)^2-6=12$ баробар аст.

2) Функсия бо формулаи $y=-5x+6$ дода шудааст. Қиматҳояшро ҳангоми ба 2; 3 ва 1,2 баробар будани $x$ меёбем: $f(2)= =-5 \cdot 2+6=-10+6=-4$; $f(3)=-5 \cdot 3+6=-15+6=-9$; $f(1,2)=-5 \cdot 1,2+6=-6+6=0$.

**?** 1. Чӣ гуна бузургиҳо бузургиҳои доимӣ ва чӣ гуна бузургиҳо тағйирёбанда номида мешаванд? 2. Мисоли бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбандаро оред. 3. Ду бузургӣ дар кадом ҳолат бо ҳам функсионалӣ вобастаанд? 4. Таърифи функсияро баён кунед. Қимати функсия ҳангоми дода шудани аргумент чӣ тавр ҳисоб карда мешавад?

1. Функсия бо формулаи $f(x)=5x^2+2$ дода шудааст.

   Ёбед: а) $f(1)$; б) $f(-1)$; в) $f(0)$; г) $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. $f(x)=2x^3-6$. Ёбед: а) $f(3)$; б) $f(4)$; в) $f(-2)$; г) $f(-3)$.
3. $f(x)=-5x+6$. Қимати $x$-ро ёбед, ки дар он: а) $f(x)=17$; б) $f(x)=0$;
   в) $f(x)=6$; г) $f(x)=10$; д) $f(x)=-5$ бошад.
4. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$. Ёбед а) $f(0)$; б) $f(a^2)$; в) $f(2)$; г) $f(3)$; д) $f(-2)$.

### *Машқҳо барои такрор*

5. Муодиларо ҳал кунед:

   а) $2x^2+3x=0$ в) $5x^2-4x=0$ д) $1-4x^2=0$

   б) $3x^2-2=0$ г) $7x-14x^2=0$ е) $2x^2-6=0$.

6. Ҳисоб кунед:

   а) $\left(24-3\frac{7}{16}\right)-\left(21\frac{5}{12}-\frac{41}{48}\right)$; б) $\left(3\frac{5}{8}+\frac{1}{4}+2\frac{7}{12}\right)\cdot 0{,}2\left(4\frac{8}{15}-\frac{11}{3}+\frac{17}{45}\right)$.

7. Махраҷи касри оддие аз сураташ ба 3 воҳид калон аст. Агар ба сурат 7 ва ба махраҷ 5-ро ҷамъ кунем он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки аз касри аввала ба 1/2 зиёд аст. Касри мазкурро ёбед.

## 2. Тарзҳои дода шудани функсия. Соҳаи муайянии функсия

Вобастагии байни қиматҳои тағйирёбандаҳои $x$ ва $y$ бо тарзҳои гуногун дода мешаванд.

**А) Тарзи аналитикӣ** (дар шакли формула). Агар вобастагии байни тағйирёбандаҳои $y$ ва $x$ чунин дода шуда бошанд, ки он барои ёфтани қиматҳои функсия $y$ ҳангоми дода шудани қиматҳои аргумент $x$ тартиби иҷро кардани амалҳоро муайян намояд, он гоҳ мегӯянд, ки функсия аналитикӣ ё дар шакли формула дода шудааст. Масалан, функсияи $y=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ ва $y=x^3+5x^2-x+4$ аналитикӣ дода шудаанд.

Дар баъзе мавридҳо функсия на бо як формула, балки дар фосилаҳои гуногун бо формулаҳои ҳархела дода мешавад. Масалан, функсияи $y = \begin{cases} 2x-1, \text{ агар } 0 \le x \le 3 \\ -x+8, \text{ агар } 3 < x \le 5 \end{cases}$

дар порчаи [0:3] бо формулаи $y=2x-1$ ва дар нимфосилаи [3:5] бо формулаи $y=-x+8$ дода шудааст.

Б) **Тарзи ҷадвалӣ**. Моҳияти чунин тарзи дода шудани функсия аз он иборат аст, ки барои қиматҳои муайяни ададии аргумент қиматҳои мувофиқи функсия дода мешавад. Масалан, ҳарорати ҳаво дар соатҳои бутуни шабонарӯз, миқдори ҷамъовардаи пахтаи соҳибкор дар 5 соли охир ва ғайраҳо мисоли функсияҳои ҷадвалианд.

Дар сатри аввала қиматҳои аргумент ва дар сатри дуюм қиматҳои мувофиқи функсия ҷойгир карда мешаванд:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ | ... |
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | ... | $y_n$ | ... |

Ҷадвалҳои ба мо маълуми квадратҳо, кубҳо, решаҳои квадратию чанде дигарон аз ададҳои натуралӣ аз рӯи ҳамин тартиб сохта шудаанд. Масалан, ҷадвали

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10 \cdot n}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1.000 | 3.162 |
| 2 | 4 | 8 | 1.414 | 4.472 |
| 3 | 9 | 27 | 1.732 | 5.477 |

(Хотиррасон мекунем, ки мо аллакай чунин ҷадвалҳоро дар синфҳои 7–8 барои вобастагиҳои мутаносибии ростаи $y=kx$, хаттии $y=ax+b$, мутаносибии чаппаи $y=\frac{k}{x}$ сохта будем).

Агар фарқи ду қимати дилхоҳи аргументи ҳамсоя якхела бошад, яъне $h=x_2-x_1=x_3-x_2=...$ он гоҳ ҷадвалро ҷадвали қиматҳои функсия бо *қадами h* меноманд. Масалан, ҷадвали қиматҳои функсияи $y= x^2+1$ бо қадами $h=\frac{1}{2}$ дар порчаи $[0;3]$ чунин аст:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| $y$ | 1 | 1,25 | 2 | 3,25 | 5 | 7,25 | 10 |

В) **Тарзи графикӣ.** Вобастагии байни аргументи $x$ ва функсияи $y$-ро ба намуди ягон хат (умуман, хати кач) тасвир кардан мумкин аст. Абсиссаи нуқтаи дилхоҳи ин хати кач ягон қимати аргументи $x$, ординатаи он бошад, қимати мувофиқи функсияи $y$-ро ифода мекунад.

Т а ъ р и ф и 1. **Маҷмӯи ҳамаи нуқтаҳои ҳамворӣ, ки координатаҳои онҳо $x$ ва $y$ баробарии $y=f(x)$-ро қаноат мекунанд, графики $y=f(x)$ номида мешавад.**

Ҳар як вобастагии функсионалии ду тағйирёбандаро дар ҳамворӣ ба таври графикӣ тасвир кардан мумкин аст. Барои амалӣ гардонидани ин мақсад дар ҳамворӣ тирҳои координатавӣ дохил мекунанд. Тири уфуқӣ – *тири абсисса*, тири амудӣ – *тири ордината* ном дорад.

Аз рӯи ягон масштаб дар тири абсисса қиматҳои аргументи $x$ ва дар тири ордината қиматҳои $y$-ро мегузорем. Ҳар як ҷуфти ададҳо, ки аз як қимати абсисса ва як қимати ордината иборат аст, як нуқтаи графикро муайян мекунад (нигаред ба расми 1, а).

Барои сохтани графики функсияи ба формула додашуда ин тавр амал мекунем:

1) ҷадвали қиматҳои аргументи $x$ ва қиматҳои мувофиқи функсияи $y$-ро бо ягон қадами $h$, ки пешакӣ интихоб карда мешавад, тартиб медиҳанд;

2) системаи координатаҳои $x0y$-ро сохта дар ҳар як тири он масштаб интихоб мекунем;

3) ҳар як ҷуфти қиматҳои $x$ ва $y$-ро, ки дар ҷадвал ҷойгир карда шудааст, ба сифати координатаҳои нуқтаи графики матлуб қабул карда, ин нуқтаҳоро месозем;

4) нуқтаҳои сохташударо пайваст мекунем.

Хати каҷе, ки дар ҳамвории координатавӣ пас аз иҷрои ин амалиётҳо ҳосил мешавад, графики функсия мебошад. Агар миқдори нуқтаҳои қайдшуда ҳарчанд зиёд бошад, графики функсия ҳамон қадар саҳеҳтар мешавад.

Акнун мафҳумҳои соҳаи муайянии функсия ва соҳаи қиматҳои онро дохил мекунем.

Т а ъ р и ф и 2. **Ҳамаи қиматҳои имконпазири тағйирёбандаи новобаста соҳаи муайянии функсия номида мешавад. Ҳамаи қиматҳое, ки функсия ҳангоми дар соҳаи муайяниаш тағйир ёфтани тағйирёбандаи новобаста қабул мекунад, соҳаи қиматҳои функсия ном дорад.**

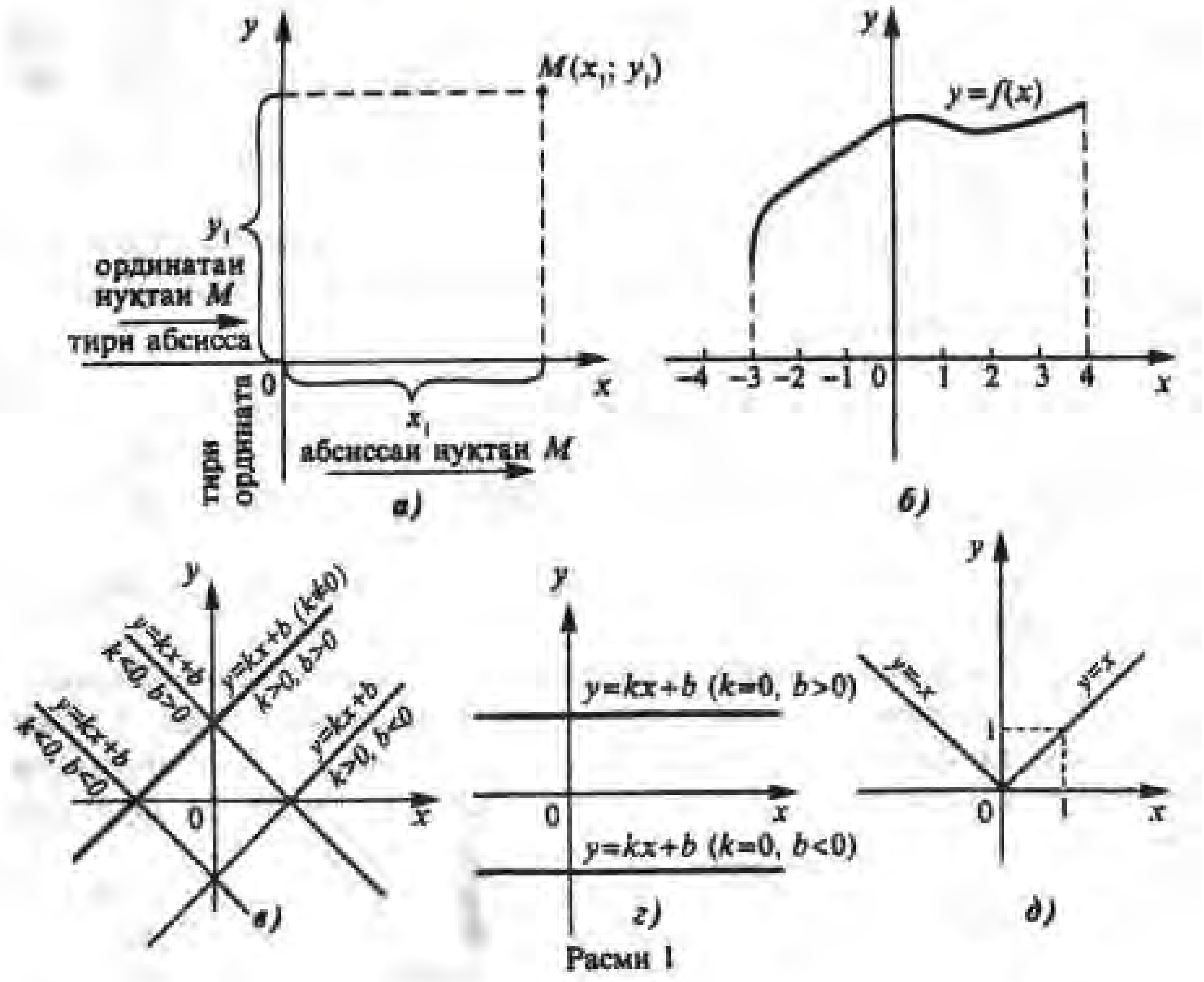
Агар функсия дар шакли формула дода шуда бошад, он гоҳ соҳаи муайянии чунин функсия аз ҳамаи қиматҳои аргумент, ки барояшон формула маъно дорад, иборат мебошад. Масалан, соҳаи муайянии функсияи $f(x)=5x+x^2$ аз маҷмӯи ҳамаи ададҳо; соҳаи муайянии функсияи $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ аз маҷмӯи ҳамаи ададҳо ғайр аз $-3$ иборат аст. Соҳаи муайянии функсияи $y=\sqrt{x-2}$ бошад аз маҷмӯи ададҳои аз 2 калон ё ба 2 баробар буда, иборат мебошад.

Қайд мекунем, ки агар функсия касран ратсионалӣ бошад, он гоҳ соҳаи муайянии он маҷмӯи ададҳоест, ки барояшон қимати махраҷи каср нул нест (дар назар дошта мешавад, ки ифодаи дар сурат буда барои ҳар гуна қимати аргумент дорои қимат аст). Масалан, соҳаи муайянии функсияи $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$ ҳамаи ададҳои $x$, ки барояшон $x^2-1\neq 0$ аст, яъне $x\neq -1$ ва $x\neq 1$ мебошад.

Дар расми 1,б графики функсияи $y=f(x)$ тасвир шудааст. Порчаи $[-3; 4]$ соҳаи муайянии он мебошад.

Графики функсияи $y=kx+b$ ($k$ ва $b$ ададҳо мебошанд) аз хати рост иборат аст (расми 1,в; расми 1,г). Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ соҳаи муайянии он мебошад.

Функсияи бо формулаи $y=|x|$ дода шударо муоина мекунем.




Расми 1

Азбаски ифодаи $|x|$ барои қиматҳои дилхоҳи $x$ маъно дорад, пас маҷмӯи ҳамаи ададҳо соҳаи муайянии ин функсия мебошад. Агар $x \geq 0$ бошад, $|x|=x$ ва агар $x<0$ бошад, $|x|=-x$ аст, яъне

$$y=|x|=\begin{cases} x, \; агар \; x \geq 0 \; бошад, \\ -x, \; агар, \; x < 0 \; бошад. \end{cases}$$

Графики ин функсия дар нимпорчаи $[0; \infty)$ бо графики функсияи $y=x$ ва дар фосилаи $(-\infty; 0)$ бо графики функсияи $y=-x$ ҳамҷоя мешавад. Графики функсияи $y=|x|$ дар расми 1,*д* тасвир шудааст. Ин график аз ду нуре, ки аз ибтидои координатаҳо баромада чоряки I ва II-ро ба ду ҳиссаи баробар тақсим мекунад, иборат аст.

Т а ъ р и ф и 3. **Қиматҳои аргумент, ки дар онҳо функсия ба нул баробар аст, нулҳои функсия номида мешаванд.**

Масалан, барои функсияи $y=2x \cdot (x-3)$ ададҳои 0 ва 3 нулҳо мебошанд. Барои функсияи $y=\dfrac{4-x}{5}$ адади 4 нули он аст.

Зоҳиран фаҳмост, ки графики функсия тири абсиссаро маҳз дар ҳамон нуқтаҳое мебурад, ки онҳо нули функсия мебошанд. Масалан, графики функсияи $y=(x+1)(x-2)$ тири абсисса $Ox$-ро дар нуқтаҳои $x=-1$ ва $x=2$ мебурад.

**?** 1. Тарзҳои дода шудани функсияро номбар кунед. Онро бо мисолҳои мушаххас шарҳ диҳед. 2. Соҳаи муайянии функсия чист? 3. Кадом қиматҳои тағйирёбандаҳо соҳаи муайяни касри ратсионалиро ташкил карда метавонанд? 4. Соҳаи қиматҳои функсия чист? 5. Нулҳои функсия гуфта чиро дар назар доранд?

**8.** Соҳаи муайянии функсияро ёбед.

а) $y=2x-4$; в) $y=\dfrac{x}{3-x}$; д) $y=\dfrac{2}{(x-5)(x+2)}$; ж) $y=\sqrt{10+x}$;

б) $y=x^2-3x+2$; г) $y=\dfrac{3}{x^2+1}$; е) $y=\sqrt{x-4}$; з) $y=\sqrt{100+x}$;

**9.** Ягон функсияро мисол оред, ки а) маҷмӯи ҳамаи ададҳо ғайр аз 10; б) маҷмӯи ҳамаи ададҳо ғайр аз ададҳои 2 ва 3; в) ҳамаи ададҳои ғайриманфӣ; г) ҳамаи ададҳои аз 20 калон ё ба он баробар соҳаи муайянияш бошанд.

**10.** Соҳаи муайянӣ ва соҳаи қиматҳои функсияи: а) $y=x^2$; б) $y=x^{-1}$-ро ёбед.

**11.** Агар а) $f(x)=x \cdot (x+9)$; б) $f(x)=\dfrac{x+5}{7-x}$; в) $f(x)=x \cdot (x-9)$; г) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x}$ бошад, қиматҳои $x$-ро ёбед, ки барояшон $f(x)=0$ аст.

**12.** Графики функсияро созед:

а) $f(x)=\frac{1}{2}-5x$;  б) $f(x)=4{,}6x$;  в) $f(x)=\frac{5}{x}$;  г) $f(x)=-2x$.

**13.** Функсияи $y=x^3-3$, ки дар он $-3\le x\le 3$ аст, дода шудааст. Ҷадвали қиматҳояшро бо қадами $h=1$ дар порчаи $[-3;\ 3]$ тартиб диҳед ва графики функсияро созед.

### *Машқҳо барои такрор*

**14.** Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}3x+5y=4;\\7x-3y=24;\end{cases}$  б) $\begin{cases}3x-2y=11;\\4x-5y=3.\end{cases}$

**15.** Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\frac{2x-5}{3}-1>3-x$;  б) $\frac{5x-1}{4}>2$.

**16.** Муодилаи квадратиро ҳал кунед:
а) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$;  б) $(x+3)(x-4)=-12$.

**17.** Оилаи аз панҷ нафар иборатбударо дар як сол (365 рӯз) чанд кг нон истеъмол мекунад, агар маълум бошад, ки ба ҳисоби миёна дар як рӯз ҳар як аъзои оила 0,4 кг нон истеъмол кунад.

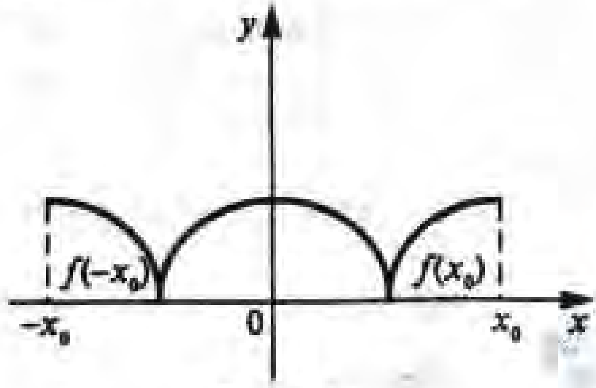
## 3. Функсияҳои ҷуфт ва тоқ

Пеш аз он ки дар бораи ҷуфт ва тоқ будани функсияҳо сухан ронем, мафҳуми маҷмӯи ададии симметриро дохил мекунем.

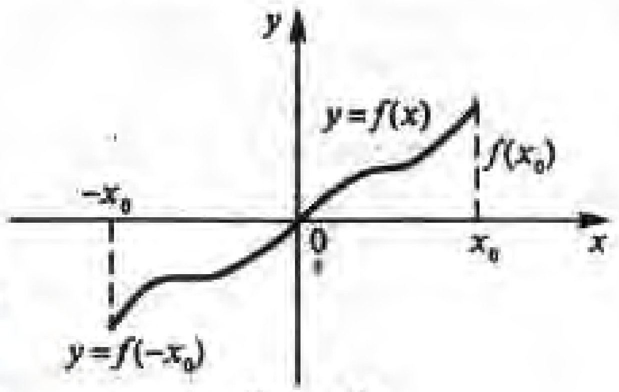
Т а ъ р и ф и 1. **Маҷмӯи ададии $D$ нисбат ба ибтидои координата симметрӣ номида мешавад, агар адади $x$ аз $D$ чӣ гунае бошад, адади $-x$ ҳам мутаалики ин маҷмӯъ бошад.**

Ба ин гуна маҷмӯъ мисол шуда метавонад: маҷмӯи ададҳои бутун, ҳамаи касрҳои дуруст, ҳар гуна порчаи $[-a;\ a]$ ё фосилаи $(-a,\ a)$.

Бигузор соҳаи муайянии функсияи $y=f(x)$ маҷмӯи симметрӣ аст.




Расми 2




Расми 3

Т а ъ р и ф и 2. **Функсия ҷуфт номида мешавад, агар вай ҳангоми тағйир ёфтани аломати аргумент қиматашро дигар накунад, яъне:**

$$f(-x)=f(x).$$

Т а ъ р и ф и 3. **Функсия тоқ номида мешавад, агар вай ҳангоми тағйирёбии аломати аргумент аломаташро тағйир дода, қимати мутлақашро нигоҳ дорад:**

$$f(-x)=-f(x)$$

Мувофиқи таърифи функсияи ҷуфт графики он нисбат ба тири ордината симметрӣ (масалан, расми 2) аст ва графики функсияи тоқ бошад, нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ мешавад (масалан, расми 3).

### *Мисолҳои функсияҳои ҷуфт ва тоқ:*

1) $y=kx^2$, дар ин ҷо $k$ адади доимӣ аст. Шарти $k(-x)^2=kx^2$ иҷро мешавад, пас функсия ҷуфт мебошад.

2) Функсияи $y=kx^3$, ки дар ин ҷо $k$–адади доимӣ мебошад, шарти $k(-x^3)=-kx^3$-ро қаноат мекунонад ва бинобар ин функсия тоқ аст. Умуман, функсияи дараҷагӣ, яъне функсияи $y=kx^m$:

а) ҷуфт аст, агар $m$ адади натуралии ҷуфт бошад;

б) тоқ аст, агар $m$ адади натуралии тоқ бошад.

3) Функсияи қимати мутлақ, яъне $y=|x|$ ҷуфт мебошад, чунки $|-x|=|x|$ аст.

Нишон медиҳем, ки функсияи $y=3x+1$ на ҷуфт ва на тоқ аст.

Барои ин бояд нишон диҳем, ки функсия ақаллан дар ҷуфти нуқтаҳои ба ҳам симметрии соҳаи муайяниаш шартҳои дар таърифҳои 2 ва 3 бударо қаноат намекунад. Дар ҳақиқат, агар $x=1$ гирем, он гоҳ қимати $f(1)=4$ ва $f(-1)=-2$-ро ҳосил мекунем. Муқоисаи бевосита ба $f(1) \neq (f(-1)$ ва $f(-1) \neq -f(1)$ меорад, ки онҳо на ҷуфт ва на тоқ будани функсияи $y=3x+1$-ро тасдиқ мекунад.

М и с о л. Муайян мекунем, ки функсияҳои зерин ҷуфтанд ё тоқ:

а) $y=x+\frac{1}{x}$; б) $y=(x-3)^2+(x+3)^2$; в) $y=x^2-x+3$.

а) $y(-x)$-ро муоина мекунем.

Азбаски $y(-x)=(-x)+\frac{1}{(-x)}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-y(x)$ аст, бинобар ин $y=x+\frac{1}{x}$ функсияи тоқ мебошад.

б) Барои функсияи $y=(x-3)^2+(x+3)^2$, $y(-x)=(-x-3)^2+(-x+3)^2=$ $=(-(x+3))^2+(-(x-3))^2=(x+3)^2+(x-3)^2=y(x)$.

Ҳамин тавр, $y(-x)=y(x)$, яъне функсияи $y=(x-3)^2+(x+3)^2$ ҷуфт мебошад.

в) $y(-x)$-ро ҳисоб мекунем:

$$y(-x)=(-x)^2-(-x)+3=x^2+x+3.$$

Функсияи $y=x^2-x+3$ на ҷуфт аст ва на тоқ, чунки $y(-x) \neq y(x)$ ва $y(-x) \neq -y(x)$ мебошад.

**?** 1. Таърифи функсияҳои ҷуфт ва тоқро диҳед. 2. Графикҳои функсияҳои ҷуфт ва тоқ нисбат ба системаи координатавӣ чӣ тавр ҷойгир мешаванд? 3. Доир ба функсияҳои ҷуфт ва тоқ мисолҳо оред.

Муайян кунед, ки функсияҳои зерин ҷуфтанд ё тоқ (18–21).

**18.** а) $y=x^4$; б) $y=x^5$; в) $y=-2x^2$; г) $y=x^7+2x$; д) $y=x\cdot|x|$.

**19.** а) $y=(x-3)^2-(x+3)^2$; б) $y=\sqrt{9-x^4}$; в) $y=0{,}5x^3-5x^2$; г) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$

**20.** а) $y=\dfrac{x-3}{x+1}$; б) $y=x^2+x^4$; в) $y=\dfrac{x-x^3}{1+x^2}$; г) $y=\dfrac{1}{x^2}+2$.

**21.** а) $y=x^3+x$; б) $y=\dfrac{1}{x^5}$; в) $y=x^6-x^4$; г) $y=x^7-x$.

### *Машқҳо барои такрор*

**22.** Ҳисоб кунед.

а) $\dfrac{1+a-a^2}{1+a+a^2}$-ро ҳангоми $a=0{,}5$;

б) $2a^3+3a^2-5a+6$-ро ҳангоми $a=2$;

в) $|a-b|-|c+d|$-ро ҳангоми $a=-5$, $b=4$, $c=1$, $d=-3$;

г) $\dfrac{|a+x|}{2}-\dfrac{|a-x|}{2}$-ро ҳангоми $a=-2$, $x=-6$ будан.

**23.** Қимати ифодаро ёбед:

а) $\dfrac{2^8\cdot 7^9}{14^{10}}\cdot\dfrac{26^5\cdot 2^{10}}{13^6\cdot 8^4}$; б) $\dfrac{2^8\cdot 7^9}{14^{10}}:\dfrac{26^5}{13^{10}\cdot 8^4}$; в) $\left(\dfrac{51}{60}\cdot\dfrac{12}{17}\right):\dfrac{3}{10}$; г) $\left(\dfrac{12}{95}:\dfrac{9}{38}\right)\cdot\dfrac{15}{16}$.

**24.** Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $a^3-2a^2-a$; в) $3a^2x+6ax^2$; д) $18ab^2-9b^4$;

б) $x(a-c)+y\cdot(c-a)$; г) $9a^4-12a^3b$; е) $bx-2b+cx-2c$.

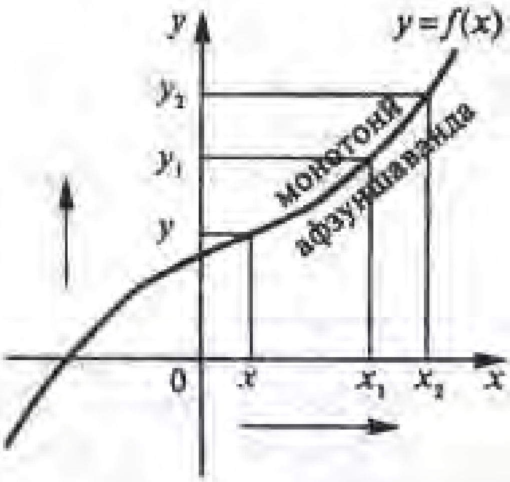
**25.** Киштӣ бо самти ҷараёни дарё 10 соат ҳаракат намуд. Дар бозгашт ин масофаро дар чанд соат тай мекунад, агар маълум бошад, ки суръати ҳаракати киштӣ дар оби ором 15 км/соат буда, суръати оби дарё 3 км/соат аст.

## 4. Афзуншавӣ ва камшавии функсия

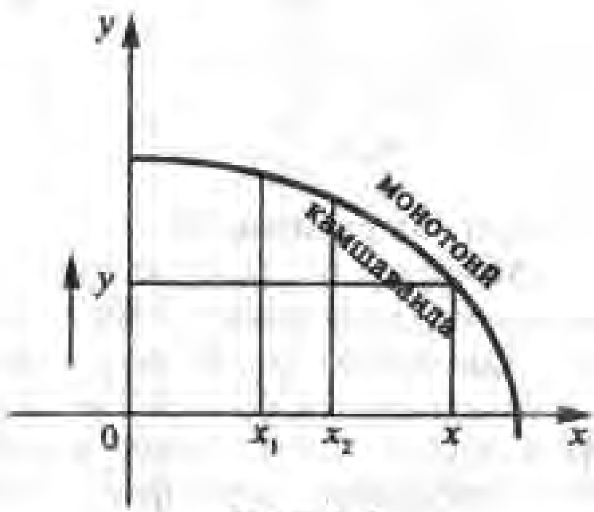
Таърифи 1. **Функсияи $f(x)$ дар ягон фосила афзуншаванда мешавад, агар дар ин фосила ба қимати калони аргумент ки-**

**мати калони функсия мувофиқ ояд, яъне дар ҳолати $x_2>x_1$ будан $f(x_2)>f(x_1)$ шавад.**


Расми 4




Расми 4, *а*




Расми 4, *б*

Таърифи 2. **Функсия дар ягон фосила камшаванда номида мешавад, агар дар ин фосила ба қимати калони аргумент қимати хурди функсия мувофиқ ояд, яъне дар ҳолати $x_2>x_1$ будан $f(x_2)<f(x_1)$ шавад.**

*Бузургии тағйирёбанда монотонӣ номида мешавад, агар вай фақат ба як самт тағйир ёбад, яъне ё фақат афзояд ё фақат кам шавад.*

Маълум аст, ки ҳаракати нуқтаи $x$ ба равиши мусбати тири абсисса монотонӣ афзуншаванда буда, ба равиши баръакс бошад, монотонӣ камшаванда мешавад.

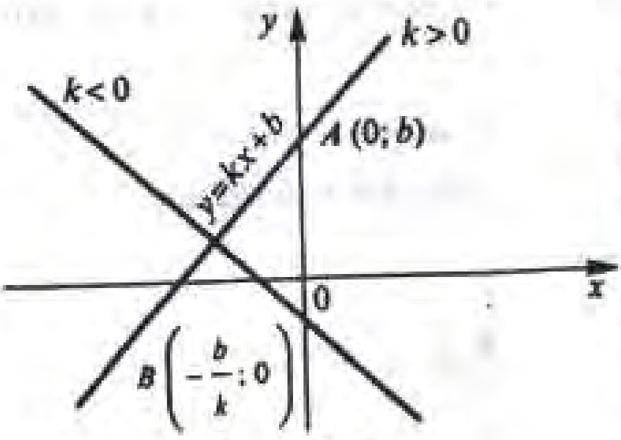
Функсия монотонӣ афзуншаванда номида мешавад, агар ҳангоми афзуншавии аргумент қимати функсия ҳам афзояд (расми 4, *а*).

Функсия монотонӣ камшаванда мешавад, агар ҳангоми афзуншавии аргумент қимати функсия кам шавад (расми 4, *б*).

Ба функсияи монотонӣ функсияи $y=kx+b$ мисол шуда метавонад. Дар ҳолати $k>0$ будан функсия монотонӣ афзуншаванда буда, дар ҳолати $k<0$ будан функсия монотонӣ камшаванда мешавад (расми 5,*а*).

Мисоли 1. Чанд хосиятҳои $y=\frac{k}{x}$ (дар ин ҷо $k\neq0$)-ро меорем.

1. Азбаски касри $\frac{k}{x}$ дар ҳеҷ ягон қимати $x$ ба нул табдил намешавад, пас функсияи $y=\frac{k}{x}$ нулҳо надорад.



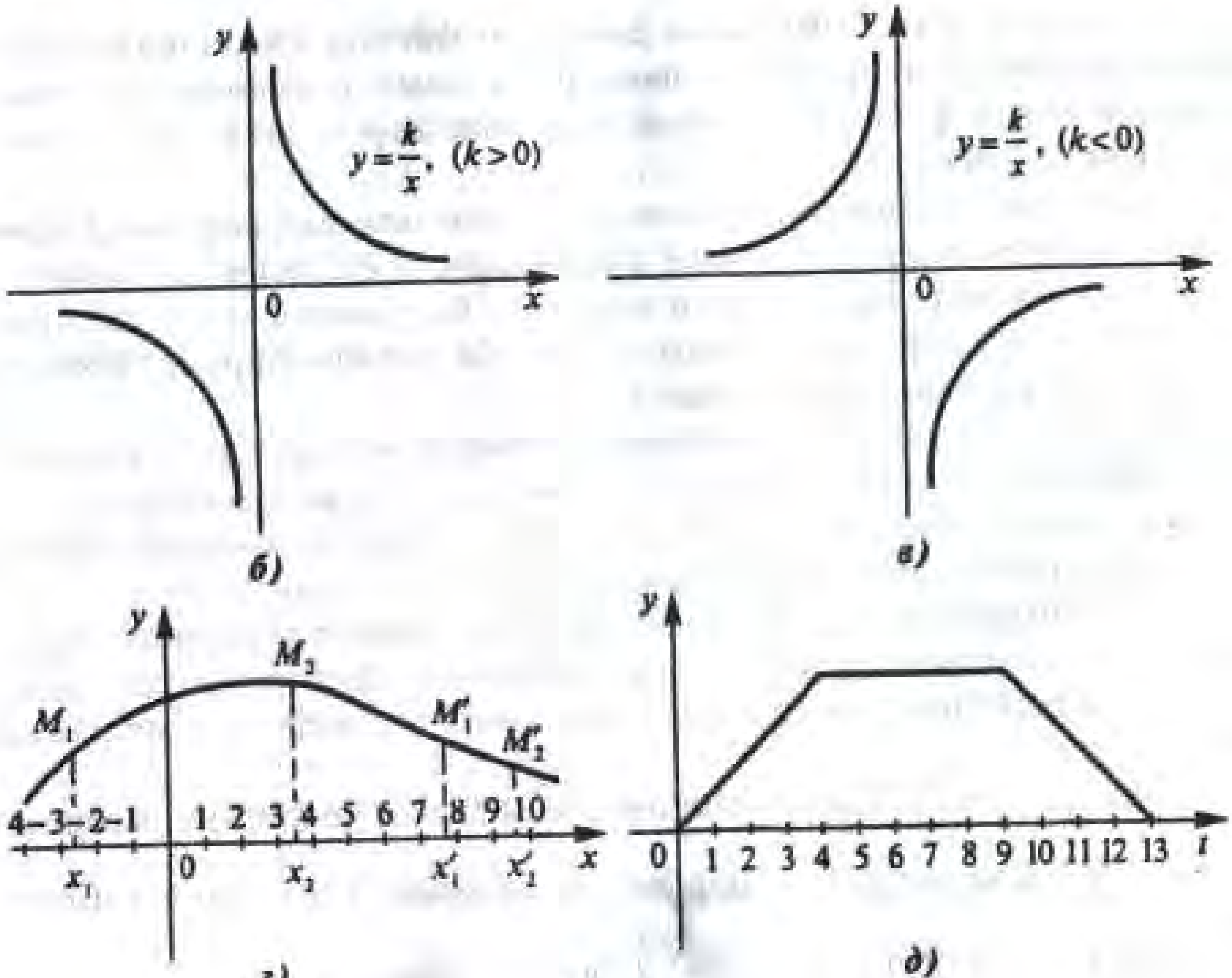

Расми 5, *а*

2. Агар $k>0$ бошад, касри $\frac{k}{x}$ ҳангоми $x>0$ будан мусбат ва ҳангоми $x<0$ будан манфӣ аст, яъне ҳангоми $x>0$ будан $y>0$ ва ҳангоми $x<0$ будан $y<0$ аст.

3. Функсияи $y=\frac{k}{x}$ ҳангоми $k>0$ будан дар фосилаҳои $(-\infty;\ 0)$ ва $(0;\ +\infty)$ функсияи камшаванда аст ва ҳангоми $k<0$ будан дар ин фосилаҳо функсия афзуншаванда аст (ниг. ба расмҳои 5 *б*, *в*).

М и с о л и 2. Бигузор функсияи $y=f(x)$ бо тарзи графикӣ, масалан, дар порчаи $[-3{:}10]$ дода шуда бошад (расми 5, *г*).

Ҳангоми ба тарафи рост ҳаракат кардани нуқтаи тири абсисса, ки ба аргументи функсия мувофиқ меояд, графики функсия дар фосилаи $(-3;4)$ фақат боло мебарояд ва дар фосилаи $(4;10)$ фақат поён мефарояд. Дар бораи функсияе, ки графикаш дар фосилаи




Расми 5

муайян фақат боло мебарояд мегӯянд, ки ин функсия дар ҳамин фосила афзуншаванда мебошад ва дар бораи функсияе, ки графикаш дар фосилаи муайян фақат поён мефарояд, мегӯянд, ки ин функсия дар ҳамин фосила камшаванда мебошад.

Функсияи додашударо дар фосилаи (−3; 4) дида мебароем. Дар графики он ду нуқтаи дилхоҳи $M_1(x_1;y_1)$ ва $M_2(x_2; y_2)$-ро интихоб мекунем. Абсисса ва ординатаи онҳоро муқоиса карда мебинем, ки агар $x_2>x_1$ бошад, он гоҳ $f(x_2)>f(x_1)$ мешавад.

Агар ҳамон функсияро дар фосилаи (4; 10) муоина намоем, он гоҳ барои ҳар гуна ду нуқтаи график $M_1'(x_1'; y_1')$ ва $M_2'(x_2'; y_2')$ аз нобаробарии $x_2'>x_1'$ нобаробарии $f(x_2')<f(x_1')$ ҳосил мешавад. Пас дар фосилаи (4; 10) функсия камшаванда мебошад.

Мисоли 3. Нишон медиҳем, ки функсияи $\varphi(x)=\sqrt{x}$ дар нимпорчаи $[0; \infty)$ афзуншаванда аст.

Бигузор $x_1$ ва $x_2$ ададҳои ғайриманфии дилхоҳ бошанд ва дар айни ҳол $x_2>x_1$.

Фарқи $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$ -ро дида баромада, муқаррар мекунем, ки он мусбат аст, яъне $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$. Пас функсияи $\varphi(x)$ дар нимпорчаи $[0; +\infty)$ меафзояд.

Мисоли 4. Фарз, мекунем, ки функсияи $y=ax^2+c$ дар фосилаи $(-\infty; +\infty)$ дода шудааст. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии онро меёбем.

Азбаски функсияи $y=ax^2+c$ ҷуфт ($y(x)=y(-x)$) мебошад, пас онро дар фосилаи $(0; \infty)$ муоина намудан кифоя аст. Бигузор $x_1$ ва $x_2$ ададҳои мусбати дилхоҳ аз ин фосила ва $x_2>x_1$ бошад. Ҳолатҳои $a>0$ ва $a<0$-ро алоҳида-алоҳида муоина менамоем.

1) $a>0$. Фарқи $y_2-y_1=ax_2^2+c-ax_1^2-c=a(x_2-x_1)(x_2+x_1)$-ро дида баромада, муайян менамоем, ки он мусбат ($y_2-y_1>0$), $y_2>y_1$ аст. Пас, функсияи $y=ax^2+c$ дар фосилаи $(0; +\infty)$ меафзояд. Аз сабаби графики функсия нисбат ба тири $0y$ симметрӣ буданаш (ниг. п. 3) вай дар фосилаи $(-\infty; 0)$ кам мешавад.

2) $a<0$. Он гоҳ

$$y_2-y_1=a(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

-ро муоина намуда муайян мекунем, ки $y_2-y_1<0$, аз ин ҷо $y_2<y_1$ пас функсия дар фосилаи $(0; \infty)$ кам мешавад.

Мисоли 5. Бигузор функсияи $y=x^4$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ дода шуда бошад. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии онро меёбем.

Азбаски функсияи додашуда ҷуфт мебошад (ниг. п. 3 ба мисоли 2), пас онро дар фосилаи $(0; \infty)$ муоина кардан кифоя аст. Бигузор

$x_1$ ва $x_2$ ададҳои мусбати дилхоҳ аз ин фосила ва $x_2>x_1$ бошад. Азбаски

$$x_2^4-x_1^4=(x_2^2+x_1^2)(x_2^2-x_1^2)=(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

мебошад, пас аломати фарқи $x_2^4-x_1^4$ мусбат аст. Ин нишон медиҳад, ки функсияи додашуда дар фосилаи $(0; \infty)$ меафзояд. Аз сабаби нисбат ба тири $0y$ симметрӣ будани графики $y=x^4$ функсия дар фосилаи $(-\infty; 0)$ кам мешавад.

**?** 1. Таърифи функсияи афзуншаванда ва камшавандаро баён кунед. 2. Доир ба функсияҳои афзуншаванда ва камшаванда мисолҳо оред. 3. Функсияи $y=\dfrac{k}{x}$ дар ҳар яке аз фосилаҳои $(-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$ чӣ тавр тағйир меёбад? Мавридҳои $k>0$ ва $k<0$ буданро алоҳида таҳлил кунед.

**26.** Дар расми 5*д* графики вобастагии вақти ҳаракати велосипедчӣ $t$ ва тағйирёбии суръати ӯ $V$, тасвир шудааст. Фосилаи вақтеро ёбед, ки дар муддати он суръати велосипедчӣ: а) меафзояд; б) кам мешавад; в) доимӣ мемонад.

**27.** Графики ягон функсияи соҳаи муайяниаш $[-3; 4]$-ро чунон кашед, ки ин функсия:

а) дар порчаи $[-3; 0]$ афзояд ва дар порчаи $[0; 4]$ кам шавад;

б) дар порчаи $[-5; 1]$ кам шавад ва дар порчаи $[1; 4]$ афзояд.

**28.** Графики функсияеро (параболаеро) кашед, ки ададҳои:

а) $-3$ ва $3$; б) $-4$ ва $2$; в) $-3$; $2$ нулҳои он бошад.

**29.** Нулҳои функсияро ёбед (агар онҳо мавҷуд бошанд):

а) $y=-0,8x+12$; в) $y=\dfrac{4+2x}{x^2+5}$;

б) $y=(3x-10)(x+6)$; г) $y=\dfrac{6}{(x-1)(x+8)}$.

**30.** Оё функсияҳои зерин нулҳо доранд:

а) $y=2,1x-70$; в) $y=\dfrac{6-x}{x}$; д) $y=-x^2-2$?

б) $y=4x(x-2)$; г) $y=x^2+9$;

**31.** Барои кадом қиматҳои $x$ функсияи $y=f(x)$ ба нул мубаддал мегардад, қиматҳои мусбат ва манфӣ қабул мекунад, агар:

а) $f(x)=-2x+6$; б) $f(x)=20x+10$ бошад?

Графики ин функсияҳоро кашед.

**32.** Кадоме аз функсияҳои хаттии: а) $y=8x-5$; б) $y=-3x+1$; в) $y=-49x-100$; г) $y=x+1$; д) $y=1-x$ функсияи афзуншаванда ва кадоме функсияи камшаванда мебошад?

**33.** Графики функсияро созед ва хосиятҳояшро номбар кунед:
а) $y=1,5x-3$; в) $y=-4-x$; д) $y=0,5(1-3x)$.
б) $y=0,6x+5$; г) $y=2x-2$;

**34.** Функсия бо формулаи $f(x)=-13x-78$ дода шудааст. Барои кадом қиматҳои $x$: а) $f(x)=0$; б) $f(x)>0$; в) $f(x)<0$ аст?

**35.** Графики функсияро созед ва хосиятҳояшро номбар кунед:

а) $y=\frac{4}{x}$; б) $y=-\frac{5}{x}$.

### *Машқҳо барои такрор*

**36.** Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}=14$; б) $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3$.

**37.** $f(x)=\frac{2+3x}{2-3x}$. Ёбед: $f(0)$ ва $f(1)$-ро.

**38.** Ҳисоб кунед: а) $\left[6-4\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^0\right]^{-2}$; б) $\frac{1}{11+2\sqrt{30}}+\frac{1}{11-2\sqrt{30}}$.

**39.** Ифодаро содда намоед:
а) $(2a-3ab)^2-(3a-2ab)^2$; б) $(2a-3)\cdot(2a+3)^2-8a^3+27$.

**40.** Аз фурудгоҳ дар як вақт ба ҷои муқарраршуда, ки масофааш 1600 км буд, ду тайёра парвоз намуданд. Суръати яке аз тайёраҳо аз дигараш 80 км/соат зиёд буд, бинобар ин вай як соат пеш ба ҷои муқарраршуда омада расид. Суръати ҳар яке аз тайёраҳоро муайян кунед.

# §2. СЕАЪЗОГИИ КВАДРАТӢ ВА ҶУДОКУНИИ ОН БА ЗАРБКУНАНДАҲО

## 5. Ҷудо кардани квадрати пурра аз сеаъзогии квадратӣ

Сеаъзогии квадратӣ нисбат ба бузургии тағйирёбандаи $x$ гуфта ифодаи намуди $ax^2+bx+c$-ро меноманд, ки дар он $a$, $b$ ва $c$ ададҳо буда $a\neq0$ мебошад.

Ҳангоми ҳал кардани масъалаҳо баъзан сеаъзогии квадратии $ax^2+bx+c$ ба намуди

$$a(x-m)^2+n^2 \qquad (1)$$

(ки дар ин ҷо $m$ ва $n$ ададҳо мебошанд) навиштан муфид аст.

Табдилдиҳие, ки ба баробарии (1) меорад, *тарзи ҷудо кардани дуаъзогӣ ё квадрати пурра аз сеаъзогии $ax^2+bx+c$ ном дорад.*

Схемаи умумии ҳосил кардани баробарии (1)-ро барои сеаъзогии квадратӣ баён мекунем.

Сеаъзогии квадратии $ax^2+bx+c$-ро ба таври

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

менависем. Ифодаи $\frac{b}{a}x$-ро дар намуди $2\frac{b}{2a}x$ (дучандаи ҳосили зарби $\frac{b}{2a}$ бар x) тасвир карда ҳосил мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Ба ифодаи дар дохили қавси қисми рост буда $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$-ро ҷамъ ва тарҳ мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right].$$

Акнун баробарии $x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ -ро истифода карда сеаъзогии квадратиро ба намуди зерин менависем:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right],$$

Ҳамин тавр, $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$ (2)

Баробарии ҳосил кардаи (2)-ро бо (1) муқоиса карда мебинем, ки $m=\frac{b}{2a}$ ва $n^2=-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ аст.

Э з о ҳ. Дар синфи 8 ҳангоми ҳосил кардани формулаи решаи муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ айнан чунин табдилдиҳиҳоро гузаронида будем (ниг. ба китоби дарсӣ, боби III, пункти 28). Яъне, баъди ҳосил кардани (2) барои решаҳои муодила ҳангоми $a\neq0$ будан формулаи маълуми

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ҳосил шуда буд.

М и с о л и 1. Аз сеаъзогии квадратии $\frac{1}{4}x^2-x+2$ квадрати пурраро ҷудо мекунем.

Ҳ а л. Зарбшавандаи $\frac{1}{4}$-ро аз қавс мебарорем:

$$\frac{1}{4}x^2-x+2=\frac{1}{4}(x^2-4x+8).$$

Ифодаи дохили қавсро табдил медиҳем:

$$\frac{1}{4}x^2 - x + 2 = \frac{1}{4}\left[(x-2)^2 + 4\right] = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1.$$

Пас, $\frac{1}{4}x^2 - x + 2 = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1.$

**Мисоли 2.** Аз сеаъзогии $-2x^2 - 4x + 5$ бо ёрии (2) квадрати пурраро ҷудо мекунем

$$-2x^2 - 4x + 5 = -2\left(x^2 + 2x - \frac{5}{2}\right) = -2\left(x^2 + 2x + 1 - 1 - \frac{5}{2}\right) =$$

$$= -2\left[\left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 - \frac{5}{2}\right] = -2\left[(x+1)^2 - \frac{7}{2}\right] = -2(x+1)^2 + 7.$$

**Мисоли 3.** Сеаъзогии $\frac{x^2}{3} - 5x + 7$-ро ба намуди (2) меорем:

$$\frac{x^2}{3} - 5x + 7 = \frac{1}{3}(x^2 - 15x + 21) = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2\cdot\frac{15}{2}\cdot x + 21\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 - 2\cdot\frac{15}{2}x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4} + 21\right) = \frac{1}{3}\left[\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{141}{4}\right] = \frac{1}{3}\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{47}{4};$$

**?** 1. Таърифи сеаъзогии квадратиро оред. Сеаъзогии квадратӣ чандто реша дошта метавонад? 2. Аз сеаъзогии квадратӣ дуаъзогиро чӣ тавр ҷудо кардан мумкин аст? Инро дар мисоли $x^2+4x+1$ нишон диҳед.

Дар ифодаҳои зерин квадрати пурра ҷудо карда шавад (41–49):

**41.** а) $x^2-16x-16$; б) $x^2-8x-65$; в) $3x^2+4x+3$; г) $x^2-6x+8$.

**42.** а) $\frac{1}{3}x^2-4x+16$; б) $x^2+6x+10$; в) $x^2-2x-2$; г) $x^2-2x$.

**43.** Сеаъзогиҳои квадратии $x^2-6x+11$ ва $-x^2+20x-110$ дода шудаанд. Исбот кунед, ки барои дилхоҳ $x$ сеаъзогии якум қимати манфӣ ва сеаъзогии дуюм қимати мусбат қабул намекунад.

**44.** Исбот кунед, ки барои қимати дилхоҳи $x$ сеаъзогии квадратӣ:

а) $x^2-6x+10$ қимати мусбат;

б) $5x^2-10x+5$ қимати ғайриманфӣ;

в) $-x^2+20x-100$ қимати ғайримусбат;

г) $-2x^2+16x-33$ қимати манфӣ

қабул мекунад.

**45.** Аз сеаъзогии квадратӣ дуаъзогиро ҷудо кунед:

а) $x^2-4x+7$; б) $x^2+2x-1$; в) $-2x^2-6x-3,5$.

### *Машқҳо барои такрор*

**46.** Муодилаи квадратиро ҳал кунед:

а) $2x^2-5x-3=0$; б) $3x^2-8x+5=0$; в) $36x^2-12x+1=0$.

47. Қаиқ дар кӯл 12 км шино карда, баъд ба муқобили самти ҳаракати оби дарё 11 км ҳаракат кард. Қаиқ ба ҳамаи роҳ 1 соат вақт сарф кард. Суръати ҷараёни оби дарё 2 км/соат. Суръати ҳаракати қаиқро дар кӯл ёбед.

48. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y=\dfrac{5}{x-7}$ б) $y=\dfrac{19}{2x+72}$

## 6. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кардани сеаъзогии квадратӣ

Дар синфи 7 амалиёти тасвири бисёраъзогиро дар намуди ҳосили зарби дуаъзогиҳо ҷудо кардани он номида будем. Дар ҳамон ҷо нишон дода будем, ки ин амалиёт бо тарзҳои аз қавс баровардани зарбкунандаи умумӣ, гурӯҳбандӣ ва омехта амалӣ карда мешавад. Акнун як тарзи дигари ба зарбкунандаҳо ҷудо карданро муоина менамоем, ки он ба муайян будани решаҳои (нулҳои) бисёраъзогӣ такя мекунад. Ин тарзро дар мисоли сеаъзогии квадратӣ баён менамоем.

Хулоса, масъалаи зеринро мегузорем: коэффитсиентҳои сеаъзогии квадратии $ax^2+bx+c$ чӣ гуна бояд бошанд, то ки онро дар намуди ҳосили зарби $(a_1x+b_1)(ax_2+b_2)$, ки дар ин ҷо $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, $(a_1\neq 0,\ a_2\neq 0)$ ададҳои ҳақиқианд, ифода кардан мумкин бошад? Яъне баробарии

$$ax^2+bx+c=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2) \qquad (1)$$

ҷой дошта бошад.

Фарз мекунем, ки баробарии (1) дуруст аст. Қисми рости (1) ҳангоми $x=-\dfrac{b_1}{a_1}$ ва $x=-\dfrac{b_2}{a_2}$ будан ба нул баробар мешавад, яъне

дар ин ҳолат ададҳои $-\dfrac{b_1}{a_1}$ ва $-\dfrac{b_2}{a_2}$ решаҳои муодилаи $ax^2+bx+c=0$ мебошанд.

Бинобар ин дискриминанти сеаъзогии квадратии $ax^2+bx+c$, ки ба $b^2-4ac$ баробар аст, бояд адади ғайриманфӣ бошад.

Фарз мекунем, ки дискриминанти сеаъзогии квадратӣ $D=b^2-4ac$ ғайриманфӣ аст. Он гоҳ ин сеаъзогӣ решаҳои ҳақиқии $x_1$ ва $x_2$-ро дорад. Теоремаи Виетро истифода карда ҳосил мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2\right]=$$

$$=a\left[(x^2-x_1\cdot x)-(x_2\cdot x-x_1\cdot x_2)\right]=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=$$

$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Ҳамин тавр, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Коэффитсиенти $a$-ро ба яке аз зарбшавандаҳои хаттӣ дохил кардан мумкин аст. Масалан, $a(x-x_1)(x-x_2)=(ax-ax_1)(x-x_2)$. Натиҷаҳои дар боло овардашударо ба намуди теоремаи зерин ҷамъбаст менамоем.

Т е о р е м а. **Сеаъзогии квадратии $ax^2+bx+c$-ро фақат ва фақат дар ҳамон ҳолат дар шакли ҳосили зарби зарбшавандаҳои хаттӣ бо коэффитсиентҳои ҳақиқӣ навиштан мумкин аст, агар дискриминанти он ғайриманфӣ бошад (яъне, агар сеаъзогӣ дорои решаҳои ҳақиқӣ бошад).**

Э з о ҳ. Умуман, агар дараҷаи бисёраъзогӣ ба миқдори решаҳо баробар бошад, он гоҳ зарбкунандаҳо, ки аз дуаъзогиҳои хаттӣ иборатанд, ҷудо карда мешавад. Дар айни ҳол ҳар як решаи бисёраъзогӣ решаи дуаъзогии хаттӣ аст ва баръакс.

Масалан:

$x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)(x-1)(x+1)(x+1)$;

$2x^3+5x^2+x-2=(2x-1)(x+1)(x+2)$.

М и с о л и 1. Сеаъзогии квадратии $6x^2-x-1$-ро ба зарбкунандаҳои хаттӣ ҷудо мекунем.

Ҳ а л. Решаҳои ин сеаъзогии квадратӣ $x_1=\frac{1}{2}$ ва $x_2=-\frac{1}{3}$ мебошанд.

Бинобар ин $6x^2-x-1=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(2x-1)(3x+1)$.

М и с о л и 2. Сеаъзогии кадратии $x^2+x+1$-ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем.

Ҳ а л. Дискриминанти ин сеаъзогии квадратӣ манфӣ мебошад: $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$. Пас сеаъзогии квадратӣ реша надорад. Аз ҳамин сабаб аз рӯи теорема вай ба зарбкунандаҳо ҷудо намешавад.

М и с о л и 3. Касри $\frac{2x^2-7x+3}{6x^2-11x+4}$-ро ихтисор мекунем.

Ҳ а л. Барои ин ифодаҳои дар сурат ва махраҷи каср бударо ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем. Муодилаҳои квадратии $2x^2-7x+3=0$ ва $6x^2-11x+4=0$-ро ҳал карда мебинем, ки ададҳои $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=3$ ва $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ решаҳои ин муодилаҳо мебошанд. Пас мувофиқи теорема навишта метавонем:

$$2x^2-7x+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)=(2x-1)(x-3),$$

$$6x^2-11x+4=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot3\left(x-\frac{4}{3}\right)=(2x-1)(3x-4).$$

Ҳамин тарик, $\dfrac{2x^2-7x+3}{6x^2-11x+4}=\dfrac{(2x-1)(x-3)}{(2x-1)(3x-4)}=\dfrac{x-3}{3x-4}$.

Ҳолатҳое имконпазиранд, ки агар дар каср ба ҷои тағйирёбандаи сеаъзогии квадратӣ ягон қимат гузорем, сурат ва махраҷи он ба нул баробар мешавад. Дар ин гуна ҳолатҳо аввало сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо намудан ба мақсад мувофиқ аст.

Мисоли 4. Қимати $\dfrac{3x^2-3x-6}{2x^2+2x-12}$-ро баъди соддакунии ифода ҳангоми $x$=2 будан меёбем.

Ҳал. Агар бевосита дар ифода $x$=2 гузорем, он гоҳ сурат ва махраҷ ба нул мубаддал мешавад. Ифодаҳои дар сурат ва махраҷ бударо ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем. Муодилаҳои квадратии $3x^2-3x-6=0$ ва $2x^2+2x-12=0$-ро ҳал намуда, меёбем: $x_1=-1$; $x_2=2$ ва $x_1=2$; $x_2=-3$ решаҳои онҳо мешаванд.

Ҳамин тавр: $\dfrac{3x^2-3x-6}{2x^2+2x-12}=\dfrac{3(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+3)}=\dfrac{3(x+1)}{2(x+3)}=\dfrac{3\cdot 3}{2\cdot 5}=\dfrac{9}{10}$.

Мисоли 5. Қимати $\dfrac{5x^2-5}{6x^2+6x-12}$-ро баъди соддакунии ифода ҳангоми $x$=1 будан меёбем.

Ҳал. Монанди мисоли 4 муҳокима ронда ҳосил мекунем: $5x^2-5=0$, $x=1$; $x=-1$; $6x^2+6x-12=0$; $x=1$; $x_2=-2$.

Ҳамин тавр:

$$\frac{5x^2-5}{6x^2+6x-12}=\frac{5(x-1)(x+1)}{6(x-1)(x+2)}=\frac{5(x+1)}{6(x+2)}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 3}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}.$$

**?**

**1.** Теоремаро дар бораи ба зарбкунандаҳо ҷудо кардани сеаъзогии квадратӣ, ки дорои решаҳо мебошад, баён кунед. **2.** Татбиқи теоремаро дар ҳалли мисолҳои мушаххас нишон диҳед.

Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед (49–53):

**49.** а) $(x+3)^2-16$; б) $4a^2-x^2+2xy-y^2$; в) $6x^2+24xy+24y^2$.

**50.** а) $3x(x-3)-x+3$; б) $m(m-1)+(1-m)^2$; в) $x^2+x-2$.

**51.** а) $4a^2(b^2-1)+4b^2(1-b^2)$; б) $\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}$; в) $-y^2+16y-15$.

**52.** а) $2x^2-5x+3$; б) $2x^2+2x+\dfrac{1}{2}$; в) $-9x^2+12x-4$; г) $16a^2+24a+9$;

**53.** а) $0{,}25m^2-2m+4$; б) $-m^2+5m-6$; в) $3x^2+5x-2$; г) $6x^2-13x+6$.

Касрҳоро ихтисор кунед (54–57):

**54.** а) $\frac{3x-12}{x^2+x-20}$; б) $\frac{2x^2+7x+3}{x^2+3x}$; в) $\frac{2m^2-7m+3}{2m^2-3m-2}$

**55.** а) $\frac{5a+10}{2a^2+13a+18}$; б) $\frac{b^2-8b+15}{b^2-25}$; в) $\frac{y^2-5y-36}{81-y^2}$.

**56.** а) $\frac{2a^2-5a-3}{3a-9}$; б) $\frac{2y^2+7y+3}{y^2-9}$; в) $\frac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2}$.

**57.** а) $\frac{4x+4}{3x^2+2x-1}$; б) $\frac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2}$; в) $\frac{2m^2-8}{m^2+6m+8}$.

Айниятро исбот кунед (58–59):

**58.** $10x^2+19x-2=10(x-0,1)(x+2)$.

**59.** $0,5(x-6)(x-5)=0,5x^2-5,5x+15$.

**60.** Қимати касрро ёбед: $\frac{4x^2+8x-32}{4x^2-16}$ ҳангоми $x=-1;\ 5,\ 10$ будан.

## *Машқҳо барои такрор*

**61.** Амалҳоро иҷро намоед:

а) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$; б) $\frac{4\frac{1}{2}\cdot 5\frac{2}{3}}{6\frac{3}{4}}$; в) $\frac{4\frac{1}{4}}{11\frac{1}{3}\cdot 5\frac{1}{4}}$;

**62.** Муодиларо ҳал намоед:

а) $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$; б) $\frac{2x-a}{b}=\frac{4x-b}{2x+a}$.

**63.** 12%-и адади 120-ро ёбед.

**64.** Ҳисоб кунед:

$\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\frac{x+y}{2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right]\frac{xy}{(x+y)^2}$ ҳангоми $x=-\frac{1}{2};\ y=-2$ будан.

**65.** Ҳосили зарби ду адади пай дар паи натуралӣ ба 156 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

**66.** $\frac{3}{5}$-ро дар шакли касри даҳӣ нависед.

**67.** Амалҳоро иҷро намоед:

а) $a^{-3}\cdot a^{-5}$; б) $\left(-\frac{2}{5}a^4x^3y^2\right):\left(-\frac{1}{2}a^3xy^2\right)$.

**68.** Решаҳои сеаъзогии квадратиро ёбед:

а) $9x^2-9x+2$; б) $0,2x^2+3x-20$.

69. а) Се дона гулмоҳӣ 11,3 кг аст. Вазни ғулмоҳии якум $\frac{4}{5}$ ҳиссаи вазни дуюм, вазни дуюмаш 70% вазни сеюмро ташкил медиҳад. Вазни ҳар як гулмоҳиро ёбед.

б) Барои 0,8 тонна гандум ва 1,4 тонна ҷавдор 505,02 сомонӣ доданд. Агар 1 тонна ҷавдор аз 1 тон гандум 0,7 камтар сомонӣ бошад, 1 тон ҷавдор ва 1 тон гандум чанд сомонӣ меистад?

# § 3 ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ, ХОСИЯТҲО ВА ГРАФИКИ ОН

## 7. Функсияи квадратӣ ва хосиятҳои он

Дар соҳаҳои гуногуни илм ва техника бо бузургиҳои тағйирёбанда дучор мешавем, ки онҳо байни худ бо вобастагии функсионалии намудаш $y=ax^2+bx+c$ алоқамандаанд.

Масалан, вобастагии байни диаметри доира $d$ ва масоҳати он $s$ бо формулаи

$$S=\frac{\pi}{4}d^2$$

ифода меёбад.

Мо дар ин мисол бо функсияе дучор шудем, ки онро бо формулаи намуди $y=ax^2$ (дар ин ҷо $x$ – тағйирёбандаи новобаста ва $a$ – ягон адад) ифода кардан мумкин аст. Боз як мисол аз физика меорем.

Масофае, ки ҷисм ҳангоми ҳаракати ростхаттаи мунтазам тезшаванда тай мекунад, бо формулаи

$$s=\frac{at^2}{2}+v_0t+s_0$$

ифода карда мешавад. Дар ин ҷо $t$– вақт, $s$-роҳи тайкардашуда, $s_0$ – ибтидои роҳ, $v_0$ – суръати ибтидоӣ, $a$ – суръатнокӣ мебошад.

Мисоли дар боло овардашуда мисоли функсияи намуди $y=ax^2+bx+c$ мебошад.

Т а ъ р и ф. **Функсияе, ки бо формулаи намуди $y=ax^2+bx+c$ (дар ин ҷо $x$-тағйирёбандаи новобаста, $a$, $b$ ва $c$ - ададҳо ва $a\neq0$) ифода карда мешавад, функсияи квадратӣ номида мешавад.**

Графики функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$-ро **парабола** меноманд. Баъзан зери мафҳуми парабола худи функсияи квадратиро дар назар доранд.

Мо омӯзиши хосиятҳои функсияи квадратиро аз мавриди ҷузъӣ, аз функсияи $y=ax^2$ ҳангоми $a>0$ будан оғоз менамоем:

**1. Агар $x=0$ бошад, $y=0$ мешавад.**

**2. Агар $x\neq0$ бошад, $y>0$ мешавад.**

**3. Функсияи ҷуфт мебошад, зеро $y(x)=y(-x)$ аст.** Графики он нисбат ба тири $Oy$ симметрӣ мебошад ё чӣ тавре мегӯянд, он тир **тири симметрияи** функсия аст. Муодилаи ин тир $x=0$ мебошад.

**4. Функсия дар нимфосилаи $(-\infty; 0]$ кам мешавад ва дар нимпорчаи $[0; \infty)$ меафзояд.**

**5. Нимпорчаи $[0; \infty)$ соҳаи қиматҳои функсия мебошад.**

Хосиятҳои 1–3 маълум аст. Хосияти 4-ро исбот мекунем.

Фарз мекунем, ки $x_1$, $x_2$ ду қимати аргументӣ (дар айни хол $x_2>x_1$ аст) ва $y_1$, $y_2$ қиматҳои ба онҳо мувофиқи функсия мебошанд. Фарқи $y_2-y_1$-ро тартиб медиҳем:

$$y_2-y_1=ax_2^2-ax_1^2=a(x_2^2-x_1^2)=a(x_2+x_1)(x_2-x_1).$$

Азбаски $a>0$ ва $x_2-x_1>0$ аст, пас аломати ҳосили зарби $a(x_2+x_1)(x_2-x_1)$ бо аломати зарбшавандаи $x_2+x_1$ як хел аст. Агар ададҳои $x_2$ ва $x_1$ ба фосилаи $[-\infty; 0)$ таалуқ дошта бошанд, он гоҳ ин зарбшаванда манфӣ аст. Агар ададҳои $x_2$ ва $x_1$ ба нимпорчаи $[0; \infty)$ таалуқ дошта бошанд, он гоҳ зарбшавандаи $x_2+x_1$ мусбат аст. Дар мавриди якум $y_2-y_1<0$, яъне $y_2<y_1$ аст; дар мавриди дуюм $y_2-y_1>0$, яъне $y_2>y_1$ аст. Пас функсия дар нимфосилаи $[-\infty; 0)$ кам мешавад ва дар нимпорчаи $[0; \infty)$ меафзояд.

Акнун хосиятҳои функсияи $y=ax^2$-ро ҳангоми $a<0$ будан баён мекунем.

1. **Агар $x=0$ бошад, $y=0$ мешавад.**
2. **Агар $x\neq0$ бошад, $y<0$ мешавад.**
3. **Функсияи ҷуфт аст. Графики он нисбат ба тири $Oy$ симметрӣ мебошад** (дар ин ҳолат мегӯянд, ки тири ордината $Oy$ **тири симметрияаш аст).**
4. **Функсия дар нимфосилаи $(-\infty; 0]$ меафзояд ва дар нимпорчаи $[0; \infty)$ кам мешавад.**
5. **Нимпорчаи $(-\infty; 0]$ соҳаи қиматҳои функсия мебошад.**

Хосияти 4–ум мисли мавриди $a>0$ исбот карда мешавад.

Аз хосиятҳои номбаршуда натиҷа мебарояд, ки ҳангоми $a>0$ будан **шохаҳои парабола** $y=ax^2$ (қисмҳои график, ки ба фосилаҳои $(-\infty; 0)$ ва $(0; \infty)$ рост меоянд) ба боло ва ҳангоми $a<0$ будан поён равон аст. Тири $Oy$ **тири симметрияи** парабола мебошад. Нуқтаҳои буриши параболаю тири симметрияи онро **қуллаи парабола** меноманд. Қуллаи параболаи $y=ax^2$ бо ибтидои координатаҳо ҳамҷоя аст.

Э з о ҳ. Агар функсияи квадратӣ бо формулаи $y=ax^2+\gamma$ дода шуда бошад, он гоҳ хосиятҳои он ба хосиятҳои 1–5-и функсияи $y=ax^2$ монананд.

Масалан, ҳангоми $a>0$ будан вай дар фосила $(0; \infty)$ афзуншаванда ва дар $(-\infty; 0)$ камшаванда буда, хати рости $x=0$ яъне тири $Oy$

тири симметрияаш мебошад. Қуллааш дар нуқтаи $(0; \gamma)$ яъне дар тири ордината чойгир аст. Айнан, агар функсияи $y=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$-ро ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – ададҳои ҳақиқӣ) муоина намоем, мебинем, ки хати рости $x=b$ тири симметрии он буда, қуллааш дар нуқтаи $(\beta; \gamma)$ чойгир аст. Шохаҳои парабола ба боло равонанд, агар $a>0$ бошад.

Акнун хосиятҳои функсия $y=ax^2+bx+c$-ро баён мекунем.

Чунонки дар §2 п.5 қайд шуд, функсияи $y=ax^2+bx+c$-ро ба намуди

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

навиштан мумкин аст. Баробарии охиронро чунин менависем:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$$

ки дар ин чо $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$, $\quad \beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Мулоҳизаҳои дар эзоҳ овардашударо ба эътибор гирифта, ба хулоса меоем: **графики функсияи $y=ax^2+bx+c$ параболаест, ки қуллааш дар нуқтаи $\left(-\dfrac{b}{2a};\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ мебошад. Хати рости $x=-\dfrac{b}{2a}$ тири симметрияи ин парабола аст. Шохаҳои парабола ҳангоми $a>0$ ба боло ва ҳангоми $a<0$ ба поён равонанд.**

Параболаи $y=ax^2+bx+c$ бо тири $Oy$ нуқтаи буриш дорад. Абсиссаи нуқтаи буриш ба нул ва ординатааш ба $c$ баробар аст. Агар дар ифодаи $ax^2+bx+c$, $x=0$ гузорем, ординатаи нуқтаи буриш ҳосил мешавад. Масалан, нуқтаи буриши параболаи $y=x^2+4x+3$ ва тири $Oy$ дорои координатаҳои $(0; 3)$ аст.

На ҳар гуна параболаи намуди $y=ax^2+bx+c$ бо тири абсисса $Ox$ нуқтаи буриш дорад. Агар дискриминант $D=b^2-4ac$ мусбат бошад, он гоҳ муодилаи $ax^2+bx+c=0$ ду решаи ҳақиқии гуногун дорад:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Дар ин маврид параболаи $y=ax^2+bx+c$ тири $Ox$-ро дар ду нуқтаи абсиссаҳояшон мувофиқан $x_1$ ва $x_2$ мебурад. Чунончӣ, барои сеаъзогии квадратии $x^2+4x+3$, $D=16-12>0$. Ин сеаъзогии квадратӣ ду реша дорад: $x_1=-1$; $x_2=-3$. Бинобар ин параболаи $x^2+4x+3$ тири $Ox$-ро дар ду нуқта мебурад, ки абсиссаҳояшон ба $-1$ ва $-3$ баробар аст.

Агар $D=b^2-4ac=0$ бошад, муодилаи $ax^2+bx+c=0$ як решаи ҳақиқӣ дорад: $x=-\dfrac{b}{2a}$. Дар ин маврид муодилаи параболаро ба намуди $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ навиштан мумкин аст.

Ординатаи нуқтаи абсиссааш $-\frac{b}{2a}$ ба нул баробар аст. Дар дигар нуқтаҳои атрофи $-\frac{b}{2a}$ буда, $y$ мусбат мебошад. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки нуқтаи $-\frac{b}{2a}$ **нуқтаи расиши** парабола бо тири абсисса $Ox$ аст. Масалан, барои сеаъзогии квадратии $x^2-2x+1$ $D=0$ аст. Муодилаи $x^2-2x+1=0$ як решаи $x=1$ дорад. Бинобар ин нуқтаи абсиссааш 1 нуқтаи расиши параболаи $y=x^2-2x+1$ ба тири $Ox$ мебошад.

Агар $D=b^2-4ac<0$ бошад, муодилаи $ax^2-bx+c=0$ решаҳои ҳақиқӣ надорад. Дар ин маврид парабола тири $Ox$-ро намебурад. Масалан, барои сеаъзогии $x^2+2x+3$ $D=-8<0$. Муодилаи $x^2+2x+3=0$ решаҳои ҳақиқӣ надорад. Параболаи $y=x^2+2x+3$ тири $Ox$-ро намебурад.

Акнун якчанд мисолҳоро, ки онҳо гуфтаҳои болоро равшан мекунанд, меорем.

М и с о л и 1. Қуллаи параболаи $y=2x^2-4x+5$-ро меёбем.

Ҳ а л. $y=2x^2-4x+5=2\left(x^2-2x+\frac{5}{2}\right)=2(x-1)^2+3.$

Ҷ а в о б: Қуллаи парабола дар нуқтаи (1; 3) ҷойгир аст.

М и с о л и 2. Нуқтаҳои буриши параболаи $y=3x^2-9x+6$-ро бо тирҳои координатаҳо меёбем.

Ҳ а л. Дар параболаи $y=3x^2-9x+6$, $x$-ро ба 0 баробар карда $y=6$-ро ҳосил мекунем, баъд $y$-ро ба 0 баробар карда, муодилаи $3x^2-9x+6=0$-ро ҳал намуда, решаҳои он $x_1=1$, $x_2=2$-ро ҳосил менамоем. Параболаи додашуда тири $Ox$-ро дар нуқтаҳои (1; 0), (2; 0) ва $Oy$-ро дар нуқтаи (0; 6) мебурад.

М и с о л и 3. Функсияи квадратии $y=2x^2-2x+12$ дода шудааст. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии онро меёбем.

Ҳ а л. Функсияи квадратиро ба намуди $2x^2-2x+12=2(x-0,5)^2+11,5$ табдил медиҳем. $x=0,5$ – тири симметрияи он буда, қуллааш дар нуқтаи (0,5; 11,5) ҷойгир аст. Азбаски $a=2>0$ мебошад, бинобар ин шохаҳои парабола ба боло равонанд. Вай дар фосилаи (0,5; ∞) афзуншаванда ва дар фосилаи (–∞; 0,5) камшаванда мешавад.

**?**

1. Таърифи функсияи квадратиро баён кунед. 2. Хосиятҳои функсияи квадратии $y=ax^2$-ро: а) ҳангоми $a>0$ будан; б) ҳангоми $a<0$ будан баён кунед. 3. Хосиятҳои функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$-ро баён кунед.

**70.** Самти равиши шохаҳои параболаро муайян намоед.

а) $y=-7x^2+6x+1$; в) $y=3x^2+2x$;

б) $y=x^2-3x+1$; г) $y=-x^2+4x+8$.

**71.** Координатаҳои қулла ва муодилаи тири симметрии функсияро ёбед.

а) $y=3x^2+4$; в) $y=3x^2-12x$ д) $y=2x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{8}$

б) $y=-2(x-2)^2+3$; г) $y=-5x^2+4x+1$; е) $y=-7x^2+6x+1$.

**72.** Нулҳои функсияро ёбед:

а) $y=3x^2-7x+4$; в) $y=3x^2-13x+14$;

б) $y=5x^2-8x+3$; г) $y=2x^2-9x+10$.

**73.** Нуқтаи буриши параболаро бо тири ордината ёбед:

а) $y=5x^2-7x+1$; в) $y=-x^2+4$;

б) $y=3x^2+x+2$; г) $y=x^2-3x+5$.

**74.** Магар парабола тири абсиссаро мебурад? Агар бурад, координатаҳои нуқтаҳои буришро ёбед.

а) $y=2x^2-5x-3$; в) $y=5x^2+9x+4$;

г) $y=3x^2-2x+1$; г) $y=36x^2-12x+1$.

**75.** Координатаҳои нуқтаи расиши параболаро муайян кунед:

а) $y=2x^2-12x+18$; в) $y=x^2-2x+1$;

б) $y=-x^2+x-0{,}25$; г) $y=x^2-4x-1$.

**76.** Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёбед?

а) а) $y=-x^2+x$; в) $y=-2x^2+12x-19$; д) $y=3(x+1)^2$;

б) $y=3x^2-7x+4$; г) $y=\frac{1}{4}x^2+x+1$; е) $y=-2x^2+4x+4$.

## *Машқҳо барои такрор*

**77.** Касрҳоро ихтисор кунед:

$а)\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$; $б)\frac{y^2-x^2}{(x+y)^2}$; $в)\frac{m-n}{(n-m)^2}$.

**78.** Муодиларо ҳал кунед:

$а)\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$; $б)\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}$.

**79.** Парвиз ва Фирдавс дар якҷоягӣ 100 саҳифа китоб хонданд. Агар маълум бошад, ки Парвиз аз Фирдавс 4 сахифа кам китоб хондааст, Парвиз ва Фирдавс чанд саҳифагӣ китоб хондаанд?

**80.** Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $-y^2+6y-5$; б) $-x^2-5x+6$; в) $2x^2-5x+3$; г) $5y^2+2y-3$.

## 8. Экстремуми функсияи квадратӣ

Чӣ тавре дидем соҳаи муайянии функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$ маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ $R=(-\infty; \infty)$ аст. Соҳаи қиматҳояш низ ҳамин ададҳо мебошанд.

Т а ъ р и ф. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияро **қимати экстремалӣ ё экстремуми** он меноманд. Нуқтаҳое, ки дар он ин қиматҳо қабул карда мешаванд, **нуқтаҳои экстремалӣ ё экстремал** ном доранд.

Тарзи ёфтани экстремум ва экстремалҳои функсияи дилхоҳро истисно карда, дар ин пункт мо танҳо тарзи ёфтани онҳоро барои функсияи квадратӣ нишон медиҳем. Омӯзишро аз ҳолати хусусӣ сар мекунем.

Бигузор дар формулаи функсия коэффитсиент $b=0$ бошад, яъне $y=ax^2+c$ аст. Аз сабаби ҷуфт будани функсия муоинаи он дар фосилаи $(0; \infty)$ кифоя аст.

а) $a>0$ функсия афзуншаванда аст. Инчунин ҳар гуна қимати он аз адади $c$ хурд нест, барои ҳар гуна $x$; $ax^2+c\geq c$ чунки қимати ифодаи $ax^2$ адади ғайриманфӣ аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки қимати хурдтарини функсия ба $c$ баробар буда, ин қиматро функсия дар нуқтаи $x=0$ соҳиб мешавад. Функсия қимати калонтарин надорад, ки он аз афзуншаванда буданаш бармеояд.

Ҳамин тариқ, агар бо $y_{min}=c$; $x=0$ ишорат кунем.

Ё ҳар ду баробариро ҳамҷоя карда ин тавр навиштан мумкин аст: $y_{min}=y(0)=c$ ; (*min* решаи калимаи лотинии **minimum**, ки маъноящ хурдтарин аст).

б) $a<0$ функсияи $y=ax^2+c$ дар ин маврид камшаванда буда, қиматаш барои ҳар гуна қимати аргументи $x$ аз қимати $c$ зиёд нест, чунки қимати ифодаи $ax^2$ барои ҳар гуна қимати аргумент адади ғайримусбат аст.

Ҳангоми $x=0$ бошад, $y=c$ аст. Пас қисмати калонтарини функсия ба адади $c$ баробар аст. Аз сабаби камшаванда буданаш функсия қимати хурдтарин надорад.

Ҳамин тариқ, агар бо $y_{max}$ қимати калонтарини функсия ва бо $x_{max}$ нуқтаи экстремалиро ишорат намоем, пас

$$y_{max}=c; \quad x_{max}=0 \quad \text{ё} \quad y_{max}=y(0)=c$$

(*max* – решаи калимаи **maximum**,ки маъноящ калонтарин мебошад).

Ҳар ду ҳолатро ҳамҷоя карда ба хулосаи зерин меоем.

Функсияи $y=ax^2+c$ ҳангоми $a>0$ будан дорои қимати хурдтарин буда қимати калонтарин надорад. Ин функсия ҳангоми $a<0$ будан қимати калонтарин дошта қимати хурдтарин надорад. Дар ҳар ду маврид қимати экстремалӣ ба адади $c$ баробар буда, дар нуқтаи $x=0$ қабул карда мешавад.

Акнун ба ҳолати умумӣ бармегардем, яъне ба функсияи $y=ax^2+bx+c$.

Чӣ тавре дар пункти 5 нишон додем, ҳар гуна функсияи квадратиро дар намуди

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (1)$$

навиштан мумкин аст. Муқоисаи (1) бо функсияи $y=ax^2+c$ нишон медиҳем, ки дар (1) ба ҷои $x$ ифодаи $x + \frac{b}{2a}$ ва ба ҷои $c$ ифодаи $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ меояд. Мулоҳизарониҳои дар қисмчаҳои а) ва б)-и боло барои функсияи $y=ax^2+c$ гузаронидаамонро айнан барои функсияи (1) такрор карда чунин натиҷаро ҳосил мекунем, ки он яке аз хосиятҳои асосии парабола мебошад:

**А) Функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$ ҳангоми $a>0$ будан қимати хурдтарин дорад. Ин қимат ба $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ баробар буда, дар нуқтаи $x$, ки барояш $x + \frac{b}{2a}=0$ ё $x = -\frac{b}{2a}$ аст, ҳосил мешавад. Яъне**

$$y_{min} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; \quad x_{min} = -\frac{b}{2a}.$$

**Функсия қимати калонтарин надорад.**

**Б) Ҳамин функсия ҳангоми $a<0$ будан қимати калонтарин дорад. Ин қимат $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ буда, дар нуқтаи $x = -\frac{b}{2a}$ ҳосил мешавад.**

**Яъне** $y_{max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; \quad x_{max} = -\frac{b}{2a}.$

**Функсия қимати хурдтарин надорад.**

Э з о ҳ и 1. Натиҷаҳои ҳосилшуда нишон медиҳанд, ки нуқтаи экстремалии функсияи квадратӣ қуллаи парабола (ниг. ба пункти 7) мебошад. Оянда ҳангоми сохтани графики функсияи квадратӣ аз ин натиҷа истифода хоҳем кард.

Э з о ҳ и 2. Қимати хурдтарини функсияро минимум ва қимати калонтаринро максимум ҳам мегӯянд.

М и с о л и 1. Нуқтаи экстремалӣ ва экстремуми функсияи $y=2x^2+3$-ро меёбем.

Ҳ а л. Барои ёфтани экстремум ва экстремали функсия чунин рафтор мекунем. Азбаски функсия ҷуфт мебошад, бинобар ин онро дар фосилаи $(0; \infty)$ муоина намудан кифоя аст. Дар ин ҷо $a=2>0$. Аз ҳамин сабаб функсия афзуншаванда мебошад. Азбаски ҳамеша $2x^2+3 \geq 3$ аст, пас қимати хурдтарини функсия ба 3 баробар буда, функсия онро ҳангоми $x=0$ будан қабул менамояд. Ҳамин тавр қимати хурдтарин ё минимуми функсия ба 3 баробар аст:

$y_{min}=3, \quad x_{min}=0$ ё $y_{min}=y(0)=3.$

**Мисоли 2.** Экстремум ва эктремали функсияи $y=-3x^2+4$-ро меёбем.

**Ҳал.** Функсия дар фосилаи $(0; \infty)$ камшаванда буда, киматаш барои ҳар гуна қимати $x$ аз 4 калон нест, чунки ифодаи $-3x^2$ барои ҳар гуна қимати $x$ ғайримусбат аст. Ҳангоми $x=0$ будан $y=4$ аст. Пас қимати калонтарини функсия ба 4 баробар аст. Аз сабаби камшаванда буданаш функсия қимати хурдтарин надорад.

$$y_{max}=4, \quad x_{max}=0 \quad \text{ё} \quad y_{max}=y(0)=4.$$

**Мисоли 3.** Экстремум ва экстремали функсияи $y=2(x-3)^2+5$-ро бо ду тарз меёбем.

**Ҳал.** *Тарзи якум.* Қавсро кушода ҳосил мекунем:

$$y=2x^2-12x+23.$$

Азбаски $a=2>0$ мебошад. Бинобар ин функсия қимати хурдтарин дорад. Ин қимат ба $-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{144-184}{8}=\frac{40}{8}=5$ баробар буда, дар нуқтаи $x=-\frac{b}{2a}=\frac{12}{4}=3$ қабул карда мешавад.

Ҳамин тариқ, $y_{min}=5$; $x_{min}=3$.

Функсия ба қимати калонтарин доро нест.

*Тарзи дуюм.* Бевосита аз $y=2(x-3)^2+5$ маълум мешавад, ки $x_{min}=3$; $y_{min}=5$ мебошад.

**Мисоли 4.** Экстремум ва экстремалҳои функсияи $y=-3x^2+12x-8$-ро меёбем.

**Ҳал.** Азбаски $a=-3<0$ мебошад, бинобар ин функсия қимати калонтарин дорад. Ин қимат $-\frac{b^2-4ac}{4a}=\frac{12^2-4(-3)\cdot(-8)}{4\cdot(-3)}=\frac{144-96}{12}=\frac{48}{12}=4$ буда, дар нуқтаи $x=-\frac{2}{2a}=-\frac{12}{2(-3)}=2$ қабул карда мешавад. Яъне $y_{max}=4$, $x_{max}=2$.

Функсия қимати хурдтарин надорад.

Функсияи додашударо ба намуди $y=-3(x-2)^2+4$ нависем, он гоҳ бевосита $y_{max}=4$, $x_{max}=2$ навишта метавонем.

**?** 1. Экстремум ва экстремали функсия чист? 2. Функсияи квадратӣ дар кадом ҳолат қимати хурдтарин ва дар кадом ҳолат қимати калонтарин дорад? Магар барои функсияи квадратӣ ҳардуи ин қиматҳо вуҷуд доранд? 3. Қиматҳои экстремалии функсияи квадратӣ ва экстремали он ба чӣ баробар аст?

**81.** Кадоме аз функсияҳои зерин қимати калонтарин ва кадоме қимати хурдтаринро доранд:

а) $y=2x^2+12x+13$; в) $y=x^2+x-6$; д) $y=-2x^2+6x-6$;
б) $y=-2x^2-4x-5$; г) $y=-0{,}5x^2+1{,}5x+2$; е) $y=3x^2-6x+5$;

**82.** Экстремуми функсияро ёбед:

а) $y=x^2-2x-15$; в) $y=x^2+2x+1$; д) $y=2x^2+2x$;

б) $y=-x^2+6x-7$; г) $y=-2x^2-4x+1$; е) $y=-3x^2+18x-26$.

**83.** Экстремали функсияи квадратиро ёбед:

а) $y=2x^2+3$; в) $y=-4x^2+16x-13$; д) $y=-x^2+2x$;

б) $y=x^2-x$; г) $y=4x^2+4$; е) $y=2x^2+12x+10$.

**84.** Экстремум ва экстремали функсияро ёбед:

а) $y=3(x+2)^2-1$; в) $y=2(x+3)^2+1$; д) $y=-4(x-2)^2+1$;

б) $y=-3(x+2)^2-1$; г) $y=4(x-2)^2-1$; е) $y=3x^2-18x+30$.

### *Машқҳо барои такрор*

**85.** Амалҳоро иҷро кунед:

а) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$; б) $\frac{x^2+4x+3}{x-5}\cdot\frac{x^2-5x}{x+3}$.

**86.** Муодилаи квадратиро ҳал кунед:

а) $x^2+12x-64=0$; б) $x^2-4x=45$.

**87.** Самти равиши шохаҳои параболаҳоро муайян намоед:

а) $y=-\frac{1}{3}x^2+4x+10$; б) $y=5x^2-\frac{1}{3}x+\frac{4}{5}$.

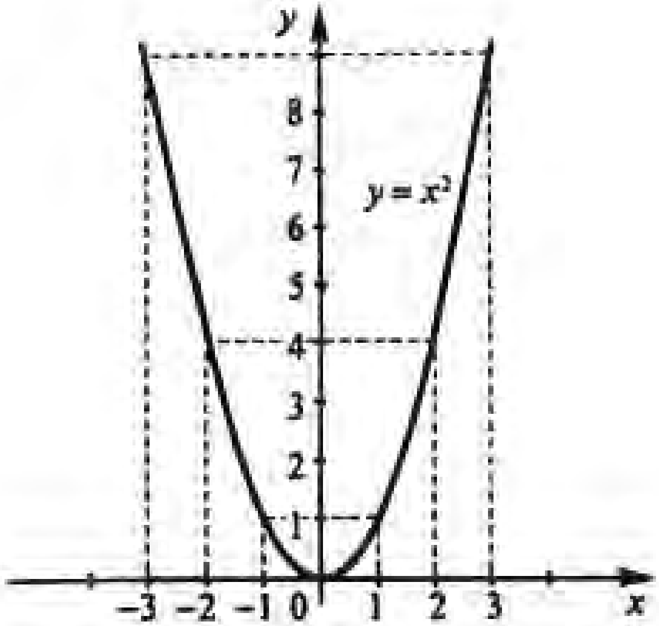
**88.** Аз 3200 нафар аҳолии деҳа 60%-ро коргарони совхоз ташкил медиҳанд. Дар совхоз чанд нафар коргар истиқомат дорад?

## 9. Графики функсияи квадратӣ

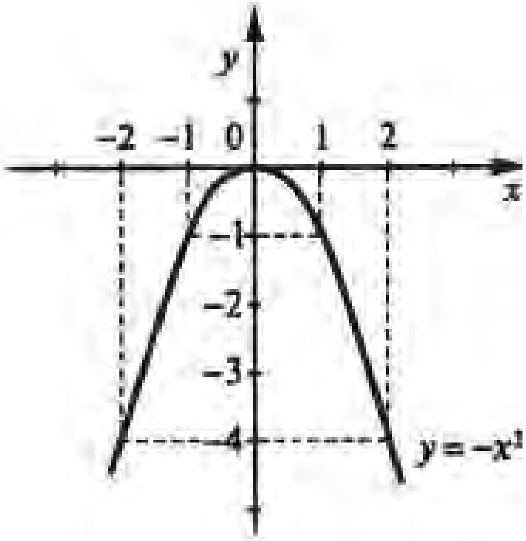
Дар пункти 2 мафҳуми графики функсияи $y=f(x)$-ро ҳамчун маҷмӯи нуқтаҳои ҳамворӣ, ки координатаҳояшон $(x; y)$ баробарии $y=f(x)$-ро қаноат менамоянд дохил карда будем. Дар пунктҳои пасоянд ҳангоми омӯхтани хосиятҳои функсияи квадратӣ чандин маротиба ба рафтори графики ин функсия ишора кардем. Вале мо то ҳол боре ҳам графики ягон параболаро насохтем. Акнун ба сохтани графики парабола ё функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$ шурӯъ менамоем. Чун ҳамеша аз функсияи квадратии оддитарин $y=ax^2$ сар мекунем. Барои ин аз схемаи кашидани графики функсияи формулааш додашуда, ки дар қисми (*b*)–и пункти 2 баён шудааст, истифода мекунем.

**А) Фарз мекунем, ки $a=1$ аст, он гоҳ функсияи квадратӣ намуди $y=x^2$-ро мегирад. Графики ин функсияро аз рӯи нуқтаҳояш месозем. Барои ин мақсад ҷадвали зеринро тартиб медиҳем.**

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | – | – | – |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=x^2$ | 9 | 4 | 1 | $\frac{1}{4}$ | 1 | 4 | 9 | – | – | – |




Расми 6




Расми 7

Аз рӯи координатаҳояшон нуқтаҳоро дар ҳамворӣ сохта баъд онҳоро бо хати кач мепайвандем. Ин хати кач п а р а б о л а аст, ки дар расми 6 тасвир шудааст. Параболаи $y=x^2$ ба хосиятҳои зерин молик аст.

Вай дар нимҳамвории болоӣ ҷойгир аст. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки функсияи $y=x^2$ фақат қиматҳои ғайриманфиро қабул менамояд. Шохаҳои парабола ба боло равонаанд. Вай дар фосилаи $(-\infty; 0)$ камшаванда шуда, дар $(0; \infty)$ афзуншаванда аст. Парабола дар ибтидои координата бо тири абсисса расиш дорад. Ин нуқта, ки нуқтаи поёнии график аст, **куллаи парабола** мебошад.

Тири $Oy$ **тири симметрияи** ин парабола мебошад, яъне муодилаи тири симметрия хати рости $x=0$ аст. Ин чунин маъно дорад, ки агар графики дар расми 6 тасвиршударо аз рӯи тири $Oy$ қат намоем, он гоҳ қисми рост ва чапи он ҳамҷоя мешаванд.

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки қимати функсияи $y=x^2$ ҳангоми ивазшавии аломати аргумент тағйир намеёбад, яъне $(-x)^2=x^2$. Ин гуна функсияҳоро функсияи ҷуфт гуфта будем, ки графикашон нисбат ба тири $Oy$ симметрӣ мебошад.

Бигзор акнун $a=-1$ бошад, яъне $y=-x^2$. Барои сохтани графики ин функсия ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

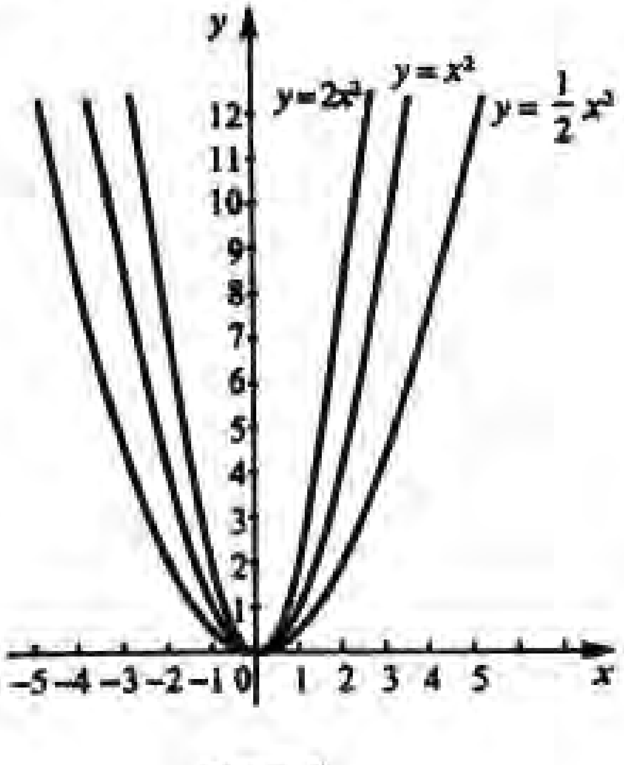
| $y$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=-x^2$ | $-9$ | $-4$ | $-1$ | $0$ | $-\frac{1}{4}$ | $-1$ | $-4$ | $-9$ | ... |

Мисли боло аз рӯи координатаҳояшон нуқтаҳоро дар ҳамворӣ тасвир намуда, баъд онҳоро бо хати кач пайваст мекунем. Дар натиҷа параболае ҳосил мешавад, ки шохаҳояш поён равонанд. Қуллааш (ибтидои системаи координатаҳо) нуқтаи болотарини (қимати калонтарини функсия) он мебошад. Тири симметриаш тири ордината аст (расми 7).

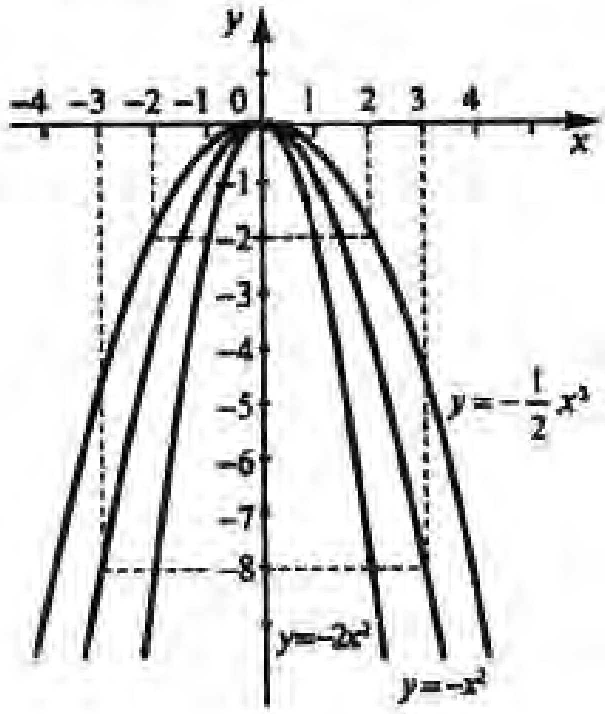
Акнун графики функсияи $y=ax^2$-ро мисли графики функсияи $y=x^2$ бо усули «нуқтаҳо» месозем. Аввало мавридеро мебинем, ки дар он $a>0$ аст. Дар як системаи координатаҳо графики функсияи $y=ax^2$-ро ҳангоми $a=\frac{1}{2}$; 1; 2 будан месозем (расми 8). Дар ҳар се ҳолат ҳам хатҳои каҷи ҳосилшуда ба тири ордината симметрӣ буда, дар нимҳамвории болои воқеанд. Шохаҳои ин параболаҳо ба боло равонанд. Қуллаи умумиашон ибтидои координата ва тири симметрияи ҳар се график тири ордината мебошад. Аз расми 8 намоён аст, ки $a$ ҳар қадар калон бошад, шохаҳои параболаи $y=ax^2$ ҳамон қадар рост ва $a$ ҳар қадар хурд бошад, шохаҳо ҳамон қадар паҳн мешаванд, яъне аз тири симметрия бо афзудани аргумент дур мешаванд.

Акнун мавриди $a<0$-ро дида мебароем. Дар расми 9 хати каҷи $y=ax^2$ ҳангоми $a=-\frac{1}{2}$; $-1$; $-2$ тасвир ёфтааст.

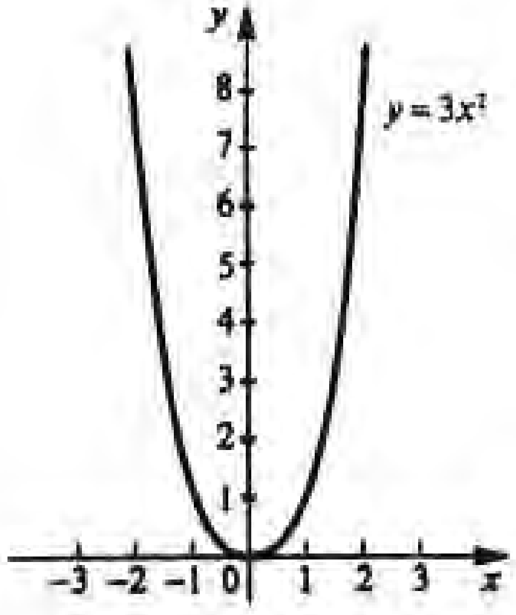
Қуллаи умумии ин параболаҳо (ибтидои системаи координатаҳо) нуқтаи болотарини онҳост. Тири ордината барои ҳар яки ин хатҳо тири симметрия аст. Бузургии мутлақи $a$ ҳар қадар калон бошад, шохаҳои парабола ҳамон қадар рост мешаванд; $|a|$ ҳар қадар хурд бошад, шохаҳои парабола ҳамон қадар паҳн мешаванд.



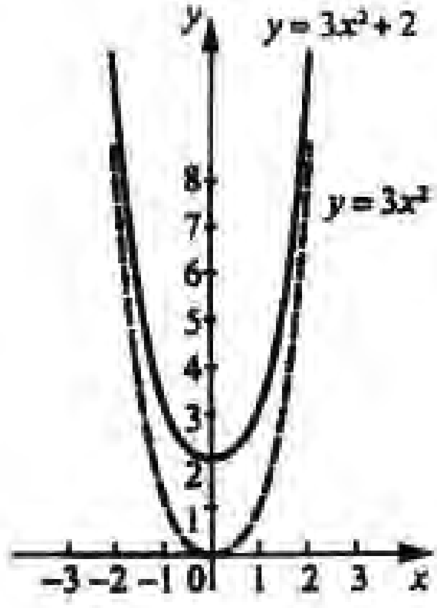
Расми 8



Расми 9




Расми 10, *а*




Расми 10, *б*

**Графики функсияи $y=ax^2+c$.** Графики ин функсияро аз графики функсияи $y=ax^2$ дар натиҷаи қад-қади тири $Oy$ ба боло $c$ воҳид (агар $c>0$ бошад) ё ба поён $-c$ воҳид (агар $c<0$ бошад), параллел кӯчонидан ҳосил кардан мумкин аст.

Мисоли 1. Графики функсияи $y=3x^2+2$-ро месозем.

Ҳал. Бо ин мақсад графики функсияҳои $y=3x^2$ ва $y=3x^2+2$-ро дар як системаи координатаҳо месозем. Аввал ҷадвали қиматҳои функсияи $y=3x^2$-ро тартиб медиҳем

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 27 | 12 | 3 | 0 | 3 | 12 | 27 | ... |

ва аз рӯи он график месозем (ниг. ба расми 10,а).

Барои тартиб додани ҷадвали қиматҳои функсияи $y=3x^2+2$ ба қиматҳои ёфташудаи функсияи $y=3x^2$ адади 2-ро ҷамъ кардан кифоя аст.

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 29 | 14 | 5 | 2 | 5 | 14 | 29 |

Нуқтаҳоеро, ки координатаҳояшон дар ин ҷадвал оварда шудаанд, дар ҳамвории координатавӣ тасвир карда онҳоро бо хати суфта мепайвандем. Дар натиҷа графики функсияи $y=3x^2+2$ ҳосил мешавад (расми 10,б).

Ба ҳар як нуқтаи $(x_0; y_0)$-и графики функсияи $y=3x^2$ нуқтаи ягонаи $(x_0; y_0+2)$-и графики функсияи $y=3x^2+2$ мувофиқ меояд ва баръакс. Яъне, агар ҳар як нуқтаи графики функсияи $y=3x^2$-ро 2 воҳид ба боло ҷойиваз намоем, нуқтаи мувофиқи графики функсияи $y=3x^2+2$-ро ҳосил мекунем.

Ҳамин тариқ, графики функсияи $y=3x^2+2$ параболаест, ки қуллааш дар нуқтаи (0; 2) буда, шохаҳояш ба боло равон аст.

Мисоли 2. Графики функсияи $y=3x^2-2$-ро месозем.

Ба монанди мисоли 1 муҳокима ронда ба хулосае меоем, ки график параболае мебошад, ки қуллааш дар нуқтаи (0;−2) буда, шохаҳояш ба боло равонаанд.

Дар ин ҷо графики функсияро бо ёрии сохтани нуқтаҳо нишон додем. Бояд қайд намуд, ки ин тарз аз бисёр ҷиҳатҳо номукаммал аст.

Пеш аз ҳама номукаммалии ин тарз дар он зоҳир мешавад, ки мо шумораи беохири нуқтаҳоро сохта наметавонем, аммо ҳар як хати кач дорои шумораи беохири нуқтаҳо мебошад.

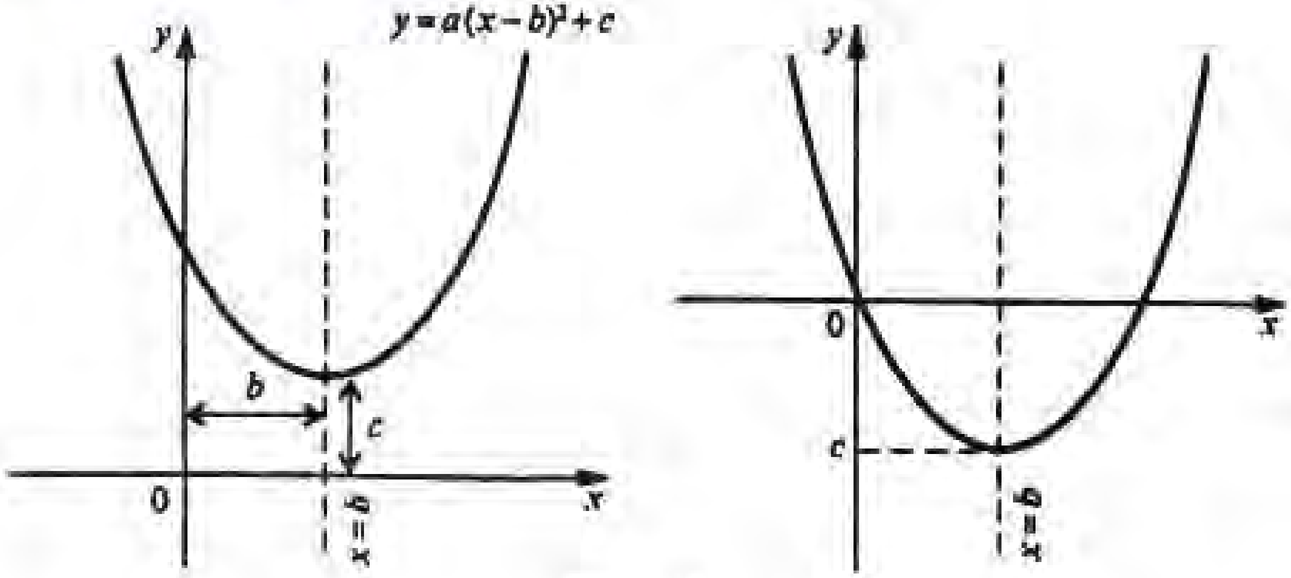
Ғайр аз ин мо бо ин тарз равиши функсияро дар фосилаҳои охирнок муайян карда метавонему ҳалос, аммо функсия метавонад дар фосилаи беохир, масалан дар (−∞; ∞) дода шуда бошад.

Аз тарафи дигар ҳангоми сохтани графики функсия бояд хосиятҳои он пешакӣ муайян карда шавад, аммо бо ин тарз хосиятҳои функсия қариб истифода намешаванд.

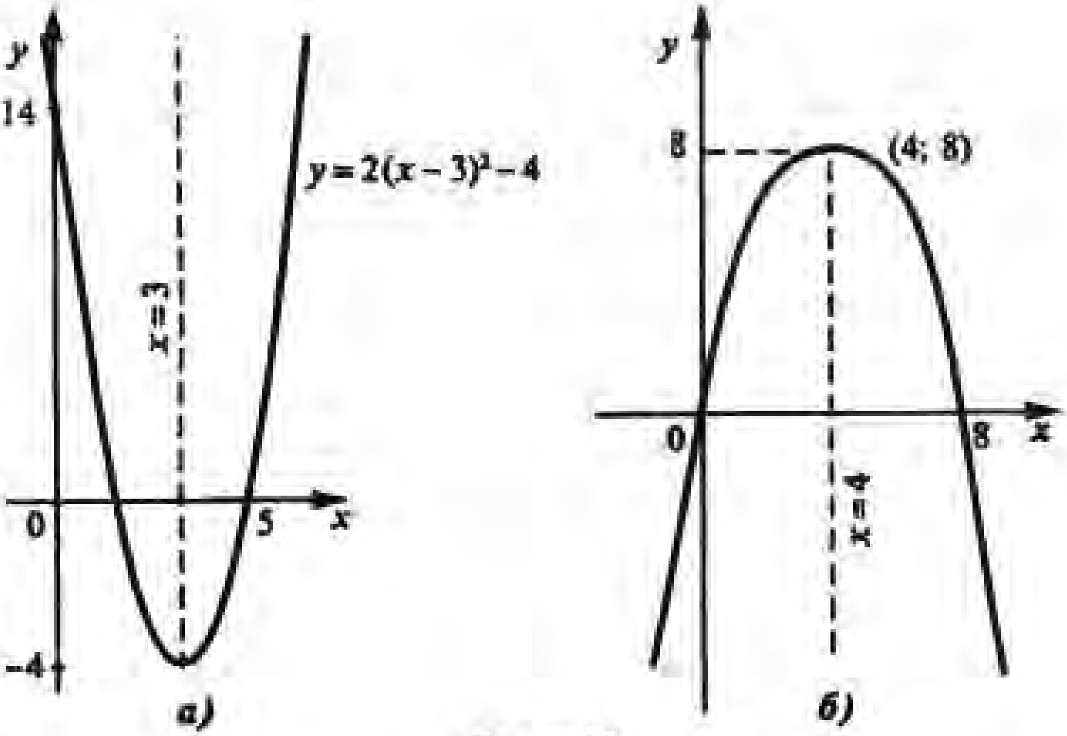
Далелҳои дар боло овардашуда моро водор мекунанд, ки графики функсияро дар асоси хосиятҳои он созем.

**Б) Графики функсияи $y=a(x-b)^2+c$.**

Чӣ тавре, ки дар §3 п.7 дидем хати рости $x=b$ тири симметрии он буда, қуллааш дар нуқтаи $(b;\ c)$ ҷойгир аст. Агар $a>0$ бошад, қимати хурдтаринаш ба $c$ баробар аст, яъне шохаҳои парабола ба боло равонанд (расми 11).




Расми 11




Расми 12

Агар $a<0$ бошад шохаҳои парабола ба поён равонанд. Қимати калонтаринаш $c$ аст.

М и с о л и 3. Графики функсияи $y=2(x-3)^2-4$-ро месозем. Хати рости $x=3$ тири симметрияи параболаи $y=2(x-3)^2-4$ буда, қуллааш дар нуқтаи $(3; -4)$ ҷойгир аст. Азбаски $a=2>0$ аст, пас шохаҳои парабола ба боло равонанд. Парабола тири абсиссаро дар нуқтаҳои $(1; 0)$; $(5; 0)$ ва тири ординатаро дар нуқтаи $(0; 14)$ мебурад (расми 12, *а*).

М и с о л и 4. Графики функсияи $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$-ро месозем.

Хати рости $x=4$ тири симметрияи параболаи додашуда буда, қуллааш дар нуқтаи $(4; 8)$ ҷойгир аст. Азбаски $a=-\frac{1}{2}<0$ аст, пас шохаҳои парабола ба поён равонанд. График тирҳои абсиссаро дар нуқтаҳои $(0; 0)$ $(8; 0)$ мебурад (расми 12, *б*).

М и с о л и 5. Аз функсияи квадратии $y=2x^2-8x+9$ квадрати пурра ҷудо карда графикашро месозем.

Ҳ а л. Функсияи додашударо ба квадрати пурра меорем:

$$2x^2-8x+9=2(x-2)^2+1.$$

Хати рости $x=2$ тири симметрии парабола буда, қуллааш дар нуқтаи $(2; 1)$ ҷойгир аст. Парабола тири $Ox$-ро намебурад, чунки дискриминант манфӣ мебошад. Шохаҳои парабола ба боло равонанд. Парабола тири $Oy$-ро дар нуқтаи $(0; 9)$ мебурад (расми 13).

**В) Графики функсияи $y=ax^2+bx+c$.**

Акнун схемаи умумии сохтани графики функсияи квадратии $y=ax^2-bx+c$-ро меорем. Ин схема ба хосиятҳои функсия, ки онҳо дар пунктҳои 7 ва 8 дарҷ гардида буданд, асос карда мешавад.

1. *Равиши шохаҳоро муайян мекунем.* Чӣ тавре дидем, агар $a>0$ бошад шохаҳо ба боло ва агар $a<0$ бошад, шохаҳо ба поён равонаанд.

2. *Нуқтаҳои буриши графикро бо тири координатаҳо муайян мекунем.* Барои ёфтани нуқтаи буриш бо тири ордината (чунин нуқта ҳамеша вуҷуд дошта ягона аст!) дар формула $x=0$ гузошта $y=c$ ҳосил мекунем. Яъне, нуқтаи $(0; c)$ ки дар тири ордината ҷойгир аст, мутааллиқи график мебошад. Барои ёфтани нуқтаҳои буриш ба тири абсисса $y=0$ гузошта муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$-ро ҳосил мекунем. Агар ин муодила дорои ду решаи $x_1$ ва $x_2$ бошад ($D=b^2-4ac>0$) он гоҳ тири абсиссаро дар нуқтаҳои $(x_1; 0)$ ва $(x_2; 0)$ мебурад. Агар муодила як реша дошта бошад ($D=b^2-4ac=0$) он гоҳ ин реша, ки ба $-\dfrac{b}{2a}$ баробар аст, нуқтаи *расиши* парабола бо тири абсисса мебошад. Агар муодилаи квадратӣ реша надошта бошад ($D=b^2-4ac<0$) он гоҳ графики функсияи квадратӣ тири абсиссаро намебурад.

3. *Координатаҳои қулла, тири симметрия, экстремум ва экстремали параболаро меёбем.* Чӣ тавре дидем (нигаред ба § 2 п. 5)

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Ин табдилот нишон медиҳад, ки абсиссаи қулла ба $-\dfrac{b}{2a}$ ординатааш ба $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ баробар аст. Дар навбати худ нуқтаи $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ экстремали функсия буда қимати экстремалиаш ё экстремумаш ба $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ баробар мебошад, яъне

$$y_{\text{экстр}}=y\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

(ин қимат хурдтарин аст, агар $a>0$ ва калонтарин аст, агар $a<0$ бошад). Муодилаи хати росте, ки тири симметрияи графики функсия аст, муодилаи $x=-\dfrac{b}{2a}$ мебошад. (Ин хати рост бо тири ордината параллел буда, аз нуқтаҳои абсиссаашон якхелаи ба $-\dfrac{b}{2a}$ баробар иборат аст).

4. *Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии (монотонӣ) функсияро муайян мекунем.* Аз мулоҳизаҳои боло бармеояд, ки агар $a>0$ ($a<0$) бошад, он гоҳ дар фосилаи $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ функсияи квадратӣ камшаванда (афзуншаванда) буда, дар фосилаи $\left(-\dfrac{b}{2a}; \infty\right)$ афзуншаванда (камшаванда) аст.

Маълумотҳои дар бандҳои 1)-4) овардашуда пурра имконият медиҳанд, ки графики парабола сохта шавад. Дурустии ин тасдиқотро дар мисолҳои сохтани графикҳои функсияҳои квадратӣ мушаххас нишон медиҳем.

Мисоли 6. Графики функсияи $y=x^2+6x+5$-ро месозем.

1) Шохаҳои парабола ба боло равонаанд, чунки $a=1>0$ аст.

2) Нуқтаи буриши функсияро бо тирҳои координата меёбем; ҳангоми $x=0$ будан $y=5$ мешавад, яъне график тири $0y$-ро дар нуқтаи $(0; 5)$ мебурад. Ҳангоми $y=0$ будан $x^2+6x+5=0$ аст. Ин муодилаи квадратиро ҳал намуда $x_1=-5$; $x_2=-1$-ро ҳосил мекунем, яъне график тири $0x$-ро дар нуқтаҳои $(-5; 0)$ ва $(-1; 0)$ мебурад.

3) Координатаҳои қуллаи парабола $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-3$; $y_0=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=$ $=-4$ мешаванд; тири симметрияи график хати рости $x=-3$ аст.

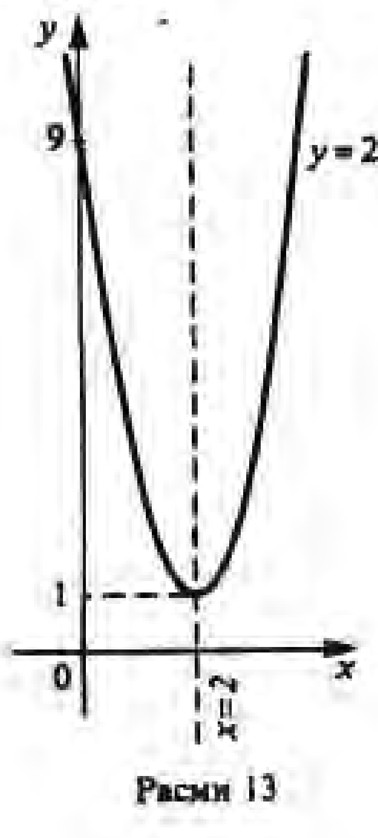
4) Функсия дар фосилаҳои $(-\infty; -3)$ камшаванда ва дар $(-3; \infty)$ афзуншаванда аст.

Натиҷаҳои болоро ҷамъбаст намуда, графики функсияро месозем. (Расми 14).

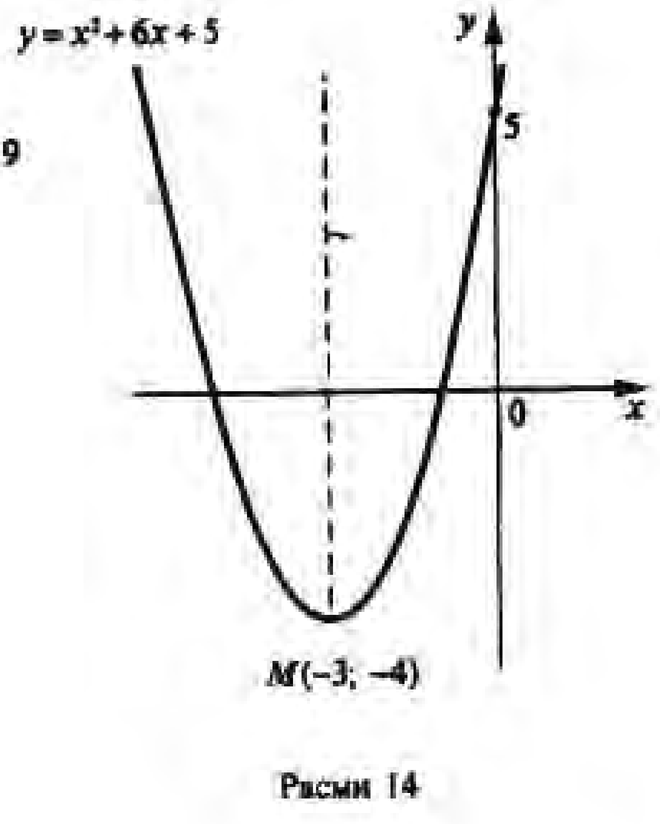
Мисоли 7. Графики функсияи $y=-x^2-6x+1$-ро месозем.

1. Шохаҳои парабола ба поён равонанд, чунки $a=-1<0$.

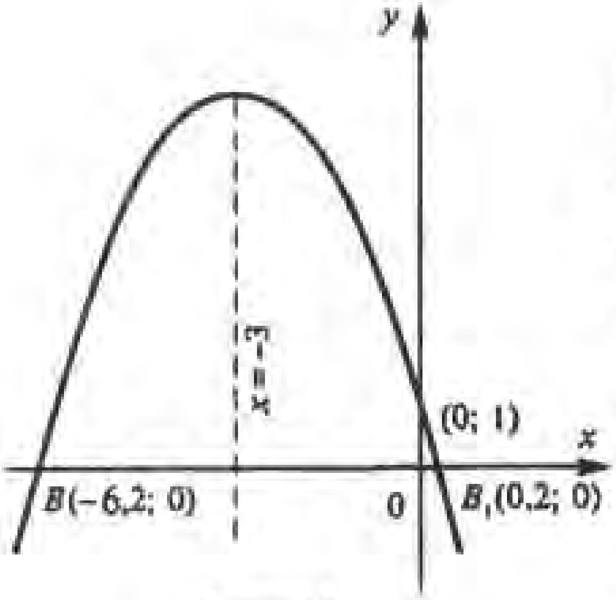
2. Дар ҳолати $x=0$ будан $y=1$ аст, яъне график тири $0y$-ро дар нуқтаи $(0; 1)$ мебурад. Ҳангоми $y=0$ будан $-x^2-6x+1=0$ мешавад. Муодилаи квадратиро ҳал намуда $x_1=-6{,}2$; $x_2=0{,}2$-ро ҳосил мекунем, яъне график тири $0x$-ро дар нуқтаҳои $(-6{,}2; 0)$ ва $(0{,}2; 0)$ мебурад.




Расми 13




Расми 14




Расми 15

3. Координатаҳои қуллаи парабола $x_0=-\frac{b}{2a}=-3$; $y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}=10$ тири симметрияи он хати $x=-3$ аст.

4. Функсия дар фосилаи $(-\infty; -3)$ афзуншаванда ва дар фосилаи $(-3; \infty)$ камшаванда аст.

Графики функсия дар расми 15 тасвир ёфтааст.

Мисоли 8. Графики функсияи $y=x^2-4x$-ро месозем.

1) $a=1>0$ шохаҳо ба боло равонанд.

2) Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координата меёбем:

$x=0$; $y=0$; $(0; 0)$; $y=0$; $x^2-4x=0$; $x(x-4)=0$;

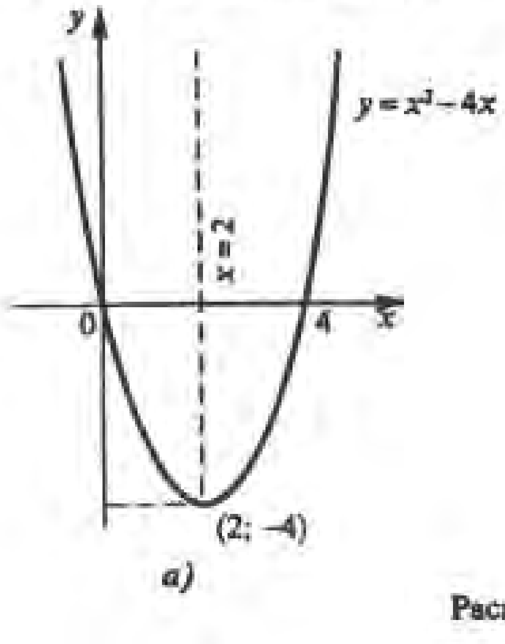
$x_1=0$; $x_2=4$; $(0; 0)$; $(4; 0)$.

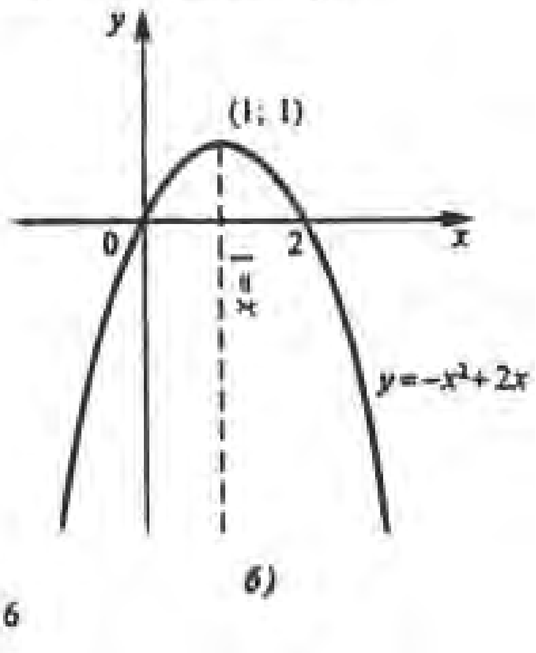
3) Координатаҳои қуллаи парабола $x_0=-\frac{b}{2a}=2$; $y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}=$ $=-\frac{16}{4}=-4$; $(2; -4)$ $x=2$ тири симметрияи график.

4) Дар фосилаи $(-\infty; 2)$ функсия камшаванда ва дар фосилаи $(2; \infty)$ функсия афзуншаванда мебошад. Графики функсия дар расми 16, *а* тасвир ёфтааст.

Мисоли 9. Графики функсияи $y=-x^2+2x$-ро месозем.

1) $a=-1<0$ шохаҳои парабола ба поён равонанд.




Расми 16

2) Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координата меёбем.

$x=0$; $y=0$; $(0;\ 0)$; $y=0$; $-x^2+2x=0$; $x^2-2x=0$;

$x(x-2)=0$; $x_1=0$; $x_2=2$; $(0;\ 0)$; $(2;\ 0)$.

3) Координатаҳои қуллаҳои парабола $x_0=-\dfrac{b}{2a}=1$; $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=1$; $(1;1)$; хати $x=1$ тири симметрияи парабола аст.

4) Функсия дар фосилаи $(-\infty;\ 1)$ афзуншаванда ва дар $(1;\ \infty)$ камшаванда аст. Графики функсия дар расми 16, *б* тасвир ёфтааст.

М и с о л и 10. Графики функсияи $y=0{,}5x^2+3x+6$-ро месозем.

1) $a=0{,}5>0$ шохаҳои парабола ба боло равонанд.

2) Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координатаҳо меёбем:

$x=0$; $y=6$; $(0;\ 6)$; $y=0$; $0{,}5x^2+3x+6=0$;

$D=b^2-4ac=9-4\cdot 0{,}5\cdot 6=9-12=-3<0$.

Муодила реша надорад, яъне тири $Ox$-ро намебурад.

3) Координатаҳои қуллаи парабола

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{1}=-3; \qquad y_0=\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{9-4\cdot 0{,}5\cdot 6}{4\cdot 0{,}5}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Хати рости $x=-3$ тири симметрияи график мебошад.

4) Функсия дар фосилаҳои $(-3;\ \infty)$ афзуншаванда аст. График дар расми 17 тасвир шудааст.

М и с о л и 11. Графики функсияи $y=-x^2+4x-5$-ро месозем.

1) $a=-1<0$ шохаҳои парабола ба поён равонанд.

2) Нуқтаҳои буриши тирҳои координата бо график:

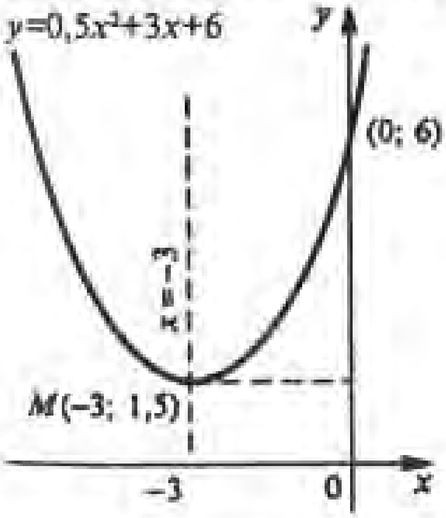
$x=0$; $y=-5$; $(0;\ -5)$; $y=0$; $-x^2+4x-5=0$; $x^2-4x+5=0$.

Муодила реша надорад, яъне график тири $0x$-ро намебурад.

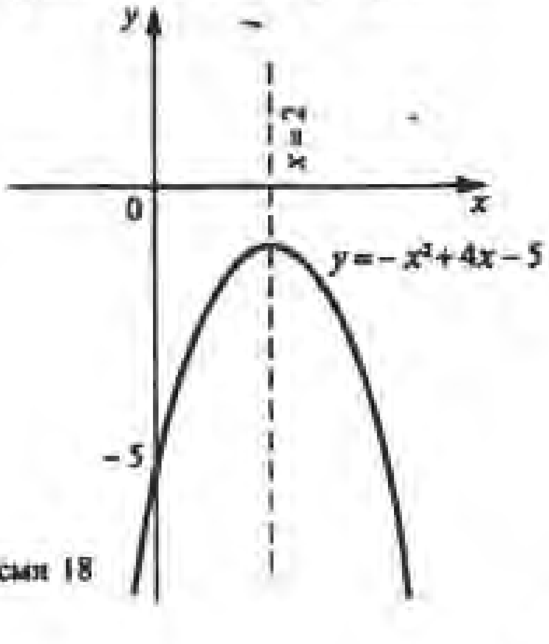
3) Координатаҳои қуллаи парабола $x_0=-\dfrac{b}{2a}=2$; $y_0=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-1$;

Хати рости $x=2$ тири симметрияи парабола мебошад.

4) Функсия дар фосилаҳои $(2;\ \infty)$ камшаванда дар $(-\infty;\ 2)$ афзуншаванда аст. Графики функсия дар расми 18 тасвир ёфтааст.




Расми 17




Расми 18

**?** **1.** Хосиятҳои функсияи квадратии $y=ax^2$-ро а) ҳангоми $a>0$ будан; б) ҳангоми $a<0$ будан номбар кунед. **2.** Аз графики функсияи $y=ax^2$ графики функсияи $y=ax^2+c$-ро чӣ тавр ҳосил кардан мумкин аст? **3.** Графики функсияи $y=a(x-b)^2+c$ аз кадом қиматҳои функсияи квадратӣ сохта мешавад? **4.** Зинаҳои схемаи умумии сохтани графики функсияи $y=ax^2+bx+c$-ро номбар намуда, онҳоро дар мисоли сохтани графикҳои функсияҳои квадратии мушаххас нишон диҳед.

Графики функсия сохта шавад (89–91).

**89.** а) $y=4x^2$ г) $y=-\frac{1}{4}x^2$; ж) $y=\frac{3}{4}x^2$; к) $y=-\frac{4}{5}x^2$;

б) $y=\frac{1}{4}x^2$; д) $y=\frac{2}{3}x^2$; з) $y=-\frac{3}{4}x^2$; л) $y=\frac{1}{3}x^2$;

в) $y=-4x^2$; е) $y=-\frac{2}{3}x^2$; и) $y=\frac{4}{5}x^2$; м) $y=-\frac{1}{3}x^2$.

**90.** а) $y=x^2+1$ г) $y=-2x^2+3$; ж) $y=-3x^2-1$; к) $y=\frac{1}{2}x^2+1$;

б) $y=-x^2+1$; д) $y=3x^2+1$; з) $y=-3x^2+1$; л) $y=-\frac{1}{2}x^2+1$;

в) $y=2x^2+3$; е) $y=3x^2-1$; и) $y=\frac{1}{2}x^2-1$; м) $y=-\frac{1}{2}x^2-1$.

**91.** а) $y=(x+2)^2-3$; д) $y=2(x-1)^2+2$; и) $y=3(x+5)^2-1$;

б) $y=(x-2)^2+3$; е) $y=-2(x-2)^2+3$; к) $y=3(x+2)^2+3$;

в) $y=(x-3)^2+2$; ж) $y=-3(x+1)^2-2$; л) $y=3(x+5)^2+\frac{2}{3}$;

г) $y=(x+3)^2-1$; з) $y=-3(x+1)^2+2$; м) $y=3(x+2)^2+\frac{3}{4}$;

**92.** Аз функсияи квадратӣ квадрати пурра ҷудо карда графикашро созед:

а) $y=3x^2-6x+7$; в) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$; д) $y=2x^2+x$;

б) $y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{24}{5}$; г) $y=3x^2-18x+7$; е) $y=-2x^2+x$.

**93.** Графики функсияи квадратиро созед:

а) $y=-x^2+5x+6$; г) $y=-x^2+5x-6$; ж) $y=0,5x^2-2x+2$;

б) $y=x^2+5x+6$; д) $y=\frac{1}{2}x^2+2x-3$; з) $y=-0,5x^2-4x-3$;

в) $y=x^2-5x-6$; е) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-2$; и) $y=3x^2+4x-1$.

### Машқҳо барои такрор

94. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x-1=\frac{3}{x+1}$;  б) $5x+6=\frac{7}{2x+9}$;  в) $\frac{x(1-x)}{2,5x+6}=6$.

95. Ифодаро содда кунед:

а) $\left(8\frac{11}{12}-6\frac{5}{12}\right):\frac{5}{8}$;  б) $\left(\frac{5}{12}+\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{12}{19}$;  в) $\frac{5}{22}:\frac{5}{2}-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{22}+\frac{3}{11}$.

96. а) Ба мағоза се халта орд овarданд, агар маълум бошад, ки ҳар як халта 50 кг орд дорад, ба магазин чанд кг орд овarданд?

б) Устохона дар як ҳафта $\frac{2}{3}$ ҳиссаи захираи матоъро сарф кард. Аз $\frac{3}{8}$ ҳиссаи матоъи сарфшуда куртаи занона дӯхтанд. Агар ба куртаҳои занона 240 м сарф шуда бошад, дар устохона чӣ қадар матоъ будааст?

97. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $2x-6>4$;  б) $\frac{x-2}{3x+12}>0$;  в) $\frac{x-1}{2x+4}<0$.

98. Экстремум ва экстремали функсияро ёбед:

а) $y=3(x-3)^2+2$;  б) $y=-3(x+2)^2-3$  в) $y=4(x-5)^2+5$.

# §4. ҲАЛЛИ НОБАРОБАРИҲОИ КВАДРАТӢ

## 10. Тарзи графикии ҳалли нобаробариҳои квадратӣ

Ба омӯзиш ва ҳалли нобаробариҳои квадратӣ, ки онҳоро нобаробариҳои дараҷаи дуюми яктағйирёбанда ҳам мегӯянд ва намуди

$$ax^2+bx+c>0 \text{ (мувофиқан } ax^2+bx+c\geq0) \qquad (1)$$

ё

$$ax^2+bx+c<0 \text{ (мувофиқан } ax^2+bx+c\leq0)$$

-ро доранд, шурӯъ мекунем. Хотиррасон мекунем, ки мо ҳанӯз дар синфи 8 мафҳуми нобаробариҳоро чорӣ карда, хосиятҳои умумии он ва тарзҳои ҳал кардани нобаробариҳои хаттӣ, касран хаттӣ, инчунин системаҳои чунин нобаробариҳоро муоина намуда будем.

Дар ин параграф асосан бо тарзҳои ҳалли нобаробариҳои дараҷаи дуюм шинос мешавем. Шиносоиро аз тарзи графикӣ сар мекунем.

Хосиятҳои нобаробариҳо имконият медиҳанд, ки омӯзишро бо нобаробарии намуди

$$ax^2+bx+c>0$$

маҳдуд намоем, чунки нобаробарии $ax^2+bx+c<0$ дар натиҷаи ба $-1$ зарб задани ҳарду қисми он ба нобаробарии намуди (1) мубаддал мегардад (тағйиротҳое, ки ҳангоми ҷой доштани нобаробариҳои ғайрикатъй), яъне нобаробариҳои аломати $\geq$ ё $\leq$ дошта, дар ҳалли ёфташудаи (1) гузаронидан зарур аст, аз мисолҳои дар поён овардашуда ба осонӣ дарк карда мешаванд).

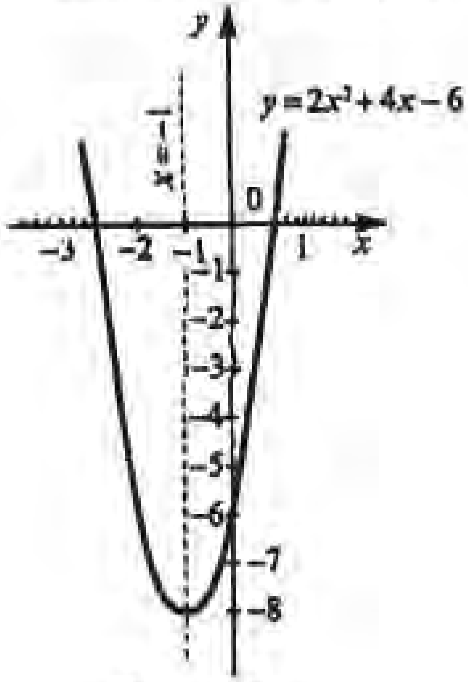
Моҳияти тарзи графикии ҳалли нобаробарии (1) зерин аст:

Чӣ тавре медонем ҳал кардани нобаробарӣ ин ёфтани ҳамаи он қиматҳои тағйирёбандаи новобаста, ки барояшон нобаробарӣ дуруст аст, иборат мебошад. Пас, агар графики функсияи $y=ax^2+bx+c$-ро дар системаи координатавӣ тасвир кунем, он гоҳ ҳамаи абсиссаҳои он нуктаҳои график, ки ординаташон мусбат аст, ҳалли нобаробарии (1) мебошанд, яъне чизи наве, ки мо ин ҷо бо ӯ дучор омадаем ин ёфтани он қиматҳои тири ададиест, ки дар онҳо график дар чорякҳои I ё II воқеъ аст.

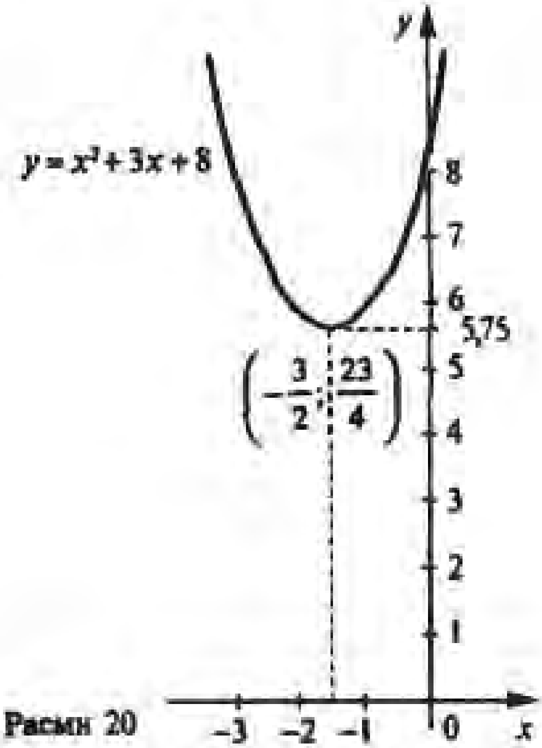
**М и с о л и 1.** Нобаробарии $2x^2+4x-6>0$-ро ҳал мекунем.

**Ҳ а л.** Сеаъзогии квадратии $2x^2+4x-6$ ду решаи ҳақиқии $x_1=-3$; $x_2=1$-ро дорад. Бинобар ин параболаи $y=2x^2+4x-6$ тири $Ox$-ро дар ду нуқта мебурад, ки абсиссаи онҳо мувофиқан ба $-3$ ва 1 баробаранд. Азбаски коэффисенти назди $x^2$ аз нул калон мебошад, пас шохаҳои парабола ба боло равонаанд. Қуллаи он дар нуқтаи координатаҳояшон ба $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-1$; $y_0=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-8$ баробар, яъне дар нуқтаи $(-1; -8)$ ҷойгир аст, ҳангоми $x=0$ будан $y=-6$ аст, яъне графики функсияи $y=2x^2+4x-6$ тири ординатаро дар нуқтаи $(0; -6)$ мебурад (расми 19). Аз расм дида мешавад, ки қимати сеаъзогӣ ҳангоми $x<-3$ ва $x>1$ будан мусбат мебошад.

Ҷавоб: $(-\infty; -3)\cup(1; \infty)$.




Расми 19




Расми 20

М и с о л и 2. Нобаробарии $x^2+3x+8\geq 0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Графики функсияи $y=x^2+3x+8$ параболае мебошад, ки шохаҳояш ба боло равонаанд, чунки $a=1>0$ аст. Азбаски $D=9-32=-23<0$ мебошад, бинобар ин муодилаи $x^2+3x+8=0$ реша надорад. Парабола тири $Ox$-ро намебурад. Ҳангоми $x=0$ будан $y=8$ мешавад. График тири $Oy$-ро дар нуқтаи (0; 8) мебурад. Қуллаи он дар нуқтаи координатаҳояш $x_0=-\frac{3}{2}$; $y_0=\frac{23}{4}$ ҷойгир аст (расми 20) Аз расм маълум аст, ки барои қимати ихтиёрии $x$ нобаробарии $x^2+3x+8\geq 0$ ҷой дорад.

Ҷавоб: $(-\infty; \infty)$.

М и с о л и 3. Нобаробарии $5x^2+9x-2<0$-ро ҳал мекунем.

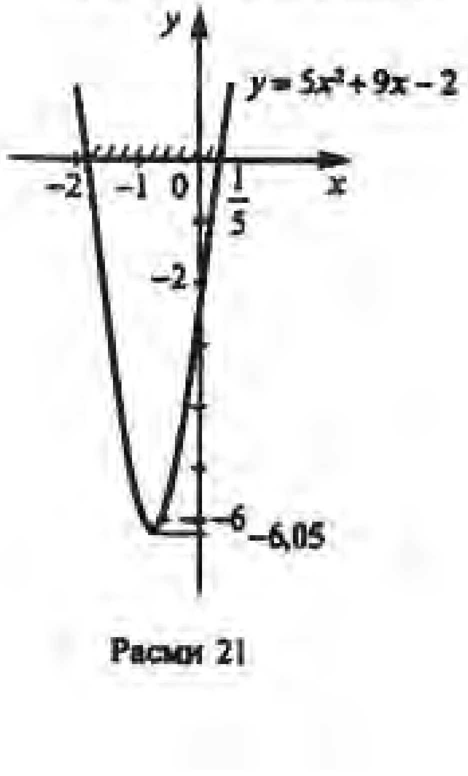
Ҳ а л. Графики ин функсия параболаест, ки шохаҳояш ба боло равона. Нуқтаи буриши графикро бо тирҳои координата муайян мекунем.

$x=0$, $y=-2$, $(0; -2)$; $y=0$, $5x^2+9x-2=0$, $x_1-2$; $x_2=\frac{1}{5}$.

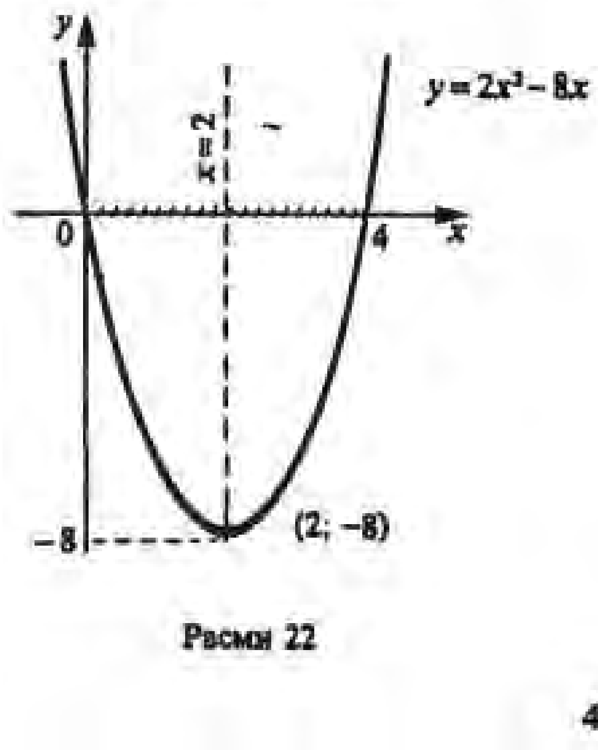
Ҳамин тариқ, параболаи $y=5x^2+9x-2$ тири $Ox$-ро дар нуқтаҳои абсиссаашон $-2$ ва $\frac{1}{5}$, тири $Oy$-ро дар нуқтаи ординатааш $-2$ мебурад. Қуллаи парабола дар нуқтаи координатҳояш $x_0=-\frac{9}{10}$; $y_0=-\frac{121}{20}$ воқеъ аст. Бо назардошти ин далелҳо графики функсияро месозем (расми 21).

Аз график дида мешавад, ки барои $x\in\left(-2;\frac{1}{5}\right)$ $5x^2+9x-2<0$ аст.

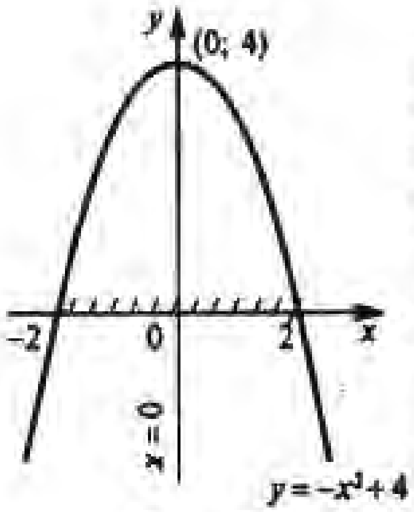
М и с о л и 4. Нобаробарии $2x^2-8x\leq 0$-ро ҳал мекунем.




Расми 21




Расми 22




Расми 23

Ҳ а л. $a=2>0$, шохаҳои парабола ба боло равонанд. Агар дар параболаи $y=2x^2-8x$ ба ҷои $x$ нул гузорем, қимати $y$ ба 0 баробар мешавад, яъне график аз болои нуқтаи (0; 0) мегузарад. Агар $y=0$ бошад, он гоҳ $2x^2-8x=0$; $x(2x-8)=0$, $x_1=0$, $x_2=4$ мешавад, яъне график тири $Ox$-ро дар нуқтаҳои абсиссашон 0 ва 4 буда мебурад. Қуллаи парабола дар нуқтаи $x_0=2$; $y_0=-8$ воқеъ аст (расми 22.) Ҳамин тариқ, барои $x\in[0;4]$ нобаробарӣ $2x^2-8x\leq 0$ дуруст аст.

Ҷ а в о б: [0; 4].

М и с о л и 5. Нобаробарии $-x^2+4\geq 0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. $a=-1<0$, шохаҳои парабола ба поён равонанд. Аз муодилаи параболаи $y=-x^2+4$ дида мешавад, ки қуллаи он дар нуқтаи (0; 4) ҷойгир аст.

$$y=0,\ -x^2+4=0,\ x^2-4=0,\ (x-2)(x+2)=0;\ \ x_1=-2;\ x_2=2;$$

график тири $Ox$-ро дар нуқтаҳои (−2; 0) ва (2; 0) мебурад (расми 23). Ҳамаи қиматҳои $x\in[-2;2]$ нобаробарии $-x^2+4\geq 0$-ро қаноат мекунонад.

Ҷавоб: [−2; 2].

М и с о л и 6. Нобаробарии $-2x^2+6x-10\leq 0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Азбаски $a=-2<0$ аст, пас шохаҳои парабола ба поён равонанд. Нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои координатаҳо муайян мекунем: агар $x=0$ бошад, он гоҳ $y=-10$, яъне нуқтаи (0; −10) ба график тааллуқ дорад. Агар $y=0$ бошад, пас $-2x^2+6x-10=0$. Барои ин муодила $D=6^2-4(-10)\cdot(-2)=36-80=-44<0$ аст. Барои ҳамин муодила решаи ҳақиқӣ надорад. Графики $y=-2x^2+6x-10$-ро сохта (расми 24,*а*) муқаррар мекунем, ки нобаробарии мазкур барои ҳамаи қиматҳои тағйирёбанда дуруст аст.

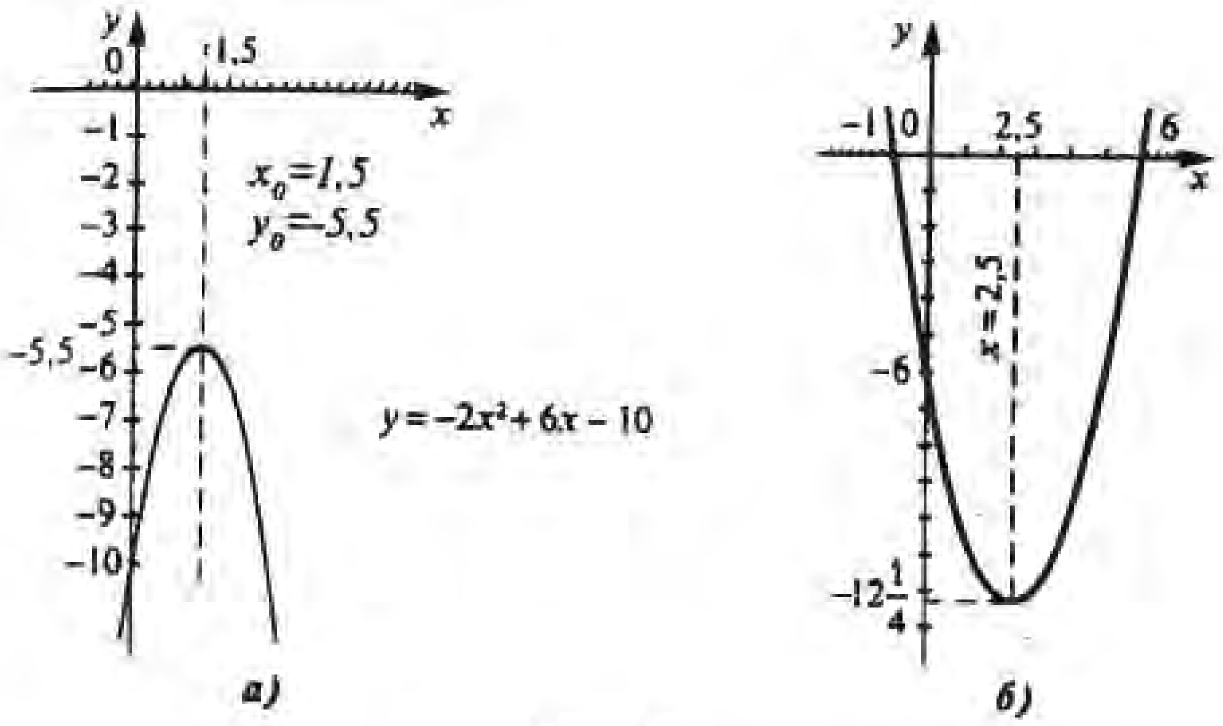
Ҷ а в о б: $(-\infty;\infty)$

М и с о л и 7. Соҳаи муайянии функсияи $y=\sqrt{x^2-5x-6}$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Азбаски аргумент $x$ дар таҳти решаи квадратӣ дода шудааст, бинобар ин функсияи $y$ дар ҳолати $x^2-5x-6\geq 0$ будан маъно дорад. Ин нобаробариро бо тарзи графикӣ ҳал мекунем: $a=1>0$ шохаҳои парабола ба боло равонанд. Қуллаи параболаро меёбем.

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2};$$

$$y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{25+24}{4}=-\frac{49}{4}=-12\frac{1}{4};\ \ \left(2\frac{1}{2};-12\frac{1}{4}\right).$$




Расми 24

Муодилаи $x^2-5x-6=0$-ро ҳал намуда нуқтаи буриши графикро бо тири $0x$ меёбем $x_1=6$; $x_2=-1$. Ҳангоми $x=0$ будан $y=-6$ мешавад. График тири $0x$-ро дар нуқтаҳои $(-1;\ 0)$ $(6;\ 0)$ ва тири $0y$-ро дар нуқтаи $(0;\ -6)$ мебурад. Хати рости $x=2{,}5$ тири симметрии график мешавад (расми 24, б). Ҳамин тавр $x\in(-\infty;-1]$ ва $x\in[6;\infty)$ нобаробарии $x^2-5x-6\geq0$ қаноат мекунонанд.

Ҷ а в о б: $(-\infty;-1]\cup[6;\infty)$.

М и с о л и 8. Муайян мекунем, ки дар кадом қиматҳои $m$ нобаробарии $x^2+x+m>0$ дуруст аст.

Ҳ а л. Нобаробарии додашуда барои ҳамон қиматҳои $m$ ҷой дорад, агар барояшон дискриминанти муодилаи $x^2+x+m=0$ манфӣ бошад, яъне муодила ҳал надошта бошад. Бинобар ин кифоя аст, ки $D=b^2-4ac=1-4\cdot1\cdot m<0$; $1-4m<0$; $-4m<-1$; $4m>1$; $m>\frac{1}{4}$ гирем.

Ҷ а в о б: $\left(\frac{1}{4};\ \infty\right)$.

**?** 1. Чӣ гуна нобаробариро нобаробарии квадратӣ меноманд? 2. Чӣ гуна намуди нобаробариҳоро медонед? 3. Нобаробарии номаълумдорро ҳал кардан чӣ маънӣ дорад? 4. Моҳияти тарзи графикии ҳалли нобаробариҳои квадратиро баён карда, онро дар ҳалли нобаробариҳои мушаххас нишон диҳед.

Нобаробариро ҳал кунед (99–105).

**99.** а) $x^2-5x+4>0$; б) $x^2+4x<0$; в) $2x^2-7x-15\geq 0$.

**100.** а) $12x^2-17x-105<0$; б) $x^2-4x>0$; в) $x^2+6x+9\leq 0$.

**101.** а) $12x^2-4x+3<0$; б) $3x^2+2x+1>0$; в) $x^2+13x+36\leq 0$.

**102.** а) $x^4+4x^2+4\leq 0$; б) $-2+2x-3x^2<0$; в) $-5+4x-3x^2<0$.

**103.** а) $x^2-3x>10$; б) $4x^2+9>12x$; в) $4x-x^2<5$.

**104.** а) $(x-5)x+4x>2$; б) $(x+5)x\leq 2(x^2+2)$; в) $(x+4)(x+5)-5\geq 5$.

**105.** а) $\frac{1}{3}x^2-3x+6<0$; б) $2(x+2)^2-3{,}5\geq 2x$; в) $\frac{x^2}{2}\geq -5x+5{,}5$.

**106.** а) Як тарафи росткунҷа аз тарафи дигараш 7 см калон аст. Масоҳати росткунҷа аз 60 см² хурд аст. Дарозии тарафи дигари росткунҷаро ёбед.
б) Бари росткунҷа аз дарозиаш 1 см хурд аст. Дарозии росткунҷа бояд чӣ қадар бошад, то ки масоҳати он аз 12 см² калон шавад?

**107.** Соҳаи муайяни функсияро ёбед:

а) $y=\sqrt{x^2-25}$; в) $y=\sqrt{2x^2-3x+1}$;

б) $y=\sqrt{-x^2-6x+7}$; г) $y=\sqrt{64x^3-x}$;

**108.** Барои кадом қиматҳои $m$ нобаробарӣ барои қиматҳои дилхоҳи $x$ дуруст аст:

а) $x^2+2x+m>0$; в) $mx^2+12x-5<0$;

б) $x^2+2x+m\geq 10$; г) $x^2+(m+2)x+8m+1>0$?

## *Машқҳо барои такрор*

**109.** Коэффисиентҳои сеаъзогии $ax^2+bx+c$-ро муайян кунед, агар маълум бошад, ки ҳангоми $x=4$ будани сеаъзогӣ ба нул мубаддал шуда ҳангоми $x=-4$ будан вай ба қимати хурдтарини $-8$ доро аст.

**110.** Муодилаларо ҳал кунед:

а) $8x-3=5x+6$; б) $2x(3x-2)-3\left[1-(2-x)(2x+3)-\frac{x-3}{2}\right]=13$.

**111.** Нобаробариро ҳал кунед.

а) $x(5-x)>3$; б) $6(2x+7)<15(x+2)$.

**112.** Як мошинанавис дастнависро дар $3\frac{1}{3}$ рӯз, вале дуюмаш дар $2\frac{1}{3}$ рӯз чоп карда метавонад. Ҳар ду мошинанавис дар як вақт кор карда, ин дастнависро дар чанд рӯз чоп мекунанд?

**113.** Суммаи ду адад 12, вале фарқи онҳо ба 2 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

**114.** Далер ва Некрӯз 16 дона чормағз доштанд. Агар Некрӯз ба Далер 6 дона чормағз диҳад, дар ӯ назар ба Далер 3 маротиба камтар чормағз мемонад. Далер ва Некрӯз чандонагӣ чормағз доштанд?

## 11. Бо методи фосилаҳо ҳал кардани нобаробариҳо

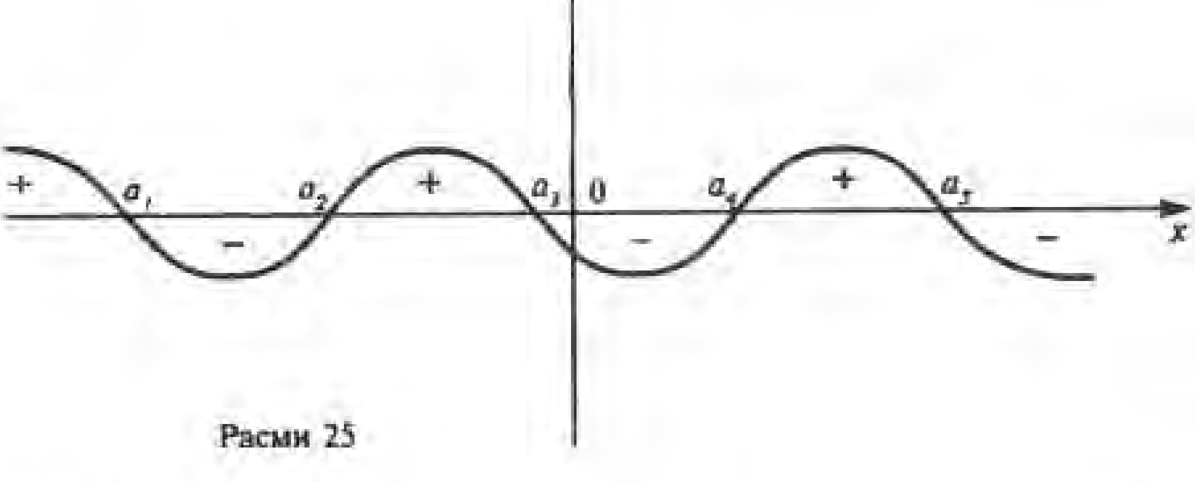
Акнун тарзи хал кардани нобаробарии $ax^2+bx+c>0$, ки он **методи фосилаҳо** ном дорад, меорем. Дар аввал моҳияти методҳоро баён мекунем. Фарз мекунем, тамоми тири ададй, яъне фосилаи $(-\infty;\infty)$ ба фосилаҳои $(-\infty; a_0)$; $(a_0; a_1)$; $(a_1; a_2)$; $(a_2; a_3)$, ...; $(a_n; a_{n+1})$ $(a_{n+1};\infty)$ чунон чудо карда шудааст, ки дар якеи онҳо аломати функсияи $y=f(x)$ доимӣ аст: (Яъне, масалан барои ҳамаи нуқтаҳои фосилаи $(a_1; a_2)$ минус аст) Дар айни ҳол ин аломат навбат ба навбат (паи ҳам) иваз мешавад (расми 25). Ин маънои онро дорад, ки нуқтаҳои $a_0; a_1; a_2; ...; a_n; a_{n+1}$ нулҳои функсияи $y=f(x)$ (решаҳои муодилаи $f(x)=0$) мебошанд.

Чунин фосилаҳо фосилаҳои *доималоматии* функсия ном доранд. Бигузор фосилаҳои доималоматии функсия маълуманд. *Ҳосили ҷамъи ҳамаи онҳо (бо маънои ҷамъи маҷмӯҳо), ки дар онҳо аломати функсия плюс аст, ҳалли нобаробарии $f(x)>0$ буда, ҳосили ҷамъи ҳамаи онҳо, ки дар онҳо аломати функсия минус аст, ҳалли нобаробарии $f(x)<0$ мебошад.* Масалан, маҷмӯи $(-\infty;a_1)\cup(a_2;a_3)\cup(a_4;a_5)$ ҳалли нобаробарии $f(x)>0$ буда, маҷмӯи $(a_1;a_2)\cup(a_3;a_4)\cup(a_5;\infty)$ ҳалли нобаробарии $f(x)<0$ мебошад (ниг. ба расми 25).

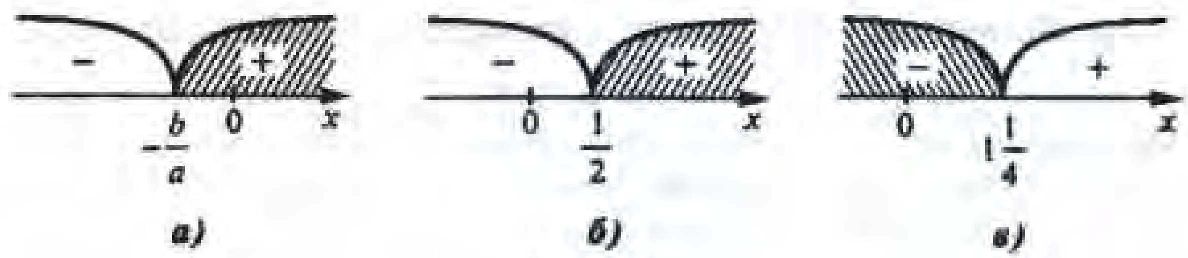
Ҳамин тариқ, васоити асосии истифодаи ин метод донистани фосилаҳои доималоматии функсия мебошад. Мо дар аввал тарзи истифодаи ин методро барои ёфтани ҳалли нобаробариҳои мушаххаси хаттӣ, касрали хаттӣ ва баъд барои нобаробариҳои дараҷаи дуюм меорем.

А) *Нобаробарии хаттӣ (дараҷаи якум)* $ax+b>0$ $(a>0)$.

Ададӣ $-\frac{a}{b}$ решаи ягонаи муодилаи $ax+b=0$ аст. Пас тири ададӣ ба фосилаи $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$ ва $\left(-\frac{b}{a};\infty\right)$ ҷудо мешаванд, ки дар онҳо функсияи хаттӣ $f(x)=ax+b$ доималомат аст (дар фосилаи якум




Расми 25




Расми 26

аломат манфӣ буда, дуюм–мусбат аст (расми 26). Ҳамин тариқ фосилаи $\left(-\frac{b}{a};\infty\right)$ ҳалли нобаробарии мазкур аст.

Мисоли 1. Нобаробарии $3(x-1)>x-2$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Нобаробарии додашуда $3x-3-x+2>0$ ё ба $2x-1>0$ баробарқувва аст. Решаи $2x-1=0$ адади $\frac{1}{2}$ мебошад (расми 26,б).

Ҷавоб: $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$.

Мисоли 2. Нобаробарии хаттии $-3(x-1)>x-2$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Табдилотҳои соддаро ичро карда ҳосил мекунем:
$-3(x-1)-(x-2)=-3x-x+3+2=-4x+5>0$ ё $4x-5<0$.

Решаи муодилаи $4x-5=0$ ба $x=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ баробар аст. Пас дар $\left(-\infty;1\frac{1}{4}\right)$ $f(x)=4x-5$ манфӣ буда, дар $\left(1\frac{1}{4};\ \infty\right)$ мусбат аст (расми 26,в).

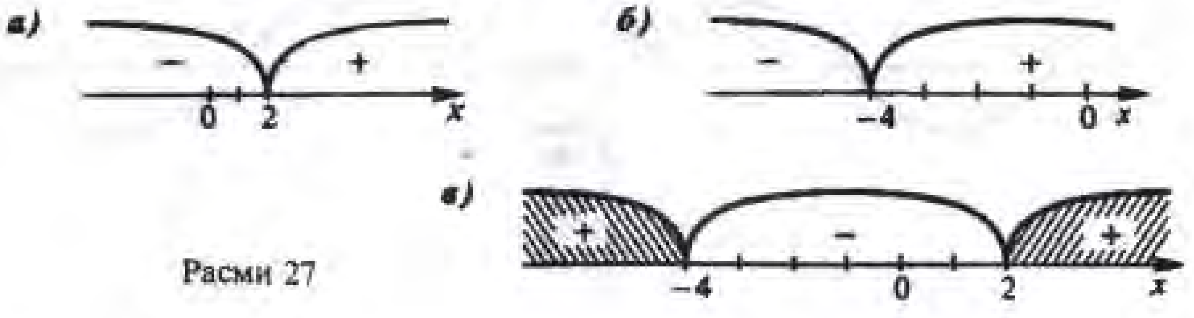
Ҷавоб: $\left(-\infty;1\frac{1}{4}\right)$.

Б) *Нобаробарии касран хаттӣ:* $\frac{ax+b}{cx+d}>0$-ро ҳал мекунем.

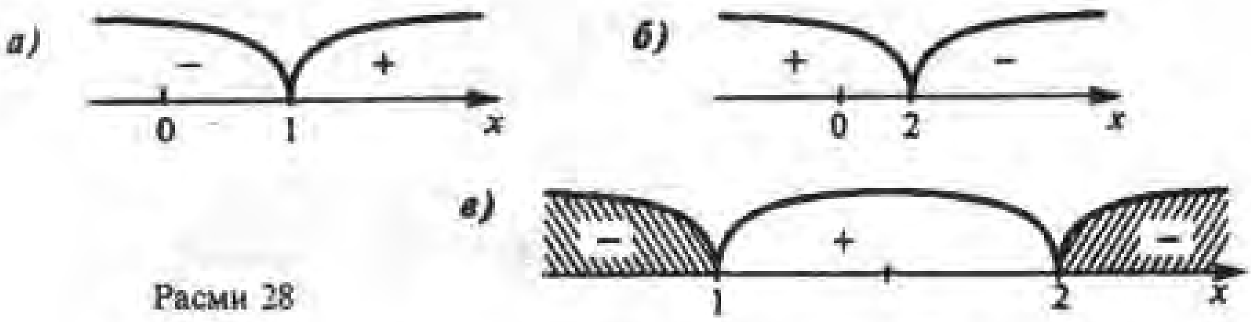
Тарзи истифодаи методро дар ҳалли дутои чунин нобаробарӣ нишон медиҳем.

Мисоли 3. Нобаробарии касран хаттии $\frac{x-2}{3x+12}>0$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Адади 2 решаи сурат, адади −4 решаи махраҷ аст. Пас сурат дар $(-\infty;\ 2)$ манфӣ ва дар $(2;\ \infty)$ мусбат буда (расми 27,а) махраҷ дар $(-\infty;\ -4)$ манфӣ ва дар $(-4;\ \infty)$ мусбат аст (расми 27,б).




Расми 27




Расми 28

Ин маълумотҳо ва каср будани $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+12}$ -ро ба инобат гирифта барояш чунин фосилаҳои доималоматиро ҳосил мекунем (расми 27,*в*). (Дар (−4; −2) аломати $\dfrac{x-2}{3x+12}$ манфӣ шуд, чунки дар он сурат манфӣ буда махраҷ мусбат аст). Аз расм намоён аст, ки маҷмӯи $(-\infty;-4)$ ва $(2;\infty)$ ҳалли нобаробарӣ мебошад.

Ҷ а в о б: $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

М и с о л и 4. Нобаробарии $\dfrac{x-1}{-2x+4}<0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Фосилаҳои доималоматии сурат $x-1$ (расми 28, *а*) махраҷ $-2x+4$ (расми 28, *б*) ва касри $f(x)=\dfrac{x-1}{-2x+4}$ -ро (расми 28, *в*) дар тири ададӣ тасвир мекунем:

Ҷ а в о б: $(-\infty;1)\cup(2;\infty)$.

В) *Нобаробарии квадратӣ* $ax^2+bx+c>0$.

Бигзор $x_1$ ва $x_2$ решаҳои муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ бошанд. Он гоҳ чӣ тавре дидем

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

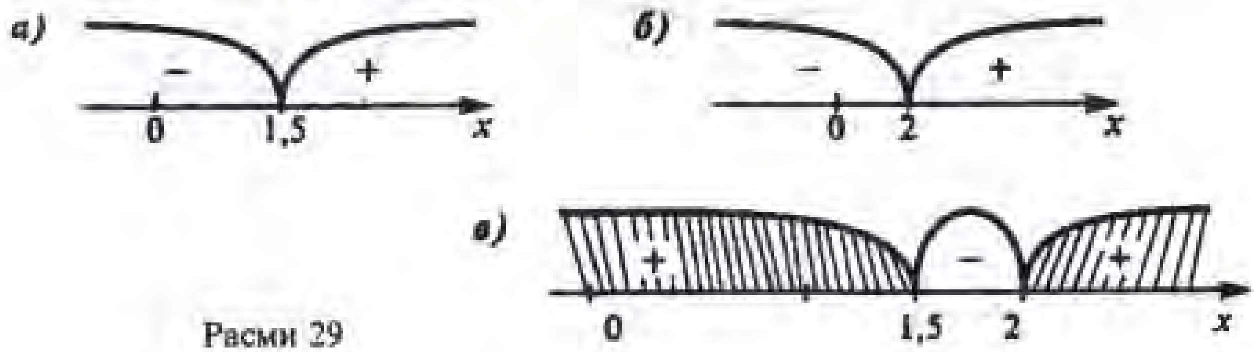
Фосилаҳои доималоматии зарбшавандаҳои хаттӣ $x-x_1$ ва $x-x_2$-ро мувофиқи зерпункти А), баъд функсияи $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$-ро ҳамчун ҳосили зарб муайян карда нобаробариро бо осонӣ меёбем.

М и с о л и 5. Нобаробарии $2x^2-7x+6>0$-ро ҳал мекунем.

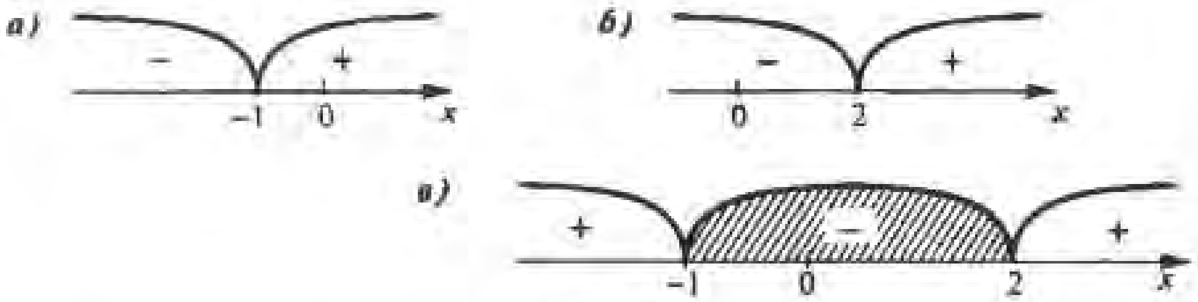
Ҳ а л. Муодилаи квадратии $2x^2-7x+6=0$-ро ҳал карда мебинем, ки $x_1=1{,}5$ ва $x_2=2$ решаҳояш мебошанд. Пас $2x^2-7x+6=2(x-1{,}5)(x-2)$.

Аломати $x-1{,}5$ дар расми 29, *а*, аломати $x-2$-ро аз расми 29,*б*, аломати $2(x-1{,}5)(x-2)$-ро аз расми 29, в муайян мекунем.

Ҷ а в о б: $(-\infty;1{,}5)\cup(2;\infty)$.




Расми 29




Расми 30

Мисоли 6. Нобаробарии $x^2-x-2\leq 0$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Решаҳои сеаъзогии квадратиро меёбем:

$$x^2-x-2=0; \qquad x_1=-1; \qquad x_2=2.$$

Ҳамин тариқ,

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2).$$

$x+1$ дар фосилаи $(-\infty; -1)$ манфӣ ва дар $(-1; +\infty)$ мусбат (30; *а*); $x-2$ бошад дар фосилаҳои $(-\infty; 2)$ манфӣ, дар $(2; \infty)$ мусбат; $(x+1)(x+2)$ дар фосилаҳои $(-\infty; -1)$ мусбат (расми 30)

Ҷавобро бо назардошти он ки нобаробарии мазкур ғайриқатъӣ аст, менависем:

Ҷавоб: $[-1; 2]$.

Мисоли 7. Графики $y=|x^2-4|+x^2$-ро месозем.

Барои кушодани қимати мутлақ нобаробарии $x^2-4\geq 0$ бо методи фосилаҳо ҳал мекунем (расми 31,а):

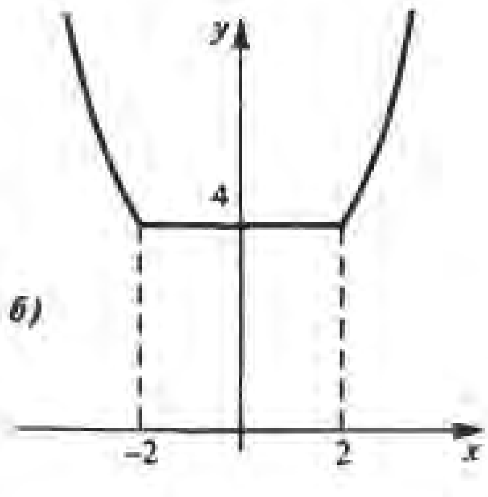
$$x^2-4=(x-2)(x+2).$$

Аз расм айён аст, ки барои $x\in(-\infty; -2]\cup[2; \infty)$ $x^2-4\geq 0$ буда, барои $x\in(-2; 2)$ $x^2-4<0$ аст. Ҳамин тариқ,

$$y=\begin{cases} 2x^2-4 & \text{агар } x\notin(-2;2) \\ 4, & \text{агар } x\in[-2;2]. \end{cases}$$

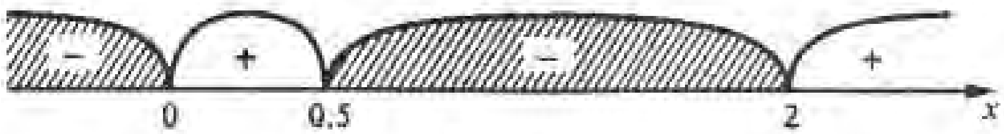
Графики ин функсия дар расми 31,б оварда шудааст.


а)




б)

Расми 31




Расми 32

Ин метод на танҳо барои ҳал кардани нобаробариҳои квадратӣ, балки барои ҳал кардани нобаробариҳои мураккаб ҳам истифода мешавад.

М и с о л и 8. Нобаробарии $2x^3-5x^2+2x\le 0$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Бисёраъзогии $2x^3-5x^2+2x$-ро ба зарбшавандаҳо ҷудо мекунем:

$$2x^3-5x^2+2x=2x(x^2-2,5x+1)=2x(x-0,5)(x-2).$$

Бинобар ин нобаробариро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$2x(x-0,5)(x-2)\le 0.$$

Дар тири ададӣ нуқтаҳои 0; 0,5; 2-ро қайд мекунем. Ин нуқтаҳо тири ададиро ба чор фосила ҷудо мекунад (расми 32).

Ҳангоми $x>2$ будан ҳар як зарбшавандаи ҳосили зарби $2x(x-0,5)(x-2)$ мусбат мебошад. Аз ин сабаб барои $x>2$ $2x(x-0,5)(x-2)>0$ аст. Агар ивазшавии аломати ҳосили зарбро ҳангоми ба фосилаи ҳамсоя гузаштан ба эътибор гирем, он гоҳ аломати ҳосили зарбро барои ҳар як фосила муайян мекунем. (расми 32).

Ҳамин тариқ, бо назардошти ғайриқатъи будани нобаробарии додашуда, ҳамаи $x$–ҳои аз нимпорчаи $(-\infty; 0]$ ва порчаи $[0,5; 2]$ ҳалли нобаробарианд.

Ҷ а в о б: $(-\infty;0]\cup[0,5;2]$.

**?**

**1.** Фосилаҳои доималоматии функсияро чӣ тавр меёбанд? **2.** Моҳияти методи фосилаҳоро барои ёфтани ҳалли нобаробариҳои хаттӣ, касран хаттӣ ва квадратӣ баён намуда, онро дар ҳалли мисолҳои мушаххас нишон диҳед. **3.** Мисолҳои нобаробариҳои нисбатан мураккабро оред, ки онҳоро бо методи фосилаҳо ҳал кардан мумкин бошад.

Методи фосилаҳоро истифода карда, нобаробариҳоро ҳал кунед (115–118).

**115.** а) $2(x-3)>x-1$; г) $-3(x-1)<2x+12$; ж) $7x-2,4<0,4$;

б) $-4(x+2)>x-2$; д) $\frac{1}{2}(x-4)\ge 0,5x-2$; з) $17-x>10-6x$;

в) $3(x-1)<x+3$; е) $\frac{1}{5}(x+10)\le\frac{4}{5}x+3$; и) $2x-17\ge -27$

**116.** а) $\frac{x-1}{2x+4}>0$; в) $\frac{x-1}{3x+9}\geq 0$; д) $\frac{13x-1}{2}<4x$;

б) $\frac{x-2}{-3x+6}<0$; г) $\frac{x-2}{3x-12}>0$; е) $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}\leq 2$.

**117.** а) $(x+8)(x-5)>0$;

б) $(x-14)(x+10)<0$;

в) $(x+25)(x-30)<0$;

г) $(x+6)(x-6)>0$;

д) $(x-2)(x-5)(x-12)>0$;

е) $(x+7)(x+1)(x-4)<0$;

ж) $-\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\geq 0$;

з) $(6+x)(3x-1)\leq 0$;

и) $(7x+21)(x-3,5)\leq 0$;

к) $(8-x)(x-0,3)\geq 0$;

л) $x^2+4x\geq 0$;

м) $x^2-x<0$.

**118.** а) $(x-2)(x-3)>0$; б) $(x+1)(2x-1)\leq 0$; в) $x(x-1)^2>0$

**119.** Графики функсияро созед:

а) $y=|1-x^2|-1$;

б) $y=|x^2-9x|+6x+2$;

в) $y=x^2-|x-3|+2$;

г) $y=|x^2-2|+1$;

д) $y=x^2+|x|$;

е) $y=x^2-|x-1|+1$;

ж) $y=2x^2-2|x|$;

з) $y=|2x^2-x|$.

**120.** Бо методи фосилаҳо нобаробариро ҳал намоед:

а) $x^2\geq x$;

б) $\frac{4}{9}\leq x^2$;

в) $x^3-16x<0$;

г) $(x^2-1)(x+2)<0$

д) $(x^2-5x+4)(x^2-1)>0$;

е) $4x^3-x<0$;

ж) $(x-1)(x^2-3x+8)<0$.

## *Машқҳо барои такрор*

**121.** Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\frac{2x^2+x-6}{6x^2-11x+3}$; б) $\frac{8m^3+27}{6m^2+13m+6}$; в) $\frac{(1-3a)^2}{3a^2+5a-2}$.

**122.** Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $(x-1)^2+(x+1)^2=(x+2)^2-2x+2$;

б) $(2x-3)(2x+3)-1=5x+(x-2)^2$.

**123.** Координатаҳои қуллаи параболаро ёбед:

а) $y=x^2-12x+53$; б) $y=x^2-\frac{3x}{2}+\frac{41}{16}$.

**124.** Китоб 160 саҳифа дорад. Далер рӯзи якум 52 саҳифа, рӯзи дуюм назар ба рӯзи якум 16 саҳифа зиёдтар хонд. Барои хондан боз чанд фоизи китоб монд?

**125.** Ду бригада якҷоя 1787 сентнер ҷавдор ғундоштанд. Бригадаи якум 46-га ва бригадаи дуюм 35-га ҷавдор ғундоштанд. Агар ҷавдори аз 8-га ғундоштаи бригадаи якум назар ба ҷавдори аз 5–га ғундоштаи бригадаи дуюм 58 сентнер зиёд бошад, ҳар як бригада алоҳида аз 1–га ба ҳисоби миёни чанд сентнерӣ ҷавдор ғундоштаанд?

## МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

Истилоҳи «функсия»-ро дар илм риёзидони немис Г. Лейбнитс (1646–1716) ҷорӣ кардааст. Дар тадқиқоти ӯ функсия бо график алоқаманд аст.

Дар инкишофи минбаъдаи ин мафҳумҳо методи координатаҳо, ки риёзидони фаронсавӣ П.Ферма (1601–1655) ва Р.Декарт (1596–1650) ихтироъ карда буданд, роли калон бозид. Методи координатаҳо барои сохтани графики функсияҳо ва ҳалли графикии муодилаҳо васеъ истифода мешуданд.

Фаҳмиши функсия чун ифодаи аналитикӣ, яъне ифодаҳое, ки аз тағйирёбандаҳоюю ададҳо бо ёрии ин ё он амали аналитикӣ ташкил шудаанд, ба Л.Эйлер (1707–1783) ва И.Бернулли (1667–1748) алоқаманд аст. Дар ин давра гурӯҳҳои муҳимтарини функсияҳо тадқиқ шуданд, ки онҳо дар яке аз соҳаҳои риёзиёт –**анализи математикӣ** омӯхта мешавад.

Л.Эйлер мафҳуми функсияро чун вобастагии як бузургии тағйирёбанда аз бузургии тағйирёбандаи дигар инкишоф дод. Ин нуктаи назар дар асарҳои риёзидони рус Н.И.Лобачевский (1792–1856), риёзидони немис П.Дирихле (1804–1859) ва дигар олимон инкишоф дода шуд.

Лейбнитс ин истилоҳро барои номи параметрҳои гуногун, ки бо мавқеи нуқта дар ҳамворӣ алоқаманд аст, дохил карда буд. Дар рафти мукотаба Лейбнитс ва шогирдаш–математики швейтсариягӣ И.Б.Бернуллӣ тадриҷан функсияро чун ифодаи аналитикӣ дарк кардаанд ва онро соли 1718 Лейбнитс таъриф додааст.

Л.Эйлер дар китоби худ «Муқаддимаи анализ» (соли 1748) таърифи функсияро ин тавр баён кардааст: «Функсияи миқдори тағйирёбанда ифодаи аналитикиест, ки бо ягон тарз аз ин миқдори тағйирёбанда ва ададҳо ё миқдори доимӣ таркиб ёфтааст». Л.Эйлер инчунин ишораҳои ҳоло барои функсияҳо қабулшударо низ ҷорӣ кардааст.

Таърифи ҳозиразамони функсияро, ки дар он ин мафҳум аз тарзи додашавӣ озод аст, новобаста аз ҳамдигар риёзидони рус Н.И.Лобачевский (соли 1834) ва математики немис Л.Дирихле (соли 1837) баён кардаанд.

Ғояи асосии ин таърифҳо аз зер иборат аст; ба ҳар як қимати $x$ қимати муайяни $y$ мувофиқ гузошта хоҳад шуд.

Олими бузурги англис, риёзидон ва физик И.Нютон, аз вақт вобаста будани координатаҳои нуқтаи ҳаракатнокро тадқиқ карда, амалан ба тадқиқи функсия машғул шуда буд. Гарчанде ин мафҳумро Нютон ба таври мушаххас ҷорӣ карда бошад ҳам, вале аҳамияти онро равшан дарк мекард. Масалан, соли 1676 ӯ қайд карда буд: «Агар аз муоинаи фигураҳо дур намешудам ва ҳамаро» танҳо ба тадқиқи ординатаҳо намеовардам, натиҷаҳои умумиро ноил намешудам», яъне Ньютон амалан функсияҳои вақтро тадқиқ карда буд.

Мафҳуми ҳозиразамони функсияи дорои соҳаҳои муайянӣ ва соҳаи қиматҳои дилхоҳ асосан, дар нимаи аввали асри XX, ба туфайли асарҳои асосгузори назарияи маҷмӯъ Г.Кантор (1845–1918) ташаккул ёфт.

Риёзидонҳо масъалаҳои мушаххас ва мураккаби риёзиро ҳал карда истода, ба мафҳуми функсия омаданд.

Инкишофи минбаъдаи мафҳуми функсия ба омӯзиши маҷмӯъҳо, ки элементҳояшон на фақат аз ададҳо, балки аз объектҳои дилхоҳи табиат иборатанд, алоқаманд аст.

## *Машқҳои иловагӣ ба боби 1*

### *Ба параграфи 1*

Соҳаи муайянии функсия ёфта шавад (126–127).

**126.** а) $y=\dfrac{3}{x^2-1}$; в) $y=\sqrt{1-x}$; д) $y=\sqrt{3-x^2}$;

б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; г) $y=\sqrt{3-x}$; е) $y=\dfrac{x-1}{x^2+5x}+\sqrt[3]{2x+1}$.

**127.** а) $y=\sqrt{2x-4}$; г) $y=\sqrt{-3(1-5x)}$; з) $y=\sqrt{x^2}-\sqrt{3x-1}$;

б) $y=\sqrt{4-6x}$; д) $y=\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}$; и) $y=2\sqrt{16-x^2}$;

в) $y=\sqrt{\dfrac{1+3x}{2}}$; ж) $y=\sqrt{6-x}+\sqrt{3x+9}$; е) $y=\dfrac{3}{\sqrt{3x-4}}$;

**128.** Ягон функсияеро нависед, ки соҳаи муайянаш:

а) $x=2$; б) $x\neq\pm1$; в) $[1;\infty)$ бошад.

**129.** Функсияҳое, ки дар расмҳои 55 ва 56 *(ниг. ба саҳ.64)* тасвир шудаанд, ба намуди формула нависед.

**130.** Нулҳои функсияро ёбед (агар онҳо мавҷуд бошанд):

а) $y=\dfrac{3x+12}{30}$; б) $y=\dfrac{6}{2-5x}$; в) $y=\dfrac{x^2-4}{5}$;

**131.** Нулҳои функсияи хаттиро ёбед:

а) $y=x+5$ в) $y=6(x-1)+2$; д) $y=0{,}01x+1$;

б) $y=1-x$; г) $y=\dfrac{2}{3}(x-1)+1$; е) $y=0{,}01x-20$.

**132.** Вобастагии $x$ ва $y$ намуди $ax+by=1$-ро дорад. Қиматҳои параметрҳои $a$ ва $b$ ёфта шавад, агар маълум бошад, ки нуқтаҳои $(2;-1)$ ва $(-4;3)$ дар графики ин вобастагӣ мехобанд.

**133.** Вобастагии $x$ ва $y$ намуди $(x-a)(y-b)=1$-ро дорад. Қимати $a$ ва $b$ ёфта шавад, агар маълум бошад, ки ибтидои координата ва нуқтаи $\left(3;\dfrac{3}{2}\right)$ дар графики ин вобастагӣ мехобанд.

134. Барои кадом қиматҳои аргумент функсияи $y=x^2+x-2$
а) ба нул; б) калон аз нул; в) хурд аз нул мешавад.

135. Ҷуфт ё тоқии функсияҳои зерин муайян карда шаванд:

а) $y=\frac{x^3+x}{x^3-x}$; в) $y=\frac{x^2+x}{x+1}$; д) $y=\frac{x}{x^2+1}$; ж) $y=(x-3)^2+(x+3)^2$

б) $y=x+\frac{1}{x}$; г) $y=-\frac{1}{x^2}$; е) $y=\frac{x^2}{x+1}$.

136. Функсияи $y=kx+b$ дар кадом ҳолат афзуншаванда ва дар кадом ҳолат камшаванда мебошад?

137. Кадоме аз функсияҳои хаттии а) $y=x-3$; б) $y=-x+4$; в) $y=-5x+3$; г) $y=x-1$; д) $y=2-4x$ афзуншаванда ва кадоме камшаванда мебошад?

138. Функсия бо формулаи $y=mx+n$ дода шудааст. Барои кадом қиматҳои $m$ функсия афзуншаванда мешавад?

139. Функсияи $y=\frac{1}{x^2}$ барои кадом қиматҳои $x$ афзуншаванда аст?

### *Ба параграфи 2*

140. Квадрати пурра ҷудо кунед:

а) $x^2-8x-65$; г) $x^2-2x+35$; ж) $ax^2+8ax-2$;
б) $x^2-6x+8$; д) $x^2+11x+30$; з) $ax^2-4a^2x+4a^3+3$.
в) $x^2+8x+15$; е) $(x-2)(x-4)$; и) $(x+a)(x+b)$.

141. Аз сеаъзогӣ квадрати пурра ҷудо кунед:

а) $5x^2-15x+10$; в) $-3x^2-3x-18$; д) $10x^2-3x-1$;
б) $\frac{1}{5}x^2-3x+10$; г) $-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{7}{2}$; е) $x^2-\frac{5}{2}x+1$.

142. Исбот кунед, ки сеаъзогии квадратии $x^2+x+1$ барои қиматҳои дилхоҳи $x$ мусбат аст.

143. Дар тарафҳои кунҷи рост ба самти қуллаи он ду сақочаи $A$ ва $B$ мунтазам ҳаракат мекунанд. Суръати сақочаи $A$ назар ба суръати сақочаи $B$ ду маротиба зиёд аст. Пас аз 10 сония масофаи байни сақочаҳои $A$ ва $B$ ба 130 м баробар мешавад. Агар дар ибтидои ҳаракат сақочаи $A$ аз қуллаи кунҷ дар масофаи 270 м ва сақочаи $B$ дар масофаи 125 м воқеъ бошанд, суръати ҳар як сақочаро ёбед.

144. Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $x^2-7x+6$; б) $x^2-x-20$; в) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$; г) $2x^2+2x-4$.

145. Касрро ихтисор кунед:

а) $\frac{x^2+x-2}{2x-2}$; б) $\frac{4x^2-20x+24}{x^2-5x+6}$; в) $\frac{x^2+4x-5}{2x+10}$; г) $\frac{8x^2-16x+24}{2x-6}$.

### *Ба параграфи 3*

**146.** а) Параболаи $y=2x^2$ ба боло 7 воҳид ба тарафи чап 5 воҳид кӯчонида шуд. Параболаи ҳосилшуда графики кадом функсия аст.
б) Агар графики функсияи $y=2(x-1)^2$-ро аз рӯи тири симметриаш 3 воҳид ба поён ҷой иваз кунонем, графики кадом функсия ҳосил мешавад?

**147.** Қуллаи параболаи $y=2x^2-3x+2$ дар кадом нуқта ҷойгир мешавад?

**148.** Параболаи $y=x^2+4x+3$ тири $Oy$ ва $Ox$-ро дар кадом нуқтаҳо мебурад?

**149.** Қиматҳои $a$ ва $b$-ро ёбед, агар маълум бошад, ки графики функсияи $y=ax^2+bx-18$ аз нуқтаҳои $M(1; 2)$ ва $N(2; 10)$ мегузарад.

**150.** Хосиятҳои функсияҳоро истифода карда графики онро созед:
а) $y=x^2-3x-3$; б) $y=-3x^2+4x-2$; в) $y=x|x|-2x$.

**151.** Вобастагии $x$ ва $y$ бо муодила дода мешавад. Қиматҳои $p$ ва $q$ муайян карда шаванд, агар:
а) дар ҳолати $x=-2$ будан $y$ ба нул мубаддал шавад;
б) дар ҳолати $x=0$ будан $y$ ба қимати хурдтарини 3 доро шавад;
в) дар нуқтаи $(-6; 0)$ графики функсия ба тири $Ox$ расад.

**152.** Экстремум ва экстремали функсияро ёбед:
а) $y=4x^2-56x+194$; в) $y=-5x^2+40x-73$; д) $y=9x^2-36x+41$;
б) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{37}{4}$; г) $y=10x^2-20x-1$; е) $y=3x^2-12x+12$.

### *Ба параграфи 4*

Аз тарзи графикӣ истифода карда нобаробариро ҳал кунед (153–154).

**153.** а) $x^2-3x-10>0$; б) $2x<x^2$; в) $x^2-10x-39>0$.

**154.** а) $2x^2+1>1$; б) $9x^2+12x+16<0$; в) $x>4x^2$.

**155.** Нобаробариро бо методи фосилаҳо ҳал кунед:
а) $2x^2+13x-7>0$; в) $6x^2-13x+5\le 0$; д) $3x^2-2x>0$.
б) $-9x^2+12x-4<0$; г) $-2x^2-5x+18\le 0$.

**156.** Барои кадом қиматҳои $m$ нобаробарӣ қиматҳои дилхоҳи $x$ дуруст аст:
а) $x^2-4x+2m>0$; г) $\frac{1}{24}x^2+mx-m+1>0$;
б) $x^2-(m+2)x+8m+1>0$; д) $mx^2-12x-5<0$;
в) $x^2+4x+(m-2)^2\ge 0$; е) $(m+2)x^2+5x-4<0$?

**157.** Графики функсияро созед:
а) $y=|-x^2-2x+5|$; б) $y=(5-|x|)(x+1)$.

**158.** Нобаробариҳоро ҳал кунед:
а) $-x^2+x-2<0$; в) $\frac{x^2}{10}+2>\frac{7x}{10}$;
б) $3x-x^2-4<0$; г) $\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}>\frac{3x-10}{4}$.

**159.** Дарозии росткунҷа аз бари он 5 м зиёд аст. Бари росткунҷа чӣ гуна бояд бошад, то ки масоҳати он аз 36 м² калон шавад?

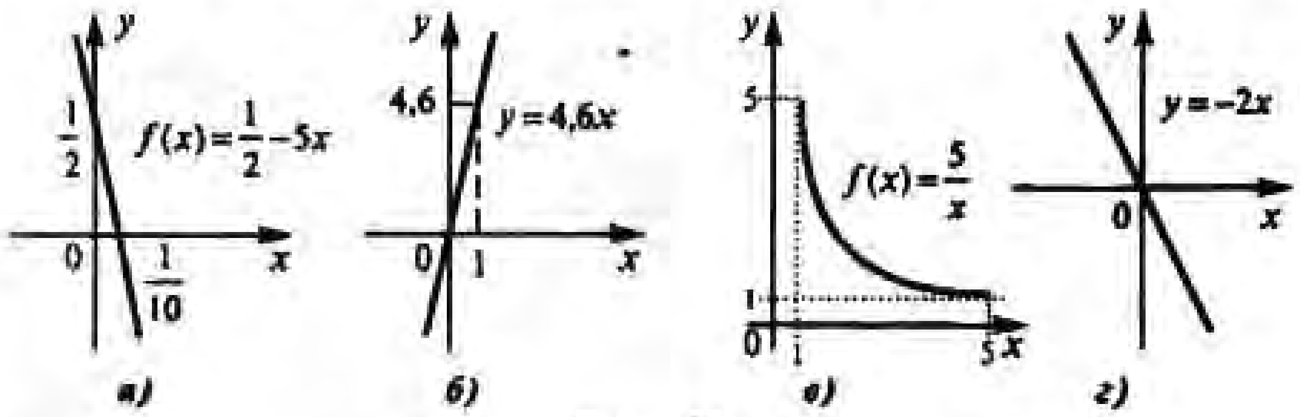
# ҶАВОБҲО

1. а) 7; б) 7; в) 2; г) $\frac{13}{4}$; **2.** а) 48; б) 122; в) −22; г) −60. **3.** в) $-\frac{11}{5}$; б) $\frac{6}{5}$; в) 0; г) $-\frac{4}{5}$; д) $\frac{11}{5}$. **4.** а) 1; б) $\frac{1+a^2}{1-a^2}$; в)−3; г)−2; д) $-\frac{1}{3}$. **5.** 0; −1,5; б) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$; в) 0; $\frac{4}{5}$; г) 0; $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; е) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **6.** а) 0; б) $1\frac{7}{24}$.

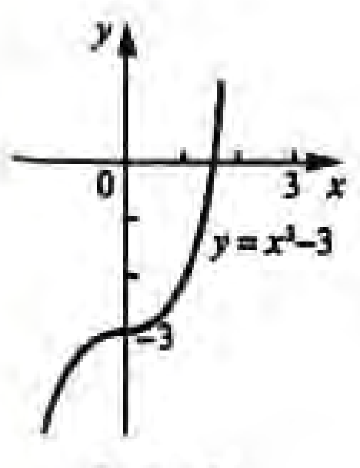
7. $\frac{2}{5}$. **8.** а), б), г) Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ; в) маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ ғайр аз 3; д) маҷмӯи ҳамаи ададҳо ғайр аз 5 ва −2; е) $x \geq 4$; ж) $x \geq -10$; з) $x \geq -100$. **9.** а) $y=\frac{2}{x-10}$; б) $y=\frac{x}{(x-2)(x-3)}$; в) $y=\sqrt{x}$; г) $y=\sqrt{x-20}$. **10.** а), б) Маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ. **11.** а) 0; −9; б) −5; в) 0; 9; г) 1. **12.** Расми 33. **13.** Расми 34.

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −30 | −11 | −4 | −3 | −2 | 5 | 24 |

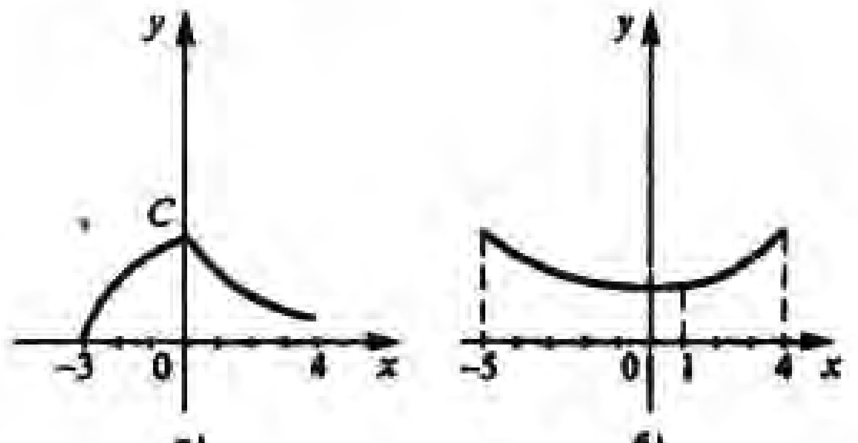
14. а) $x=3$; $y=-1$; б) $x=7$ $y=5$. **15.** а) (3,4; ∞); б) (1,8; ∞). **16.** а) ±8; б) 0;1. **17.** 730 кг. **18.** а) Ҷуфт; б) тоқ; в) ҷуфт; г) тоқ; д) тоқ. **19.** а) Тоқ; б) ҷуфт; в) на ҷуфт на тоқ; г) тоқ. **20.** а) На ҷуфт на тоқ; б) ҷуфт в) тоқ; г) ҷуфт. **21.** а), б), г) тоқ; в) ҷуфт.



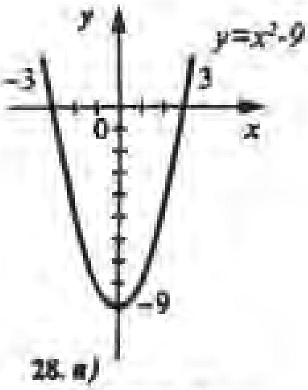

Расми 33



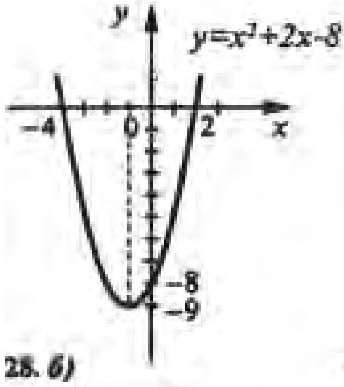

Расми 34



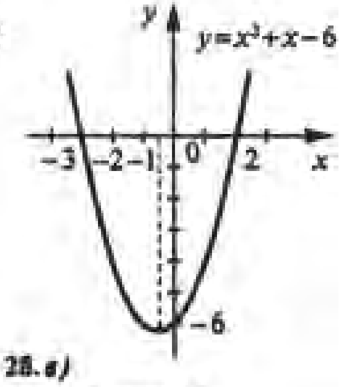

Расми 35



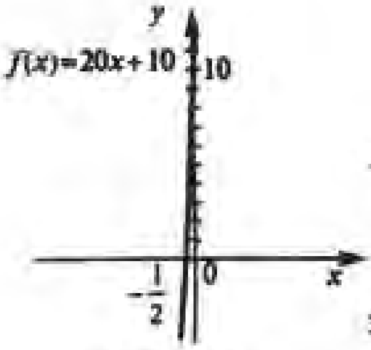

Расми 36




Расми 37

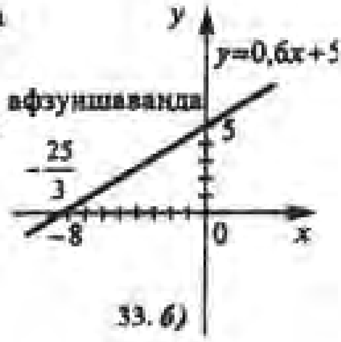



Расми 38

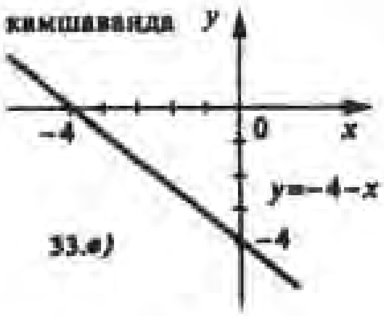



Расми 39

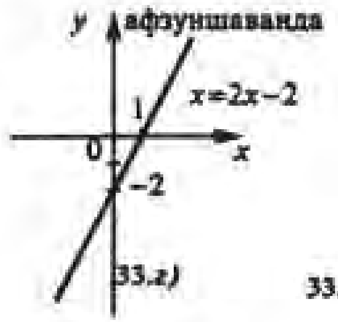

Расми 40



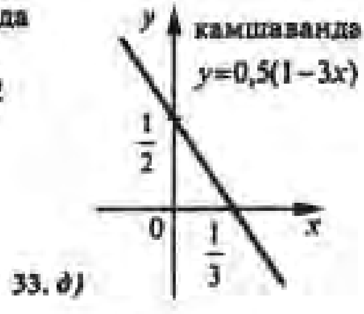

Расми 41




Расми 42

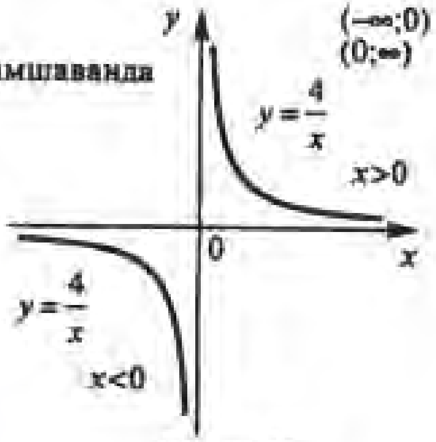



Расми 43

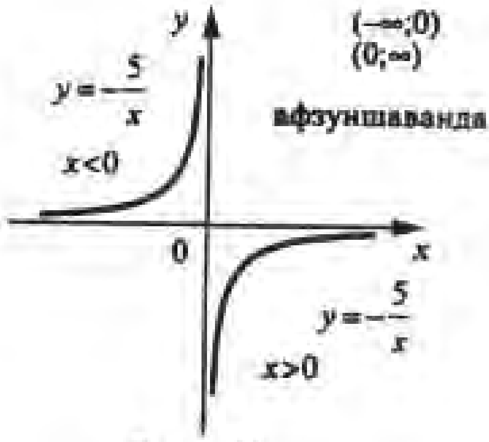



Расми 44

**22.** а) $1\frac{2}{5}$; б) 24; в) 7; г) 2. **23.** а) $\frac{2}{91}$; б) $\frac{1}{7}\cdot 26^4$; в) 2; г) $\frac{1}{2}$. **24.** а) $a(a^2-2a-1)$; б) $(a-c)(x-y)$; в) $3ax(a+2x)$; г) $3a^3(3a-4b)$. **25.** 15 соат. **26.** а) (0; 4); б) (9; 13); в) (4; 9). **27.** Расми 35, а, б. **28.** Расми 36, 37, 38. **29.** а) 15; в) $-2$; г) нул надорад. **30.** а) Дорад $x=33\frac{1}{3}$; б) дорад $x=0$ ва $x=2$; в) дорад $x=6$; г) надорад; д) надорад. **31.** а) $x=3$ нули функсия, барои $x<3$ $f(x)$–мусбат, барои $x>3$ $f(x)$–манфӣ; б) $x=-\frac{1}{2}$ нули функсия, барои $x>-\frac{1}{2}$ $f(x)$–мусбат, барои $x<-\frac{1}{2}$ манфӣ. Расми 39. **33.** Расми 40, 41, 42, 43, 44: а) афзуншаванда; б) камшаванда; в) камшаванда; г) афзуншаванда; д) камшаванда. **34.** а) $x=-6$; б) $x>-6$; в) $x<-6$. **35.** Расми 45 ва



Расми 45



Расми 46

46. **36.** а) $x=12$; б) $x=-\frac{9}{2}$ **37.** 1;−5. **38.** а) $\frac{1}{4}$; б) 22. **39.** а) $-5a+5ab^2$; б) $6a(2a-3)$.

**41.** а) $(x-8)^2-80$; б) $(x-4)^2-81$; в) $3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$; г) $(x-3)^2-1$. **42.** а) $\frac{1}{3}(x-6)^2+4$; б) $(x+3)^2+1$; в) $(x-1)^2-3$; г) $(x-1)^2-1$. **43.** $(x-3)^2+2$ ҳама вақт мусбат; $-[(x-10)^2+10]$ ҳама вақт манфӣ. **44.** а) $(x-3)^2+1>0$; б) $5(x-1)^2\geq 0$; в) $-(x-10)^2\leq 0$; г) $-2\left[(x-4)^2+\frac{1}{2}\right]<0$.

**45.** а) $(x-2)^2+3$; б) $(x+1)^2-2$; в) $-2(x+1,5)^2+1$. **46.** а) $-\frac{1}{2}$; 3; б) 1; $1\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{6}$.

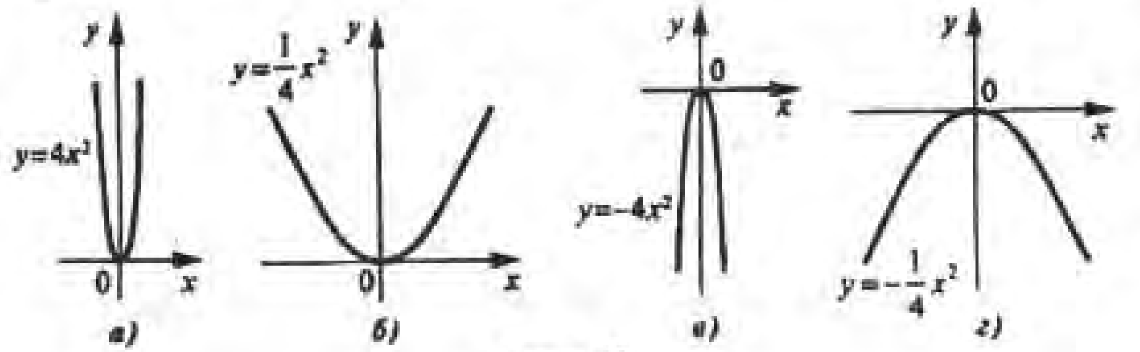
**47.** 24 км/соат. **48.** а) Ҳамаи ададҳо ба ғайр аз 7; б) ҳамаи ададҳои ғайр аз −36. **49.** а) $(x-1)(x+7)$; б) $(2a-x+y)(2a+x-y)$; в) $6(x+2y)^2$. **50.** а) $(x-3)(3x-1)$; б) $(m-1)(2m-1)$; в) $(x-1)(x+2)$. **51.** а) $4(b+1)(b-1)(a+b)(a-b)$; б) $\frac{1}{6}(x+1)(x+2)$; в) $(1-y)(y-15)$. **52.** а) $(x-1)(2x-3)$; б) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; в) $-(3x-2)^2$; г) $(4a+3)^2$. **53.** а) $(0,5m-2)^2$; б) $(2-m)(m-3)$; в) $(3x-1)(x+2)$; г) $(3x-2)(2x-3)$. **54.** а) $\frac{3}{x+5}$; б) $\frac{2x+1}{x}$; в) $\frac{m-3}{m-2}$.

**55.** а) $\frac{5}{2a+9}$; б) $\frac{b-3}{b+5}$; в) $-\frac{y+4}{y+9}$. **56.** а) $\frac{2a+1}{3}$; б) $\frac{2y^2+1}{y-3}$; в) $-\frac{x+6}{x+5}$.

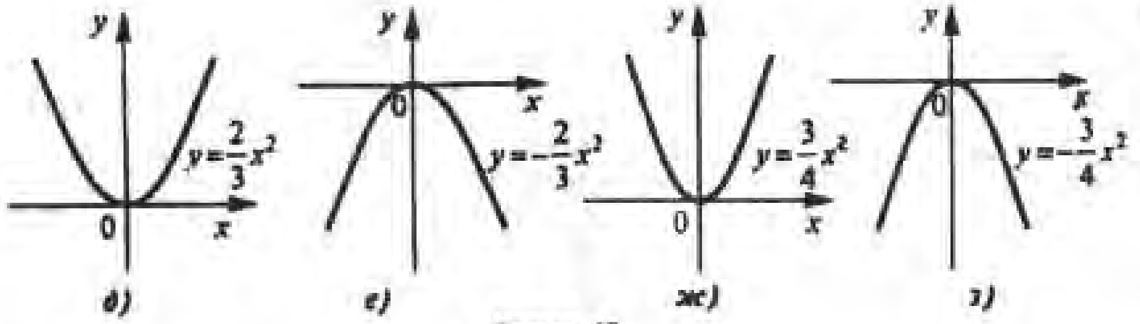
**57.** а) $\frac{4}{3x-1}$; б) $\frac{1-p}{p+2}$; в) $\frac{2(m-2)}{m+4}$. **60.** 3; $1\frac{2}{7}$; $1\frac{1}{6}$. **61.** 6. **62.** $a$; $\frac{1}{a}$. **63.** 14,4. **64.** 1. **65.** 12; 13. **66.** 0,6. **67.** а) $\frac{1}{a^8}$; б) $\frac{4}{5}ax^2$. **68.** а) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; б) −20; 5. **69.** а) 2,8 кг; 3,5 кг; 5 кг; б) 229,3 сомонӣ ва 230 сомонӣ **70.** а) Ба поён; б) ба боло; в) ба боло; г) ба поён. **71.** (0; 4), $x=0$ тири симметрӣ; б) (2; 3), $x=-2$ тири симметрӣ; в) (2;−12); $x=2$ тири симметрӣ; г) $\left(\frac{2}{5};-\frac{1}{5}\right)$; $x=\frac{2}{5}$; тири симметрӣ; д) $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{64}\right)$;

$x=\dfrac{1}{6}$ тири симметрӣ; е) $\left(\dfrac{3}{7};\dfrac{16}{7}\right)$. 72. а) $\left(1;1\dfrac{1}{3}\right)$ б) 0,6; 1; в) $\left(2;2\dfrac{1}{3}\right)$; г) $2\dfrac{1}{2}$; 2.

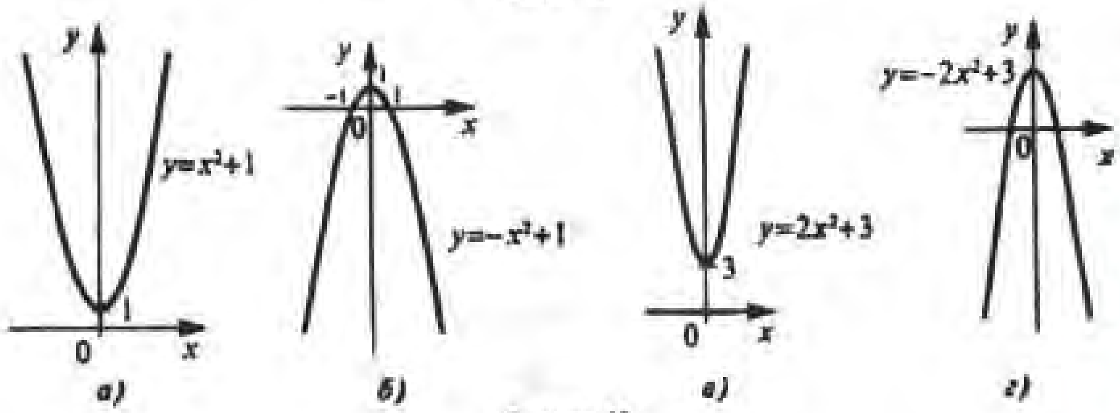
73. а) (0; 1); б) (0; 2); в) (0; 4); г) (0; 5). 74. а) $\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$; б) намебурад; в) (−1;−0,8) г) $\dfrac{1}{6}$. 75. а) (3; 0); б) $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$; в) (1; 0); г) (2; 0). 76. а) $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ −афзуншаванда; б) $\left(-\infty;\dfrac{7}{6}\right)$ камшаванда; в) $(-\infty;\ 3)$−афзуншаванда; $(3;\ \infty)$−камшаванда; г) $(-\infty;\ -2)$−афзуншаванда; $(-2;\ \infty)$−камшаванда; д) $(-\infty;\ -1)$−камшаванда; $(-1;\ \infty)$ −афзуншаванда; е) $(-\infty;\ 1)$−афзуншаванда $(1;\ \infty)$−камшаванда. 77. а) $\dfrac{a-b}{a+b}$; б) $\dfrac{y-x}{y+x}$; в) $-(a+1)$; г) $\dfrac{1}{m-n}$. 78. а) 1; б) −1. 79. 48 саҳифа; 52 саҳифа.



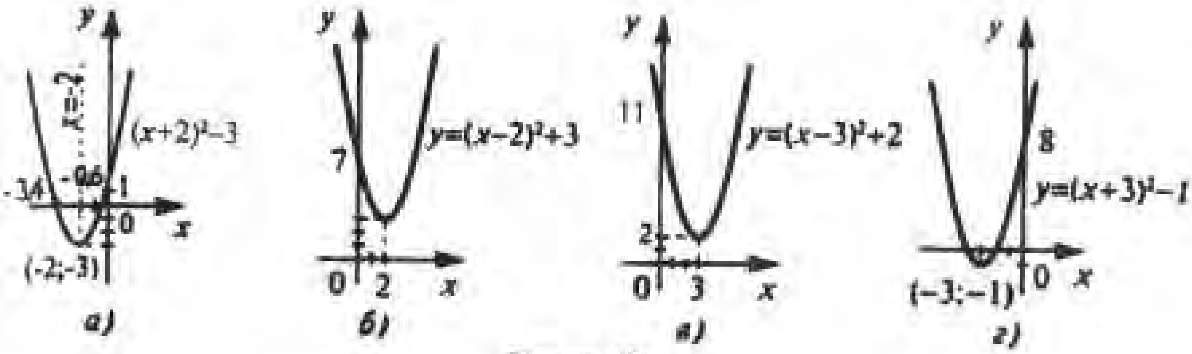

Расми 47




Расми 48

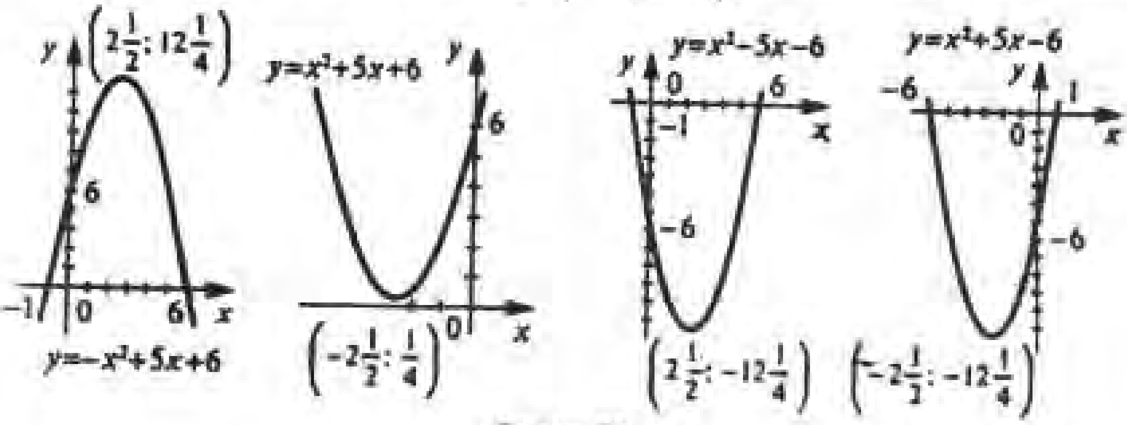



Расми 49

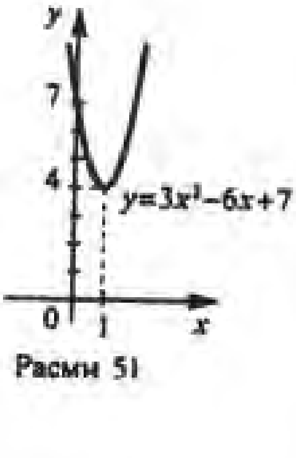



Расми 50

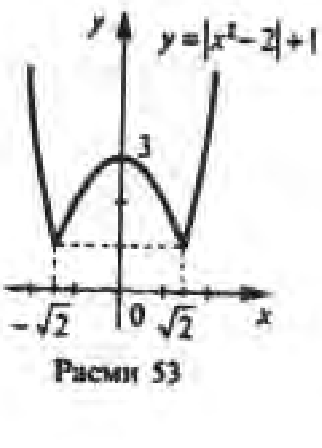
**80**. $(1-y)(y-5)$; б) $(1-x)(x+6)$; в) $(x-1)(2x-3)$; г) $(y+1)(5y-3)$. **81**. Қимати калонтарин: б) ; г); д). Қимати хурдтарин: а); в); е). **82**. а) $y_{min}=-16$; б) $y_{max}=2$; в) $y_{min}=0$; г) $y_{max}=3$; д) $y_{min}=-\frac{1}{2}$ е) $y_{max}=1$. **83**. а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 2; г) 0; д) 1; е) $-3$. **84**. а) $y_{min}(-2)=-1$; б) $y_{max}(-2)=-1$; в) $y_{min}(-3)=1$; г) $y_{min}(2)=-1$; д) $y_{max}(2)=1$; е) $y_{min}(3)=3$. **85**. а) $\frac{1-a}{1-2a}$; б) $x^2+x$. **86**. а) 4; $-16$; б) 9; $-5$. **87**. а) Ба поён; б) ба боло. **88**. 1920 нафар. **89**. Расми 47, 48. **90**. Расми 49. **91**. Расми 50. **92**. а) Расми 51. **93**. Расми 52. **94**. а) $-2$; 2; б) $-1$; $-4,7$; в) $-2$; $-3$. **95**. а) 4; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{17}{55}$. **96**. а) 150 кг; б) 960 м. **97**. а) $(5;\infty)$; б) $(-\infty;-4)\cup(2;\infty)$; в) $(-2;1)$. **98**. а) $y_{min}(3)=2$; б) $y_{max}(-2)=-3$; в) $y_{min}(5)=5$. **99**. а) $(-\infty;1)\cup(4;\infty)$; б) $(-4;0)$; в) $(-\infty;-4.5)\cup[5;+\infty)$. **100**. а) $\left(-2\frac{1}{3};3\frac{3}{4}\right)$; б) $(-\infty;0)\cup(4;\infty)$; в) $x=-3$.



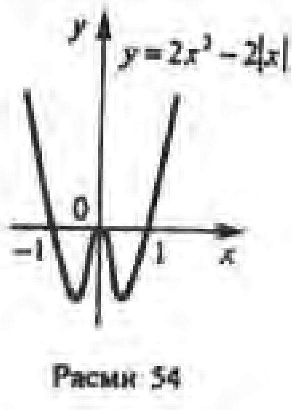

Расми 52



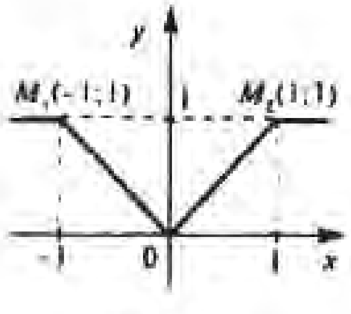

Расми 51



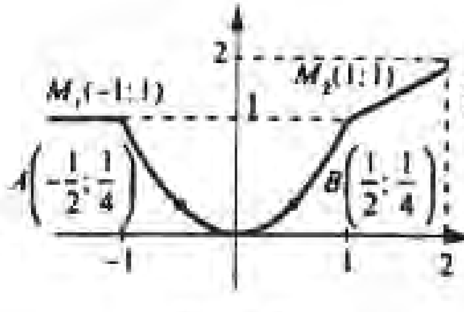

Расми 53



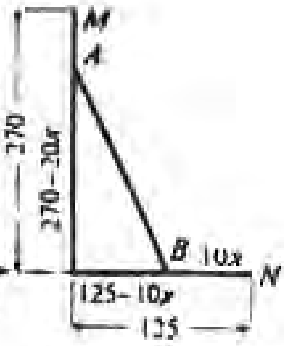

Расми 54




**Расми 55**




**Расми 56**




**Расми 57**

**101**. а) Ҳал надорад; б) $x$–адади ҳақиқии ихтиёрӣ; в) $[-9; -4]$. **102.** б) $(-\infty;+\infty)$; в) адади ҳақиқии ихтиёрӣ. **103**. а) $(-\infty; -2)\cup(5; \infty)$; б) $x\neq1{,}5$; в) $x$–адади ҳақиқии ихтиёрӣ. **104**. а) $(-\infty; -1)\cup(2; \infty)$; б) $(-\infty; 1]\cup[4; \infty)$; в) $\left(-\infty;\frac{-9-\sqrt{41}}{2}\right]\cup\left[\frac{-9+\sqrt{41}}{2};\infty\right)$. **105.** а) $(3; 6)$; б) $x$–адади ҳақиқии ихтиёрӣ; в) $x\in(-\infty; 1]\cup[1; \infty)$. **106**. а) Аз 5 см хурд ; б) дарозиаш бояд аз 3 см калон шавад. **107**. а) $(-\infty; -5]\cup[5; \infty)$; б) $[-7;1]$; в) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;\infty)$ ; г) $\left[-\frac{1}{8}; 0\right]\cup\left[\frac{1}{8}; \infty\right)$.

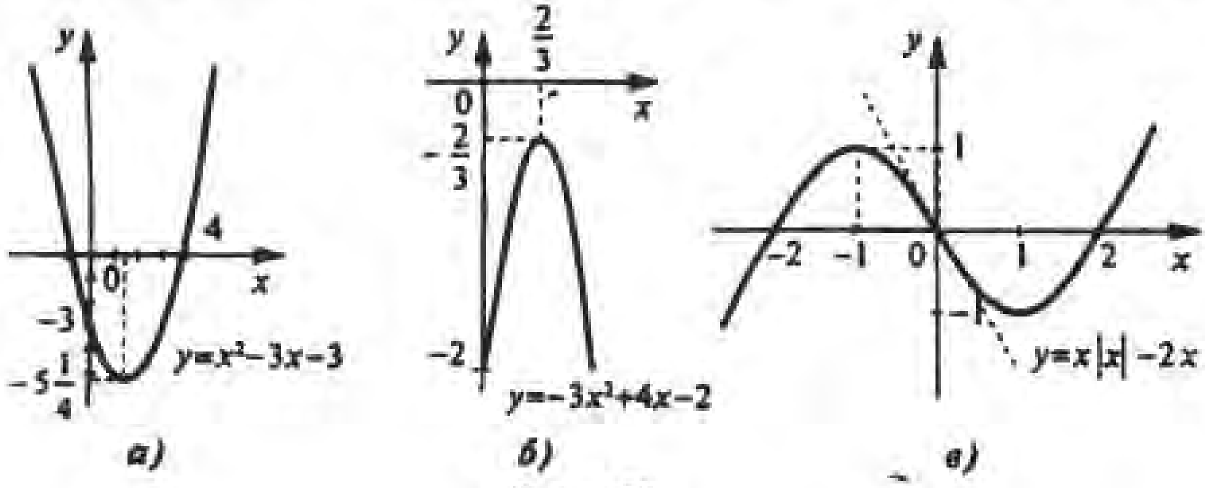
**108**. а) $m>1$; б) $m>11$; в) $m<-7{,}2$; г) $0<m<28$. **109**. $a=\frac{1}{8}$, $b=1$, $c=-6$. **110.** а) 3; б) 5. **111**. а) $(4; \infty)$; б) $(4; \infty)$. **112**. $1\frac{3}{7}$. **113**. 7 ва 5. **114**. 10 ва 6. **115**. а) $(5; \infty)$; б) $\left(-\infty;-\frac{6}{5}\right]$; в) $(-\infty; 3)$; г) $\left(-\infty;-\frac{9}{5}\right]$; д) $x\in(-\infty; \infty)$; е) $\left[-\frac{5}{3};+\infty\right)$; ж) $(-\infty; 0{,}4)$; з) $(-1{,}4; \infty)$; и) $[-5; \infty)$. **116**. а) $(-\infty; -2)\cup(1; \infty)$; б) $(-\infty; 2)\cup(2; \infty)$; в) $(-\infty; -3)\cup[1; \infty)$; г) $(-\infty; 2)\cup(4; \infty)$; д) $(-\infty; 0{,}2)$; е) $(-\infty; 40]$. **117**. а) $(-\infty; -8)\cup(5; \infty)$; б) $(-10; 14)$; в) $(-25; 30)$; г) $(-\infty;-6)\cup(6; \infty)$; д) $(2; 5)\cup(12; \infty)$; е) $(-\infty; -7)\cup(-1; 4)$; ж) $\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{7}\right]$; з) $\left[-6;\frac{1}{3}\right]$; и) $[-3; 3{,}5]$; к) $[0{,}3; 8]$; л) $(-\infty; -4)\cup(0; 4)$; м) $(0; 1)$. **118**. а) $(-\infty; 2)\cup(3; \infty)$; б) $[-1; 0{,}5]$; в) $(0; 1)\cup(1; \infty)$. **119**. г) Расми 53; ж) расми 54. **120**. а) $(-\infty; 0]\cup[1; \infty)$; б) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};\infty\right)$; в) $(-\infty; -4)\cup(0; 4)$; г) $(-\infty; -2)\cup(-1; 1)$; д) $(-\infty; -1)\cup(4; \infty)$; е) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$; ж) $(-\infty; 1)$. **121**. а) $\frac{x+2}{3x-1}$; б) $\frac{4m^2-6m+9}{3m+2}$; в) $\frac{3a-1}{a+2}$.

**122**. а) $1-\sqrt{5}$ ; $1+\sqrt{5}$ ; б) $-2$; $2\frac{1}{3}$. **123**. а) $(6; 17)$; в) $\left(\frac{3}{4};2\right)$. **124**. 25%. **125**. 21,5 сентнер аз 1 га ва 22,8 сентнер аз 1 га. **126**. а) $x\neq\pm1$; б) $[-\infty; 1)\cup(1; \infty)$; в) $(-\infty; 1]$;

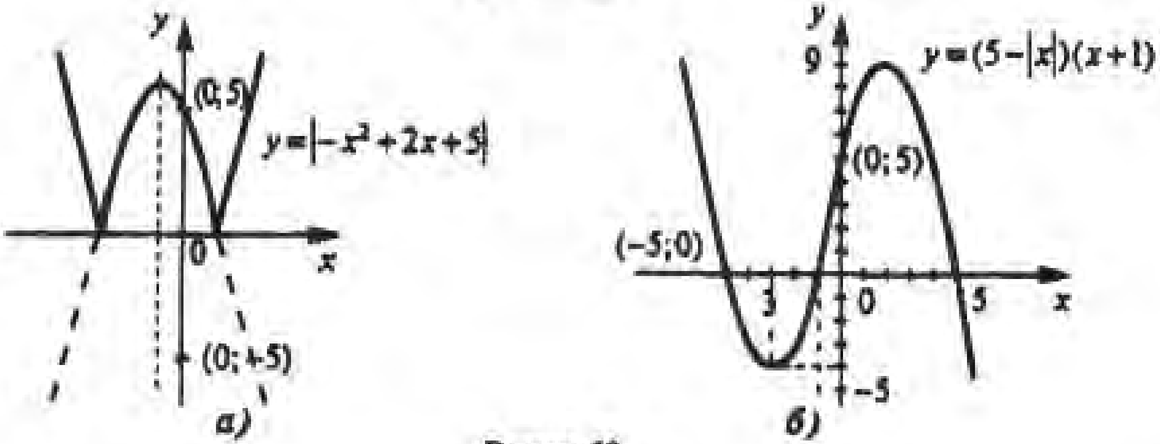
г) $(-\infty;3]$; д) $\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$; е) $x\neq0$; $x\neq-5$. **127**. а) $[2;\infty)$; б) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$; в) $\left[-\frac{1}{3};\infty\right)$; г) $\left[\frac{1}{5};\infty\right)$; д) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$; ж) $[-3;6]$; з) $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$; и) $[-4;4]$; к) $\left[\frac{4}{3};\infty\right)$. **128**. Масалан а) $y=\frac{3}{x-2}$; б) $y=\frac{3x}{x^2-1}$; в) $y=\sqrt{x-1}$. **129**. $y=\begin{cases}1, \text{ агар } & x\le-1\\ -x, \text{ агар } & x\in[-1;0]\\ x, \text{ агар } & x\in[0;1]\\ 1, \text{ агар } & x\ge1\end{cases}$

Расми 55. $y=\begin{cases}1, \text{ агар } & x\le-1\\ x^2, \text{ агар } & x\in[-1;1]\\ x, \text{ агар } & x\ge1\end{cases}$ Расми 56. **130**. а) $-4$; б) надорад; в) $\pm2$.

**131**. а) $-5$; б) 1; в) $\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) $-100$; е) 2000. **132**. $a=2$; $b=3$. **133**. $a_1=1$; $b_1=1$; $a_2=2$; $b_2=\frac{1}{2}$. **134**. а) $x=-2$ ва $x=1$; б) $y>0$, агар $x\in(-\infty;-2)$ ё $x\in(1;\infty)$ в) $y<0$, агар $x\in(-2;1)$. **135** а) чуфт; б) ток; г) чуфт; д) ток; е) на чуфт на ток; ж) чуфт. **136**. $k>0$ − афзуншаванда, $k<0$ камшаванда. **137**. а) афзуншаванда; б) камшаванда; в) камшаванда; г) афзуншаванда; д) камшаванда. **138**. а) $m>0$.




Расми 58




Расми 59

**139**. $x<0$ афзуншаванда. **140**. а) $(x-4)^2-81$; б) $(x-3)^2-1$; в) $(x+4)^2-1$; г) $(x-1)+34$; д) $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$; е) $(x-3)^2-1$; ж) $(ax+4)^2-18$; з) $a(x-2a)^2+3$; и) $\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(a-b)^2}{4}$. **141**. а) $5(x-1)(x-2)$; б) $\frac{1}{5}(x-5)(x-10)$; в) $-3(x+3)(x-2)$; г) $-\frac{1}{2}(x+1)(x-7)$; д) $10\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)$; е) $(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

**142**. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. **143**. Расми 57. $(270-20x)^2+(125-10x)^2=130^2$; 15м/сония, 38,2 м/сония. **144**. а) $(x-6)(x-1)$; б) $(x-5)(x+4)$; в) $\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$; г) $2(x-1)(x+2)$. **145**. а) $\frac{x+2}{2}$; б) 4; в) $\frac{x-1}{2}$; г) $4(x+1)$. **146**. а) $y=2(x+5)^2+7$; б) $y=2(x-1)^2-3$. **147**. $\left(\frac{3}{4};\ \frac{7}{8}\right)$. **148**. $Oy$: $(0;\ 3)$; б) $y=2(x-1)^2-3$. $Ox$: $(-3;\ 0)$ ва $(-1;\ 0)$. **149**. $a=-6$; $b=26$. **150**. Расми 58. **151**. а) $p=q=4$; б) $p=0$, $q=3$; в) $p=12$, $q=36$. **152**. а) $y_{min}(7)=-2$; б) $y_{min}(5)=3$; в) $y_{max}(4)=7$; г) $y_{min}(1)=11$; д) $y_{min}(2)=5$; е) $y_{min}(2)=0$. **153**. а) $(-\infty;\ -2)\cup(5;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ \infty)$; в) $(-\infty;-3)\cup(13;\ \infty)$. **154**. а) $(-\infty;\ \infty)$; б) ҳал надорад; в) $(0;\ 0{,}25)$. **155**. а) $(-\infty;-7)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$; б) $x\neq\frac{2}{3}$; в) $\left[\frac{1}{2};\ 1\frac{2}{3}\right]$; г) $\left(-\infty;-4\frac{1}{2}\right)\cup[2;\infty)$; д) $(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{3};\infty\right)$. **156**. а) $m>2$; б) $0<m<28$; в) $m\leq0$ ва $m\geq4$; г) $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{3}$; д) $m<-7{,}2$; е) $m<-3\frac{9}{16}$. **157**. Расми 59. **158**. а) $(-\infty;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ \infty)$; в) $(-\infty;\ \infty)$; г) $(-\infty;\ \infty)$. **159**. Аз 4 м калон.

# Боби II

# МУОДИЛА ВА СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲО

| |
|---|
| *§ 5. Муодилаҳои якномаълума* |
| *§ 6. Системаи муодилаҳои дуномаълума* |

## §5. МУОДИЛАҲОИ ЯКНОМАЪЛУМА

### 12. Муодилаи бутун ва дараҷаи он

Дар навбати аввал мафҳуми ифодаи бутунро ба хотир меорем. Чӣ тавре дар синфи 8 дидем чунин ифода аз ададҳо ва тағйирёбандаҳо бо воситаи амалҳои ҷамъ, тарҳ, зарб, инчунин тақсим ба адади аз нул фарққунанда ва қавсҳо тартиб дода мешавад. Масалан, ифодаҳои

$$\frac{2a}{3}-3bc^2+\frac{4abc}{5}\cdot(a^3-b^3) \text{ ва } \frac{4x^2y}{9}+az$$

бутун мебошанд. Вале ифодаи

$$\frac{7mn}{4}+\frac{(m-3)^3}{p}+q^2$$

бутун нест, чунки дар он тақсим ба тағйирёбандаи $P$ ҷой дорад. Хотирнишон мекунем, ки якаъзогиҳо намуди оддитарини ифодаҳои бутунанд. Ба сифати мисол ифодаҳои зеринро овардан мумкин аст:

$$2xy,\quad x^3y,\quad \frac{3}{5}axz^4,\ 0{,}1\ a^2b^3,\ \ldots .$$

Акнун муодилаиҳои

$$3(x+1)(x^3-2)=x^2+4(x-5), \tag{1}$$

$$\frac{x^3}{2}-\frac{x+4}{3}=7x^2-\frac{x}{4} \tag{2}$$

-ро дида мебароем.

Қисмҳои чап ва рости муодилаҳои (1) ва (2) ифодаҳои бутунанд. Ин гуна муодилаҳо дар математика **муодилаҳои бутун** ном доранд. Ҳар гуна муодилаҳои намуди (1) ва (2)-ро ба шакли $P(x)=0$-и ба муодилаҳои аввала баробарқувва, ки P(x)−бисёраъзогии намудаш стандартӣ аст, овардан мумкин аст. Дар ҳақиқат, агар дар муодилаи (1) қавсҳоро кушода ва ҳарду тарафи муодилаи (2)-ро ба 12 зарб занем, он гоҳ баъди бо тартиби муайян иҷро кардани амалҳо ва табдилоти зарурӣ барои муодилаи (1)

$$3x^4+3x^3-x^2-10x+14=0 \tag{1'}$$

ва барои муодилаи (2)

$$6x^3-84x^2-x-16=0 \qquad (2')$$

-ро хосил мекунем. Бояд қайд кард, ки ин гуна амалиётро нисбати муодилаи бутуни дилхоҳ иҷро кардан мумкин аст. Ҳамин тариқ, **муодилаи бутуни дилхоҳи якномаълумаро бо муодилаи ба он баробарқувваи қисми чаппаш бисёраъзогии намудаш стандартии $P(x)$ ва қисми росташ нул оварда ҳал кардан мумкин аст.**

Мафҳуми дараҷаи муодилаи бутунро дохил мекунем. Бо ин мақсад фарз менамоем, ки муодилаи якномаълума дар шакли

$$P(x)=0 \qquad (3)$$

дода шуда, мувофиқи гуфтаҳои болоӣ $P(x)$–бисёраъзогии стандартӣ аст. Дараҷаи ин бисёраъзогиро **дараҷаи муодилаи (3)** меноманд. Дар ин асос, масалан, муодилаи $2x^4-7x+3=0$–муодилаи дараҷаи чоруми якномаълума мешавад.

Муҳокимарониҳои охиронро ҷамъбаст намуда, тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем: **дараҷаи муодилаи бутуни дилхоҳ гуфта дараҷаи муодилаи ба он баробарқувваи (3)-ро меноманд.**

Аз ин ҷо бармеояд, ки дараҷаи муодилаҳои (1) ва (2) мувофиқан «чор» ва «се»–анд (нигаред ба муодилаи (1') ва (2')). Муодилаи $(x^4-2)^2+3x^6=x^8+x+1$ баъди табдилотҳои зарурӣ ба намуди $3x^6-4x^4-x+3=0$ оварда мешавад. Бинобар ин вай муодилаи бутуни дараҷааш шаш мебошад.

Мисоли дигарро дида мебароем. Бигзор он муодилаи

$$(x^5-1)^2=x^{10}-2x^5+3x^4-7$$

бошад. Қавсро кушода ҳамаи аъзоҳоро ба қисми чап мегузаронем:

$$x^{10}-2x^5+1-x^{10}+2x^5-3x^4+7=0.$$

Аъзоҳои монандро ислоҳ намуда $-3x^4+8=0$-ро ҳосил мекунем. Азбаски дараҷаи муодилаи ҳосилшуда ба 4 баробар аст, пас дараҷаи муодилаи $(x^5-1)^2=x^{10}-2x^5+3x^4-7$ низ ба 4 баробар мешавад.

**?**

**1**. Кадом ифодаҳоро ифодаҳои бутун меноманд? Мисолҳо оред. Мисоли ифодаҳоеро оред, ки ифодаи бутунро ташкил намедиҳанд. **2**. Оё якаъзогиҳо ифодаи бутунро ташкил дода метавонанд? Мисолҳо оред. **3**. Мафҳуми муодилаи бутунро бо мисолҳо шарҳ диҳед. **4**. Оё муодилаи бутуни дилхоҳи якномаълумаро ба муодилаи ба он баробарқувваи $P(x)=0$ иваз кардан мумкин аст? **5**. Дар зери мафҳуми дараҷаи муодилаи бутун чиро мефаҳмед? Мисолҳои мушаххас гирифта дараҷаи муодилаи бутунро муайян кунед.

**160.** Оё ифодаҳои зерин бутунанд.

а) $\frac{9a}{2}-\frac{5b^2+1}{3}+3a-\frac{1}{3}$; б) $\frac{4ac^2bc^3}{3}-d+0.5m^4$; д) $xyz^3-\frac{y^3}{5}+\frac{4}{z^4}$;

б) $7a^2b^3-\frac{a+b}{c}=\frac{c^2+1}{5}$; г) $\frac{2}{c^2}-\frac{abc+3}{4}+\frac{a}{b}$; е) $10ab^3+7(a+b)^2$?

**161.** Кадоме аз муодилаҳои зерин муодилаи бутун мебошад:

а) $\frac{2}{3}x+8=0$; д) $\frac{3x-1}{3}+x=\frac{7-x}{3}+4$; и) $\frac{4}{x^3}-\frac{x^3}{4}=x+11$;

б) $1-3x=5x^2$; е) $7y-\frac{y^2-4}{3}=9-y^2$; к) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=4$.

в) $7x^2-4x+3=0$; ж) $\frac{2}{z}-\frac{3+z}{z-1}=z^3$;

г) $\frac{5}{x^2-1}-x=\frac{x\cdot(x-2)}{3}$; з) $2x^4-16x^2=5x^3-\frac{2x}{3}$;

**162.** Дараҷаи муодилаҳои бутуни зеринро ёбед:

а) $3x^5-9x^{11}+5=0$;

б) $x^9-15x^7+2x^2=0$;

в) $x^6+4x^3-8x=0$;

г) $\frac{2x}{3}-\frac{3x}{4}=2$;

д) $(x-1)(x-2)(x-3)=0$;

е) $5x^2-\frac{2x-1}{3}=7$;

ж) $3x(x^2+5)=0$;

з) $(x-1)(x+1)-x(x+4)=9$;

и) $7x^3-(7x-3)x^2+x=11$;

к) $(x^2-3x+2)(x^2-4x+3)=0$;

л) $3(x^2+1)(x-1)=3x^3+7x+6$;

м) $\frac{x^4-1}{4}-\frac{x^2(x^2+1)}{2}=3x^2+10$;

н) $\frac{7-2x}{2}+\frac{3x+5}{3}=1+9x^2$;

о) $\frac{x(x+1)}{3}=x-1$;

п) $(x^3-1)^2+3x^5=x^6-2x+1$;

р) $\frac{7x^3}{2}+1=(x^2-3)\cdot x^2-0{,}1x$.

### *Машқҳо барои такрор*

**163.** Қимати ифодаро ёбед:

а) $\frac{3{,}76\cdot 0{,}001}{0{,}01}$; в) $\frac{0{,}2\cdot 2{,}41}{0{,}1}$; д) $6\frac{1}{4}:\left(2\frac{1}{3}\cdot 9-20\right)$.

б) $\frac{0{,}1\cdot 6{,}14}{0{,}001}$; г) $\left(5\frac{1}{3}-2\frac{1}{6}\right):\left(8-1{,}2\cdot\frac{2}{3}\right)$;

**164.** Ифодаи $(7{,}8m-2{,}6n)-(2{,}3m-3{,}1n)$-ро содда намуда, қиматашро ҳангоми $m=-2$ ва $n=4$ будан ҳисоб кунед.

**165.** Графики функсияи $y=9-2x$-ро сохта боварӣ ҳосил намоед, ки нуқтаҳои $A(0; 9)$, $B(-1; 11)$, $C(1; 7)$ ва $D(3; 3)$ ба график тааллуқ доранд.

**166.** Масофаи байни ду шаҳр ба 100 км баробар аст. Нозири роҳ автобуси мусофиркашии аз рӯи ин машрут ҳаракаткунандаро баъди $\frac{3}{5}$-ҳиссаи роҳро тай карданаш боздошт. То вохӯрӣ бо нозир автобус чанд километр роҳро тай намуда буд?

**167.** Формулаи периметр ва масоҳати росткунҷаро ёбед, агар дарозии он аз бараш дида ду маротиба зиёдтар бошад.

**168.** Ҷуфт ё токии функсияро муайян кунед:

а) $y=x^2-7$; б) $y=-0{,}3x^3$; в) $y=-3$.

**169.** Нобаробарии $\frac{2x-1}{x-3}\geq 0$ -ро бо ёрии методи фосилаҳо ҳал намоед.

**170.** Сайёҳ 24 км роҳи ҳамвор ва 16 км роҳи душворгузари кӯҳиро тай намуда, барои тамоми роҳ 8 соат вақт сарф намуд. Суръати аввалаи ҳаракати сайёҳро ёбед, агар дар роҳи кӯҳӣ ӯ суръаташро 2 км/соат суст карда бошад.

## 13. Ҳалли муодилаҳои якномаълума

А) **Муодилаи дараҷаи як**. Ин гуна муодилаҳоро ба намуди $ax+b=0$ меоваранд, ки дар он $x$–тағйирёбанда, $a$ ва $b$ ададҳо ва $a\neq 0$ аст. Аз муодилаи болоӣ номаълуми $x$ дар шакли $x=-\frac{b}{a}$ ёфта мешавад, ки он (яъне адади $-\frac{b}{a}$) решаи ягонаи муодилаи $ax+b=0$-ро ташкил медиҳад. Умуман, **ҳар як муодилаи дараҷаи якум дорои як реша аст**, агар $a\neq 0$ бошад.

Б) **Муодилаи дараҷаи ду.** Онро баъди табдилотҳо ба намуди $ax^2+bx+c=0$ овардан мумкин аст, ки дар он $x$–тағйирёбанда, $a\neq 0$, $b$ ва $c$ ададҳоянд. Мавҷудият, шумора ва намуди решаҳои ин муодила аз аломати дискриминанташ $D=b^2-4ac$ вобастагӣ дорад. Аниқаш, ин вобастагиро дар шакли ҷадвали зайл ифода кардан мумкин аст:

| $D=b^2-4ac$ | $ax^2+bx+c=0$ | Формулаи решаҳо |
|---|---|---|
| $D>0$ | Ду решаи ҳақиқии $x_1$ ва $x_2$-ро дорад | $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ |
| $D=0$ | Як реша дорад | $x=-\frac{b}{2a}$ |
| $D<0$ | Реша надорад | — |

Агар ду тарафи муодилаи $ax^2+bx+c=0$-ро ба $a$ тақсим кунему $\frac{b}{a}$-ро бо $p$ ва $\frac{c}{a}$-ро бо $q$ ишорат намоем, он гоҳ муодилаи $x^2+px+q=0$ ҳосил мешавад, ки онро **муодилаи квадратии ислоҳшуда** меноманд.

Дискриминанти он $D^1=\frac{p^2}{4}-q$ аст. Ҷадвали вобастагии решаҳо аз аломати дискриминант барои ин муодила чунин аст:

| $D^1=\frac{p^2}{4}-q$ | $x^2+px+q=0$ | Формулаи решаҳо |
|---|---|---|
| $D^1>0$ | Ду решаи гуногуни ҳақиқии $x_1$ ва $x_2$ дорад | $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D^1}$ |
| $D^1=0$ | як решаи ҳақиқӣ дорад | $x=-\frac{p}{2}$ |
| $D^1<0$ | решаи ҳақиқӣ надорад | — |

Хотиррасон мекунем, ки сумма ва ҳосили зарби решаҳои муодилаи квадратии ислоҳшуда вобастагиҳои $x_1+x_2=-p$ ва $x_1\cdot x_2=-q$-ро қаноат менамоянд. Ин вобастагиҳоро формулаи Виет ва теоремаеро, ки онҳоро муқаррар менамояд, теоремаи Виет* меноманд.

Ниҳоят, ба назарияи умумии муодилаҳои дараҷаи ду баргашта, **ҳолатҳои имконпазирро ба ҳисоб гирифта, хулоса кардан мумкин аст, ки муодилаи дараҷаи дуюми дилхоҳ аз дуто зиёд реша надорад.**

В) Муодилаи умумии дараҷаи $n$-умро ба намуди

$$a_nx^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+...a_1x+a_0=0$$

овардан мумкин аст, ки дар он $a_n\neq0$, $a_{n-1}$, ..., $a_1$, $a_0$ ададҳои маълум ва $x$–тағйирёбанда мебошад. Масалан муодилаҳои умумии дараҷаи се ва чор мувофиқан дар шаклҳои зерин навишта мешаванд:

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \qquad (a_3\neq0)$$

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \qquad (a_4\neq0).$$

Нишон додан мумкин аст, ки ҳар гуна муодилаи дараҷаи сеюм аз сето зиёд, чорум аз чорто зиёд ва $n$–ум аз $n$–то зиёд реша дошта наметавонад.

Барои муодилаҳои дараҷаи сеюму чорум формулаҳои хеле мураккаби ёфтани решаҳо маълуманд. Барои муодилаҳои умумии дараҷаашон аз чор боло бошад формулаҳои умумии ёфтани решаҳо то ҳол номаълуманд, вале ин ҳаргиз мазмуни он надорад, ки чунин муодилаҳоро ҳал кардан мумкин нест. Бо ёрии усулҳои махсус (ба монанди гузориш, ба зарбкунандаҳо ҷудокунии бисёраъзогӣ ва тарзи графикӣ) баъзан имконияти ҳалли чунин муодилаҳо мавҷуданд. Дар поён ин усулҳо дар ҳалли муодилаҳои мушаххас амалӣ карда шудаанд.

---

* Франсуа Виет (1540–1603) – математики франсавӣ.

М и с о л и 1. Муодилаи $x^4-x^3-16x^2+16x=0$-ро ҳал мекунем. Қисми чапи ин муодиларо ба зарбкунандаҳо ҷудо карда

$$x\cdot(x^3-x^2-16x+16)=0, \qquad x\cdot(x-1)(x^2-16)=0,$$

$$x\cdot\left[x^2\cdot(x-1)-16(x-1)\right]=0, \qquad x\cdot(x-1)(x-4)(x+4)=0$$

-ро пайдо мекунем, ки аз он чор решаҳои $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=4$, $x_4=-4$ ҳосил мешаванд.

М и с о л и 2. Муодилаи $x^5-x\cdot(8x^3+1)+8=0$-ро ҳал мекунем. Ифодаи дар қисми чапи муодила бударо ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$x^5-x\cdot(8x^3+1)+8=x^5-8x^4-x+8=x^4\cdot(x-8)-(x-8)=$$
$$=(x-8)(x^4-1)=(x-8)(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Инак, муодила ба муодилаи

$$(x-1)(x+1)(x-8)(x^2+1)=0$$

баробарқувва аст. Охирин дорои се решаҳои $x_1=1$, $x_2=-1$ ва $x_3=8$ мебшад, ки онҳо аз муодилаҳои $x-1=0$, $x+1=0$ ва $x-8=0$ ҳосил мешаванд.

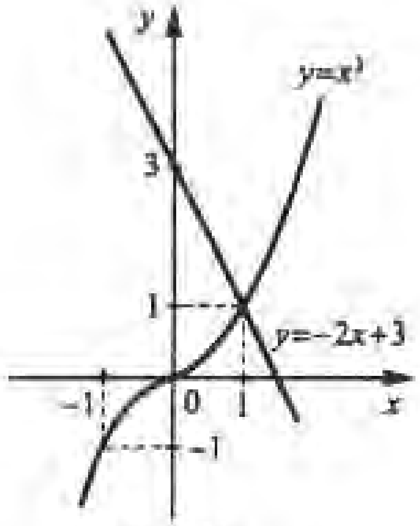
М и с о л и 3. Муодилаи $x^3+2x-3=0$-ро ба тарзи графикӣ ҳал мекунем.

Бо ин мақсад муодилаи додашударо дар шакли $x^3=-2x+3$ менависем. Графики функсияҳои $y=x^3$ ва $y=-2x+3$-ро дар як системаи координатавӣ месозем (расми 60). Чуноне ки аз графикҳо дида мешавад онҳо якдигарро фақат дар як нуқта мебуранд.

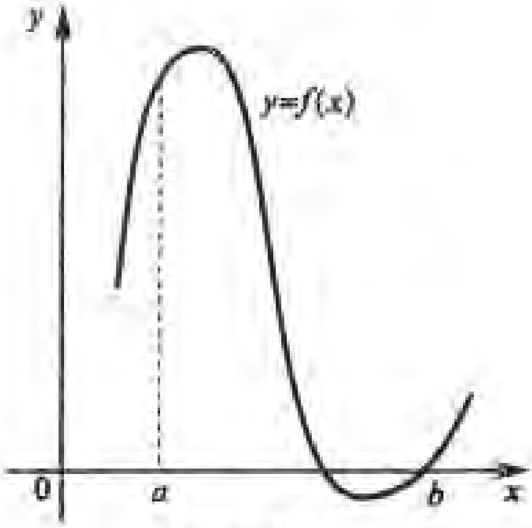
Абсиссаи нуқтаи буриш ба 1 баробар аст, ки он решаи муодилаи $x^3+2x-3=0$ мебошад.

Аслан ҳнгоми истифодаи тарзи графикии ҳал решаи матлубро асосан тақрибӣ ёфтан мумкин аст. Аз ин рӯ масъалаи бо саҳеҳии додашуда ёфтани реша ба миён меояд. Барои бо ин тарз саҳеҳтар ёфтани қимати тақрибии реша аввал порчаеро, ки дар он решаи матлуб воқеъ аст ёфта, баъд аз он зерпорчае, ки решаро доро мебошад ҷудо мекунанд. Пас аз чанд маротиба такрор кардани ин амал мо зерпорчаеро ҳосил мекунем, ки дарозиаш ба қадри зарурӣ хурд буда, решаи матлуб дар он воқеъ аст. Агар нуқтаи дилхоҳи ин зерпорча ба сифати қимати тақрибии ин ҳал гирифта шавад, он гоҳ хатои содиркардаамон аз дарозии зерпорча зиёд намешавад.

Графики функсияи $y=f(x)$, ки $f(x)$–бисёраъзогӣ аст, дар ҳамвории координатавӣ хати качи яклухтро ифода мекунад. Агар функсияи номбурда дар нугҳои порчаи охирноки $[a; b]$ қиматҳои аломаташон гуногунро қабул кунад (яъне, хати кач аз як нимҳамвории бо тири $Ox$ ҷудошуда ба нимҳамвории дигараш гузарад, пас он тири абсиссаро ақаллан дар як нуқта мебурад), он гоҳ решаи муодилаи $f(x)=0$ нуқтаи дохилии порчаи $[a; b]$ мебошад (ниг. ба расми 61).




Расми 60




Расми 61

Ҳамин тариқ, агар $f(a) \cdot f(b)<0$ бошад, он гоҳ муодилаи $f(x)=0$ дар порчаи $[a; b]$ реша дорад.

Барои тасдиқи гуфтаҳои боло муодилаи $x^5+x^2-5x+2=0$-ро мегирем. Маълум, ки яке аз решаҳои муодила ба порчаи [1; 2] тааллуқ дорад, чунки қимати функсияи $f(x)=x^5+x^2-5x+2$ дар нуқтаҳои он $f(1)=-1<0$ ва $f(2)=28>0$ мешавад. Порчаи [1; 2]-ро бо ёрии нуқтаҳои 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0; ба 10 ҳиссаи баробар тақсим карда дар онҳо қиматҳои функсияро пай дар пай то даме ҳисоб мекунем, ки порчаи дарозиаш 0,1-ро ёбему дар нӯгҳояш функсия қиматҳои аломаташон гуногун қабул кунад. Ин порча порчаи [1,2; 1,3] аст, чунки $f(1,2)=-0,8<0$, $f(1,3)=0,87>0$.

Ҳамин тариқ, дар қадами дуюми амалиёт ба хулоса меоем, ки решаи муодила ба порчаи [1,2; 1,3] тааллуқ дорад. Бо мақсади саҳеҳтар ҳисоб кардани решаи муодила порчаи охиринро ба 10 қисми баробар (бо саҳеҳии 0,01) аз рӯи нуқтаҳои 1,20; 1,21; 1,22; 1,23; 1,24; 1,25; 1,26; 1,27; 1,28; 1,29; 1,30 тақсим карда мебинем, ки $f(1,21)=-0,1<0$ ва $f(1,22)=0,08>0$ мешавад. Ин қиматҳоро ба инобат гирифта ба хулосаи зерин меоем: **решаи муодила дар байни ададҳои 1,21 ва 1,22 ҷойгир аст.** Ададҳои 1,21 ё 1,22-ро ба сифати қимати тақрибии решаи саҳеҳиаш то 0,01 гирифтан мумкин аст. Бо ҳамин тарз қимати тақрибии решаи муодиларо то саҳеҳии 0,001, 0,0001 ва ҳоказо ҳисоб кардан мумкин аст.

Ниҳоят қайд мекунем, ки аз рӯи решаҳои маълум худи муодиларо барқарор кардан мумкин аст (барои муодилаи квадратӣ ин гуна барқароркуниро дар синфи 8 омӯхта будем). Масалан, агар $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$ бошад, он гоҳ ифодаи $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ қисми чапи муодилаи матлуби $f(x)=0$-ро ташкил медиҳад. Дар муодилаи $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=0$ қавсҳоро кушода ҳосил мекунем:

$$x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0.$$

**?** 1. Оиди муодилаҳои бутуни якномаълума чӣ гуна маълумотҳо доред? 2. Дискриминанти муодилаи квадратӣ гуфта чиро дар назар доранд? Вобаста ба $D$ муодила чанд реша доштанаш мумкин аст? 3. Муодилаи якномаълумаи дараҷаи сеюм, чорум ва $n$–ум чандто реша дошта метавонад? 4. Муодилаҳои бутунро ($f(x)=0$, $f(x)$–бисёраъзогии тартиби $n$, $n \geq 3$) баъзан бо кадом тарзҳо ҳал кардан мумкин аст? 5. Оё аз рӯи решаҳои маълум худи муодилаи бутуни $f(x)=0$-ро тартиб додан мумкин аст? Мисолҳо оред.

**171.** Муодилаи зеринро ҳал кунед:

а) $2x+3=0$;
б) $\frac{x}{4}+\frac{3x}{8}=5$;
в) $2{,}1y^2=0$;
г) $\frac{2-y}{3}+\frac{1+3y}{6}=1\frac{1}{6}$;
д) $(x-1)(x-5)=2(x-1)$;
е) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$;
ж) $x(x+3)+a(a-3)=2(ax-1)$;
з) $(1+ax)\cdot x=(1-x)a^2+a+1\cdot$

**172.** Муодиларо ҳал кунед:

а) $2x\cdot(8x-13)-(4x-1)^2=35$;
б) $(18x-1)(1+18x)-8=0$;
в) $\frac{y^3}{2}=0{,}5(y^2+y)(y-3)+y+5$;
г) $4x^2\cdot(x^2-1)-(4x^4-1)=-3$.

**173.** Муодиларо ҳал кунед:

а) $\left(1-\frac{x}{6}\right)(x+6)-x=6+\frac{x\cdot(x-11)}{6}$;
б) $36x^2-84x+73=(12x-11)(3x+1)$;
в) $5\cdot(2-3x)+39=11(3-x)$;
г) $2\cdot(x+1)^2+3(x-5)=(1-x)(1+x)+96$
д) $x\cdot(x^2-2x+1)+x(3-x)=7\cdot(1-x)+2$
е) $(x^3-1)^2=x^6-15$.

**174.** Барои кадом қиматҳои бутуни $b$ решаи муодилаи:

а) $bx+24=0$;
б) $-\frac{bx}{3}+7=0$ –адади бутун мешавад?

**175.** Барои кадом қиматҳои $p$ решаи муодилаи:

а) $3x+p=-13$ адади манфӣ;
б) $4x=4p-2{,}5$ адади мусбат аст?

**176.** Исбот кунед, ки муодилаи $9x^6+6x^4+x^2+12=0$ реша надорад.

**177.** Решаҳои муодиларо бо ёрии ба зарбкунандаҳо ҷудокунӣ ёбед:

а) $4x^3-8x^2-x+2=0$;
б) $3x^4-10x^3+12x^2-6x+1=0$.

**178.** Барои кадом қиматҳои $m$ муодила ду реша дорад:

а) $3x^2-12x+3m=0$;
б) $3x^2-8x+m+6=0$;
в) $9x^2-3x+m=0$;
г) $x^2+mx+4=0$;
д) $x^2+5x+6m=0$
е) $x^2+3x+0{,}5m=0$;
ж) $4x^2-x-m=0$;
з) $mx^2+6x-5=0$.

179. Барои кадом қиматҳои $k$ муодила як реша дорад:

а) $4x^2-3x+2k=0$;
б) $kx^2-x+1=0$;
в) $x^2-kx+20=0$;
г) $4x^2+kx+4=0$;
д) $x^2+2\cdot(k-4)\cdot x+k^2+6k=0$;
е) $(2+k)x^2+4kx+4k+1=0$;
ж) $x^2+2\cdot(k-4)\cdot x+k^2-4k+3=0$;
з) $(k-2)x^2+(k-5)x-5=0$.

180. Барои кадом қиматҳои $t$ муодила реша надорад:

а) $3x^2-5tx+12=0$;
б) $16x^2-tx+9=0$;
в) $x^2-0{,}5tx+9=0$;
г) $6x^2+tx+36=0$;
д) $x^2-2tx+1=0$;
е) $3x^2-x-t=0$
ж) $8x^2-32x+2t=0$
з) $x^2-12x+3t=0$

181. Муодиларо ҳал кунед:

а) $6x^4-216x^2=0$;
б) $x^5+0{,}6x^3=0$;
в) $-2x^4=6x^2-7x^3$;
г) $10x^4-x^2-3x^3=0$;
д) $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$;
е) $x^3-2x^2-2x-3=0$;
ж) $x^4+x^3-24x^2-25x-25=0$;
з) $x^4+6x^3-x-6=0$.

182. Решаҳои муодилаи зеринро ёбед:

а) $7x^5-10x^4=0$;
б) $x^4-144x^3=0$;
в) $x^3-x^2=4x\cdot(x-1)$;
г) $(x-2)(x^2+6x)=24-12x$;
д) $x^3+2x^2+3x+6=0$;
е) $x^4+x^3+3x^2+2x+2=0$;
ж) $x^4=x^3+2x^2$;
з) $2t^5-8t^3=0$;
и) $3x^2-x^3+4x=0$;
к) $3t^4-81t=0$;
л) $y^3-144y=0$;
м) $x^3-0{,}01x=0$.

183. Аз рӯи решаҳои додашуда муодиларо тартиб диҳед:

а) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$;
б) $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=3$;
в) $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=3,\ x_4=0$;
в) $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=3,\ x_4=4$.

184. Муодилаи $x^3+2x-5=0$-ро бо тарзи графикӣ бо саҳеҳии то 0,01 ҳал кунед.

### *Машқҳо барои такрор*

185. Решаҳои муодилаи $2x^2+5x-3=0$-ро наёфта, қимати ифодаҳои а) $x_1+x_2+x_1\cdot x_2$; б) $x_1^2+x_2^2$ ва в) $x_1^3+x_2^3$-ро ҳисоб кунед.

186. Калонтарин тақсимкунандаи умумии ададҳои 126, 540 ва 630-ро ёбед.

187. Исбот кунед, ки қимати ифодаи $25^7+5^{13}$ ба 30 тақсим мешавад.

188. Қимати касрҳоро ёбед:

а) $\dfrac{38^2-17^2}{72^2-16^2}$; б) $\dfrac{39{,}5^2-3{,}5^2}{57{,}5^2-14{,}5^2}$; в) $\dfrac{856^2-44^2}{406}$.

189. Ифодаи зеринро бе нишонаи қимати мутлақ нависед:

а) $3\cdot|x+2|$; б) $|x+2|-x$; в) $|x^2-x|$.

190. Тарафҳои секунҷаи периметраш ба 30 см баробар мувофиқан ба ададҳои 5,7 ва 8 мутаносибанд. Тарафҳоро ёбед.

191. Амонатбонк ҳар сол пулҳои гузоштаи мизоҷонро ду фоиз зиёд мекунад. Агар миқдори пули гузоштаи яке аз мизоҷон 15000 сомонӣ бошад, он гоҳ он баъди ду сол чӣ қадар мешавад?

**192.** Тракторчӣ мебоист дар муддати муайяни вақт 80 га заминро шудгор мекард. Ӯ ҳар рӯз аз нақша ду га зиёдтар заминро шудгор намуда, супоришро ду рӯз пеш аз мӯҳлат иҷро кард. Тракторчӣ супоришро дар чанд рӯз иҷро намудааст?

**193.** Графики функсияи

а) $y=2x^2-x+1$; б) $y=-9x^2$

сохта шавад.

**194.** Нобаробариҳои зеринро ҳал кунед:

а) $\frac{x}{6}-\frac{x}{7}\le 1$; б) $\frac{x-4}{(x-1)(x-2)}>0$.

## 14. Муодилаҳое, ки ба муодилаи квадратӣ оварда мешаванд

Муодилаи

$$[p\cdot f(x)+q]\cdot[m\cdot f(x)+n]=s \qquad (1)$$

-ро дида мебароем, ки дар он $p$, $q$, $m$, $n$ ва $s$ ададҳои ҳақиқӣ ва $p\neq 0$, $m\neq 0$ мебошанд. Инчунин фарз мекунем, ки $f(x)$ - бисёраъзогии дараҷаи ду аст. Агар барои ҳалли муодила амалиётро аз кушодани қавсҳо сар кунем, он гоҳ ҳатман ба муодилаи тартиби 4 меоем, ки аксаран ҳаллаш ба мушкилиҳо меорад. Бо тағйирёбандаи нави $y$ иваз намудани $f(x)$ бошад ёфтани ҳалли (1)-ро хеле осон мегардонад, чунки муодила нисбати $y=f(x)$ ба муодилаи квадратии намудаш $(py+q)(my+n)=s$ мубаддал мегардад.

Инро дар ҳалли мисоли мушаххаси

$$(x^2-3x+4)(x^2-3x+6)=8 \qquad (2)$$

муоина мекунем. Дар ин ҷо ба ҷои $f(x)$ ифодаи $x^2-3x$ омадааст. Агар ҳамаи аъзоҳои муодиларо ба қисми чап гузаронида, ифодаи ҳосилшударо ба бисёраъзогии намудаш стандартӣ табдил додан хоҳем он гоҳ муодилаи

$$x^4-6x^3+19x^2-30x+16=0 \qquad (2')$$

-ро ҳосил мекунем, ки ҳаллаш хеле душвор аст. Вале гузориши $y=x^2-3x$* муодилаи(2)-ро ба $(y+4)(y+6)=8$ ва баъди соддакунӣ ба $y^2+10y+16=0$ меорад.

Муодилаи квадратии ҳосилшударо ҳал мекунем:

$$y_{1,2}=\frac{-10}{2}\pm\sqrt{5^2-16}=-5\pm\sqrt{25-16}=-5\pm\sqrt{9}=-5\pm 3;\quad y_1=-2;\quad y_2=-8.$$

Қимати ёфтаамонро дар баробарии $y=x^2-3x$ гузошта муодилаҳои $x^2-3x+2=0$ ва $x^2-3x+8=0$-ро ҳосил мекунем. Муодилаи $x^2-3x+8=0$ реша надорад, чунки $D=-23<0$ аст. Муодилаи $x^2-3x+2=0$ бошад ду решаи гуногуни $x_1=1$ ва $x_2=2$ дорад.

* Гузориши $x^2-3x+4=t$ низ татбиқшаванда аст.

Аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки муодилаи (2) ҳам ду реша доштааст: $x_1=1$, $x_2=2$.

Муодилаи (1) бо осонӣ ба шакли

$$a\cdot[f(x)]^2+b\cdot f(x)+c=0 \tag{3}$$

оварда мешавад ($a=mp$, $b=np+qm$, $c=nq-s$), ки он нисбати $f(x)$ муодилаи квадратӣ мебошад. Масалан, агар $f(x)=x^2-x$, $a=1$, $b=-3$ ва $c=2$ бошад, он гоҳ муодилаи

$$(x^2-x)^2-3(x^2-x)+2=0 \tag{4}$$

-ро ҳосил мекунем. Маълум, ки (4) нисбати $x^2-x$ муодилаи квадратӣ аст ва гузориши $x^2-x=y$ онро ба муодилаи $y^2-3y+2=0$ меорад. Решаҳои ин муодила $y_1=1$ ва $y_2=2$ мебошанд. Ба тағйирёбандаи аввала баргашта муодилаҳои $x^2-x=1$ ва $x^2-x=2$-ро ҳал мекунем. Онҳо мувофиқан дорои решаҳои $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ва $x_1=2, x_2=-1$ ҳастанд. Аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки муодилаи (4) чорто решаҳои $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_3=2$, $x_4=-1$-ро дорад.

Э з о ҳ. Агар дар муодилаи (3) $f(x)=x^2$ бошад, он гоҳ муодилаи дараҷаи чоруми намудаш $ax^4+bx+c=0$ ҳосил мешавад. Ин намуд муодилаҳо, ки нисбат ба $x^2$ муодилаи квадратианд ва мо онҳоро дар синфи 8 муоина карда будем, **муодилаи биквадратӣ** номида мешаванд. Масалан, муодилаи

$$7x^4-9x^2+2=0 \tag{5}$$

муодилаи биквадратӣ мебошад. Онро ҳал мекунем. Барои ин $x^2$-ро бо $y$ ишорат карда муодилаи квадратии $7y^2-9y+2=0$-ро ҳосил мекунем, ки $y_1=1$ ва $y_2=\frac{2}{7}$ решаҳояш мебошанд. Аз муодилаҳои $x^2=1$ ва $x^2=\frac{2}{7}$ мувофиқан $x_1=1$, $x_2=-1$ ва $x_3=\sqrt{\frac{2}{7}}$; $x_4=-\sqrt{\frac{2}{7}}$ -ро меёбем, ки онҳо муодилаи (5)-ро қаноат менамоянд. Баъзан бо ёрии ба зарбкунандаҳо ҷудокунии ифодаҳои қисми чап муодилаҳои намуди (2') ё (5)-ро ба муодилаҳои хаттию квадратӣ овардан мумкин аст. Масалан, қисми чапи муодилаи

$$3x^4-8x^2+5=0,$$

-ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$3x^4-8x^2+5=3\left(x^4-\frac{8}{3}x^2+\frac{5}{3}\right)=3\left[\left(x^4-2\cdot\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{9}\right)+\frac{5}{3}-\frac{16}{9}\right]=$$

$$3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right]=3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{3}\right]\left[\left(x^2-\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{3}\right]=$$

$$3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)(x^2-1)=3(x-1)(x+1)\left(x^2-\frac{5}{3}\right).$$

Муодилаи аввала ба муодилаҳои $3x^2-5=0$, $x\pm1=0$ оварда шуд. Ипак, $x=\pm1$ ва $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ решаҳои муодилаанд.

**?**

1. Муодилаи (1)-ро навишта онро шарҳ диҳед. Дар мисолҳои мушаххас нишон диҳед, ки онро ба муодилаи квадратӣ овардан мумкин аст. 2. Аз муодилаи (1) муодилаи (3)-ро ҳосил кунед. 3. Кадом намуди муодилаҳоро муодилаи биквадратӣ меноманд? Мисолҳо оред. 4. Тарзи ҳалли муодилаҳои биквадратиро схематикӣ баён кунед.

**195**. Тағйирёбандаи навро дохил намуда, муодилаи зеринро ҳал кунед:

а) $(x^2-4x+1)\cdot(x^2-4x+8)+12=0$; е) $24x^2+25=(2x^2+3)^2$;
б) $(x^2+2x)(x^2+2x-3)=-2$; ж) $x\cdot(x-2)+1{,}5=0{,}5\cdot(x^2-2x)^2$;
в) $(x^2-8)+4(x^2-8)-5=0$; з) $(x^2+x)^2+x(x+1)=42$;
г) $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$; и) $(2x^2+x)^2-5x\cdot(2x+1)+6=0$;
д) $(x^2+x)^2-5(x^2+x)-84=0$; к) $11x^2+5=(x^2+3)^2$.

**196**. Муодилаи биквадратиро ҳал кунед:

а) $x^4-5x^2+6=0$; и) $x^4-41x^2+400=0$;
б) $y^4-3y^2+2=0$; к) $y^4+24y^2+148=0$;
в) $x^4+8x^2+20=0$; л) $x^4-8x^2+16=0$;
г) $2x^4-11x^2+12=0$; м) $t^4-10t^2+9=0$;
д) $6x^4-5x^2+1=0$; н) $2x^4-13x^2+20=0$;
е) $12y^4-25y^2+12=0$; о) $5y^4-15y^2+42=0$;
ж) $x^4-20x^2+64=0$; п) $x^4-4x^2+1=0$;
з) $x^4-13x^2+36=0$; р) $x^4-2x^2+1=0$.

**197**. Координатаҳои нуқтаҳои буриши тири абсиссаро бо графики функсия ёбед:

а) $y=2x^4-9x^2+4$; г) $y=x^4-27x^2+50$; ж) $y=x^4-11x^2+10$;
б) $y=3x^4-7x^2+4$; д) $y=4x^4-9x^2+5$; з) $y=3x^4+16x^2-19$;
в) $y=4x^4-37x^2+9$; е) $y=7x^4+6x^2-13$.

**198**. Оё адади $-\sqrt{5}$ решаи муодилаи $t^4-10t^2+25=0$ шуда метавонад?

**199**. Адади 0,5 решаи муодилаи биквадратии $16x^4-8x^2+1=0$ мешавад ё не?

**200**. Барои кадом қиматҳои $k$ муодила:

а) $3x^4-4x^2+1\frac{1}{3}k=0$; б) $kx^4-6x^2+9=0$ чор реша дорад?

**201**. Барои кадом қимати $k$ муодила:

а) $x^4-3kx^2+4=0$; б) $kx^4-5x^2-36=0$ ду реша дорад.

**202**. Барои кадом қимати $k$ муодила:

а) $5x^4+3x^2-4{,}5k=0$; б) $6x^4+kx^2+6=0$ реша надорад?

**203.** Муодиларо бо тарзи ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан ҳал кунед.

а) $9x^4-7x^2-2=0$; в) $16x^4-8x^2+1=0$;

б) $13x^4-10x^2-32=0$; г) $7x^4-2x^2-9=0$.

**204.** Муодиларо ҳал кунед:

а) $(x^2-4)(x^2+4)-2(x^2-11)=0$; в) $6x^5+6x^4-x^3-x^2+5x+5=0$;

б) $2x^2\cdot(x-1)(x+1)-3x^2-12=0$; г) $2x^5-2x^4-x^3+x^2-3x+3=0$.

### *Машқҳо барои такрор*

**205.** Нобаробариро ҳал кунед:

а) $|2x-5|<1$; в) $|2-x|<4$; д) $x^2-2x-3\geq 0$;

б) $|x-4|\leq 3$; г) $\dfrac{2-x}{(x-1)(x+3)}<0$; е) $9x^2-16\leq 0$.

**206.** Ҳисоб кунед:

$$\frac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{1{,}2:0{,}375-0{,}2}\cdot\left(6\frac{4}{5}:15\frac{2}{5}+0{,}8\right).$$

**207.** Исбот кунед, ки барои ҳар гуна ададӣ натуралии $k$ қимати ифодаи $(3k+1)^2-(3k-1)^2$ ба 12 тақсим мешавад.

**208.** Касрҳоро содда кунед:

а) $\dfrac{(x+2)^3}{x^2+4x+4}$; б) $\dfrac{x^2-16}{3x-12}$; в) $\dfrac{3-3x}{x^2-2x+1}$; г) $\dfrac{x^3-8}{x^2+2x+4}$.

**209.** Фарқи квадратҳои ду ададӣ пай дар паи натуралӣ ба −11 баробар аст. Ададҳоро ёбед.

**210.** Масофаи байни ду шаҳр 420 км аст. Ду автомобил, ки суръатҳояшон 10 км/соат фарқ мекунад, аз як шаҳр баромада ба самти шаҳри дигар равон гаштанд. Автомобили якум назар ба автомобили дуюм 1 соат пештар омада расид. Суръати ҳар як автомобилро ёбед.

**211.** Оё ифодаҳои зерин бутунанд:

а) $\dfrac{3x^2+18}{3}+7xy$; б) $\dfrac{4x-8}{y}+\dfrac{y^2}{2}$?

# §6.СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ДУНОМАЪЛУМА

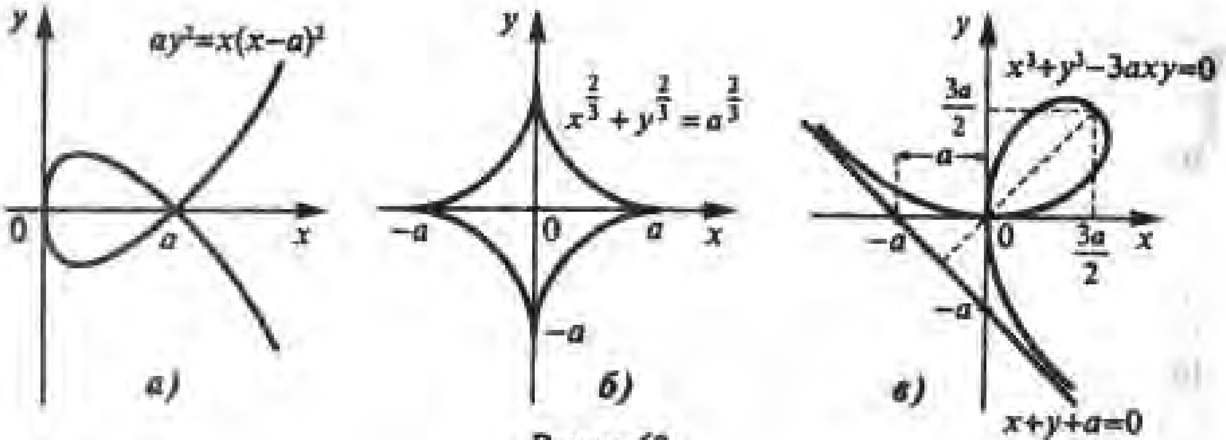
## 15. Муодилаи дуномаълума ва графики он

Ҳар гуна муодилаи дорои ду номаълумро дар шакли

$$F(x, y)=0$$

навиштан мумкин аст. Масалан, барои муодилаи $y=ax^2+bx+c$ $F(x, y)=$ $=ax^2+bx+c$ ва барои муодилаи $x^2+y^2=9$ $F(x, y)=x^2+y^2-9$ мебошад.

Баробариҳои $ax+by=c$, $x\cdot y=1$, $4x^3y+y^5=0$, $(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2=0$ низ муодилаҳои дуномаълумдор ҳастанд. Маҷмӯи нуқтаҳои ҳамвории координатавӣ, ки муодилаи дуномаълумаро ба баробарии дуруст табдил медиҳад, **графики муодилаи дуномаълума** номида мешавад. Ин графикҳо гуногуншакланд. Дар ҳақиқат, графики




Расми 62

муодилаи $ax+bx=c$ - хати рост, графики $y=ax^2+bx+c$ - парабола (ниг. ба боби I), $x \cdot y=1$–гипербола мебошанд. Дар расми 62 графики баъзе муодилаҳо акс ёфтаанд.

Усули муайян кардани дараҷаи муодилаи бутуни дуномаълума ба усули муайян кардани дараҷаи муодилаҳои якномаълума монанд аст. Бигузор қисми чапи муодилаи дар боло номбурдаи дуномаълума бисёраъзогии намудаш стандартӣ ва тарафи росташ адади нул бошад. Дар ин ҳолат дараҷаи муодила ба дараҷаи ин бисёраъзогӣ баробар мешавад. Ҳамин тариқ, **дараҷаи муодилаи дуномаълума гуфта, дараҷаи муодилаи ба он баробарқувваеро меноманд, ки қисми чапаш бисёраъзогии намудаш стандартӣ ва қисми росташ нул аст.** Маълум, ки муодилаи $1+(x^3+y^3)^2=x^6-xy^2$ ба муодилаи $2x^3y+xy^2+y^2+1=0$ баробарқувва мебошад. Пас, муодилаи аввала муодилаи дараҷаи чор аст. Дараҷаи муодилаи $7x^8-12xy+y=7x^2(x^6+1)$ бошад ба ду баробар аст, чунки он ба муодилаи дараҷаи дуюми $-7x^2-12xy+y=0$ баробарқувва мебошад.

**?** **1.** Якчанд мисолҳои муодилаҳои дуномаълумаро оред. **2.** Графики муодилаи дуномаълума гуфта чиро меноманд? **3.** Графики муодилаҳои $y=\dfrac{4}{x}$; $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$; $y=-2$ ва $y=3x^2-1$ дар ҳамвории координатавӣ кадом хатҳо мебошад? **4.** Дар зери мафҳуми «дараҷаи муодилаи бутуни дуномаълума» чиро мефаҳмед? Мафҳумро бо мисолҳо шарҳ диҳед.

**212.** Аз муодилаҳои зерин кадомаш муодилаҳои дуномаълумаанд:

а) $x^2+y^3=3xy$; в) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$; д) $2x^2-y-1=0$;

б) $xyz+1=0$; г) $x \cdot y-3=0$; е) $x^y+z=1$?

**213.** Оё ҷуфти ададҳои $(1;-2)$ муодиларо қаноат менамояд:

а) $x^2-y^3-8=0$; в) $x^2+y^2=5$;

б) $xy+2y=-6$; г) $x^2-y^2+xy+6=0$?

**214.** Графики муодилаи дуномаълумаро созед:

а) $3x+y=4$;  в) $x^2-5x+4-y=0$;  д) $y^2=2ax(a>0)$;

б) $-2x+9y=4$;  г) $xy-9=0$;  е) $y-2x^3=0$.

**215.** Дараҷаи муодилаи бутуни дуномаълумаро муайян кунед:

а) $9x-4y-102=0$;  ж) $3(x^2+y^2)^3=xy^2$;

б) $3x-4y+13=0$;  з) $(x+y^6)^2=y^{12}+x^3y$;

в) $x\cdot(1-y)-4y=0$;  и) $3xy^2=(x^4+y^3)^3$;

г) $3x^2+y^2+8x=0$;  к) $(x+y)^3=x^3+y^3$;

д) $(x^2-2y^2)^2+5y=9$;  л) $x^3+y^3=2x^2y^2$;

е) $5x^5-6x^4y^2+x^3y^2=0$;  м) $8x^8-17xy+3y=8x^2(x^6+1)$.

### *Машқҳо барои такрор*

**216.** Қимати ифодаро ёбед:

$$\frac{\left[4-3{,}5\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]\cdot\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)}{0{,}16\cdot\left(3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{4}\right)}$$

**217.** Номаълумро аз таносуби $0{,}3x : 3\frac{1}{3}=6 : 1{,}5$ ёбед.

**218.** Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $(x+3)^2-16$;  в) $6x^2+24xy+24y^2$;

б) $4a^2-x^2+2xy-y^2$;  г) $x^6-2^6$.

**219.** Агар 3%-и пули дар муомилот гузошташуда 15 000 000 сомониро ташкил диҳад, пас тамоми маблағ чанд сомониро ташкил медиҳад?

**220.** Масъалае тартиб диҳед, ки бо ёрии системаи муодилаҳои хаттии $x+y=6$ ва $x-y=2$ ҳал шавад.

**221.** Нобаробариҳои зеринро ҳал кунед:

а) $\frac{x^2-3x}{2x+1}<0$;  б) $3x^2-x-2\geq0$.

**222.** Муодилаи $\frac{200}{x}-\frac{200}{x+2}=5$ -ро ҳал кунед.

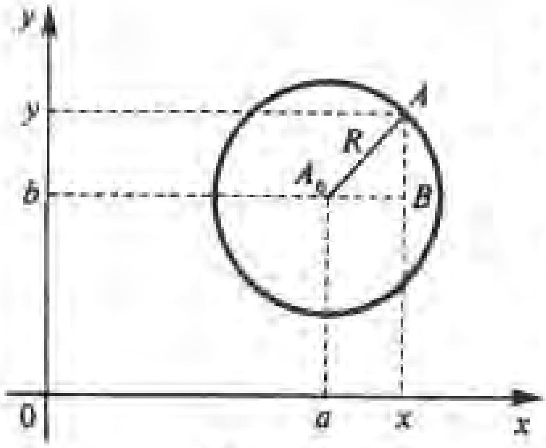
**223.** Барои кадом қиматҳои аргумент функсияи $f(x)$ ба нул мубаддал мегардад, қиматҳои мусбат ва манфӣ қабул мекунад, агар:

а) $f(x)=-3x+9$;  б) $f(x)=5x+20$

бошад?

## 16. Муодилаи давра

Аз курси геометрия (синфи 7) мафҳуми давра ба мо маълум аст. Дар асоси он маълумотҳо давра **ҷои геометрии чунин нуқтаҳоеро ($A(x;\ y)$) дар ҳамворӣ ифода мекунад, ки онҳо аз ягон нуқтаи ба қайд гирифташудаи ҳамворӣ ($A_0(a;\ b)$) дар як хел масофа ҷойгиранд.** Нуқтаи $A_0(a;\ b)$ маркази давра ва масофаи $A_0A$-ро радиуси ($R$)




Расми 63

давра меноманд. Нишон медиҳем, ки муодилаи дуномаълумае вуҷуд дорад, ки давра графики он мебошад.

Фарз мекунем, ки давраи марказаш нуқтаи $A_0(a;\ b)$-и ҳамворӣ ва радиусаш ба $R$ баробар дода шудааст. Барои тартиб додани муодилаи ин давра аз формулаи масофаи байни ду нуқтаи ҳамворӣ ва теоремаи Пифагор истифода мекунем.

Бигузор $A(x;\ y)$ нуқтаи дилхоҳи давра ва $A_0(a;\ b)$ маркази он бошад. Азбаски $A_0A=R$, $A_0B=x-a$ ва $AB=y-b$ аст (ниг. ба расми 63), пас квадрати масофа аз нуқтаи А то нуқтаи $A_0$ ба $(A_0B)^2+(AB)^2$ баробар мешавад. Аз ин ҷо формулаи матлуби давраро дар шакли

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

ҳосил мекунем. Координатаҳои $(x,\ y)$-и ҳар як нуқтаи $A$-и давра муодилаи (1)-ро қаноат менамояд ва баръакс ҳар як нуқтаи дилхоҳи $A$-и ҳамворӣ, ки координатаҳояш муодилаи (1)-ро қаноат мекунад, ба давра тааллуқ дорад (чунки масофа аз он то нуқтаи $A_0$ ба $R$ баробар аст.)

Ҳангоми $A_0$ (0; 0) будан (яъне агар маркази давра дар ибтидои системаи координатаҳо воқеъ бошад) муодилаи давра намуди

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (2)$$

-ро мегирад.

Масалан, бо осонӣ боварӣ ҳосил намудан мумкин аст, ки муодилаи дуномаълумаи $(x-1)^2+(y+4)^2=9$ муодилаи давраест, ки марказаш дар нуқтаи (1; −4) буда, радиусаш ба 3 баробар аст.

Мувофиқан муодилаи $x^2+y^2+2x=0$ низ муодилаи давра мешавад. Дар ҳақиқат, бо ёрии табдилдиҳиҳои $0=x^2+y^2+2x=(x^2+2x)+y^2=(x^2+$ $+2x+1)+y^2-1$ онро ба намуди $(x+1)^2+(y-0)^2=1$ оварда ва бо (1) муқоиса карда, ҳосил мекунем, ки он муодилаи давраи радиусаш ба 1 ва марказаш дар нуқтаи (−1; 0) ҷойгирбуда мебошад.

**?**

**1**. Формулаи масофаи байни ду нуқтаи ҳамвории координатавиро нависед. **2**. Теоремаи Пифагорро баён кунед. **3**. Давра чист? **4**. Муодилаи давраи радиусаш $R$ ва марказаш дар нуқтаи $A_0(a;\ b)$ бударо нависед. Агар маркази давра дар нуқтаи (0; 0) ҷой гирифта бошад, он гоҳ муодилааш чӣ гуна мешавад? **5**. Оё муодилаҳои (1) ва (2)-ро муодилаҳои дуномаълума номидан мумкин аст?

224. Аз рӯи муодилаи додашуда координатаҳои маркази давра ва радиуси онро муайян кунед:

а) $(x-2)^2+(y-5)^2=4$;

б) $(x+3)^2+(y-1)^2=l$;

в) $(x-11)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$;

г) $(x+5)^2+(y-1,1)^2=1,21$;

д) $\left(x-1\frac{7}{9}\right)^2+\left(y-\frac{25}{4}\right)^2=169$;

е) $(x-9)^2+(y-16)^2=69\frac{4}{9}$;

ж) $(x+1,44)^2+(y+0,2)^2=0,09$;

з) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{144}$.

225. Муодилаи дуномаълума, ки муодилаи давра мебошад, ба намуди (1) ё (2) оварда, барояш координатаҳои нуқтаи марказ ва бузургии радиусро ёбед:

а) $x^2+y^2-3x=0$; г) $x^2+y^2-2x+2y=0$; ж) $x^2+y^2=2x-8y+8$;

б) $x^2+y^2+4y=0$; д) $x^2+y^2+x+4y=0$; з) $x^2+y^2=6x+4y+3$.

в) $x^2+y^2-x=0$; е) $x^2+y^2-4x+y=\frac{1}{4}$;

226. Аз рӯи координатаҳои додашудаи нуқтаи $A_0(a;\,b)$ ва радиуси давра $R$ муодилаашро тартиб дода, графикашро созед:

а) $A_0(0;\,0)$, $R=3$; б) $A_0(-3;\,5)$, $R=2$; д) $A_0(5;\,-2)$, $R=4$;

б) $A_0(2;\,3)$, $R=11$; г) $A_0(-2;\,-4)$, $R=1$; е) $A_0(0;\,-1)$, $R=5$.

227. Координатаҳои марказ $A_0(a;\,b)$ ва бузургии радиус $R$-ро аз муодилаи давра ёфта, дар ҷавоб $a+b+R$-ро нависед:

а) $x^2+y^2=16$; г) $x^2+y^2-4x+4y=17$;

б) $x^2+y^2-6x=7$; д) $x^2+y^2+4x-4y=1$;

в) $x^2+y^2-2x+8y-8=0$; е) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$.

228. Аз нуқтаҳои (1; 3), (4; 3), (−3; 2), (7; 1) кадомашон ба давраи муодилааш $x^2+y^2=25$ буда, тааллуқ доранд?

229. Графики функсияи $x^2+y^2-2x-0$-ро сохта, нуқтаҳои:

а) абсиссааш $x=1$; б) ординатааш $y=0$-ро ёбед.

230. Оё графики а) $x^2+y^2+4x+1=0$ тири $Oy$-ро; б) $x^2+y^2-6y+4=0$ тири $Ox$-ро мебурад?

## *Машқҳо барои такрор*

231. Қимати ифодаи $5a^2b^3+4(a-b)$-ро ҳангоми $a=-0,5$ ва $b=-1$ будан ҳисоб кунед.

232. Ададеро ёбед, ки а) 40% ба 12; б) 1,25% ба 55; в) 0,8% ба 184 баробар бошад.

**233.** Содда кунед:

а) $\frac{a^2}{ax-x^2}+\frac{x}{x-a}$; б) $\frac{x^2-4xy}{2y^2-xy}-\frac{4y}{x-2y}$;

**234.** Системаи муодилаҳои хаттии зеринро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}2x-3y=21,\\ 2y=-10;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+y=14,\\ y-x=10;\end{cases}$ в) $\begin{cases}-x+2y=-7,\\ 5x-y=-28.\end{cases}$

**235.** Махраҷи каср аз сураташ 4 воҳид зиёдтар аст. Агар ба он касри чаппаашро ҷамъ кунем, он гоҳ $2\frac{16}{21}$-ро ҳосил мекунем. Касрро ёбед.

**236.** Масофаи байни стансияҳои Душанбе ва Турсунзода 96 км аст. Як қатора назар ба дигараш ин масофаро 40 дақиқа пештар тай намуд. Суръати ҳаракати қатораи якум назар ба дуюм 12 км/соат зиёдтар аст. Суръати ҳаракати қатораҳоро ёбед.

**237.** $f(x)=-7x+8$. Қимати $x$-ро ёбед, ки дар он
а) $f(x)=-6$; б) $f(x)=15$; в) $f(x)=0$.
бошад.

**238.** Нишон диҳед, ки функсияи $f(x)=-2x^3$ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ камшаванда аст.

## 17. Тарзи графикии ҳалли системаи муодилаҳо

Пеш аз баёни мақсади асосӣ баъзе маълумотҳои ёрирасонро нисбати системаҳои ду муодилаи хаттии дуномаълума,

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

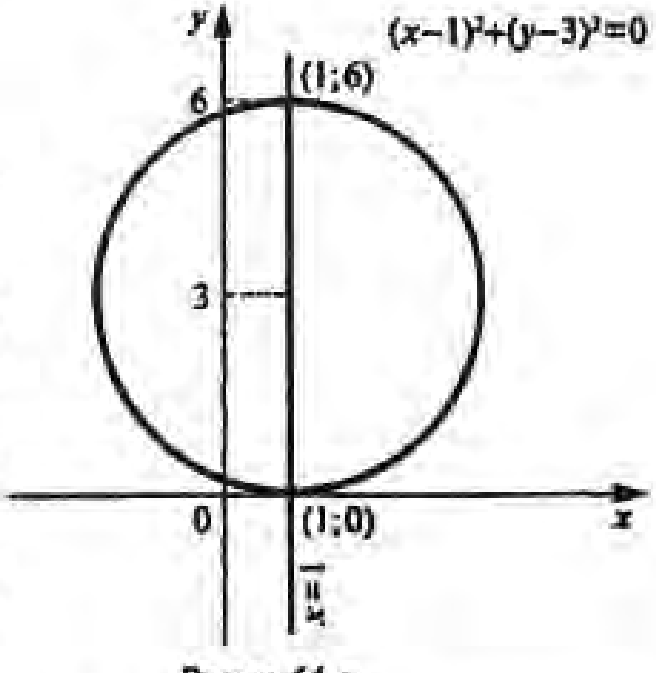
ки дар синфи 7–ум омӯхта будем, ба хотир меорем. **Ҳалли чунин система** гуфта ҷуфти қиматҳои $(x;y)$-еро employ меноманд, ки ҳар як муодилаи системаро қаноат менамояд. **Ҳал кардани системаи муодилаҳо** ин ёфтани **ҳамаи ҳалҳои система** мебошад. Системаро **ҳамҷоя** меноманд, агар **ақаллан як реша** дошта бошад ва **ғайриҳамҷоя** меноманд, агар ягонто **ҳал надошта бошад** (ба ибораи дигар ҳалҳои система **маҷмӯи холиро** ташкил медиҳад). **Системаи муодилаҳои ҳалҳояшон якхеларо системаҳои баробаркувва меноманд.**

Қайд мекунем, ки системаи муодилаҳои хаттиро дар синфи 7 бо тарзҳои гузориш, ҷамъкунии алгебравӣ ва графикӣ ҳал карда будем. Дар ин параграф бо системаҳои иборат аз ду муодилаҳои дараҷаи дуюм ё системаҳои аз як муодилаи дараҷаи якум ва як муодилаи дараҷаи дуюм ташкил ёфта машғул шуда, онҳоро бо тарзи графикӣ ҳал мекунем.

**М и с о л и 1.** Системаи

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=9,\\ x-1=0\end{cases}$$

-ро дида мебароем. Маълум, ки графики муодилаи $(x-1)^2+(y-3)^2=9$ давраи марказаш нуқтаи (1; 3) ва радиусаш ба 3 баробар буда аст. Графики муодилаи $x-1=0$ - хати ростест, ки он аз нуқтаи $x=1$-и тири абсисса гузашта ба тири ордината параллел мебошад. Онҳоро дар як ҳамвории координатавӣ месозем (расми 64, *а*).




Расми 64, *а*

Аз графикҳо намоён аст, ки онҳо ду нуқтаи умумии (1; 0) ва (1; 6) доранд, яъне қиматҳои $x_1=1$, $y_1=0$ ва $x_2=1$, $y_2=6$ муодилаҳои системаро ба баробариҳои дуруст табдил дода (яъне онҳоро қаноат менамоянд), ҳалли системаро ташкил медиҳанд.

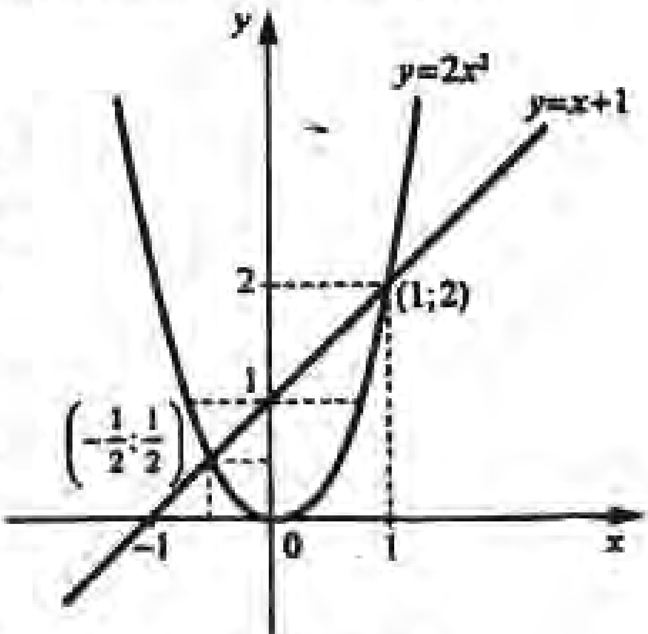
**М и с о л и 2.** Бо тарзи графикӣ системаи

$$\begin{cases}2x^2-y=0\\ y-x-1=0\end{cases}$$

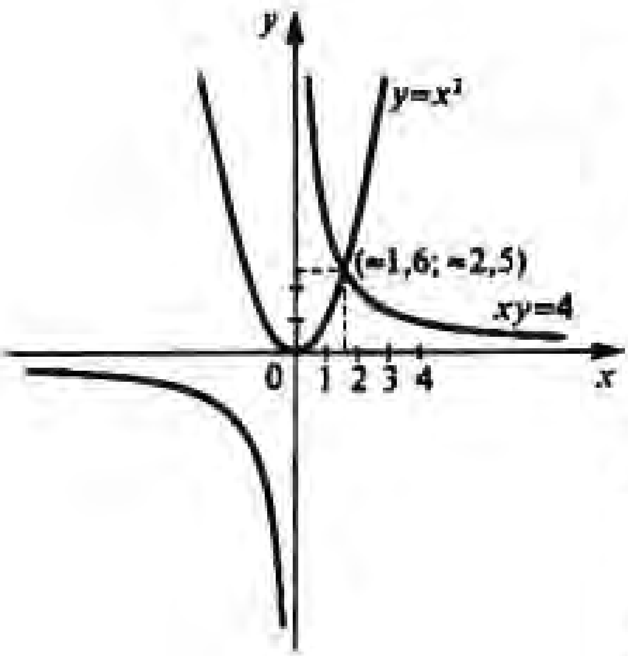
-ро ҳал мекунем. Дар ҳамвории координатавӣ графики функсияи $y=2x^2$ (параболаи қуллаҳояш дар нуқтаи (0; 0) ҷойгир шуда) ва функсияи $y=x+1$ (хати рости тирҳои системаи координатаҳоро дар нуқтаҳои (−1; 0) ва (0; 1) буранда)-ро месозем (расми 64,б).

Координатаҳои нуқтаи дилхоҳи параболаи сохташуда ҳалли муодилаи $y-2x^2=0$ ва координатаҳои нуқтаи дилхоҳи хати рост ҳалли муодилаи $y-x-1=0$-ро ташкил медиҳанд. Азбаски координатаҳои нуқтаҳои (1; 2) ва $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ки буриши параболаю хати рост мебошанд, муодилаҳои системаро қаноат менамоянд, пас онҳо ҳалли система мешаванд.

Ҷ а в о б: $x_1=1$; $y_1=2$; $x_2=-\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{1}{2}$.




Расми 64, *б*



Расми 64, в

Мисоли 3. Ниҳоят системаи
$$\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ xy - 4 = 0, (x \neq 0) \end{cases}$$
-ро дида мебароем.

Бо максади ёфтани ҳалли система дар як ҳамвории координатавӣ графики функсияҳои $y=x^2$ (парабола) ва $y=\frac{4}{x}$ (гипербола)-ро месозем (ниг. ба расми 64, в).

Нуқтаи буриши ин ду хати кач ҳалли ягонаи система мебошад. Аз расм намоён аст, ки $x\approx1,6$ ва $y\approx2,5$ мешавад. Бо ибораи дигар ҳалли тақрибии системаро ташкил медиҳад.

**?** 1. Системаи муодилаҳои хаттии дуномаълумаро бо кадом тарз ҳал мекунанд? 2. Дар кадом ҳолат система ҳамҷоя номида мешавад? 3. Чӣ гуна системаҳоро баробарқувва меноманд? 4. Аз нуқтаи назари геометрӣ маънидод кунед: системаи ду муодилаи хаттӣ: а) ҳалли ягона дорад; б) ҳалли бешумор дорад; в) ҳал надорад.

**239.** Системаи муодилаҳоро бо тарзи графикӣ ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x \cdot y = 8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + y^2 = 11, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y = x^2 - 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^2, \\ 2x - y + 5 = 0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x \cdot y = -12, \\ x - y = 7; \end{cases}$ л) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9, \\ y - x^2 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x + y = -8, \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0; \end{cases}$ м) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 2 \cdot |x|. \end{cases}$

**240.** Ду ҳал доштани системаи муодилаҳои
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 - 6; \end{cases}$$
-ро бо тарзи графикӣ нишон диҳед.

**241**. Қимати ифодаи $a^2-3a+6$-ро ҳангоми $a=-\frac{1}{3}$ будан ҳисоб кунед.

**242**. Оё таносуби зерин дуруст аст:

$$3{,}75 : 10{,}4=3\frac{11}{13}:10\frac{2}{3}\ ?$$

**243**. Нишон диҳед, ки барои ҳар гуна адади натуралии $k$ ифодаи $\frac{(8^{k+1}+8^k)^2}{4^k-4^{k-1}}$ ба 192 тақсим мешавад.

**244**. Муқоиса кунед: а) $45^2-31^2$ ва $44^2-30^2$-ро; б) $297 \cdot 299$ ва $298^2$-ро; в) $26^3-24^3$ ва $(26-24)^3$-ро; г) $(17+13)^3$ ва $17^3+13^3$-ро.

**245**. Системаи муодилаҳои зеринро бо тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ё гузориш ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 2x+7y=9, \\ y-2x=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+y=7, \\ 2x-y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x-2y=6, \\ x-y=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+4y=21, \\ 2x-y=6. \end{cases}$

**246**. Қаиқ мебоист 34 км-ро дар муддати муайяни вақт шино мекард. Вале баъди 3 соати ҳаракат онро дар яке аз бандарҳои дохилӣ ба муддати 40 дақиқа боздоштанд. Барои он ки қаиқ дар вақти муайянгашта ба ҷои зарурӣ расад, суръати ҳаракаташро 2 км/соат зиёд намуд. Суръати аввалаи ҳаракати қаиқро ёбед.

**247**. Нишон диҳед, ки функсияи $y=0{,}1x^3+1$ дар тамоми тири ададӣ афзуншаванда аст.

**248**. Экстремали функсияи квадратиро ёбед;

а) $y=3x^2-7$; б) $y=x^2-4x$; в) $y=-3x^2+18x-11$.

**249**. Муодилаи биквадратиро ҳал кунед:

а) $x^4-7x^2+6=0$; б) $3x^4-5x^2+2=0$;.

**250**. Оё графики $2x^2+y^2+9x+9=0$ тири $Oy$-ро мебурад?

## 18. Ҳалли системаи муодилаҳои дараҷаи дуюм

Ба монанди пункти гузашта дар ин ҷо ҳам бо системаҳои: а) аз як муодилаи дараҷаи дуюм ва як муодилаи дараҷаи якуми дуномаълума; б) аз ду муодилаи дараҷаи дуюми дуномаълума таркиб ёфта машғул мешавем.

Ҳалли системаҳои намуди а)-ро бо *тарзи гузориш* ҳал мекунанд, ки он аз зинаҳои зерин иборат аст:

– аз муодилаи дараҷаи якуми система яке аз номаълумҳоро ба воситаи дигараш ифода мекунем (чуноне ки ҳангоми ёфтани ҳалли системаҳои хаттӣ дар синфи 7 амал карда будем);

– қисми рости ҳосилшударо ба муодилаи дигари система (ба муодилаи дараҷаи дуюм) гузошта муодилаи якномаълумаеро ҳосил мекунем:

– муодилаи дараҷаи дуюми ҳосилкардаамонро ҳал мекунем;

– решаҳои ҳосилкардаро ба муодилаи табдилёфтаи дараҷаи якум гузошта қимати мувофиқи тағйирёбандаи дуюмро меёбем.

Қайд менамоем, ки бо ин тарз системаҳои намуди а)-ро ҳамеша ҳал кардан мумкин аст.

Мисоли 1. Системаи

$$\begin{cases}2x^2 - xy + y^2 = 4,\\ y - x = -2;\end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Мувофиқи гуфтаҳои боло амал карда муодилаи дуюми системаро дар шакли ба аввала баробарқувваи $y=x-2$ менависем. Ин қимати $y$-ро ба муодилаи якум гузошта баъди иҷрои табдилоти лозимӣ муодилаи якномаълумаи $2x^2-2x-0$-ро ҳосил мекунем. Решаҳои ин муодила $x_1=0$ ва $x_2=1$ мебошад. Қиматҳои ёфтаи $x_1$ ва $x_2$–амонро алоҳида–алоҳида ба $y=x-2$ гузошта $y_1=-2$ ва $y_2=-1$-ро пайдо мекунем.

Ҷавоб: $(0; -2)$, $(1; -1)$.

Мисоли 2. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases}x^2 + y = 14,\\ y - x = 8;\end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Бо ин мақсад аз муодилаи дуюми система $y$-ро ба воситаи $x$ ифода намуда (яъне $y=8+x$) қиматашро ба муодилаи якум мегузорем. Дар натиҷа нисбат ба $x$ муодилаи квадратии $x^2+x-6=0$-ро ҳосил мекунем, ки он ба решаҳои $x_1=2$ ва $x_2=-3$ доро аст. Қиматҳои 2 ва $-3$-ро дар $y=x+8$ гузошта мувофиқан $y_1=10$ ва $y_1=5$-ро ҳосил мекунем.

Ҷавоб: $(2; 10)$, $(-3; 5)$.

Акнун фарз мекунем, ки системаҳои намуди б) дода шуда бошанд. Гарчанде ёфтани ҳалли чунин системаи ду муодилаи дараҷаи дуюми дуномаълума мушкил бошад ҳам, вале дар баъзе мавридҳо онҳоро бо ёрии тарзҳои гузориш, ҷамъкунии алгебравӣ ва дигар тарзҳои сунъӣ ҳал кардан мумкин аст.

Мисоли 3. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases}x^2 - y^2 = 8,\\ 3x + y^2 = 10;\end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Муодилаҳои системаро аъзо ба аъзо ҷамъ карда муодилаи квадратии $x^2+3x-18=0$-ро ҳосил мекунем, ки решаҳояш $x_1=3$ ва $x_2=-6$ аст. Қимати $x_1=3$-ро ба муодилаи $3x+y^2=10$ гузошта $y^2=1$ ва аз он $y=\pm1$-ро ҳосил мекунем. Гузориши қимати $x_2=-6$ бошад ба муодилаи $y^2=28$ меорад, ки аз он $y=\pm2\sqrt{7}$ -ро пайдо мекунем.

Инак, система чор ҳал дорад: $(3; 1)$, $(3;-1)$, $(-6; 2\sqrt{7})$, $(-6; 2\sqrt{7})$.

М и с о л и 4. Системаи

$$\begin{cases} x^2+2y^2=3, \\ xy=1; \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Аз муодилаи дуюм дида мешавад, ки $y=\frac{1}{x}$ аст. Дар муодилаи якум ба ҷои $y$ ифодаи $\frac{1}{x}$ гузошта муодилаи биквадратии $x^4-3x^2+2=0$-ро ҳосил мекунем (ниг. ба п. 14, §5), ки ба решаҳои $x=\pm\sqrt{2}$ ва $x=\pm1$ соҳиб аст. Ин ададҳоро пай дар пай ба формулаи $y=\frac{1}{x}$ гузошта, қиматҳои мувофиқи $y$-ро дар намуди $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ва $y=\pm1$ меёбем. Ҳамин тариқ, чор ҳал доштани системаи мазкурро муқаррар кардем: $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, (1; 1), (−1; −1).

М и с о л и 5. Ҳалли системаи

$$\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ x-y=4 \end{cases}$$

-ро меёбем.

Онро бо тарзи гузориш ҳал кардан мумкин аст. Вале намуди муодилаи якуми система имконият медиҳад, ки тарзи сунъиро пеш гирем. Муодилаи якумро ба шакли $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=24$ оварда аз он дар асоси муодилаи дуюм $x+y=6$-ро хосил мекунем. Дар натиҷа системаи муодилаҳои хаттии

$$\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=4 \end{cases}$$

-и ба аввала баробарқувваро ҳосил мекунем. Ин системаи хаттиро бо тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал карда $x=5$, $y=1$-ро ҳосил мекунем.

Ҷ а в о б: (5; 1).

**?** **1.** Намудҳои системаи муодилаҳои дуномаълумаро номбар кунед. **2.** Зинаҳои тарзи гузориши ҳалро баён кунед. **3.** Боз кадом тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои дараҷаи дуюми дуномаълумаро медонед?

251. Системаи муодилаҳоро бо тарзи гузориш ҳал кунед:

а) $\begin{cases} y^2-2x=-6, \\ x-y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2-3x=45, \\ x+y=3; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=a^2-1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2+2x=33, \\ y-x=1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+y=-a, \\ xy=-2a^2; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^2-y^2=6, \\ 3y-x=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+2y=24, \\ y-2x=6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2-2y=19, \\ 4x+y=7; \end{cases}$

**252**. Тарзи гузоришро истифода бурда, системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 = 2y + 26, \\ 2y - 3x + 8 = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y \cdot (2x+1) = 8,4, \\ x + 5y = 9; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x \cdot (y-1) = 6, \\ x = 3y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \cdot (1+y) = -4, \\ x + y = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ 2y = x + 6; \end{cases}$ к) $\begin{cases} (5x - y) \cdot y = -6,25, \\ y = 5x + 2,5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y^2 + x + 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^2 = y^2 + 6, \\ 7y + 5x = 0; \end{cases}$ л) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y + 6 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7x - y = 4, \\ y + xy = 6; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2(y-x) - 14 = y, \\ y + xy = -16; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 10, \\ -x + 2 = 0. \end{cases}$

**253**. Системаи муодилаҳоро бо тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ y - x^2 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 228, \\ 3x^2 - 2y^2 = 172; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ -y^2 + x = -5. \end{cases}$

**254**. Системаи муодилаҳоро бо истифодаи тарзи ҷамъкунии алгебравӣ ҳал намоед:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x^2 - 2y^2 = 14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3xy + 4y = 0, \\ x + 3xy - 3y = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x + xy = -18, \\ y - xy = 30; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy + x = 56, \\ y - xy = -42; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + 3x - 4y = 20, \\ -x^2 + 2x - y = 5. \end{cases}$

**255**. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8,5, \\ x + y + 1 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = -8, \\ x + y^2 = 0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} (x-1)(y+10) = 9, \\ x + y = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y = 5, \\ x^2 \cdot y = 36; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y = 13; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x^2 - y^2 + x + y = -11. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y^2 = 11, \\ x \cdot y^2 = 18; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (x-2)(y+3) = 160, \\ x + y = -27; \end{cases}$

**256**. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{3} = 1, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - y = -3, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = -5\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 4y = -2, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{x} = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{2x}{y} + \dfrac{x}{2y} = 5, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

257. Системаи муодилаҳои зеринро бо тарзи графикӣ ва гузориш (ва ё ҷамъкунии алгебравӣ) ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ y=x^2-10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y-x^2-1=0, \\ x+2y=5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ (x-2)^2+y^2=36; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ 2x+y=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ y=x^2+6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy=9, \\ y=x. \end{cases}$

258. Параболаи $y=2x^2-5x+3$ ва хати рости $2x+y+9=0$-ро насохта собит кунед, ки онҳо якдигарро намебуранд.

259. Исбот кунед, ки хати рости $y-x=\frac{3}{4}$ бо параболаи $y=x^2-2x+3$ як нуқтаи умумӣ дорад ва координатаҳои онро ёбед:

260. Графикҳоро насохта нуқтаҳои буриши хатҳои зеринро ёбед.

а) давраи $x^2+y^2=25$ ва гиперболаи $xy=12$;

б) гиперболаи $xy=16$ ва хати рости $x+y=10$;

в) давраҳои $x^2+y^2=2$ ва $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

### *Машқҳо барои такрор*

261 Қимати тағйирёбандаро, ки барояш ифода маъно надорад, ёбед:

а) $\frac{7x+11}{2x}$; б) $\frac{3}{3x+5}$; в) $\frac{x}{2x-4{,}8}$; г) $\frac{x+1}{2{,}3x-2}$.

262. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y=\frac{x+2}{x\cdot(x+1)}$; б) $y=\frac{2}{2x^2+3}$; в) $y=\sqrt{x+3}$;

263. Ҳисоб кунед:

а) $\left[\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)\cdot 3\right]:0{,}2$; б) $\left(172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}\right):(0{,}8\cdot 0{,}25)$;

в) $\left(6{,}6-3\frac{3}{14}\right)5\frac{5}{6}:[(21-1{,}25):2{,}5]$

264. Содда кунед:

а) $\frac{x}{2a^2-ax}-\frac{4a}{2ax-x^2}$; б) $\frac{12-y}{6y-36}+\frac{6}{6y-y^2}$;

265. Барои кадом қиматҳои $x$:

а) сеаъзогии квадратии $2x^2-3x+1$ қимати манфӣ;

б) касри $\frac{2+x}{x-3}$ қимати мусбат қабул мекунад?

266. Хушмаҳмад дар нимаи дуюми рӯз, баъди аз нисфирӯзӣ гузаштани $2\frac{1}{6}$ соат, барои машқкунӣ ба секцияи спортӣ рафт. Ӯ соати чанд ба машқкунӣ рафтааст?

267. Масъалае тартиб диҳед, ки ба ҳалли муодилаи

$$\frac{x}{x+3}+\frac{x-1}{x-3}=\frac{9}{10}$$ оварда расонад.

**268**. Экстремум ва экстремали функсияро ёбед:

а) $y=3(x-7)^2-4$; б) $y=-2(x-5)^2+6$.

**269**. График насохта нишон диҳед, ки графики функсияи $x^2+2y^2-9y+4=0$ тири $Ox$-ро намебурад.

## 19. Системаи муодилаҳои якҷинса ва симметрӣ

А) **Системаи якҷинса**. Аввал мафҳуми функсияи якҷинсаро шарҳ медиҳем. Барои осонии кор бисёраъзогии $f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$-ро мегирем. Дараҷаи ҳар як аъзои ин бисёраъзогӣ ба ду баробар аст. Пас агар $x$ ва $y$-ро ба ягон адади $t$ зарб занем, он гоҳ $a(xt)^2+b(xt \cdot yt)+c(yt)^2=t^2 \cdot (ax^2+bxy+cy^2)$, яъне $f(xt; yt)=t^2f(x, y)$ мешавад. Функсияҳоеро, ки дорои чунин хосиятанд, **функсияҳои якҷинса** меноманд.

Масалан, $f(x, y)=x^2+\frac{2}{3}xy+5y^2$, $F(x, y)=x^2+xy+y^2$,... функсияҳои якҷинсаанд. Вале функсияҳои $f(x,y)=2x^2+3xy^2+4$, $F(x, y)=-2x^3+xy-y^2$,... якҷинса нестанд.

Таърифи 1. **Муодилаи дуномаълумаи $f(x, y)=0$-ро якҷинса меноманд, агар $f(x, y)$ бисёраъзогии якҷинсаи тартиби ду бошад.**

**Нишон медиҳем, ки муодилаи якҷинсаи**

$$ax^2+bxy+cy^2=0 \quad (1)$$

**ба муодилаи квадратӣ оварда мешавад**. Дар ҳақиқат, тарафи чапро дар шакли

$$ax^2+bxy+cy^2=y^2 \cdot \left(a \cdot \frac{x^2}{y^2}+b \cdot \frac{x}{y}+c\right), \quad y \neq 0$$

навишта

$$a \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2+b \cdot \left(\frac{x}{y}\right)+c=0 \quad (2)$$

-ро ҳосил мекунем, ки он нисбат ба $t=\frac{x}{y}$ муодилаи квадратиро ташкил медиҳад. Вобаста ба аломати дискриминанти муодила (ниг. ба п. 13) хулосаҳои гуногуни мувофиқ баровардан мумкин аст. Масалан, ҳангоми $D>0$ будан он ба ду муодилаи

$$\frac{x}{y}=A \quad \text{ва} \quad \frac{x}{y}=B$$

ҷудо мешавад.

Акнун, ба мақсади асосӣ мегузарем.

Таърифи 2. **Системаи намуди**

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2, \end{cases} \quad (3)$$

**-ро, ки қисмҳои чапашон бисёраъзогиҳои якҷинсаи тартиби дуанд, системаи якҷинса меноманд.**

Системаҳои якҷинса бо ёрии табдилот ва дохил кардани тағйирёбандаи нав ба муодилаи квадратӣ оварда мешаванд.

Мисоли 1. Системаи

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 8 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Ду тарафи муодилаи дуюмро ба 20 зарб зада аз муодилаи якум муодилаи ҳосилшударо тарҳ мекунем:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 3x^2 - 2xy \qquad\qquad = 160 \\ 20x^2 - 60xy - 40y^2 = 160 \end{array} \\ \hline -17x^2 + 58xy + 40y^2 = 0. \end{array}$$

Дар натиҷа системаи якҷинсаи

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160 \\ 17x^2 - 58xy - 40y^2 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

-ро ҳосил мекунем, ки ба системаи аввала баробарқувва аст. Муодилаи якҷинсаи $17x^2-58xy-40y^2=0$-ро дида мебароем. Агар $y=0$ бошад, он гоҳ аз худи ҳамин муодила $x=0$-ро пайдо мекунем. Аммо ҷуфти (0; 0) муодилаи якуми системаро қаноат намекунонад. Пас $y\neq0$ аст. Аз ин ҷо ҳарду қисми муодилаи $17x^2-58xy-40y^2=0$-ро ба $y^2$ тақсим карда муодилаи ба он баробарқувваи $17\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2-58\cdot\left(\frac{x}{y}\right)-40=0$-ро ҳосил мекунем. Баъди гузориши $\frac{x}{y}=t$ муодилаи квадратии $17t^2-58t-40=0$-ро ҳосил мекунем. Онро ҳал карда решаҳои $t_1=4$ ва $t_2=-\frac{10}{17}$-ро меёбем. Яъне муодилаи $17x^2-58xy-40y^2=0$ ба ду муодилаҳои $\frac{x}{y}=4$ ва $\frac{x}{y}=-\frac{10}{17}$ баробарқувва будааст. Аз ин ҷо, баробарқувваги системаи (4) ба системаҳои

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 4, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{10}{17}, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases}$$

оварда мерасонанд.

Онҳоро дар шакли

$$\begin{cases} x = 4y, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x = -\frac{10}{17}y, \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases}$$

навишта, алоҳида-алоҳида ҳал кардан мумкин аст. Дар асоси муодилаҳои якумашон муодилаҳои дуюми системаҳоро мувофиқан ба намудҳои соддаи $y^2=4$ ва $y^2=\frac{289}{4}$ овардан мумкин аст. Азбаски системаҳои

$$\begin{cases} x=\pm 8, \\ y=\pm 12 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x=\mp 5, \\ y=\pm\frac{17}{2} \end{cases}$$

ба системаи аввала баробаркувваанд, пас ҳалли система (8; 2), (−8; −2), $\left(-5;\ \frac{17}{2}\right)$ ва $\left(5; -\frac{17}{2}\right)$ мешавад.

Мисоли 2. Системаи

$$\begin{cases} 3x^2+xy-2y^2=0, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Муодилаи якуми система муодилаи якҷинса аст, чунки тарафи чапи он нисбат ба $x$, $y$ бисёраъзогии якҷинсаи тартиби ду мебошад. Ба монанди мисоли 1 дар ин ҷо ҳам $y=0$ гирифта аз муодилаи $3x^2+xy-2y^2=0$ $x=0$-ро ҳосил мекунем. Ҷуфти (0; 0) бошад муодилаи дуюми системаро қаноат намекунонад. Бинобар он ду тарафи муодилаи якҷинсаро ба $y^2$ $(y\neq 0)$ тақсим карда (ин амалиёт ба гумшавии реша намеорад)

$$3\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}-2=0$$

-ро ҳосил мекунем. Онро ҳал карда ду системаҳои

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=-1, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{2}{3}, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}$$

-ро пайдо мекунем, ки ба системаи аввала баробарқувва аст. Онҳоро ҳал менамоем:

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y, \\ 2y^2+3y^2+y^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y, \\ 6y^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y, \\ y^2=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

яъне **система ҳал надорад;**

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}y, \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}\cdot y, \\ \frac{8}{9}y^2-2y^2+y^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}y, \\ y^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2, \\ y^2=\pm 3 \end{cases}$$

яъне система ду ҳалли намуди (2; 3) ва (−2; −3)-ро дорад.

Б) **Системаи симметрӣ**. Ифодаи аз ду тағйирёбандаи $x$ ва $y$ **вобаста симметрӣ номида** мешавад, агар ивази $x$ ба $y$ ва $y$ ба $x$ қимати онро тағйир надиҳад. Масалан,

$$x^2-6xy+y^2;\quad \frac{2}{\sqrt{x+y}},\quad (x+y)+5xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad \ldots$$

ифодаҳои симметрианд.

Мувофиқан бисёраъзогии аз ду тағйирёбанда вобастаи $P(x, y)$ симметрӣ номида мешавад, агар $P(x, y)=P(y, x)$ бошад. Бисёраъзогиҳои дутағйирёбандаи симметрии $x+y$ ва $x \cdot y$ асосӣ ҳисоб мешаванд, чунки дигар бисёраъзогиҳои симметрӣ ба воситаи онҳо ифода мешаванд. Дар ҳақиқат, агар $x+y=u$ ва $x \cdot y=v$ гузорем, он гоҳ

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v;\\
&x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=u(u^2-v-2v)=u\cdot(u^2-3v);\\
&x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2=\ldots=u^4-4u^2v+2v^2;\\
&x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=\\
&=(u^2-2v)(u^3-3uv)-uv^2=u^5-5u^3v+5uv^2;\\
&x^2+xy+y^2=(x^2+2xy+y^2)-xy=(x+y)^2-xy=u^2-v;\\
&x^2-xy+y^2=(x^2+xy+y^2)-2xy=u^2-v-2v=u^2-3v.
\end{aligned}\tag{5}$$

*Системаҳое, ки ҳамаи муодилаҳояшон бисёраъзогиҳои симметрианд, системаҳои симметрӣ номида мешаванд.* Ин системаҳо бо ёрии гузориши $x+y=u$, $x \cdot y=v$ ва формулаҳои (5) ҳал карда мешаванд.

М и с о л и 3. Системаи

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91,\\ x^2-xy+y^2=7\end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Ин система симметрӣ буда, мувофиқи гузоришҳои $x+y=u$, $x \cdot y=v$ ва формулаҳои (5) ба намуди

$$\begin{cases}\left[(u^2-2v)^2-2v^2\right]+v^2=91,\\ (u^2-2v)-v=7\end{cases} \quad \text{ва ё} \quad \begin{cases}(u^2-2v)^2-v^2=91,\\ u^2-3v=7\end{cases}$$

оварда мешавад. Аз муодилаи охирин $u^2$-ро дар шакли $u^2=3v+7$ ифода карда ба муодилаи якум мегузорем ва дар натиҷа

$$\begin{cases}14v=42,\\ u^2=3v+7\end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases}v=3,\\ u=\pm 4\end{cases}$$

-ро пайдо мекунем.

Яъне система ду ҳал доштааст;

$$\begin{cases}u_1=4,\\ v_1=3;\end{cases} \quad \begin{cases}u_2=-4,\\ v_2=3.\end{cases}$$

Системаи аввала бошад, ба ду системаи зерин баробаркувва мешавад:

$$\begin{cases}x+y=4,\\ x\cdot y=3;\end{cases} \quad \begin{cases}x+y=-4,\\ x\cdot y=3.\end{cases}$$

Аз рӯи теоремаи Виет ин ду система дорои ҳалҳои (1; 3), (3; 1) ва (−1; −3), (−3; −1) мебошанд.

Ҷ а в о б: (1; 3), (3; 1) (−1; −3), (−3; −1).

М и с о л и 4. Системаи

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Маълум, ки $x\neq0$ ва $y\neq0$ аст. Инро ба ҳисоб гирифта системаро дар шакли

$$\begin{cases} x^3+y^3=12xy, \\ 3(x+y)=xy \end{cases}$$

менависем, ки он симметрӣ аст. Табдилдиҳиро давом дода системаи ба аввала баробаркувваи

$$\begin{cases} u^3-3uv=12v, \\ 3u=v \end{cases} \quad \text{ва ё} \quad \begin{cases} u\cdot(u^2-9u-36)=0, \\ v=3u \end{cases}$$

-ро хосил мекунем.

Азбаски $x\neq0$ ва $y\neq0$ аст, пас $u\neq0$ ва $v\neq0$ мешавад. Аз ин чо

$$\begin{cases} u^2-9u-36=0, \\ v=3u \end{cases}$$

мешавад, ки аз он

$$\begin{cases} u_1=12, \\ v_1=36 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} u_2=-3, \\ v_2=-9 \end{cases}$$

ҳосил мешавад. Системаҳои ба онҳо баробаркувваи

$$\begin{cases} x+y=12, \\ xy=36; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-3, \\ xy=-9. \end{cases}$$

-ро навишта ҳалҳои онҳоро меёбем. Дар айни хол ин ҳалҳо ҳалҳои системаи аввала ҳам мебошанд.

Ҷ а в о б: (6; 6), $\left(\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right)$.

**?**

1. Муодилаи якҷинса гуфта кадом муодиларо меноманд? Мисолҳо оред. 2. Намуди умумии системаҳои якҷинсаро нависед. Ин гуна системаҳоро бо кадом тарзҳо ҳал кардан мумкин аст? 3. Кадом ифодаро симметрӣ меноманд? Мисолҳо оред. 4. Чӣ гуна система симметрӣ аст? Барои ҳалли системаҳои симметрӣ аз кадом гузориш ва формулаҳо истифода мебаранд?

**270.** Кадоме аз ифодаҳои зерин якҷинсаанд:

а) $ax^2+26xy+3y^2$;  г) $5xy-y+3$;

б) $4x-3xy-y^2$;  д) $4x^4+x^3y-2x^2y^2+3y^4$;

в) $2x^3-xy^2+3y$;  е) $x^3+y^3-3x^2y+3xy^2$?

**271.** Оё муодилаҳои зерин симметрианд?

а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+2xy=0$;  в) $\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}=1$;  д) $x+\sqrt{x^2+y^2}=1+xy$;

б) $x^2+y^2+\frac{2}{xy}=3$;  г) $2(x^2+y^2)+3xy=0$;  е) $\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{x}{y}$;

**272.** Системаи муодилаҳои якҷинсаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} xy=2, \\ 9x^2+y^2=13; \end{cases}$  в) $\begin{cases} x^4-y^4=15, \\ x^3y-xy^3=6; \end{cases}$  д) $\begin{cases} 6x^2+xy-2y^2=0, \\ 3x^2-xy-2y^2=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2(x+y)=80, \\ 2x^2-3x^2y=80; \end{cases}$  г) $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2y+2xy^2+y^3=2; \end{cases}$  е) $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136, \\ x^3y+xy^3=30; \end{cases}$

**273.** Системаи муодилаҳои симметриро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ (xy+8)(x+y)=2; \end{cases}$  в) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^4+y^4=97; \end{cases}$  д) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}, \\ x+y=18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy(x+y)=20, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{4}; \end{cases}$  г) $\begin{cases} x^2+y^2=7+xy, \\ x^3+y^3=6xy-1; \end{cases}$  е) $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x^2y+xy^2=30; \end{cases}$

**274.** Системаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=36, \\ 3x^2+4xy-y^2=94; \end{cases}$  г) $\begin{cases} x^2-2xy=1,25, \\ y^2+4xy+1=0; \end{cases}$  ж) $\begin{cases} x^2y+xy^2=540, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2-4xy+2y^2=1, \\ 5x^2+8xy+3y^2=16; \end{cases}$  д) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=28, \\ x+xy+y=14; \end{cases}$  з) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=26, \\ x+y=0,75xy; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+xy=36, \\ xy+y^2=45; \end{cases}$  е) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ x-xy+y=7; \end{cases}$

## *Машқҳо барои такрор*

**275.** Касрро содда кунед: $\frac{a\cdot|a-3|}{a^2-a-6}$

**276.** Барои кадом қиматҳои $x$ ифодаҳои

а) $\sqrt{-x}$;  б) $\sqrt{x+3}$;  в) $\sqrt{(x-6)^2}$;

маъно доранд.

**277.** Қимати ифодаро ёбед:

а) $\sqrt{13^2-12^2}$;  в) $\sqrt{4,9\cdot 360}$;  д) $\sqrt{0,09}+\sqrt{0,16}$;

б) $\sqrt{313^2-312^2}$;  г) $\sqrt{160\cdot 3,6}$;  е) $\sqrt{0,01}-\sqrt{0,09}$;

**278.** Системаи муодилаҳои хаттии зеринро ҳал накарда, муайян кунед, ки кадоме аз онҳо ҳалли ягона дорад, ҳал надорад ва ё ҳалли бешумор дорад:

а) $\begin{cases} 2x+7y=16, \\ -x+y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+4y=11, \\ 2x+8y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-11y=3, \\ 4x-44y=12; \end{cases}$

**279.** Муодилаи $x^2+2y^2-24=0$ дода шудааст, $y$ аз $x$ ду маротиба хурд аст. Ҷуфти ададҳои мусбати $(x, y)$-ро ёбед, ки онҳо муодиларо қаноат менамоянд.

**280.** Барои кадом қиматҳои $x$ баробарии $\sqrt{(x-7)}^2=x-7$ ҷой дорад?

**281.** Махраҷи касри оддии дуруст аз сураташ дида як воҳид калонтар аст. Агар ба сурат 3 ва ба махраҷ 7-ро ҷамъ кунем, он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки фарқаш аз касри аввала ба $\frac{1}{6}$ баробар аст. Касрро ёбед.

**282.** Экстремуми функсияи $y=-3x^2+24x-1$-ро ёбед.

## 20. Ҳалли масъалаҳои матнӣ бо ёрии системаи муодилаҳои дараҷаи дуюм

Масъалаи 1. Периметрии секунҷаи росткунҷа ба 84 см ва гипотенузааш ба 37 см баробар аст. Масоҳати онро ёбед.

Ҳал. Фарз мекунем, ки асоси секунҷаи росткунҷа $x$ см ва баландиаш $y$ см бошад (онҳо мувофиқан катетҳоро ифода мекунанд). Аз шарти масъала бармеояд, ки периметр ба 84 см баробар аст, бинобар ҳамин, муодилаи $x+y+37=84$-ро ҳосил мекунем. Аз тарафи дигар дар асоси теоремаи Пифагор $x^2+y^2=37^2$-ро навиштан мумкин аст. Аз ин ҷо системаи

$$\begin{cases} x+y=47, \\ x^2+y^2=1369 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем, ки ҳаллаш $x=35$ ва $y=12$ аст. Пас масоҳати матлуб

$$S=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\cdot 35\cdot 12=35\cdot 6=210\text{ см}^2,\ S=210\text{ см}^2$$

мешавад.

Ҷавоб: 210 см$^2$.

Масъалаи 2. Нисбати фарқи ду адад бар суммаашон ба 3:8 ва бар ҳосили зарбашон ба 6:55 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

Ҳал. Агар ададҳоро бо $x$ ва $y$ ишорат кунем, он гоҳ дар асоси шарти масъала муодилаҳои

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{3}{8} \quad \text{ва} \quad \frac{x-y}{xy}=\frac{6}{55}$$

-ро ҳосил мекунем. Онҳоро чун системаи муодилаҳои дуномаълумаи

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{3}{8}, \\ \dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{6}{55} \end{cases}$$

дида мебароем. Ин система ба системаи

$$\begin{cases} -5x+11y=0, \\ \dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{6}{55} \end{cases}$$

баробарқувва аст. Аз муодилаи якум $y$-ро ба воситаи $x$ дар шакли $y=\frac{5}{11}x$ ифода карда, қимати ёфтаамонро ба муодилаи дуюми система мегузорем ва барои ёфтани $x$ муодилаи $\frac{6}{5x}=\frac{6}{55}$ ва аз он $x$=11-ро ҳосил мекунем. Қимати $y$-ро аз вобастагии $y=\frac{5}{11}x$ меёбем: $y$=5. Ҳамин тариқ, ададҳои матлуб 11 ва 5 будаанд.

**283.** Ҳосили зарби ду адади бутун ба 30 ва суммаашон ба 11 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

**284.** Ҳосили зарби ду адади мусбат ба 10 ва фарқашон ба 3 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

**285.** Нисбати ду адади бутун ба 3 ва фарқашон ба 8 баробар аст. Ададҳоро ёбед.

**286.** Фарқи квадратҳои ду адад ба 16 ва суммаи квадратҳояшон ба 34 баробар аст. Ададҳоро ёбед.

**287.** Агар ба адади якум адади дуюмро ду маротиба зиёд карда ҷамъ кунем, он гоҳ 10 ҳосил мешавад ва агар ба адади дуюм адади якумро ду маротиба зиёд карда ҷамъ кунем, он гоҳ 11 ҳосил мешавад. Ин ададҳоро ёбед.

**288.** Тарафҳои секунҷаи росткунҷаро ёбед, агар масоҳати он ба 6 см$^2$ ва периметраш ба 12 см баробар бошад.

**289.** Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа ба 13 см ва фарқи катетҳо ба 7 см баробар аст. Дарозии катетҳоро ёбед.

**290** Майдони замини шакли росткунҷа доштаро, ки периметраш 44 м ва масоҳаташ 120 м$^2$ аст, панҷара гирифтанд. Дарозӣ ва бари майдонро ёбед.

**291.** Дарозии тарафҳои ду квадрат бо ададҳои 5 ва 4 мутаносибанд. Агар тарафҳои ҳар яке аз квадратҳоро 2 см кам кунем, он гоҳ фарқи масоҳати квадратҳои ҳосилшуда ба 28 см$^2$ баробар мешавад. Тарафҳои квадратҳои додашударо ёбед.

**292.** Як тарафи росткунҷа нисбат ба тарафи квадрат 3 см хурд буда, тарафи дигараш 2 маротиба зиёд аст. Агар масоҳати квадрат аз масоҳати росткунҷа 8 см$^2$ зиёд бошад, масоҳати квадрат чӣ қадар аст?

**293.** Дар ҳар як тарафи росткунҷа квадрат кашида шудааст. Ҳосили ҷамъи масоҳати квадратҳо ба 82 см² ва масоҳати росткунҷа ба 20 см² баробар аст. Дарозӣ ва бари росткунҷаро ёбед.

**294.** Дарозӣ ва бари росткунҷа ба ададҳои 3 ва 2 мутаносибанд. Агар дарозӣ ва бари росткунҷаро як сантиметрӣ зиёд кунем, росткунҷае ҳосил мешавад, ки масоҳаташ назар ба масоҳати росткунҷаи аввала 26 см² зиёдтар аст. Дарозӣ, бар ва масоҳати росткунҷаи авваларо ёбед.

**295.** Масоҳати росткунҷа ба 36 см² баробар аст. Агар дарозии онро 6 см ва барашро 1 см зиёд кунем, он гоҳ росткунҷаи масоҳаташ 100 см² ҳосил мегардад. Бари росткунҷаи ҳосилшударо ёбед.

**296.** Масоҳати секунҷаи росткунҷа ба 6 см² ва гипотенузааш ба 5 см баробар аст. Дарозии катетҳоро ёбед.

**297.** Диогоналҳои параллелограмм, ки чун 2:3 нисбат доранд, ёфта шавад, агар тарафҳояш мувофиқан ба 11 см ва 23 см баробар бошанд.

**298.** Диогоналҳои параллелограмм ба 17 см ва 19 см баробар буда, тарафҳояш чун 2:3 нисбат доранд. Тарафҳоро ёбед.

**299.** Тарафҳои параллелограммро ёбед, агар фарқашон ба 4 см ва диогоналҳояш ба 12 см ва 14 см баробар бошанд.

**300.** Сайёҳ дар 2 соат 3 км роҳи мумфарш ва 6 км роҳи ноҳамворро тай кард. Ӯ дар роҳи мумфарш назар ба роҳи ноҳамвор бо суръати 2 км/соат зиёд ҳаракат мекунад. Сайёҳ роҳи ноҳамворро бо кадом суръат тай намуд?

**301.** Завод дар муддати муқарраршуда мебоист 20 дастгоҳ тайёр мекард. Аммо завод плани якрӯзаро ба як дастгоҳ зиёд иҷро карда супоришро як рӯз пештар аз мӯҳлат иҷро намуд. Завод дар як рӯз чанд дастгоҳ тайёр кардааст?

**302.** Бори массааш 30 т мебоист ба воситаи автомобил дар якчанд сафар кашонда мешуд. Аммо барои кашондани он автомобили борбардориаш аз автомобили пешниҳодшуда 2 т зиёдро фиристонданд ва аз ин рӯ миқдори сафарҳо (рафту омад) аз миқдори пешбинишуда 4–то кам шуд. Бор дар чанд сафар кашонда шуд.

**303.** Ду тракторчӣ дар як вақт ба кор сар карда кореро дар $5\frac{1}{7}$ соат ба иҷро мерасонанд. Як тракторчӣ танҳо кор карда ин корро назар ба дуюмаш 3 соат тезтар ба анҷом расониданаш мумкин аст. Агар ҳар як тракторчӣ танҳо кор кунад, ин корро дар чанд соат ба анҷом мерасонанд?

**304.** Ду бригадаи чинакчиён якҷоя кор карда, пахтаи майдонеро дар 18 соату 45 дақиқа мегундоранд. Агар як бригада ҳосили майдонро нисбат ба дигараш 20 соат зудтар ғундорад, он гоҳ бригадаҳо алоҳида–алоҳида кор карда, пахтаи майдонро дар муддати чанд вақт чида метавонанд?

**305.** Ду ҷисм аз қуллаи кунҷи рост дар як вақт ба тарафҳои он ҳаракат кард. Баъди 10 сонияи ҳаракат масофаи байни онҳо ба $\sqrt{34}$ см баробар шуд. Ҷисми якум дар 3 сония ҳамон қадар масофаро тай кард, ки онро ҷисми дуюм дар 5 сония тай мекунад. Ҳар як ҷисм бо кадом суръат ҳаракат кардааст?

**306.** Ду пиёдагард дар як вақт аз пунктҳои $A$ ва $B$, ки масофаи байнашон 32 км аст, ба пешвози якдигар ба роҳ баромаданд. Баъди 2 соат барои дучор шудан боз 6 км роҳ гаштан лозим шуд. Агар пиёдагарди якум аз $A$ $\frac{8}{21}$ соат пештар ба роҳ мебаромад, онҳо дар нисфи роҳ дучор мешуданд. Суръати ҳаракати ҳар як пиёдагардро ёбед?

### *Машқҳо барои такрор*

**307.** Ифодаро содда кунед:

а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;  б) $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

**308.** Кадоме аз ададҳои зерин ирратсионалианд:

$-2$; $1$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{16}$; $-1{,}5$; $\sqrt{17}$; $0{,}7\cdot\sqrt{225}$?

**309.** Ҳисоб кунед:

а) $\frac{39^2-38^2}{11}\cdot\frac{1}{7}$;  б) $\left|\frac{54\left(\sqrt{3}-1\right)}{2+\sqrt{5}}\cdot\frac{9+4\sqrt{5}}{4-2\sqrt{3}}\right|:\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}-\frac{2}{3}$.

**310.** Ҷадвалро пур кунед

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{1}{2}x^2$ | | | | | | | | |
| $y=-x^2$ | | | | | | | | |
| $y=1+4x^2$ | | | | | | | | |

**311.** Сумма ва фарқи рақамҳои адади дурақама мувофиқан ба 5 ва 1 баробар аст. Ададро ёбед.

**312.** Дарозии яке аз тарафҳои росткунҷа назар ба дигараш 5 см зиёдтар аст. Агар масоҳаташ 104 см$^2$ бошад, тарафҳои онро ёбед.

**313.** Мошини сабукрав 100 км роҳи мумфарш ва 135 км роҳи сангфаршро тай намуд. Дар роҳи сангфарш ронанда суръатро 5 км/соат кам кард. Суръати аввалаи мошинро ёбед, агар маълум бошад, ки тамоми роҳ дар муддати 5 соат тай карда шудааст.

**314.** Системаи якҷинсаи

$$\begin{cases} x^2+3xy+y^2=5 \\ x^2-2xy=-1 \end{cases}$$

-ро ҳал кунед.

## МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

А) **Оиди муодилаҳо**. То Р. Декарт муодилаи дараҷаи як дар шакли $ax=b$ навишта мешуд. Дар давраи фаъолияташ бошад муодилаи номбурда намуди умумии $ax+b=0$-ро гирифта буд. Дар шакли канոникии $f(x)=0$ (яъне бо тарафи рости ба нул баробар) навишта истода, Декарт аввалин шуда муодилаи алгебравиро чун вобастагии байни $x$ ва $y$, ки маҷкеи нуқтаҳоро дар ҳамвории координатавӣ ифода мекунад, дида мебароянд. (Ин намуди навишт баъзан дар корҳои Т. Гариотта ва тасодуфан дар корҳои Штифел вомехӯранд).

Намудҳои ҷузъии муодилаҳои квадратиро ҳанӯз чор ҳазор сол пеш вавилониҳо ҳал мекарданд. Оиди таърихи тараққиёти минбаъдаи ҳалли муодилаҳои тартиби ду хонанда маълумоти заруриро аз китоби дарсии синфи 8 ёфта метавонад.

Тарзҳои ҳалли муодилаҳои дараҷаи аз ду боло бошад (аниқтараш сеюм) ба юнониҳо ва арабҳо маълум набуд.

Дар рисолаҳои алгебравии онҳо бештар муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дараҷаи якуму дуюм вомехӯранд. Алалхусус дар байни он тадқиқотҳо ҳалли муодилаҳои кубии намуди ҷузъӣ дошта диққатҷалбкунандаанд. Бояд қайд намуд, ки тарзи ҳаллашон ба ёфтани қиматҳои тақрибии решаҳо оварда расонида шудаанд.

Шоир, файласуф ва риёзидони форсу тоҷик Умари Хайём (1048–1131) дар асараш «Рисола фи-л-бароҳин ало масоил-илҷабр ва-л муқобала» ҳалли муодилаҳои тартиби як, ду, се ва баъзе намудҳои махсусро овардааст. Муодилаҳои тартиби як, ду ва серо Хайём ба се гурӯҳ ҷудо карда бо тарзи геометрӣ ҳал мекунад. Дар поён классификатсияи Хайёмро, ки фақат муодилаҳои тартиби серо дарбар мегирад, меоварем: 1) намудҳои оддӣ ($x^3=a$, $x^3=cx^2$, $x^3=bx$); 2) намудҳои мураккаб ($x^3+cx^2=bx$, $x^3+bx=cx^2$, $x^3=cx^2+bx$, $x^3+bx=a$, $x^3+a=bx$, $x^3=bx+a$, $x^3+cx^2=a$, $x^3+a=cx^2$, $x^3=cx^3+a$), 3) намудҳои чораъзогиро дарбаргиранда ($x^3+cx^2+bx=a$, $x^3+cx^2+a=bx$, $x^3+bx+a=cx^2$, $x^3=cx^2+bx+a$, $x^3+cx^2=bx+a$, $x^3+bx=cx^2+a$, $x^3+a=cx^2+bx$).

Ногуфта намонад, ки муодилаи намудаш умумии дараҷаи сеюми $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq0)$ бо ёрии ивази як тағйирёбанда ба тағйирёбандаи нави дигар ба муодилаи намуди $x^3+px=q$ оварда мешавад. Дар тадқиқу ҳалли муодилаи охирин як қатор риёзидонони итолиёвӣ ба монанди С.Д.Ферро (1465–1526), Н. Тартал (1499–1557), Д. Кардано (1501–1576), Л. Феррари (1522–1565) ва Р. Бомбелли (1530–1572) ҳиссаи арзанда гузоштаанд.

Аз он ҷумла Сципион Дал Ферро ба ҷустуҷӯи формулаи решаҳои мусбати муодилаи дар боло номбаршудаи $x^3+px+q=0$, ки $p>0$ ва $q>0$ аст, машғул шуда буд. Ин тадқиқоти худро махфӣ нигоҳ дошта, фақат дар охири ҳаёташ ба шогирдонаш хабар дод. Ҳамватани дигари Ферро Н. Тартал бошад, дар як вақт ба масъалаи ҳалли муодилаҳои тартиби сеюм машғул гашта, тарзҳои ҳалли муодилаҳои $x^3+px=q$; $x^3=px+q$, $x^3+q=px$ ва баъзе ҳолатҳои ҷузъии муодилаи $x^3+px+q=0$ ($p$, $q>0$)-ро ёфт. Д. Кардано, ки аз соли 1539 ба ҳалли муодилаҳои кубӣ машғул буд, аз кашфиёти Тартал бохабар шуда, дар китоби «Санъати бузург ё дар бораи қоидаҳои алгебра»-и соли 1545 навиштааш, дар баробари масъалаҳои дигари алгебра тарзҳои умумии ҳалли муодилаҳои кубиро баён кард. Инчунин, дар китоб Кардано усули ҳалли муодилаи тартиби чоруми шогирдаш Феррари кашфкардаро ҷой дод.

Ба Тартал ё ба Кардано тааллуқ доштани кашфи формулаи решаҳои муодилаи кубӣ то ҳол маълум нест, аммо ҳаминаш аниқ, ки ҳар дуяшон ҳам муодилаҳои кубиро пурра тадқиқ ва ҳал накардаанд. Дар тадқику ҳалли пурраи масъалаи болоӣ хизмати Р. Бомбеллӣ бузург аст.

Ҷамшед ибни Масъуд ибни Маҳмуд Ғиёсиддин Кошонӣ, ки бо тахаллуси «Ал–Кошӣ» дар илм маълум аст (донишманди бузурги асри XV), ғайр аз муодилаҳои дараҷаи як ва ду боз муодилаҳои дараҷаи сеюм ва чорумро дида баромада аст. Танҳо худаш 70 намуди ин гуна муодилаҳоро бо ҳар гуна роҳҳои сунъӣ ҳал намудааст.

Ф. Виет (1540–1603) дар асоси аломатҳои (рамзҳои) алгебравии такмилдодааш масъалаҳоеро дида баромада аст, ки ба ҳалли муодилаҳои дараҷаи сеюму чорум вобастаанд. Дар формулаҳои решаҳои муодилаҳои дараҷаҳои сеюму чорум аломати радикал, аниқтараш решаҳои дараҷаи 2-юм, 3-юм ва 4-ум мавҷуд аст.

Ниҳоят қайд мекунем, ки риёзидонон баъди аниқ кардани формулаҳои ҳалли муодилаҳои дараҷаи се ва чор дар муддати қариб 300 сол фаъолияташонро ба ҷустуҷӯи ҳалли муодилаҳои дараҷааш дилхоҳи аз 4 боло равона сохтанд, вале ба ягон натиҷаи назаррасе соҳиб нашуданд. Фақат дар солҳои 20-уми асри XIX риёзидони норвегӣ Н. Абел (1802–1829) дар ин соҳа кашфиёте намуд. Ӯ исбот намуд, ки решаҳои муодилаи дараҷаи аз 5 калон ё ба он баробар бо радикалҳо ифода карда намешаванд.

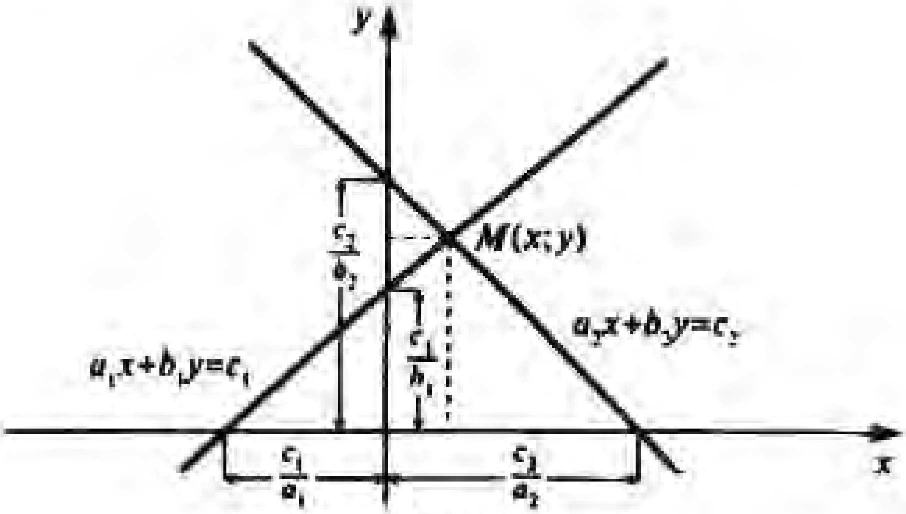
Б) **Онди системаи муодилаҳо.** Маълум, ки системаи ду муодилаи хаттии дуномаълумаро бо роҳи истисноии номаълумҳо ҳал мекарданд. Дар асрҳои XVII-XVIII роҳҳои истисноии номаълумҳоро Ферма, Нютон, Лейбнитс, Эйлер, Безу, Лагранж ва дигарон кор карда баромадаанд. Дар навишти ҳозиразамон системаҳои дар боло номбурда намуди умумии

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

-ро доранд. Ҳалли системаи (1) бо формулаҳои

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad (2)$$

ифода карда мешавад. Индексҳои дар поёни ҳарфҳо ҷойгиршударо



Расми 65

аввалин шуда риёзидон ва файласуфи немис Готфрид Вилгелм Лейбнитс дохил кардааст, ки ин пешниҳодот дар эҷодшавии назарияи муайянкунандаҳо таъсири худро бештар расонидааст.

Дар асоси методи координатаҳо*, ки дар асри XVII Декарт кашф карда буд, ҳалли геометрии системаи муодилаҳои хаттии (1) амалӣ гардид. Методи графикии ҳалли система аз сохтани абсиссаи $x$ ва ординатаи $y$-и нуқтаи буриши ду хати рост иборат мебошад. (Расми 65.)

Акнун ба таърихи пайдоиш ва ҳалли системаҳои ғайрихаттӣ назар мекунем. Дар дастхатҳои вавилониҳои қадими асрҳои III–II пеш аз эраи мо масъалаҳои зиёде ёфт шудаанд, ки бо ёрии тартибдиҳии системаи муодилаҳои тартиби дуюм дарбаргиранда, ҳалли худро ёфтаанд. Ба сифати мисол яке аз масъалаҳои ин дастхатро мегирем: «Масоҳати ду квадрати худро ман ҷамъ кардам: $25\frac{5}{12}$. Тарафи квадрати дуюм ба $\frac{2}{3}$ ҳиссаи квадрати якум ва боз 5 баробар аст». Системаи ба ин матн мувофиқоянда дар навишти ҳозиразамон намуди

$$\begin{cases} x^2+y^2=25\frac{5}{12}, \\ y=\frac{2}{3}x+5 \end{cases} \qquad (3)$$

-ро дорад. Муаллифи масъала $y$-ро дар муодилаи дуюми системаи (3) ба квадрат бардошта дар асоси формулаи квадрати сумма (ин формула ба ӯ маълум будааст) ҳосил мекунад.

$$y^2=\frac{4}{9}x^2+\frac{20}{3}x+25$$

* Новобаста аз Декарт ва қариб дар як вақт, ин методро риёзидони дигари франсавӣ Пер Ферма кашф намудааст. Вале ин кашфиёти ӯ баъди 14 соли вафоти муаллиф (яъне с. 1679) ба чоп расид.

Қимати ёфтаашро ба муодилаи якуми система гузошта ба муодилаи квадратии

$$1\frac{4}{9}x^2+6\frac{2}{3}x=\frac{5}{12}$$

меояд. Аз рӯи қоидаҳои ба имрӯза монанд ин муодиларо ҳал карда муаллиф аввал $x$ ва баъд $y$-ро меёбад. Гарчанде вавилониҳо рамзҳои алгебравӣ надошта бошанд ҳам, масъалаҳоро бо методҳои алгебравӣ ҳал мекарданд.

Диофант бисёр номаълумҳоро бо рамзҳо ишорат накарда бошад ҳам, аммо номаълумро тавре интихоб мекард, ки ҳалли система ба ёфтани ҳалли як муодила табдил меёфт. Масъалаи зеринро аз «Арифметика»-и ӯ мегирем: Ду ададеро ёбед, ки суммаашон ба 20 ва суммаи квадраташон ба 208 баробар бошад». Ҳалли ин масъаларо мо одатан аз тартиб додани системаи

$$\begin{cases} x+y=20, \\ x^2+y^2=208 \end{cases}$$

сар мекардем.

Диофант бошад, ба сифати номаълум ними фарқи ададҳои матлубро гирифта (дар ишоратҳои ҳозира) ҳосил мекунад:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-y)=z \\ \frac{1}{2}(x+y)=10. \end{cases}$$

Ин муодилаҳоро ҷамъ ва тарҳ карда (ҳамаи ин амалиётҳоро ӯ даҳонакӣ иҷро менамояд) пайдо мекунад:

$$x=z+10, \qquad y=10-z$$

Аз ин ҷо $x^2+y^2=(z+10)^2+(10-z)^2=2z^2+200$ ва баъди гузориш ба муодилаи дуюм $2z^2+200=208$-ро ҳосил мекунад. Аз муодилаи охирин бо осонӣ $z=2$, $x=2+10=12$; $y=10-2=8$-ро меёбад.

Ҳалли системаи муодилаҳо диққати Алоуддини Кушчӣ (1402–1474) ва Баҳоуддини Омулиро (1546–1622) ба худ ҷалб кардааст. Баҳоуддин дар охири китоби худ «Хулосат-*ул*-ҳисоб» ҳафт масъалаеро пешниҳод мекунад, ки барои исботи вуҷуд доштан ва надоштани ҳалли онҳо мафҳуми васеи назарияи ададҳо зарур буд. Ба ибораи Баҳоуддин барои ёфтани ҳалли масъала бисёр олимон машғул буданд, аммо натиҷа набахшид.

Ба сифати мисол масъалаи ҳафтумашро мегирем*. «Ба квадрати адад решааш ва адади ду ҷамъ карда шавад, то ки маҷмӯъ квадрат ҳосил гардад. Аз он квадрат решааш ва адади ду кам карда шавад, боз квадрат ҳосил гардад». Ин масъала ҳалли системаи

* Хонанда шаш масъалаи аввалашро аз саҳифаи 123–126-и китоби Г. Собиров «Инкишофи математика дар Осиёи Миёна (асрҳои XV–XVII)», Душанбе, Ирфон, 1966, ёфта метавонад.

$$\begin{cases} x^2+x+2=y^2, \\ x^2-x-2=z^2. \end{cases}$$

-ро талаб мекунад

Неселман ин масъаларо нодуруст тарҷума намуда, системаи зеринро тартиб медиҳад:

$$\begin{cases} x^2+x+2=y^2, \\ x^2+x-2=z^2. \end{cases}$$

Барои ин система Неселман ҳалли

$$x=\frac{34}{15},\quad y=\frac{46}{15}\quad \text{ва}\quad z=\frac{14}{15}$$

-ро нишон медиҳад, ки он аслан системаи Омулиро қаноат менамояд.

Дар поён баъзе мисолу масъалаҳоеро меорем, ки риёзидонони гузаштаамон машғули ҳаллашон буданд:

**1.** Аз «Арифметика»-и Диофант:

а) $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2-y^2=80; \end{cases}$
(ҷавоб: $x=12$, $y=8$)

б) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+y^2=5(x+y); \end{cases}$
(ҷавоб: $x=6$, $y=2$)

в) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+y^2=10(x-y); \end{cases}$
(ҷавоб: $x=6$; $y=2$)

г) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2-y^2=12(x-y); \end{cases}$
(ҷавоб: (0; 0), (9; 3))

д) $\begin{cases} x=3y, \\ y^2=6x; \end{cases}$
(ҷавоб: (54; 18))

е) $\begin{cases} x=3y, \\ y^2=6(x-y); \end{cases}$
(ҷавоб: (36; 12)

ж) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=(x-y)+20. \end{cases}$
(ҷавоб: $6\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$)

**2.** Аз «Алҷабр ва-л-муқобала»-и Муҳаммади Хоразмӣ:

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=21; \end{cases}$
(ҷавоб: (7; 3))

б) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2-y^2=40; \end{cases}$
(ҷавоб: (7; 3))

в) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=(x-y)+54; \end{cases}$
(ҷавоб: (7; 3))

г) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=4xy; \end{cases}$
(ҷавоб: (8; 2))

д) $\begin{cases} x+y=10, \\ (x+y)^2=2\frac{7}{9}x^2; \end{cases}$
(ҷавоб: (6; 4))

е) $\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=2\frac{1}{6}; \end{cases}$
(ҷавоб: (6; 4))

ж) $\begin{cases} x+y=10, \\ y^2=81x; \end{cases}$
(ҷавоб: (1; 9))

з) $\begin{cases} x+y=10, \\ x:(y-x)=\frac{3}{4}. \end{cases}$
(ҷавоб: (3; 7))

**3.** Аз «Китоби абак»-и Л. Фибоначи (Пизанский):

а) $\begin{cases} xy - y = 42, \\ x - y = 2; \end{cases}$

(ҷавоб: (8; 6), (−5;−7))

б) $\begin{cases} xy + y = 40, \\ x - y = 2; \end{cases}$

(ҷавоб: (7; 5) (−6;−8))

в) $\begin{cases} \left(\frac{x}{y}+10\right)\left(\frac{y}{x}+10\right) = 122\frac{2}{3}, \\ x + y = 10; \end{cases}$

(ҷавоб: (6; 4))

г) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{x}{y}(x - y) = 24; \end{cases}$

(ҷавоб: (8; 2))

**4.** Аз китоби «Косс»-и Рудолф:

а) $\begin{cases} (y + x)(x^2+y^2) = 539200, \\ (x - y)(x^2-y^2) = 78400; \end{cases}$

(ҷавоб: (64; 36) (36;64))

б) $\begin{cases} xy + x + y = 573, \\ x^2+y^2-x-y = 1716; \end{cases}$

(ҷавоб: (40; 13))

**5.** Аз «Арифметикаи умумӣ»-и Нютон:

а) «Тарафҳои $AB=a$, $AC=b$ ба асоси $BC=c$-и секунҷаи $ABC$ дода шудааст. Аз қуллаи кунҷи $A$ ба асос баландии $AD$ фуроварда шудааст. Дарозии порчаҳои $BD$ ва $DC$-и асосро ёбед». (Ҷавоб: $BD = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$, $DC=c-BD$).

б) «Периметр ва масоҳати секунҷаи росткунҷа дода шудааст. Гипотенузаи $BC$-ро ёбед». (Ҷавоб: $BC = a - \frac{b^2}{a}$, $a$ −нимпериметр ва $b^2$ - масоҳат.

## *Машқҳои иловагӣ ба боби II*

### *Ба параграфи 5*

**315.** Муодиларо ҳал кунед:

а) $2x^6-8x^4=0$;

б) $0{,}1x^5-0{,}0001x^2=0$;

в) $x^4=x^2$;

г) $x^4-625=0$;

д) $x^6-64=0$;

е) $x^3+x-2=0$;

ж) $4x^3-3x-1=0$;

з) $(x-1)(x-2)+3(x-2)^2=0$;

**316.** Муодиларо ҳал кунед:

а) $x^5-6x^4+7x^3+18x^2-44x+24=0$;

б) $2x^5+3x^4-10x^3-15x^2+8x+12=0$;

в) $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$;

г) $x^5-4x^4+4x^3-x^2+4x-4=0$;

**317.** Решаи муодиларо ёбед:

а) $ax^2+ax-a-bx-bx^2+b=0$;

б) $bx-cx+ax-cx^2+bx^2+ax^2=0$;

в) $8bx^2-2a(1-2b)x-a^2=0$;

г) $4x^2-12bx-4a^2+9b^2=0$;

**318.** Касрро ихтисор кунед:

а) $\frac{15x^2-8bx+b^2}{12x^2-bx-b^2}$;

б) $\frac{12a^2-a-1}{3a^2+5a-2}$;

в) $\frac{a^2+6a-91}{a^2+8a-105}$;

г) $\frac{8x^2+32x-360}{6x^2-72x+210}$;

д) $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+4}$;

е) $\frac{b^3-3b^2+2b}{2b^2-7b+5}$;

**319.** Барои кадом қимати $p$ муодилаи зерин ду реша дорад:

а) $3x^2+px-9=0$; б) $2x^2-x+p=0$?

**320.** Барои кадом қимати $q$ муодила реша надорад:

а) $5x^2-4x+q=0$; б) $6x^2-qx+2=0$?

**321.** Ҳамон қиматҳои $m$-ро ёбед, ки барояшон муодила решаи ягона дорад:

а) $8x^2-4mx+5=0$; б) $7mx^2-x-6=0$;

**322.** Муодилаи $x^3=4x$-ро бо ду тарз: графикӣ ва ба зарбкунандаҳо ҷудокунӣ ҳал намоед.

**323.** Бо тарзи гузориш муодиларо ҳал кунед:

а) $(x^2+3)^2-4(x^2+3)+3=0$;
б) $(x^2+2x-3)(x^2+2x-4)-20=0$;
в) $(x^2+3x)(x^2+3x-1)=12$;
г) $(x^2+5x+8)^2-6(x^2+5x+8)+8=0$;
д) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-27\left(x+\frac{1}{x}\right)+50=0$;
е) $(x^2-x-1)(x^2-x+1)=3$;
ж) $(x^2-4x+4)^2-5(x^2-4x+4)+4=0$;
з) $(x^2-6x+9)^2-10(x^2-6x+9)+9=0$;
и) $4(x^2-10x+25)-5(x^2-10x+25)+1=0$;
к) $(5x^2-4)^2+6(5x^2-4)-7=0$;
л) $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$;
м) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$;

**324.** Яке аз касрҳои ба ҳам чаппаро бо $t$ ва дигарашро бо $\frac{1}{t}$ ишорат намуда, муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2,9$; б) $\frac{x^3-x^2}{1}-\frac{8}{x^3-x^2}=2$;

**325.** Боварӣ ҳосил намоед, ки муодилаи зерин реша надорад:

а) $7x^4+19x^2+91=0$; б) $3x^6+21x^4+71x^2+2=0$.

Оё муодиларо ҳал накарда ба ин хулоса омадан мумкин аст?

**326.** Муодилаи биквадратиро ҳал кунед:

а) $3x^4-13x^2+10=0$;
б) $9x^4-x^2-8=0$;
в) $7x^4-2x^2-104=0$;
г) $x^4-5x^2+4=0$;
д) $x^4-13x^2+36=0$;
е) $x^4-25x^2+144=0$;
ж) $x^4-41x^2+400=0$;
з) $4x^4-5x^2+1=0$;
и) $9x^4-10x^2+1=0$;
к) $100x^4-13x^2+0,36=0$;
л) $3x^4-75x^2+432=0$;
м) $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$;
н) $16x^4-4(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$;
о) $x^4+x^2+1=0$;
п) $x^4+x^2-1=0$;
р) $x^4-6x^2+9=0$;

**327.** Барои кадом қиматҳои $a$ муодилаи $2x^4-12x^2+a=0$

а) чор реша дорад; б) ду реша дорад; в) реша надорад?

## *Ба параграфи 6*

**328.** Оё ҷуфти қиматҳои

а) $x=1, y=3$; б) $x=0, y=0$; в) $x=-2, y=2$; г) $x=-1, y=-3$;

ҳалли муодилаи дуномаълумаи $x^2-y=4$ шуда метавонад?

**329.** Нишон диҳед, ки муодилаи:

а) $(x+5)^2+(y-3)^2=-9$ ҳал надорад;

б) $(x-7)^2+(y+3)^2=0$ ҳалли ягона дорад.

**330.** Графики муодилаи дуномаълумаро созед:

а) $3x+4y-12=0$; в) $x^2-y+1=0$; д) $x^2+(y-2)^2=9$;

б) $-2x+3y+6=0$; г) $(x-1)^2+y^2=2\frac{1}{4}$; е) $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{9}{4}$

**331.** Аз рӯи муодилаи давраи додашуда координатаҳои марказ ва дарозии радиусро ёбед:

а) $x^2+y^2-20=0$; в) $x^2+y^2-x-y=15,5$;

б) $x^2+y^2-2x-10=0$; г) $x^2+y^2-2x+2y-23=0$;

**332.** Системаи муодилаҳоро бо тарзи графикӣ ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x-3y=-4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x^2+(y-1)^2=16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=9, \\ y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y-1=0; \end{cases}$

**333.** Графикҳоро насохта координатаҳои нуқтаҳои буриши хатҳои зеринро ёбед:

а) параболаи $y=2x^2-5x+4$ ва хати рости $7x-y-6=0$;

б) параболаи $y=4x^2-x+1,5$ ва хати рости $y=4,5$;

в) давраи $x^2+y^2=68$ ва хати рости $3x+y=14$;

г) давраи $x^2+y^2=4$ ва параболаи $x-2y^2=-3$;.

д) гиперболаи $xy=2$ ва параболаи $2x^2+7x-2y=5$.

**334.** Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x^2+xy=9+3y, \\ 3x+2y=-1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x^2+y^2+3x+y=33, \\ x^2-y^2+2x-y=9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+2y=4, \\ x^2+xy=y-5; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2(x+y)^2-3(x+y)=35, \\ xy-(x+y)=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2y^2+2xy=80, \\ x-y=2; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^2-xy=3, \\ xy+y^2=2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=5, \\ 2x+y=3; \end{cases}$ к) $\begin{cases} (x+y)^2+2(x+y)=99, \\ (x-y)^2-(x-y)=2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x^2-4y^2=-1, \\ x+y=2; \end{cases}$ л) $\begin{cases} x^2-3xy+9y^2=67, \\ x^2+3xy+9y^2=103; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy+4x-3y=5, \\ x+y=3; \end{cases}$ м) $\begin{cases} x^2+xy=36, \\ xy+y^2=45; \end{cases}$

**335.** Бо истифодаи формулаҳои (5)-и п. 19 системаҳои симметрии зеринро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{2}xy, \\ x^3+y^3=8\dfrac{1}{8}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=30, \\ x^2+y^2+xy=27; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=133, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=6, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=21, \\ x+y+xy=9; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18\dfrac{2}{3}, \\ x+y=8; \end{cases}$

**336.** Агар сеаъзогии квадратии $ax^2-3x+2b$ ба сеаъзогии квадратии $x^2+2ax-3$ зарб карда шавад, бисёраъзогии дараҷаи чорум ҳосил мешавад, ки дар он коэффитсиентҳои назди $x^3$ ва $x^2$ мувофиқан ба 5 ва 10 баробаранд, $a$ ва $b$-ро ёфта бисёраъзогии ҳосилшударо дар шакли стандартӣ нависед.

**337.** Суммаи ду адад ба 20 ва ҳосили зарбашон ба 75 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

**338.** Периметри росткунҷа ба 24 м баробар аст. Агар яке аз тарафҳои онро 2 м кам ва дигарашро 3 м зиёд кунем, он гоҳ масоҳаташ 2 маротиба зиёд мешавад. Тарафҳои росткунҷаро ёбед.

**339.** Масоҳати росткунҷа ба 12 м$^2$ баробар аст. Агар дарозиашро 1 м кам карда барашро бетағйир гузорем, он гоҳ квадрат ҳосил мешавад. Дарозии росткунҷаро ёбед.

**340.** Дарозии тарафҳои ду квадрат бо ададҳои 5 ва 4 мутаносибанд. Агар тарафҳои ҳар як квадратҳоро ба 3 см кам кунем, он гоҳ фарқи масоҳати квадратҳои ҳосилшуда ба 24 см$^2$ баробар мешавад. Тарафҳои квадратҳои додашударо ёбед?

**341.** Агар сурати касри оддиро ба квадрат бардорем ва махраҷашро ба 9 воҳид зиёд кунем, он гоҳ касри ба $\dfrac{1}{4}$ баробар ҳосил мешавад. Агар сураташро ба 5 воҳид зиёд карда, махраҷашро бетағйир гузорем, он гоҳ адади 1-ро ҳосил мекунем. Касрро ёбед.

**342.** Адади дурақамаеро ёбед, ки суммаи рақамҳояш ба 3 ва ба шашчанди ҳосили зарби рақамҳояш баробар бошад.

**343.** Ҷамъи рақамҳои адади дурақама ба 8 ва зарбашон ба 15 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

**344.** Квадрати касри дурусти оддӣ дар сумма бо чорчандаш ба $\dfrac{57}{16}$ баробар аст. Агар суммаи сурат ва махраҷашро ба 5 воҳид зиёд кунем он ба ҳосили зарби сурат ва махраҷаш баробар мешавад. Касрро ёбед.

**345.** Аз ду шаҳре, ки масофаи байнашон 360 км аст, дар як вақт ду мошин ба пешвози якдигар ба сафар баромаданд ва баъди 4 соат ба якдигар дучор шуданд. Яке аз мошинҳо назар ба дигараш дар ҳамаи роҳ 1 соату 48 дақиқа зиёдтар вақт сарф мекунад. Суръати ҳар як мошинро ёбед.

**346.** Ду қатора аз стансияҳои $A$ ва $B$, ки масофаи байнашон 600 км аст, дар як вақт ба пешвози якдигар ба роҳ баромаданд. Қатораи якум ба стансияи $B$ назар ба қатораи дуюм ба стансияи $A$ 3 соат пештар омада расид. Инчунин маълум аст, ки ҳангоми 250 км-ро тай кардани қатораи якум қатораи дуюм 200 км роҳро мепаймояд. Суръати ҳаракати қатораҳоро ёбед.

**347.** Аз ду пункт, ки масофаи байнашон 650 км аст, ду велосипедрон ба пешвози якдигар баромаданд. Агар ҳар дуи онҳо ҳаракатро дар як вақт сар кунанд, он гоҳ вохӯрӣ баъди 10 соат ва ҳангоми 4 соату 20 дақиқа пештар ба роҳ баромадани велосипедрони дуюм вохӯрӣ баъди 8 соат ба амал меояд. Суръати ҳаракати ҳар як велосипедронро ёбед.

**348.** Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа ба $\sqrt{181}$ см ва масоҳаташ ба 45 $см^2$ баробар аст. Дарозии катетҳои секунҷаи росткунҷаро ёбед.

**349.** Периметри росткунҷа ба 14 м ва масоҳаташ ба 12 $м^2$ баробар аст. Дарозӣ ва бари росткунҷаро ёбед.

**350.** Адади дурақама аз чорчанди суммаи рақамҳояш 3 воҳид зиёд аст; агар ба ин адад 18-ро илова кунем, он гоҳ ададе ҳосил мешавад, ки он 18 воҳид аз адади рақамҳояш нисбати адади аввала чаппа ҷойгир буда, хурд аст. Ин ададро ёбед.

**351.** Агар ба сурати каср 2-ро ҷамъ кунем, он гоҳ воҳид ҳосил мешавад; агар ба махраҷ 3-ро илова кунем, он гоҳ каср ба $\frac{1}{2}$ баробар мешавад. Ин касрро ёбед.

***352.** Агар талаба ду адади дурақамаи дар тахтаи синф навишташударо дуруст зарб мекард, он гоҳ ӯ 2250 ҳосил мекард. Вале ӯ ҳангоми рӯйбардоркунии шарти мисол дар яке аз ададҳо ба ҷои рақами охиринаш 5 рақами 6-ро навишт ва дар натиҷаи зарб 2300-ро ҳосил намуд. Талаба бояд кадом ададҳоро зарб менамуд?

**353.** Ду гурӯҳи сайёҳони ҷавон аз маҳалҳои $A$ ва $B$, ки масофаи байнашон 30 км аст, ба пешвози ҳамдигар ба роҳ баромаданд. Агар гурӯҳи якум нисбат ба гурӯҳи дуюм 2 соат пештар ба роҳ бароянд, он гоҳ онҳо баъд аз 2,5 соати ба роҳ баромадани гурӯҳи дуюм вомехӯранд. Агар гурӯҳи дуюм нисбат ба гурӯҳи якум 2 соат пештар ба роҳ бароянд, он гоҳ вохӯрӣ баъд аз 3 соати ба роҳ баромадани гурӯҳи якум ба амал меояд. Гурӯҳҳо бо кадом суръат ҳаракат мекунанд?

354. Дар адади дурақамаи мусбат рақами даҳиҳо аз рақами воҳидҳо ду маротиба калон аст. Ин ададро ёбед, агар ҳосили зарби ӯ ба суммаи рақамҳояш ба 252 баробар бошад.

355. Масъалаи зеринро аз «Дастнависҳои Бахшамийск» ҳал кунед: «Ададеро ёбед, ки аз иловакунӣ ба 5 воҳид ва камкунӣ ба 11 воҳид квадрати пурраро ташкил намояд».

## ҶАВОБҲО

**160**. а) Ҳа; б) не; в) ҳа; г) не; д) не; е) ҳа. **161**. а), б), в), д), е), з) – муодилаҳои бутун. **162**. а) 11; б) 9; в) 6; г) 1; д) 3; е) 2; ж) 3; з) 1; и) 2; к) 4; л) 2; м) 4; н) 2; о) 2; п) 5; р) 4. **163**. а) 0,376; б) 614; в) 4,82; г) $\frac{95}{216}$; д) $6\frac{1}{4}$. **164**. Баъди кушодани қавсҳо $5{,}5m-0{,}5n$-ро ҳосил мекунем, ки қиматаш барои $m$ ва $n$-и додашуда ба $-9$ баробар аст. **166**. 60 км. **167**. $S=2a^2$, $P=6a$, $a$ - яке аз тарафҳои росткунҷа. **168**. а), в) - ҷуфт, б) - ток. **169**. $\forall x \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup (3;+\infty)$. **170**. 6 км/соат. **171**. а) $x=-1{,}5$; б) $x=8$; в) $y=0$; г) $y=2$; д) $x_1=1$, $x_2=7$; е) $x_{1,2}=a\pm b$; ж) $x_1=a-1, x_2=a-2$; з) $x_1=1$, $x_2=-\frac{a^2+a+1}{a}$. **172**. а) $x=-2$, б) $x_1=-\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{6}$; в) $y_1=2$, $y_2=-\frac{5}{2}$; г) $x_1=-1, x_2=1$. **173**. а) $x_1=0, x_2=\frac{5}{2}$; б) $x=1\frac{1}{3}$; в) $x=4$; г) $x_1=5, x_2=-\frac{22}{3}$; д) $x=1$; е) $x=2$. **174**. а) $b=\pm1$; $\pm2$; $\pm3$; $\pm4$; $\pm6$; $\pm8$; $\pm12$; $\pm24$; б) $\pm1$; $\pm3$; $\pm7$; $\pm21$. **175**. а) Барои ҳамаи $p$–ҳои $p>-13$; б) барои ҳамаи $p$–ҳои $p>\frac{5}{8}$. **177**. а) $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}, x_3=2$; б) $x_1=1, x_2=\frac{1}{3}$. **178**. а) $m<4$; б) $m<-\frac{2}{3}$; в) $m<\frac{1}{4}$; г) $m\in R/[-4;4]$; д) $m<1\frac{1}{24}$; е) $m<\frac{9}{2}$; ж) $m>-\frac{1}{16}$; з) $m>-\frac{9}{5}$. **179**. а) $k=\frac{9}{32}$; б) $k=\frac{1}{4}$; в) $k=\pm4\sqrt{5}$; г) $k=\pm8$; д) $k=\frac{8}{7}$; е) $k=-\frac{2}{9}$; ж) $k=\frac{15}{4}$; з) $k=-5\pm2\sqrt{10}$. **180**. а) $t\in\left(-\frac{12}{5};\frac{12}{5}\right)$; б) $t\in(-24;\ 24)$; в) $t\in(-12;\ 12)$; г) $t\in\left(-12\sqrt{6};\ 12\sqrt{6}\right)$. д) $t\in(-1;\ 1)$; е) $t<-\frac{1}{12}$; ж) $t>16$; з) $t>12$. **181**. а) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm6$; б) $x=0$; в) $x_1=0$, $x_2=1{,}5$, $x_3=2$; г) $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{1}{5}$; д) $x_1=1$, $x_2=2$; е) $x=3$; ж) $x=\pm5$; з) $x_1=1$, $x_2=-6$. **182**. а) $x_1=0$, $x_2=\frac{10}{7}$; б) $x_1=0, x_2=144$; в) $x_1=0, x_2=1, x_3=4$; г) $x=2$; д) $x=-2$; е) реша надорад; ж) $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=2$; з) $t_1=0$, $t_{2,3}=\pm2$; и) $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=4$; к) $t_1=0$, $t_2=3$; л) $y_1=0$, $y_{2,3}=\pm12$; м) $x_1=0$, $x_2=\pm0{,}1$. **183**. а) $x^3-6x^2+11x-6=0$; б) $x^3-4x^2+x+6=0$; в) $x^4-3x^3-x^2+3x=0$; г) $x^4-6x^3+3x^2+26x-24=0$. **185**. Нишондод. Дар асоси теоремаи Виет $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$ ва $x_1 x_2=$